

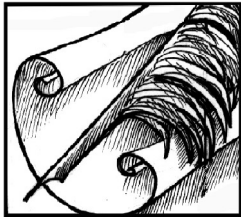
S&LMU

MATEMATIIKKALEHTI 3/2019

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys

Pääkirjoitus: Kuorolaulua, ojankaivuuta ja lounasperunoita (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) ..	3
Mikä on hyvä tehtävä? (Jukka Tuomela)	5
Alkulukujen tiheydestä lukiolaisille (Alex Karrila ja Seppo J. Karrila)	7
Kellyn kaava (Jukka Liukkonen)	12
IMO vs. IOI – ongelmanratkojan kahdet olympialaiset (Antti Laaksonen)	17
Sairaustestauksesta: lukujen paradoksaalisista osuuksista (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)....	21
Muirheadin epäyhtälö (Esa V. Vesalainen)	23
Lisäys rinkulan pisteisiin (Hannu Korhonen)	34



Kuorolaulua, ojankaivuuta ja lounasperunoita

Pääkirjoitus

Tämän syksyn lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 12.3 on kerännyt ehkä enemmän huomiota kuin mikään matematiikan virheetön ylioppilastehtävä koskaan. Siltä varalta, että joku ei ole tehtävää vielä nähnyt, oli tehtävän muotoilu seuraava:

Erään musiikkikappaleen esittämiseen kuuluu 40-henkiseltä kuorolta 7 minuuttia ja 40 sekuntia. Eräessä esityksessä kolme kuoron jäsentä on flunssan takia poissa. Kuinka kauan tämän kappaleen esittämiseen kuuluu 37-henkiseltä kuorolta?

Tehtävästä oli jaossa kaksi pistettä, joka vastaa aiemmallalla 60 pisteen maksimilla yhtä pistettä, koska nykyinen maksimipistemäärä on 120.

Tätä tehtävää on ihmetelty. Sitä on haukuttu. Sitä on kehuttu. Sille on naurettu, sitä on pohdittu. Kaikilla tuntuu olevan joku mielipide.

Tälle myös Ylioppilaskunnan laulajat julkaisi oman ratkaisunsa Facebookissaan:

Saimme korvanappiimme tiedon, että eräs lyhyen matematiikan yllpäritehtävä oli aiheuttanut erityistä päänsäryä syksyn abiturienteille. Eipä hätää! Yleisön pyynnöstä julkaisemme nyt tähän erityisalaamme koskevaan pulmaan (epä)virallisen ja täsmällisen mallivastauksen:

Kakkosbasso Matin flunssa on tarttunut kuoronjohtajaan, joka haluaa siksi nopeammin kotiin: -30 sek. Ykköstenori Jouni on tyypillisesti äänekäs ja kiilaava. Hänen poissaolostaan +7 sek. Baritoni Otso laulaa pois-

saolevan Ilkan rubatosoolon normaalia hitaammin: +10 sek. Tulos: 7 min 27 sek

Minä itse tykkään tästä tehtävästä kovasti. Minusta tämä oli sympaattinen, hiukan tavallisesta poikkeava – sellainen tehtävä, mikä luultavasti ei tule koulukirjassa vastaan. Vaikka kokeessa pitää mitata perusosaamista, niin sitäkin on mitattava, että kokelas osaa soveltaa oppimaansa uudessa tilanteessa. Lisäksi tehtävä sopi kokonaisuuteensa hyvin. Ekassa kohdassa kysyttiin marmeladilevyn leikkaamisesta, jolloin riippuvuus oli neliöllinen, tokassa kohdassa pohdittiin lounasperunoita, eli riippuvuus oli kuutiollinen, viimeisessä kohdassa oli kuoro, eli riippuvuus oli nollanteen potenssiin.

Kuitenkin tehtävän todellisen arvon olen ymmärtänyt vasta keskustelun kautta, koska keskustelussa on paljastunut mielenkiintoisia ajatusmalleja.

Yksi ensimmäisistä kommentteista, jonka näin, haukkui tehtävän, koska tehtävässä ei tiennyt, pitäisikö se ratkaista järjellä vai matematiikalla. Tämä teema on toistunut myöhemminkin. Olen periaatteessa lähes aina tiennyt, että matematiikkaa usein pidetään mystisenä kokoelmana erilaisia hieman outoja sääntöjä, joille ei järkevää vastinetta reaali maailmasta löydy. Todellisuudessa asia ei ole näin, vaan säännöt ovat loogisia, koulumatematiikan säännöille löytyy vastine reaali maailmasta, ja itse asiassa ne säännöt hallitsevat koko maailmaa. On kuitenkin todella silmiä avaavaa lukea kommentti, jossa asetetaan järki ja matematiikka vastakkain: tehtävän ratkaiseminen järjellä sulkee pois sen

vaihtoehtoon, että tehtävä ratkaistaisiin matematiikal-
la. Ei se näin voi mennä!

On tietysti totta, että kuorotehtävä ei ole perinteinen
laskutehtävä. Tunnettu ja tutkittu harhaluulo on, että
matematiikan tehtävät sisältävät aina laskuja. Se, että
tehtävä ei ole laskutehtävä, ei kuitenkaan tarkoita, et-
teikö se olisi matematiikan tehtävä ja etteikö sitä voisi
matemaattisesti ratkaista.

Toinen mielenkiintoinen kommenttityyppi on se, jossa
todetaan, että todellisuudessa mitkään kaksi esitystä
eivät ole samanlaiset. Lisäksi asiaan vaikuttaa esimer-
kiksi se, millaisia poissaolevat laulajat ovat. Tämä on
epäilemättä todellisuudessa täysin totta. Tämä kuiten-
kin herättää ainakin minussa joitakin kysymyksiä teh-
tävien tulkinnasta.

Kautta aikain on ratkottu ojankaivuutehtäviä, esimer-
kiksi siis sellaisia, joissa kerrotaan vaikkapa, että viidel-
lä miehellä kestää viisi päivää kaivaa oja. Sen jälkeen
kysytään, missä ajassa kolme miestä kaivaisi ojan.

Lyhyen kokeen tehtävän 12.2 puolestaan oli seuraavan-
lainen:

*Lassi Lounastaja on tottunut syömään lounaallaan kak-
si isoa perunaa. Eräänä päivänä tarjolla on pieniä pe-
runoita, joiden halkaisija on vain 60 prosenttia ison
perunan halkaisijasta. Kaikki perunat ovat yhdenmuo-
toisia. Kuinka monta pikkuperunaa Lassin pitäisi syödä
saadakseen saman verran perunaa?*

Tehtävä on suoraviivainen ja helppo laskea. Jostain
syystä kuitenkin tästä ei ole huomautettu, että todel-
lisuudessa perunat eivät ole täysin symmetrisiä, eli se
60 prosenttia on vain arvio. Lounasperunoiden kohdal-
la en ainakaan itse ole myöskään törmännyt niin stan-
dardoituihin perunakokoihin, että tietäisin täsmälleen

millainen on suuri peruna, jollainen tehtävässä 12.2. oli
lähtökohtana.

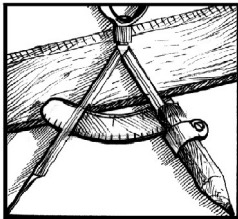
Ojankaivuun kohdalla taas olisin melko hämmästynyt,
jos kaikki kaivajat tekisivät työtä täsmälleen yhtä no-
peasti. Emmehän tiedä, ovatko ne kolme kaivajaa vii-
den osajoukko, ja jos ovat, onko kyseessä kolme nopein-
ta, kolme hitainta vai jotain muuta.

Tehtävissä joutuu siis jossain määrin uskomaan ja luot-
tamaan tehtävänantoon ja yksinkertaistamaan asetel-
maa todellisuudesta. Se ei kuitenkaan tee tehtävän tul-
kintaa tai ratkaisemista hankalammaksi, eikä myös-
kään aiheuta keskustelua. Usein myös hieman vähäi-
sempi informaatiomäärä pitää tehtävän luettavampa-
na, hallittavampana, ja täten myös ymmärrettävämpä-
nä. Tulos on silti varsin hyvä, mutta siinä on pieniä
epävarmuustekijöitä ja hyvin oletettavasti pientä heit-
toa todellisuuteen. Osa osaamista on nähdä tehtävässä
se, mikä on oleellista.

Minusta on hyvin mielenkiintoista, mutta toisaalta
myös hyvin tervetullutta pohtia sitä, millä oletuksil-
la ratkomme tehtäviä, ja miksi jossain tehtävässä jokin
yksityiskohta on ongelmallinen, kun se toisessa tehtä-
vässä ei sitä ole.

Kerrottakoon vielä lopuksi, että kuuntelin tätä kirjoit-
taessani Janne Mertasen loistavan vuoden 2000 nau-
hoituksen Chopinin preludista numero 15 opuksesta
28 (niin kutsuttu Sadepisarapreludi). Tällä levytyksel-
lä sen kesto oli 5 min 22 s. Jos olisin valinnut Vladimir
Ashkenazyn vuoden 2012 Deccan julkaisemalla levyllä
olleen version, olisi kesto ollut 5 minuuttia ja 13 se-
kuntia. Kyllä, kappaleiden kestot vaihtelevat soittajan
mukaan, kuten myös ojankaivuun nopeus vaihtelee kai-
vajan mukaan.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Mikä on hyvä tehtävä?

Jukka Tuomela

Itä-Suomen yliopisto, Joensuu

jukka.tuomela@uef.fi

Sattumalta katsoin lukion matematiikkakilpailun tehtäviä.¹ Seuraava tehtävä tämän vuoden loppukilpailussa innoitti kirjoittamaan tämän jutun.

Ratkaise, mille luvuille x on voimassa

$$x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x},$$

kun $0 < x \leq 1$.

Tämähän on varsin perinteinen tehtävä, jota varmasti edelleen käytetään vaikkapa yliopistojen ja ammatikorkeakoulujen peruskursseilla harjoitustehtävissä ja tenteissä. Mutta onko tämä tehtävä oikeastaan enää mielekäs? Matematiikkakilpailuissa ei kaikeksi saa käyttää mitään apuvälineitä, vaan kaikki pitää tehdä kynällä ja paperilla. Mielestäni hyvän tehtävän pitäisi kuitenkin perustua johonkin muuhun kuin siihen, että ”oikeita” apuvälineitä ei saa käyttää.

Tarkastellaan vaikkapa seuraavaa tehtävää:

Olkoon

$$a = 3234573495392050492852059820435984058349,$$

$$b = 9832952743997252795239857324985243985727.$$

Laske ab mahdollisimman tarkasti.

Tämähän on varsin haastava tehtävä kynällä ja paperilla, mutta tuskin kovin mielekäs. Sen sijaan logaritmitaulukon tai laskutikun avulla saisi varsin helposti järkevän tuloksen. Jos käyttää logaritmeissa neljää merkitsevää numeroa, niin suhteellinen virhe on promillen luokkaa.

Jos sitten avaan ohjelman wxMaxima,² jota saa käyttää ylioppilaskokeessa,³ vastaus tietysti tulee heti.

Mutta wxMaxima tekee myös tuon kilpailutehtävän vähän hassuksi, jopa kahdella tavalla. Määritellään ensin

$$f(x) = 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x} - x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}).$$

Suoraan piirtämällä f :n kuvaaja nähdään, että f kasvaa monotonisesti ja ratkaisu on siis muotoa $[b, 1]$, missä $f(b) = 0$. Numeerisesti saadaan $b = 0,5999999$, minkä jälkeen suoraan sijoittamalla nähdään, että $f(3/5) = 0$. Tämän jälkeen on helppo tarkistaa vielä, että $f' > 0$ tarkasteltavalla välillä, joten vastaus on todella $[3/5, 1]$.

Mielestäni tämä ratkaisumenetelmä on sellainen, että se helposti tulee lukiolaisen mieleen. Minulle puolestaan tuli mieleen, että tässä vain kynällä ja paperilla pitää laskea sellaista, mikä wxMaximalla ja itse asiassa kai nykyisillä peruslaskimillakin on aivan rutiinijuttu.

¹<https://matematiikkakilpailut.fi/MAOL/>

²<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

³<https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat>

Tässä mielessä tehtävä muistuttaa tuota toista tehtävää, jossa piti laskea kahden luvun tulo ilman logaritmitaulukoita tai muita järkeviä apuvälineitä.

Toinen ratkaisumalli ei varmaankaan ole lukiolaisille tuttu, ellei opettaja ole sattumalta maininnut tällaisista wxMaximan ominaisuuksista. Tämä mielestäni hyvin osoittaa, että ylioppilaskirjoituksissa saattaa jatkossatulla hyvinkin erityyppisiä ratkaisuja kuin mitä tehtävän laatija on ajatellut. On myös kiinnostavaa verrata tätä tehtävän mallivastaukseen.

Olkoon $y = \sqrt{1-x}$, $z = \sqrt{1+x}$ ja tarkastellaan seuraavaa polynomisysteemiä:

$$\begin{cases} f_0 = 11z - 16y - x(z + 8y) = 0, \\ f_1 = y^2 + z^2 - 2 = 0, \\ f_2 = x + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Jos siis löydetään jokin ratkaisu (x_0, y_0, z_0) tälle systeemille, niin x_0 on potentiaalinen ratkaisukandidaatti nollakohdalle b . Koska ei olla varsinaisesti kiinnostuttu muuttujista y ja z , niin eliminoidaan ne. wxMaximassa on komento `eliminate`, jonka avulla voidaan polynomisysteemeistä eliminoida muuttujia. Kun y ja z eliminoidaan, saadaan

$$g^4 = (65x^3 + 171x^2 + 99x - 135)^4 = 0.$$

Kun tämän jakaa tekijöihin, saadaan

$$g = (5x - 3)(13x^2 + 42x + 45),$$

mikä antaa vastauksen.

Kun on päästy näin pitkälle, niin voisi epäillä, että tuo polynomi g on keskeinen ratkaisun kannalta, ja todellakin mallivastauksessa päädytään tähän polynomiin. Tilanteen voisi kuvailla siten, että on tunnettu algoritmi, jolla g voidaan laskea. Tätä algoritmia ei kuitenkaan kerrota oppilaalle, vaan hänen pitää laskea g joltain ”muuta kautta”. Tässähän tietysti riittää ”korottaa sopivasti neliöön”:

$$\begin{aligned} f &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ (8x + 16)\sqrt{1-x} &= (11-x)\sqrt{1+x} \quad \Leftrightarrow \\ (8x + 16)^2(1-x) &= (11-x)^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \\ g &= 0. \end{aligned}$$

Mallivastauksessa sitten myös jaetaan polynomi g tekijöihin käsin, mikä sekin tuntuu hassulta.

Muuttujien eliminointi esiintyy osatehtävänä hyvin monissa tehtävissä. Tuo eliminointikomento saattaa siis helpottaa yllättävällä tavalla monenlaisia lukiossakin esiintyviä tehtäviä. Annetaan nyt tässä vain pieni esimerkki tämänkaltaisesta tilanteesta.

Kardioidi voidaan esittää napakoordinaateissa yhtälöllä $r = 1 - \cos(\theta)$. Mikä on tämän käyrän yhtälö (x, y) -koordinaateissa?

Ensin saadaan vastaava parametrisoitu käyrä

$$\begin{cases} x = (1 - \cos(\theta)) \cos(\theta), \\ y = (1 - \cos(\theta)) \sin(\theta). \end{cases}$$

Merkitään sitten $c = \cos(\theta)$ ja $s = \sin(\theta)$, jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x = (1 - c)c, \\ y = (1 - c)s, \\ c^2 + s^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminoimalla muuttujat c ja s saadaan vastaukseksi

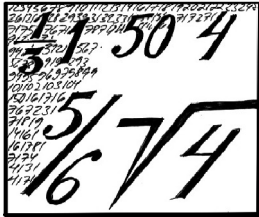
$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

wxMaxima eliminoi muuttujia resultanttien avulla. Tämä itse asiassa ei ole paras tapa, vaan yleisesti ottaen olisi parempi laskea eliminointi-ideaali Gröbner-kantojen avulla. Tämän avulla nähdään, että wxMaximan kilpailutehtävän vastauksessa oleva eksponentti on turha, eikä anna lisäinformaatiota ratkaisun luonteesta.

Luonnollisesti lukiokursseissa ei puhuta polynomi-ideaaleista eikä resultanteista. Kuitenkin modernit laskentamenetelmät, jotka ovat tarjolla lukiolaisille, antavat vahvoja työkaluja sellaisille, jotka osaavat niitä käyttää. Polynomi-ideaaleihin ja Gröbner-kantoihin tutustumisen voi aloittaa erinomaisesta kirjasta [1].

Viitteet

- [1] D. A. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015.



Alkulukujen tiheydestä lukiolaisille

Alex Karrila

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto
alex.karrila@gmail.com

Seppo J. Karrila

Faculty of Science and Industrial Technology, Prince of Songkla University, Surat Thani, Thailand
seppo.karrila@gmail.com

Tiivistelmä

Tässä kirjoitelmassa todistetaan seuraavat alkulukujen tiheyttä lukusuoralla kuvailevat tulokset: Merkitään korkeintaan N :n suuruisien alkulukujen määrää $\pi(N)$. Tällöin kaikille $N \geq 2$ pätee

$$\pi(N) \leq (2 \ln 2 + 1) \frac{N}{\ln N}. \quad (1)$$

Erityisesti siis alkulukujen osuus $\pi(N)/N$ kaikista kokonaisluvuista N :ään asti lähestyy nollaa kun N kasvaa rajatta. Todistetaan myös alaraja alkulukujen tiheydelle: kaikille $N \geq 2$ pätee

$$\pi(N) \geq \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{N}{\ln N}. \quad (2)$$

Todistukset ovat toisistaan loogisesti riippumattomat. Kumpikaan ei vaadi logaritmia monimutkaisempia työkaluja, ja ne voisivat yhdessä tai erikseen soveltaa esitettäväksi esimerkiksi lukiolaisiesitelmään tai lukion lukuteorian kurssilla.

Perusteita

Merkitään *luonnollisten lukujen joukkoa* $\{1, 2, 3, \dots\}$ kirjaimella $\mathbb{N}$. Viitataan jatkossa muuttujamerkinnoilla k , m , N ja n aina $\mathbb{N}$ -arvoiseen muuttujaan.

Alkuluvut $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ ovat yhtä suurempia luonnollisia lukuja, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja ykkösellä. Alkulukumuuttujaa merkitään tässä kirjoitelmassa aina kirjaimella p (engl. *prime number*).

Alkulukulaskuri $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ on funktio, jonka arvo pisteessä $N \in \mathbb{N}$ kertoo, kuinka monta korkeintaan N :n suuruisia alkulukua on olemassa,

$$\pi(N) = \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq N\}.$$

Esimerkiksi siis $\pi(6) = 3$ ja $\pi(11) = 5$.

Jo muinaiset kreikkalaiset tiesivät, että alkulukuja on äärettömän monta, eli

$$\pi(N) \longrightarrow \infty, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty,$$

ja Eukleideen todistus alkulukujen äärettömyydestä kuuluu lukion lukuteorian kurssin vakiomateriaaliin. Mutta miten nopeasti tai hitaasti alkukulaskuri $\pi(N)$ kasvaa N :n mukana? Vaikuttaa esimerkiksi järkeenkäyvältä, että alkulukuja olisi (keskimäärin) aina vain harvemmassa, eli

$$\frac{\pi(N)}{N} \longrightarrow 0, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Tässä artikkelissa todistetaan yhtälön (1) yläraja $\pi(N)$:lle, josta seuraa myös raja-arvo (3). Lisäksi todistetaan alaraja (2) $\pi(N)$:lle.

Epäyhtälöt (1)–(2) tunnetaan *Chebyshevin estimaattina*, ja ne ovat heikennetty versio *alkulukulauseesta*, joka toimi sadan vuoden ajan lukuteorian kehityksen pontimena. Sikäli onkin huomattavaa, että epäyhtälöiden (1)–(2) todistukset ovat suhteellisen yksinkertaiset. Tämän kirjoitelman tarkoituksena on tuoda näitä yksinkertaisia todistuksia yleisempään tietoisuuteen.

Ylärajan (1) todistus

Tässä luvussa todistetaan tiivistelmässä esitelty epäyhtälö (1).

Logaritminen alkulukulaskuri

Todistuksessa avainasemassa on Chebyshevin theta-funktio, jota voidaan ajatella logaritmisesti painotettuna alkulukulaskurina.

Määritelmä 1. Määritellään *Chebyshevin theta-funktio* $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$\vartheta(N) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} \ln p = \ln \left(\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq N}} p \right). \quad (4)$$

Esimerkiksi siis $\vartheta(10) = \ln(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$. Varsinaisen alkulukulaskurin π rajoittaminen epäyhtälössä (1) perustuu logaritmisien alkulukulaskurin ϑ rajoittamiseen:

Propositio 2. *Kaikilla $N \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\vartheta(N) \leq (2 \ln 2)N.$$

Erotetaan Proposition 2 todistuksesta seuraava aputullos.

Lemma 3. *Parillisille luvuille $(2m)$, $m \in \mathbb{N}$, pätee*

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m < p \leq 2m}} p \leq \binom{2m}{m} \leq 2^{2m},$$

ja parittomille luvuille $(2m+1)$ pätee

$$2 \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m+1 < p \leq 2m+1}} p \leq \binom{2m+1}{m+1} \leq 2^{2m+1}.$$

Todistus. Parilliset luvut $2m$, vasen epäyhtälö: binomikerroin

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!}$$

on kokonaisluku. Sen alkutekijät voidaan päätellä tutkimalla kertomien $(2m)!$ ja $m!$ alkutekijöitä. Alkuluvut $p \in \mathbb{P}$, joille $m < p \leq 2m$, ovat alkutekijöinä kertomassa $(2m)!$, ja ne eivät ole alkutekijöinä kertomassa $m!$. Näin ollen kaikki alkuluvut $p \in \mathbb{P}$, $m < p \leq 2m$, ovat alkutekijöinä binomikertoimessa $\binom{2m}{m}$. Tämä todistaa vasemman epäyhtälön. Oikea epäyhtälö: $(2m)$:n alkion joukolla on 2^{2m} osajoukkoa ja $\binom{2m}{m}$ osajoukkoa, joissa on tasan m alkioita.

Parittomat luvut $(2m+1)$: oikean epäyhtälön todistamiseksi huomataan, että

$$\begin{aligned} 2 \binom{2m+1}{m+1} &= \frac{(2m+1)!}{(m+1)!m!} + \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \\ &= \binom{2m+1}{m+1} + \binom{2m+1}{m}. \end{aligned}$$

Muilta osin todistus on kuten parillisille luvuille. $\square$

Proposition 2 todistus. Induktio. Kun $N = 1$ saadaan $\vartheta(1) = 0$, eli väite pätee. Oletetaan, että väite pätee theta-funktiolle $\vartheta(\cdot)$ argumenteilla $1, 2, \dots, (N-1)$ ja osoitetaan, että se pätee tällöin myös argumentilla N . Käsitellään parilliset ja parittomat N erikseen. Parilliselle $N = 2m$ saadaan

$$\begin{aligned} &\vartheta(2m) - \vartheta(m) \\ (\text{Määritelmä 1}) &= \ln \left(\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m < p \leq 2m}} p \right) \\ (\text{Lemma 3}) &\leq \ln(2^{2m}) = 2m \ln 2. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan $\vartheta(2m) \leq \vartheta(m) + 2m \ln 2$, jolloin induktio-oletuksesta $\vartheta(m) \leq (2 \ln 2)m$ seuraa

$$\vartheta(N) = \vartheta(2m) \leq 4m \ln 2 = (2 \ln 2)N.$$

Parittomille $N = 2m+1$ todistus seuraa samaan tapaan tutkimalla erotusta $\vartheta(2m+1) - \vartheta(m+1)$. $\square$

Tavallinen alkulukulaskuri

Proposition 2 mukaan logaritmisesti painotetun alkulukujen laskurin $\vartheta(N)$ kasvua rajoittaa suora $(2 \ln 2)N$. Mitä tämä kertoo alkulukujen tiheydestä? Tutkitaan ensin vertailun vuoksi logaritmisien luonnollisten lukujen laskurin

$$S(N) = \sum_{n=1}^N \ln n$$

kasvua, joka on alla olevan proposition mukaan nopeampaa kuin minkään suoran $[vakio] \cdot N$.

Propositio 4. *Kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee*

$$S(N) \geq N \ln N - N.$$

Todistus. Verrataan summaa integraaliin:

$$\begin{aligned} S(N) &= \sum_{n=1}^N \ln n = \sum_{n=2}^N \ln n \\ &= \sum_{n=2}^N \int_{x=n-1}^n \ln x \, dx \\ &\geq \sum_{n=2}^N \int_{x=n-1}^n \ln x \, dx \\ &= \int_{x=1}^N \ln x \, dx \\ &= N \ln N - N + 1 \\ &\geq N \ln N - N. \end{aligned}$$

□

Yläraja (1) seuraa nyt suoraviivaisesti yhdistämällä Proposition 2 ja 4.

Lause 5. *Kaikille $N \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\pi(N) \ln N \leq (2 \ln 2 + 1)N.$$

Todistus. Tutkitaan erotusta

$$S(N) - \vartheta(N) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin \mathbb{P}}}^N \ln n.$$

Yhtäältä y.o. logaritmisummassa on $N - \pi(N)$ termiä, kukin korkeintaan $\ln N$, joten

$$S(N) - \vartheta(N) \leq (N - \pi(N)) \ln N. \quad (5)$$

Toisaalta Propositionien 2 ja 4 perusteella

$$S(N) - \vartheta(N) \geq N \ln N - N - (2 \ln 2)N. \quad (6)$$

Väite seuraa nyt yhdistämällä ylä- ja alarajat (5) ja (6). □

Alarajan (2) todistus

Todistetaan alaraja (2).

Lause 6. *Kaikille $N \geq 2$ pätee*

$$\pi(N) \geq \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{N}{\ln N}.$$

¹Alaraja (8) ei ole tiukka suurille m . Arvioimalla kertomien logaritmeja ylhäältä ja alhaalta Proposition 4 tapaan saataisiin suurille m parempi alaraja epäyhtälöön (8) ja siten myös epäyhtälöön (2).

Siinä missä ylärajan (1) todistuksen ydin, Lemma 3, oli alkulukujen logaritmien $\ln p$ rajoittaminen binomikertoimen logaritmillä $\ln \binom{2m}{m}$, perustuu alarajan (2) todistus $\ln \binom{2m}{m}$:n rajoittamiseen alkulukujen logaritmien $\ln p$ avulla.

Erotetaan todistuksesta kaksi aputulosta. Alla käytetään *lattiafunktio*merkintää $\lfloor x \rfloor$, jolla tarkoitetaan reaaliluvulle x suurinta kokonaislukua ℓ , jolle $\ell \leq x$.

Lemma 7. *Kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\ln(n!) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq n}} \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \ln p.$$

Huomaa, että $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$, kun k on niin suuri, että $p^k > n$. Yllä sulkeissa olevat summat ovat siis ei-nollien termien $\lfloor n/p^k \rfloor$ summia, joissa k on tarpeeksi pieni.

Lemman 7 todistus. Tutkitaan kertoman $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ alkutekijöitä sen tekijöiden $1, 2, \dots, n$ avulla. Kaikki alkutekijät p ovat korkeintaan n , joten saadaan

$$\ln(n!) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq n}} m_p \ln p,$$

jossa $m_p \in \mathbb{N}$ kertoo kuinka monta kertaa alkutekijä p esiintyy $(n!)$:n alkulukuhajotelmassa. Kertoman $n!$ tekijöiden $1, 2, \dots, n$ joukossa on p :llä jaollisia lukuja $\lfloor n/p \rfloor$ kappaletta, joista p^2 :lla jaollisia on $\lfloor n/p^2 \rfloor$ kappaletta jne., joten saadaan

$$m_p = \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots \right).$$

□

Lemma 8. *Kaikille $m \in \mathbb{N}$ ja $p \in \mathbb{P}$ pätee*

$$\begin{aligned} &\left(\left\lfloor \frac{2m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) - 2 \left(\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \\ &\leq \frac{\ln(2m)}{\ln p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Todistus. Erotus $\lfloor 2m/p^k \rfloor - 2 \lfloor m/p^k \rfloor$ on joko 1 tai 0, vastaten tapauksia, joissa reaaliluvun m/p^k desimaalikehitelmän desimaaliosa on ≥ 0.5 tai < 0.5 . Toisaalta erotuksen kumpikin termi on nolla, jos pätee $p^k > 2m$. Erotus voi siis olla 1, vain jos pätee

$$p^k \leq 2m \Leftrightarrow k \leq \ln(2m)/\ln p.$$

Näin ollen summassa (7) on (sopivasti uudelleenjärjesteltynä) enintään $\ln(2m)/\ln p$ ei-nollaa termiä, kukin enintään 1. Väite seuraa. □

Lauseen 6 todistus. Todistetaan ensin epäyhtälö parillisille luvuille $N = 2m$. Tutkitaan binomikerrointa $\binom{2m}{m}$. Yhtäältä saadaan¹

$$\begin{aligned} \ln \binom{2m}{m} &= \ln \left(\frac{2m}{m} \cdot \frac{2m-1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{m+1}{1} \right) \\ &\geq \ln(2^m) = m \ln 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Toisaalta yhdistämällä Lemmat 7 ja 8 saadaan

$$\begin{aligned} \ln \binom{2m}{m} &= \ln((2m)!) - 2 \ln(m!) \\ (\text{Lemma 7}) &= \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq 2m}} \left(\left\lfloor \frac{2m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \ln p \\ &\quad - \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq m}} 2 \left(\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \ln p \\ (\text{Lemma 8}) &\leq \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq m}} \frac{\ln(2m)}{\ln p} \ln p + \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m < p \leq 2m}} \ln p \\ &\leq \pi(2m) \ln(2m); \end{aligned} \quad (9)$$

viimeisessä epäyhtälössä summattiin $\pi(2m)$ kappaletta korkeintaan $\ln(2m)$:n suuruisia termejä. Väite parilliselle $N = 2m$ seuraa nyt yhdistämällä yhtälöt (8) ja (9).

Parittomille luvuille $N \geq 3$ epäyhtälö seuraa, kun sen tiedetään pätevän parilliselle luvulle $(N+1)$:

$$\pi(N) = \pi(N+1) \geq \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{(N+1)}{\ln(N+1)} \geq \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{N}{\ln N};$$

yllä alussa käytettiin havaintoa, että $(N+1)$ ei parillisena lukuna ole alkuluku ja lopussa havaintoa, että funktio $x \mapsto x/\ln x$ on kasvava kun $x \geq 3$. $\square$

Kirjallisuutta ja historiaa

Chebyshev todisti ensimmäisenä yhtälöiden (1)–(2) tyypiset ylä- ja alarajat alkulukulaskurille sekä esitteli theta-funktion vuonna 1852 [3]. Erilaisia moderneja, enemmän tai vähemmän tässä esitetyn kaltaisia todistuksia löytyy lukuisista lukuteorian oppimateriaaleista (esim. [1]).

Tämän artikkelin tuloksia vahvempi ja huomattavasti vaikeampi on *alkulukulause*

$$\frac{\pi(N)}{N/\ln N} \rightarrow 1, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty,$$

joka voidaan muotoilla yhtäpitävästi (kts. esim. [1]) theta-funktion avulla

$$\frac{\vartheta(N)}{N} \rightarrow 1, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty.$$

Esimerkiksi Proposition 2 mukaan siis $\vartheta(N)/N \leq 2 \ln 2 \approx 1.4$ kaikilla N . Alkulukulauseen eri muotoiluja ennustivat tosiksi 1700-luvun lopulta alkaen esimerkiksi ajan suurimmat matemaatikot Legendre [6] ja Gauss [4]. Chebyshev tutki ongelmaa 1850-luvun alussa ja todisti estimaattinsa ja eräitä muita lukuteorian tuolloin avoimia kysymyksiä, mutta ei alkulukulausetta [2, 3]. Riemann taas kirjoitti aiheesta vuonna 1859, missä yhteydessä hän esitteli työkaluksi kuuluisan zeta-funktion [7]. Alkulukulause pysyi avoimena lopulta noin sata vuotta, kunnes vuonna 1896 de la Vallée Poussin [8] ja Hadamard [5] julkaisivat riippumattomat todistukset, molemmat perustuen Riemannin zeta-funktioon.

Alkulukujen jakautuminen lukusuoralle on yhä lukuteorian tutkimuksen ydinalueita. Esimerkiksi yksi lukuteorian suurimmista ratkaisemattomista ongelmista on todistaa *alkulukuparien konjektuuri*: jos merkitään i :nnettä alkulukua p_i , niin uskotaan olevan olemassa äärettömän monta peräkkäisten alkulukujen paria (p_i, p_{i+1}) , joille $(p_{i+1} - p_i) = 2$, kuten $(3, 5)$, $(5, 7)$ tai $(41, 43)$. Huomaa, että yhdistämällä epäyhtälöt (1) ja (2) saadaan $\pi(7N) - \pi(N) > 0$ kaikilla tarpeeksi suurilla N ; toisin sanoen $(p_{i+1} - p_i) \leq 6p_i$ kaikilla tarpeeksi suurilla i . Toisaalta raja-arvosta (3) seuraa, että mille tahansa m on olemassa peräkkäisten alkulukujen pareja (p_i, p_{i+1}) , joille $(p_{i+1} - p_i) \geq m$.

Suomalainen lukuteorian tutkimus on saanut viime aikoina kansainvälistä tunnustusta, kenties huomattavimpana Kaisa Matomäen syksyllä 2018 saama New Horizons in Mathematics -palkinto. Lukuteorian tutkimusta ja opetusta eri painotuksilla löytyy useimmilta suomalaisilta matematiikan laitoksilta.

Viitteet

- [1] T. M. Apostol. *Introduction to analytic number theory* (luvut 4.4–4.5), 1976.
- [2] P. L. Chebyshev. Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *J. math. pures appl.*, nro 17, 1852.²
- [3] P. L. Chebyshev. Mémoire sur les nombres premiers. *J. math. pures appl.*, nro 17, 1852.³

² Saatavilla: <https://archive.org/details/oeuvresdeplche01chebrich/page/n39>

³ Saatavilla: <https://archive.org/details/oeuvresdeplche01chebrich/page/n61>

⁴ Saatavilla: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN236018647>

- | | |
|---|---|
| <p>[4] Gaussin omista muistiinpanoista löytyvä muotoilu, väitetyksi jo vuodelta 1791, mainitaan Gaussin kootuissa teoksissa. C. F. Gauss. <i>Werke</i> (nidos 10, sivu 11), 1863.⁴</p> <p>[5] J. Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. <i>Bull. Soc. Math. France</i>, nro 24, 1896.⁵</p> <p>[6] A. M. Legendre. <i>Essai sur la théorie des nombres</i> (osa 4, luku 8), 1808.⁶</p> | <p>[7] B. Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. <i>Monatsberichte der Berliner Akademie</i>, marraskuu 1859.⁷</p> <p>[8] C. J. de la Vallée Poussin. Recherches analytiques sur la théorie des nombres: Première partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. <i>Ann. Soc. scient. Bruxelles</i>, nro 20, 1896.⁸</p> |
|---|---|

⁵ Saatavilla: http://www.numdam.org/article/BSMF_1896__24__199_1.pdf

⁶ Saatavilla: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k42612x/f80.image.texteImage>

⁷ Saatavilla: <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/>

⁸ Saatavilla: <https://archive.org/details/recherchesanaly00pousgoog/page/n9>



Kellyn kaava

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Johdanto

Vedonlyöjien, sijoittajien ja muiden rahapelaajien hyvin tuntema **Kellyn kaava**¹

$$(1) \quad \theta = \frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1}$$

kertoo, kuinka suuri osuus *pelikassasta* vedonlyönnissä kannattaa panostaa seuraavalle kierrokselle, jotta rahavarat karttuisivat keskimäärin mahdollisimman nopeasti. Pelikassa tarkoittaa pelaajan pelaamiseen käytettävissä olevaa rahasummaa. Kaavassa esiintyvät symbolit ovat:

λ = vedonvälittäjän tarjoama *kerroin*, jolla kerrottuna pelaaja saa rahallisen *panoksensa* takaisin, jos pelaajan veikkaama vaihtoehto toteutuu; muussa tapauksessa panos jää vedonvälittäjälle,

p = pelaajan arvio voiton todennäköisyydelle,

θ = kaavan suosittelema panos osuutena koko pelikassasta.

▼ **Esimerkki.** Tulevassa Suomen ja Ruotsin välisessä jääkiekko-ottelussa pelaaja perusteellisen analyysin jälkeen arvioi Suomen voittavan todennäköisyydellä $p = 0,6$. Vedonvälittäjä tarjoaa Suomen voitolle kertoimen $\lambda = 1,7$. Jos pelaaja panostaa vetoon koko pelikassansa $B = 1000 \text{ €}$ ja Suomi voittaa, pelikassa kasvaa

arvoon $\lambda B = 1,7 \cdot 1000 \text{ €} = 1700 \text{ €}$. Jos tulee tasapeli tai Suomi häviää, pelaaja menettää koko panoksensa eli menee ns. *poikki*. Keskimäärin pelaaja arvioi voitavansa siinä mielessä, että pelikassan koon *odotusarvo* ottelun jälkeen, käyttäen pelaajan itsensä arvioimaa todennäköisyyttä, on

$$p\lambda B + (1 - p) \cdot 0 \cdot B = 0,6 \cdot 1,7 \cdot 1000 \text{ €} \\ = 1020 \text{ €}.$$

Odotusarvohan on summa, missä termeinä ovat satunnaismuuttujan arvot kerrottuina niihin liittyvillä todennäköisyyksillä. Tässä tapauksessa tulosvaihtoehdot *Suomi voittaa* ja *Suomi ei voita* vastaavat satunnaismuuttujan arvot ovat 1700 € (panos palautuu kertoimella $1,7$) ja 0 € (panos palautuu kertoimella 0 eli jää välittäjälle). Nämä ovat pelikassan mahdolliset euromääräiset arvot ottelun jälkeen. Vastaavat todennäköisyydet ovat $0,6$ ja $0,4$. Pelaajan saaman voiton odotusarvo on $1020 \text{ €} - 1000 \text{ €} = 20 \text{ €}$. Kellyn kaavan suosittelema panostus on

$$\theta = \frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{0,6 \cdot 1,7 - 1}{1,7 - 1} = \frac{0,02}{0,7} \\ \approx 0,02857.$$

Alaspäin pyöristettynä Kellyn suositus panokseksi on $2,8 \text{ %}$ pelikassasta, siis 28 € . Voiton odotusarvo tällä panostuksella on $0,6 \cdot 1,7 \cdot 28 \text{ €} - 28 \text{ €} = 0,56 \text{ €}$. ▲

¹Nimi juontaa juurensa AT&T:n Bell-laboratoriossa työskennelleestä John Larry Kelly Juniorista (1923–1965), joka esitteli kaavaan johtavan periaatteen vuonna 1956 tutkittuaan digitaalisessa tiedonsiirrossa esiintyviä häiriöitä. Suomalaislähtöinen Nokia osti muutama vuosi sitten Alcatel-Lucent -yhtiön ja sai kaupan myötä Bell-laboratorion omistukseensa.

Kellyn kaavassa nimittäjä $\lambda - 1$ on voiton suhde panokseen eli *tuotto* pelaajan voittaessa vedon (engl. *rate of return* tai *odds*). Osoittaja $p\lambda - 1$ on voiton odotusarvon suhde panokseen eli *odotettu tuotto* (engl. *expected rate of return* tai *edge*). Englanninkieliset pelurit lausuvat kaavan ohjeena muodossa *bet edge over odds*. Sen mukaan koko pelikassaa ei kannata riskeerata. Jos pelaaja menee poikki, pelaajalla ei enää ole varoja lyödä vetoa tulevien otteluiden tuloksista. Kellyn kaavan mukaisella panostuksella riskiä pyritään pienentämään niin, että pelaaja vaurastuisi mahdollisimman tehokkaasti pitkällä aikavälillä, kun samaa peliä ajatellaan toistettavan loputtomiin.

Taloudellisen voitontavoittelun yhteydessä riskin pienentäminen tyypillisesti merkitsee myös tuotto-odotusten kohtuullistamista. Kellyn kaava toimii tiettyssä mielessä tätä sääntöä vastaan. Kaavan hyödyllisyyttä on hyvä verrata toiseen poikkeukseen säännöstä: esimerkiksi osakemarkkinoilla riskiä pienennetään salkkua *hajauttamalla* ilman, että odotettu tuotto aleni. Jotkut yhteen tai muutamaan yhtiöön syvällisesti perehtyneet osakepöimijat tosin saattavat esittää vastalauseen ”älä hajauta tuottoasi pois” -saatesanojen kera. Myös vedonlyönnissä vedot voidaan hajauttaa eri kohteisiin. Kelly ja hajauttaminen yhdessä ovat kokeilemisen arvoinen yhdistelmä.

Keskimääräinen kasvu

Kun peliä pelataan N kierrosta, yksittäisen pelikierroksen panos ja tuotto vaihtelevat. Tällöin myös pelikassan koko vaihtelee. Jos pelikassan koko euroissa on alunperin B_0 ja eri kierrosten jälkeen $B_1, B_2, \dots, B_N$, rahavarojen kasvua (tai pienenemistä) kuvaa kasvukerroin $X_k = B_k/B_{k-1}$. Pelikassan koko N kierroksen jälkeen voidaan esittää tulona

$$\begin{aligned} B_N &= X_N B_{N-1} = X_N X_{N-1} B_{N-2} = \dots \\ &= X_N X_{N-1} \dots X_1 B_0. \end{aligned}$$

Luku $X = (X_N X_{N-1} \dots X_1)^{1/N}$, lukujen $X_1, \dots, X_N$ ns. geometrinen keskiarvo, kuvaa pelikassan **keskimääräistä kasvua** N ensimmäisellä pelikierroksella, sillä vakiokasvulla X saadaan sama lopputulos kuin vaihtelevalla kasvulla X_k , $k = 1, \dots, N$:

$$X_N X_{N-1} \dots X_1 B_0 = \underbrace{X X \dots X}_{N \text{ kpl}} B_0.$$

Kertoimen X arvo riippuu siitä, kuinka monta pelikierrosta otetaan mukaan tarkasteluun. Luku X on täten pelikierrosten lukumäärän N funktio, $X = X(N)$. Jos tällä funktiolla on raja-arvo, kun N kasvaa rajatta, kyseinen raja-arvo tulkitaan pelikassan keskimääräiseksi kierroskohtaiseksi kasvukertoimeksi hyvin pitkällä aikavälillä. Raja-arvo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X(N)$$

on täten mittari pelaamisen taloudelliselle tehokkuudelle. Myöhemmin nähdään, millä tavalla kertoimet X_k riippuvat todellisessa pelissä panossuhteesta θ , joka on pelin parametri. Tällöin myös edellä mainittu raja-arvo riippuu parametrasta θ . Pelaaminen on tehokkainta silloin, kun tämä parametri säädetään Kellyn kaavan mukaiseksi. Edellytyksenä mallin toimivuudelle on, että pelaaja on arvioinut eri tulosvaihtoehtojen toteutumistodennäköisyydet oikein, mitä se sitten tarkoittaneekin. On melko mahdotonta sanoa, mitkä ovat ”oikeat” todennäköisyydet esimerkiksi jääkiekkomaaottelussa.

Vahva suurten lukujen laki

Todellisessa pelitilanteessa kasvukertoimia $X_1, \dots, X_N$ ei tunneta ennalta, vaan ne määräytyvät vedonlyönnin kohteen dynamiikasta. Vedonlyönnin kohdetta, esimerkiksi Suomi–Ruotsi-ottelua, pidetään satunnaisilmiönä, ja ilmiöstä johdettavat suureet, esimerkiksi ottelun lopputulos, ovat satunnaismuuttujia. Myös kasvukertoimet $X_1, \dots, X_N$ ovat satunnaismuuttujia. Jos satunnaismuuttujan käsite ei ole lukijalle tuttu, hän voi ajatella sen satunnaislukuna, joka voi saada tiettyjä arvoja tietyillä todennäköisyyksillä. Nämä arvot ja niihin liittyvät todennäköisyydet muodostavat satunnaismuuttujan *jakauman*. Jos satunnaismuuttujan Y mahdolliset arvot ovat $y_1, \dots, y_n$ todennäköisyyksin $p_1, \dots, p_n$, satunnaismuuttujan Y jakauman odotusarvo $E[Y]$ lasketaan kaavasta

$$E[Y] = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n = \sum_{i=1}^n p_i y_i.$$

Odotusarvo on jakauman painopiste, kun todennäköisyyksien p_i suuruiset painot ajatellaan sijoitetuiksi lukusuoralle vastaavien lukujen y_i kohdalle. Itse lukusuora ajatellaan tässä painottomaksi.

Kellyn kaava voidaan johtaa nojautumalla ns. **vahvaan suurten lukujen lakiin**. Se kuuluu seuraavasti:

Olkoot $Y_1, Y_2, \dots$ keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat arvot ja sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla Y . Tällöin

$$\frac{1}{N} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} E[Y].$$

Raja-arvonuolen päälle kirjoitetut kirjaimet a.s. ovat lyhenne englannin kielen sanoista *almost surely* eli suomeksi *melkein varmasti*. Merkintä tarkoittaa, että satunnaismuuttujien Y_k keskiarvo $(Y_1 + \dots + Y_N)/N$ lähestyy raja-arvoaan satunnaismuuttujan Y odotusarvoa $E[Y]$ todennäköisyydellä yksi, kun N kasvaa rajatta. Sellaisen tapauksen todennäköisyys, jossa kyseistä raja-arvoa ei ole olemassa, tai se on jokin muu kuin $E[Y]$, on nolla, siis niin pieni, ettei tällaista poikkeustapausta normaalisti tarvitse ottaa huomioon; tapahtuman harvinaisuus on samaa luokkaa kuin se, että

päättymättömässä kolikonheitossa ei milloinkaan saada klaavaa – mahdollista, mutta ”äärettömän” epätodennäköistä.

Satunnaismuuttujien keskinäinen riippumattomuus tarkoittaa käytännössä samaa kuin riippumattomuus normaalissa puhekielessä: esimerkiksi jos Y_1 on lottoarvonnan tulos tällä viikolla ja Y_2 lottoarvonnan tulos ensi viikolla, niin Y_1 ja Y_2 eivät mitenkään voi riippua toisistaan, ne ovat riippumattomat satunnaismuuttujat. Huomautettakoon, että niillä on keskenään myös sama arvojoukko ja sama jakauma. Jos yleisemmin $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ovat keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on samat arvot ja sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla Y , jonoa $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ sanotaan *otokseksi* satunnaismuuttujasta Y . Tämä ehto on oletuksena vahvassa suurten lukujen laissa.

Kellyn kaavan johto

Seuraavassa johdetaan Kellyn kaava hieman yleistetyssä tilanteessa, jossa pelin tulosvaihtoehdot ovat $A_1, \dots, A_n$. Niistä tasan yksi toteutuu, mutta pelaaja voi asettaa panoksensa usealle vaihtoehdolle samanaikaisesti. Tulosvaihtoehtojen indekseinä käytetään kirjaimia i ja j , kirjain k on pelikierroksen indeksi. Samaa peliä ajatellaan toistettavan N kertaa niin, että eri toistokertojen tulokset eivät riipu toisistaan millään tavalla. Tuloksia $A_1, \dots, A_n$ vastaavat vedonlyöntikertoimet ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ja pelaajan arvioimat todennäköisyydet eri tuloksille ovat $p_1, \dots, p_n$. Tällöin

$$p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, \quad p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Vedonvälittäjän arvioimat todennäköisyydet sisältyvät kertoimiin λ_i . Viisas välittäjä säättää kertoimen epäyhtälön $q_i \lambda_i < 1$ mukaiseksi, missä välittäjän todennäköisyydsarviota tulosvaihtoehdolle A_i on merkitty q_i . Tällöin välittäjä odottaa saavansa $1 - q_i \lambda_i$ euroa jokaista pelaajan tulokselle A_i panostamaa euroa kohti.

Pelaajan kokonaispanos vaihtelee pelimenestyksen mukana kierrokselta toiselle, mutta panos jakautuu kaikilla kierroksilla samalla tavalla eri tulosvaihtoehtojen kesken. Jakautumista kuvataan suhdeluvuilla $\beta_1, \dots, \beta_n$, joille

$$\beta_1 \geq 0, \dots, \beta_n \geq 0, \quad \beta_1 + \dots + \beta_n = 1.$$

Jos pelaajan euromääräinen kokonaispanos kierrokselle k on W_{k-1} , tulosvaihtoehdon A_i euromääräinen osuus panoksesta on $\beta_i W_{k-1}$. Panos kannattaa asettaa vain sellaisille tulosvaihtoehdoille, joista on odotettavissa tuottoa, ts. joille $p_i \lambda_i > 1$. Tämän ehdon toteuttavaa

vedonlyöntikerrointa sanotaan **ylikertoimeksi**². Järkevä vedonlyöjä asettaa näin ollen sellaiset panokset, että $\beta_i > 0$ vain kun $p_i \lambda_i > 1$.

Pelaaja siis pelaa samaa peliä N kierrosta. Pelaajan pelikassa on alussa B_0 ja kierroksen k jälkeen B_k . Pelaaja panostaa kuhunkin peliin osuuden θ pelikassasta: pelaajan panos peliin k (so. kierrokselle k) on

$$W_{k-1} = \theta B_{k-1}.$$

Jos kierroksella k toteutuu tulos A_i , pelin k jälkeen pelaajan pelikassa on

$$\begin{aligned} B_k &= B_{k-1} - W_{k-1} + \lambda_i \beta_i W_{k-1} \\ &= B_{k-1} - \theta B_{k-1} + \lambda_i \beta_i \theta B_{k-1} \\ &= (1 + (\lambda_i \beta_i - 1)\theta) B_{k-1} = x_i B_{k-1}. \end{aligned}$$

Kerroin

$$x_i = 1 + (\lambda_i \beta_i - 1)\theta$$

käsitetään satunnaismuuttujan X arvoksi. Pelikassan kehitystä voidaan kuvata prosessina

$$B_N = X_N X_{N-1} \dots X_2 X_1 B_0,$$

missä $X_1, \dots, X_N$ on otos satunnaismuuttujasta X , ts. satunnaismuuttujilla X_k , $k = 1, \dots, N$, on yhteisenä arvojoukkona $\{x_1, \dots, x_n\}$, ja muuttujat ovat keskenään riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin X . Tilanne on samanlainen kuin kappaleessa *Keskimääräinen kasvu*.

Kelly-vedonlyönnissä maksimoidaan keskimääräistä kasvukerrointa $(X_N \dots X_1)^{1/N}$ ja vieläpä asyymptoottisesti eli tilanteessa $N \rightarrow \infty$, siis kun pelikierrosten lukumäärä kasvaa rajatta. Satunnaismuuttujien teorias-
sa summat ja monikerrat ovat helpommin lähestyttävissä kuin tulot ja potenssit. Tämän takia keskimääräisen kasvukertoimen sijaan tarkastellaan sen logaritmia. Logaritmihan on funktio, joka muuttaa tulot summiksi ja potenssit vakiolla kertomisiksi: $\log(uv) = \log u + \log v$ ja $\log(u^a) = a \log u$. Kantaluvuksi valitaan Neperin luku e , mikä johtaa luonnolliseen logaritmiin $\ln = \log_e$. Keskimääräisen kasvukertoimen logaritmi on

$$\ln \left((X_N \dots X_1)^{1/N} \right) = \frac{1}{N} (\ln X_1 + \dots + \ln X_N).$$

Yhtälön oikealla puolella on samoin jakautuneiden riippumattomien satunnaismuuttujien $\ln X_k$ aritmeettinen keskiarvo, otos satunnaismuuttujasta $\ln X$. Vahvan suurten lukujen lain nojalla

$$\frac{1}{N} (\ln X_1 + \dots + \ln X_N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} E[\ln X],$$

ja eksponenttifunktion $\exp(t) = e^t$ jatkuvuuden johdosta

$$(X_N \dots X_1)^{1/N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} e^{E[\ln X]}.$$

²Ehdon $p_i \lambda_i < 1$ toteuttava kerroin λ_i on **alikerroin**. Yhtälön $p_i \lambda_i = 1$ tapauksessa on kysymyksessä **reaalikerroin**. Alikerrointa käyttävä vedonlyöjä haluaa päästä rahoistaan eroon. Reaalikertoimen käyttö on sikäli reilua vedonvälittäjää kohtaan, että tällöin vedonlyöjä ei halua kummankaan osapuolen ajan mittaan häviävän eikä voittavan.

Raja-arvонуolen kummallakin puolella on parametris-
ta θ riippuva lauseke, vaikka θ -riippuvuutta ei olekaan
kirjoitettu näkyviin: vasemmalla on pelikassan keski-
määräinen kasvukerroin N kierroksella, ja oikealla puo-
lella on kasvukertoimen raja-arvo.

Tehtävänä on maksimoida raja-arvo $e^{E[\ln X]}$ paramet-
rin θ suhteen. Koska eksponenttifunktio on aidosti kas-
vava, lausekkeella $e^{E[\ln X]}$ on samat maksimikohdat
kuin eksponentilla

$$(2) \quad E[\ln X] = \sum_{i=1}^n p_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n p_i \ln(1 + \alpha_i \theta),$$

missä on merkitty lyhyesti

$$\alpha_i = \lambda_i \beta_i - 1.$$

Käytännön kannalta mielenkiintoisissa tilanteissa pä-
tee $0 < \theta < 1$. Tällöin $\alpha_i \theta \geq -\theta > -1$, sillä $\alpha_i \geq -1$.
Täten luvut $1 + \alpha_i \theta$ ovat positiivisia, ja logaritmit
 $\ln(1 + \alpha_i \theta)$ ovat olemassa.

Kun θ lähestyy lukua 1 vasemmalta, lauseke $1 + \alpha_i \theta$ lä-
hestyy lauseketta $1 + \alpha_i = \lambda_i \beta_i$, $i = 1, \dots, n$. Tavallises-
ti vedonlyönnissä ei aseteta panoksia kaikille tulosvaiht-
toehdoille, jolloin on olemassa indeksi j , jolle $\beta_j = 0$.
Tälle indeksille

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 1^-} p_j \ln(1 + \alpha_j \theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 1^-} p_j \ln(1 + (\lambda_j \beta_j - 1)\theta) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 1^-} p_j \ln(1 - \theta) = -\infty, \end{aligned}$$

sillä todellisille tulosvaihtoehtojen todennäköisyydet
ovat positiivisia. Edellisestä johtuen $E[\ln X] \rightarrow -\infty$,
kun $\theta \rightarrow 1^-$. Toisaalta $E[\ln X] \rightarrow 0$, kun $\theta \rightarrow 0^+$. De-
rivoimalla parametrin θ suhteen saadaan

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = \sum_{i=1}^n \frac{p_i \alpha_i}{1 + \alpha_i \theta}.$$

Oikeanpuoleinen lauseke esittää muuttujan θ jatkuvaa
funktioita, joka saa positiivisen arvon kohdassa $\theta = 0$
kuten kohta osoitetaan, joten $E[\ln X]$ on muuttujan θ
kasvava funktio eräällä välillä $]0, \varepsilon[$, missä $\varepsilon > 0$. Näis-
tä havainnoista päätellään, että odotusarvo $E[\ln X]$
saavuttaa suurimman arvonsa jollakin avoimeen väliin
 $]0, 1[$ kuuluvalla muuttujan θ arvolla, ja tuo suurin arvo
on positiivinen.

Odotusarvon derivaatan lausekkeen positiivisuus arvol-
la $\theta = 0$ johtuu siitä, että panos kannattaa asettaa
vain ylikertoimen omaaville tulosvaihtoehtojen, joille
siis $p_i \lambda_i > 1$. Järkevä vedonlyöjä asettaa näin ollen sel-
laiset panokset, että $\beta_i > 0$ vain kun $p_i \lambda_i > 1$. Muut-

tujan θ arvolla nolla saadaan silloin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{p_i \alpha_i}{1 + \alpha_i \theta} &= \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n p_i (\lambda_i \beta_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i \beta_i - \sum_{i=1}^n p_i \\ &= \sum_{\beta_i > 0} p_i \lambda_i \beta_i - 1 \\ &> \sum_{\beta_i > 0} \beta_i - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

▼ Välitilinpäätös

Kun kokonaispanoksen suhde pelikassaan on jokaisel-
la pelikierroksella θ , ja pelikassan kasvukerroin yhdellä
kierroksella on satunnaismuuttuja X , pelikassan keski-
määräisellä kasvukertoimella on lauseke $e^{E[\ln X]}$. Kas-
vu ja täten keskimääräinen kasvukin ovat parametrin θ
funktioita. Arvolla $\theta = 0$ peliin ei panosteta, joten kas-
sa säilyy muuttumattomana. Tällöin kasvukertoimilla
on arvo 1. Järkevillä ehdoilla keskimääräinen kasvuker-
roin nollautuu, kun $\theta = 1$ eli panoksena käytetään koko
pelikassaa. Maksimaalinen keskimääräinen kasvu saa-
vutetaan eräällä avoimeen väliin $]0, 1[$ kuuluvalla pa-
rametrin θ arvolla. Maksimikohdassa keskimääräinen
kasvukerroin on suurempi kuin 1. ▲

Vielä pitää löytää maksimaalisen kasvun antava arvo
parametrille θ . Odotusarvon $E[\ln X]$ suurin arvo saavu-
tetaan sellaisella parametrin θ arvolla, jolla odotusar-
von derivaatta häviää. Pitää siis ratkaista θ yhtälöstä

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i \alpha_i}{1 + \alpha_i \theta} = 0.$$

Laventamalla murtolausekkeet samannimisiksi saadaan
astetta $n - 1$ oleva polynomiyhtälö. Se on yleensä
ratkaistava numeerisesti, sillä tapauksessa $n \geq 6$ ei
ole käytettävissä yleistä ratkaisukaavaa, ja tapauksis-
sa $n = 4$ ja $n = 5$ ratkaisukaavan käyttö on turhan
hankalaa.

Jos pelaaja lyö vetoa tasan yhden lopputuloksen puo-
lesta, tilanne helpottuu oleellisesti. Asettakoon pelaaja
koko panoksen tulosvaihtoehtojen A_j puolesta. Tällöin
 $\beta_j = 1$ ja $\beta_i = 0$, kun $i \neq j$. Siis $\alpha_j = \lambda_j - 1$ ja
 $\alpha_i = -1$, kun $i \neq j$. Koska $p_1 + \dots + p_n = 1$, pätee

$$\sum_{i \neq j} p_i = 1 - p_j.$$

Kaavaan (2) sijoittamalla saadaan

$$E[\ln X] = (1 - p_j) \ln(1 - \theta) + p_j \ln(1 + (\lambda_j - 1)\theta).$$

Derivaatta muuttujan θ suhteen on

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = \frac{p_j - 1}{1 - \theta} + \frac{p_j (\lambda_j - 1)}{1 + (\lambda_j - 1)\theta}.$$

Yhtälöllä

$$\frac{d}{d\theta} E[\ln X] = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\theta = \frac{p_j \lambda_j - 1}{\lambda_j - 1}.$$

Tämä on oleellisesti sama kaava kuin (1), siis Kellyn kaava.

Lopuksi

Kellyn kaavaa (1) käytettäessä kannattaa kiinnittää huomiota kahteen seikkaan:

1. Todennäköisyys p on vedonlyöjän itsensä (tai luotettavalta kaverilta saatu) arvio. On inhimillistä, että voiton todennäköisyyttä yliarvioidaan ja sen seurauksena käytetään liian suurta panosta.
2. Kellyn kaavan mukaisen panoksen käyttäminen ei sulje pois sitä mahdollisuutta, että pelaaja heti aluksi ajautuu pitkään tappioputkeen ja näin menettää huomattavan osan pelikassastaan.

Mainituista syistä johtuen vetoa lyödään yleensä pienemmällä panoksella kuin mitä Kellyn kaava suosittelee. On tapana soveltaa Kellyn kaavaa hieman muunnettuna muodossa

$$\theta = \frac{1}{d} \frac{p\lambda - 1}{\lambda - 1}.$$

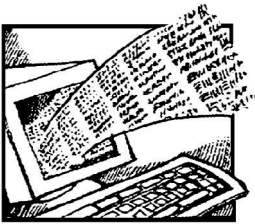
Vakiota d kutsutaan **Kellyn jakajaksi**. Kukin pelaaja säätää jakajan d omaan riskinottohaluunsa sopivaksi. Tyypillinen pelurien käyttämä arvo on $d = 2$. Ohjelmoinnista kiinnostunut lukija kirjoittaa vaivatta

vedonlyöntisimulaattorin, jonka avulla Kellyn jakajan vaikutusta pelikassan kokoon ja koon vaihteluun voidaan tutkia.

Pelikassan kehitystä simuloitiin Python-ohjelmalla käyttäen muutamaa erisuurta Kellyn jakajan arvoa. Kullakin simulointikierröksellä vedonlyöntiä jatkettiin kunnes pelikassa oli joko puolittunut tai kaksinkertaistunut sen mukaan, kumpi sattui tapahtumaan ensin. Simulointikierröksiä oli kaikkiaan 1 000 000 kappaletta. Näin saatiin melko luotettava likiarvo *puolittumistodennäköisyydelle*, so. sen tapahtuman todennäköisyydelle, että pelikassa puolittuu ensin ja mahdollisesti kaksinkertaistuu vasta sen jälkeen. Vedonlyöntikertoimen arvona oli $\lambda = 2$, ja voiton todennäköisyydeksi asetettiin $p = 0,6$. Seuraavaan taulukkoon on koottu simulaation tulokset. Puolittumisaika tarkoittaa pelikassan puolittumiseen johtaneiden pelikierrosten lukumäärää. Vastaavasti tuplaantumisaika tarkoittaa pelikassan kaksinkertaistumiseen johtaneiden pelikierrosten lukumäärää.

Kellyn jakaja	Puolittumis- todennäköisyys	Keskimääräinen puolittumisaika	Keskimääräinen tuplaantumisaika
$d = 1$	0,31	14	15
$d = 2$	0,094	40	40
$d = 4$	0,0061	80	81
$d = 6$	0,00037	117	116
$d = 8$	0,000024	139	150

Taulukosta havaitaan, että pelikassan hiipumisen riskiä voidaan pienentää isontamalla Kellyn jakajaa, mutta silloin pitää joko lyödä enemmän vetoja tai tyytyä pienempään tuottoon.



IMO vs. IOI – ongelmanratkojan kahdet olympialaiset

Antti Laaksonen

Helsingin yliopisto
ahslaaks@cs.helsinki.fi

Matematiikan olympialaiset IMO (*International Mathematical Olympiad*) on varmasti tuttu monelle Solmun lukijalle, mutta sen sisarkilpailu tietotekniikan olympialaiset IOI (*International Olympiad in Informatics*) on jäänyt vähemmälle huomiolle.

IMO ja IOI ovat yllättävänkin lähellä toisiaan, ja molemmissa kilpailuissa keskeinen teema on matemaattinen ongelmanratkaisu. Erona on, että IMO:ssa kirjoitetaan todistuksia kynällä ja paperilla, kun taas IOI:ssä ohjelmoidaan algoritmeja. Näihin olympialaisiin valmistautuminen on keino kehittää laaja-alaisesti ongelmanratkaisun taitoja.

Millaisia olympialaiset ovat?

IMO:ssa ja IOI:ssä perusidea on sama: jokainen maa lähettää olympialaisiin joukkueen, jossa on lukiolaisia (tai nuorempia) osallistujia. IMO:ssa joukkueessa on kuusi osallistujaa, kun taas IOI:ssä on neljä osallistujaa. Olympialaiset järjestetään joka vuosi eri maassa. Esimerkiksi vuonna 2020 IMO järjestetään Venäjällä ja IOI järjestetään Singaporessa.

Olympialaiset kestävät noin viikon, jonka kuluessa on kaksi kilpailupäivää. Vaikka mailla on joukkueet, kyseessä on yksilökilpailu ja jokainen osallistuja ratkoo tehtäviä itsenäisesti. Kilpailupäivien lisäksi olympialaisissa on paljon muutakin ohjelmaa, ja eri maista tulevilla osallistujilla on tilaisuus tutustua toisiinsa.

Nimien perusteella IMO:n aiheena on matematiikka, kun taas IOI:n aiheena on tietotekniikka. Tämä ei kerro kuitenkaan vielä paljon siitä, mitä kilpailuissa todella tehdään. IMO:n vakiintuneet aiheet ovat algebra, geometria, kombinatoriikka ja lukuteoria. IOI puolestaan keskittyy algoritmikkaan, ja tehtävissä korostuu tietojenkäsittelytieteen matemaattinen puoli.

Kilpailujen taustaa

IMO:n historia ulottuu vuoteen 1959, jolloin järjestettiin ensimmäiset olympialaiset Romaniassa. Suomi osallistui ensimmäisen kerran vuonna 1965 ja on osallistunut säännöllisesti vuodesta 1973 alkaen. IMO on kasvanut vuosien kuluessa suureksi, ja vuonna 2019 mukana oli 621 osallistujaa 112 maasta.

IMO:n mallin mukaan alkoi syntyä muita tiedeolympialaisia, kuten fysiikan olympialaiset IPhO vuonna 1967 ja kemian olympialaiset IChO vuonna 1968. Tietotekniikka on nuorempi tulokas joukossa: ensimmäinen IOI järjestettiin vuonna 1989 Bulgariassa, ja Suomi on osallistunut kilpailuun vuodesta 1992 alkaen. Vuonna 2019 IOI:ssä oli mukana 327 osallistujaa 87 maasta.

Suomessa kilpailutoimintaa koordinoi MAOL ja pääasiallinen rahoittaja on Opetushallitus. Olympialaisten lisäksi toimintaan kuuluu paljon muutakin, kuten MAOLin neljän tieteen kisat, valmennusleirit ja pienemmät kansainväliset kilpailut. Valmentajat ovat tyy-

pillisesti yliopistojen työntekijöitä ja opiskelijoita, usein entisiä kilpailijoita. Tie olympialaisiin on pitkä, ja menestyminen vaatii määrätietoista harjoittelua.

Tehtävät ja arvostelu

IMO:ssa ja IOI:ssä on molemmissa kaksi kilpailupäivää ja kolme tehtävää ratkottavana kumpanakin päivänä. IMO:ssa aikaa päivän tehtäviin on 4,5 tuntia, kun taas IOI:ssä aikaa on 5 tuntia. Olympialaisten tehtävät valitaan paikan päällä kokouksessa, jossa on paikalla joukkueiden ohjaajia ja muita asiantuntijoita.

Oleellinen ero kilpailuissa on tapa, jolla tehtäviä ratkotaan. IMO:ssa tehtävän ratkaisu on todistus, joka kirjoitetaan kynällä ja paperilla. IOI:ssä puolestaan tehtävän ratkaisu on algoritmi, joka toteutetaan ohjelmointikielellä. IMO:ssa laskimet ja muut sähköiset apuvälineet ovat kiellettyjä, kun taas IOI:ssä jokaisella kilpailijalla on tietokone, jota saa käyttää vapaasti laskentaan.

Tehtävien ratkaisutapa vaikuttaa tehtävien asetteluun. IMO:ssa tehtävänä on tyypillisesti todistaa, että jokin pätee tai ei päde, tai etsiä ratkaisu, jonka pystyy ilmaisemaan lyhyesti kynällä ja paperilla. IOI:ssä taas keskeinen asia on algoritmien tehokkuus: ohjelmalle annetaan käsiteltäväksi suuri aineisto, ja sen täytyy selviytyä siitä nopeasti.

IMO:ssa arvostelu on useita päiviä kestävä prosessi, jossa eri maiden ohjaajat neuvottelevat pisteistä tuomariston kanssa. IOI:ssä puolestaan arvostelu on automaattinen ja perustuu ohjelmien testaamiseen. Molemmissa tavoissa on etunsa: IOI:ssä arvostelu on kaikille tasapuolinen eikä siinä ole tulkinnanvaraisuutta, mutta IMO:ssa pystyy antamaan paremmin pisteitä keskeisistä oikeansuuntaisista ratkaisuista.

Osallistuminen

Kumpiin olympialaisiin ongelmanratkaisusta kiinnostuneen kannattaisi tähdätä? Vastaus on yksinkertainen: *molempiin*. IMO ja IOI tukevat ja täydentävät toisiaan, ja moni menestyvä kilpailija myös osallistuu molempiin olympialaisiin. Yksi ääriesimerkki tästä on japanilainen kilpailija Yuta Takaya, joka voitti vuonna 2017 sekä IMO:n että IOI:n.

IMO ja IOI antavat yhdessä hyvän ongelmanratkojan peruskoulutuksen. IMO-tehtävät opettavat todistamista ja tärkeitä matematiikan tuloksia ja tekniikoita. IOI-tehtävät puolestaan opettavat ohjelmointia ja syvällisempää algoritmista ajattelua. Todistuksen kirjoittaminen ja algoritmin toteuttaminen antavat usein kaksi hieman erilaista näkökulmaa ongelmaan, mistä näemme seuraavaksi yhden esimerkin.

Tehtävä: Merkkijonot

Melko usein IMO:ssa ja IOI:ssä esiintyy tehtäviä, jotka voisi siirtää lähes sellaisenaan kilpailusta toiseen. Tuore esimerkki tällaisesta tehtävästä on IMO 2019:n tehtävä 5, jossa tarkastellaan seuraavaa prosessia:

Annettuna on merkkijono, jossa on n merkkiä ja jokainen merkki on H tai T . Joka vuorolla muutetaan vastakkaiseksi kohdassa $k > 0$ oleva merkki, missä k on merkkien H määrä. Näin jatketaan, kunnes jokainen merkki on T . Esimerkiksi jos annettu merkkijono on THT , muutoksista muodostuu ketju $THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$, eli askelten määrä on 3.

IMO:ssa tehtävässä on kaksi kohtaa:

- Todista, että prosessi päättyy millä tahansa merkkijonolla.
- Määritä askelten määrän odotusarvo, kun merkkijonossa on n merkkiä ja kaikki 2^n merkkijonoa esiintyvät yhtä todennäköisesti.

Entä miten tehtävä muuttuisi, jos se olisikin IOI:ssä? Todennäköisesti näin:

- Tee tehokas algoritmi, joka laskee, montako askelta prosessissa on annetulla merkkijonolla.

Ratkaisemme seuraavaksi tehtävän tämän IOI-asettelun näkökulmasta.

Kohti ratkaisua

Ennen tehokkaan algoritmin laatimista meidän täytyy saada käsitys siitä, mistä prosessissa oikeastaan on kysymys. Yksi keino tähän on laatia ensin jokin hidas mutta toimiva raak'än voiman algoritmi. Voimme saada tietoa prosessista tämän algoritmin avulla.

Seuraavassa on C++-koodi, joka simuloi prosessia askel askeleelta. Koodi olettaa, että merkkijonon merkit ovat $s[1], s[2], \dots, s[n]$, ja laskee muuttujaan c askelten yhteismäärän prosessissa.

```
int k = 0;
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    if (s[i] == 'H') k++;
}
long c = 0;
while (k > 0) {
    if (s[k] == 'H') {
        s[k] = 'T'; k--;
    } else {
        s[k] = 'H'; k++;
    }
    c++;
}
```

Koodi etsii ensin muuttujaan k ensimmäisen muutettavan merkin kohdan. Tämän jälkeen koodi muuttaa merkkejä ja päivittää kohtaa k , kunnes lopuksi k on 0. Huomaa, että kohta k siirtyy aina viereiseen merkkiin vasemmalle tai oikealle, koska merkkien H määrä vähenee tai kasvaa yhdellä.

Koodin tehokkuudesta on vaikea sanoa vielä mitään, koska emme tiedä, miten kauan silmukan ehto $k > 0$ on voimassa. Voimme kuitenkin koodin avulla tutkia askelten määriä pienissä tapauksissa: esimerkiksi merkijonolla *HHTTTHHT* vastaus on 16. Kokeilemalla koodia useilla merkkijonoilla voimme saada käsitystä askelten määrän suuruusluokasta. Melko pian alkaa näyttää siltä, että vastaus on aina huomattavasti pienempi kuin kaikkien merkkijonojen määrä 2^n .

Saamme paljon lisää tietoa ongelmasta muuttamalla koodia hieman niin, että se tulostaa jokaisen vaiheen simulaatiossa. Nyt esimerkiksi merkkijonosta *HHTTTHHT* syntyy seuraava tulostus:

```
HHTTTHHT
HHTHHTHT
HHTHHHHT
HHTHHHTHT
HHTHTTHT
HHTTTTHT
HHHTTTHT
HHHHHTHT
HHHHHTHT
HHHHHHHT
HHHHHHHTT
HHHHHTTT
HHHHHTTTT
HHHTTTTT
HHTTTTTT
HTTTTTTT
TTTTTTTT
```

Tutkimalla tarkasti tällaisia tulostuksia eri merkkijonoille ongelman salat alkavat aueta. Näyttää siltä, että muuttuja k seilaa koodia suorittaessa merkkijonon puolelta toiselle ja joka kerta se kulkee aiempaa pidemmän matkan. Tämä on se hetki ongelmanratkaisussa, jolloin on aihetta juhlaan: olemme tehneet tärkeän havainnon, joka saattaa hyvinkin johtaa ratkaisuun.

Tehokas algoritmi

Jotta saamme aikaan toimivan tehokkaan algoritmin, meidän täytyy kuitenkin ymmärtää vielä tarkemmin, mistä prosessissa on kysymys. Miksi ja milloin muuttujan k suunta muuttuu ja miksi on varmaa, että prosessin päätteeksi jokainen merkki on T ?

Tässä auttaa tarkastella erikseen kahta tapausta: Kun k liikkuu vasemmalta oikealle, merkkejä T korvataan

merkillä H , kunnes vastaan tulee merkki H ja suunta vaihtuu. Kun taas k liikkuu oikealta vasemmalle, merkkejä H korvataan merkillä T , kunnes vastaan tulee merkki T ja suunta vaihtuu. Kun haluamme löytää kohdat, joissa suunta vaihtuu, meidän tulee siis vuorotellen paikantaa seuraava merkki H oikealta ja seuraava merkki T vasemmalta.

Jotta prosessi voi päättyä onnistuneesti, sen täytyy lähteä liikkeelle ”sopivasta” kohdasta, jossa merkkien T määrä vasemmalla on yhtä suuri kuin merkkien H määrä oikealla. Osoittautuu, että tämä kohta on sama kuin merkkien H yhteismäärä eli muuttujan k arvo alussa. Syynä on, että kun k ensimmäisen merkin joukossa on x kertaa merkki T , niin myös $n - k$ viimeisen merkin joukossa on x kertaa merkki H .

Nyt kaikki tarvittavat ideat alkavat olla kasassa ja voimme ryhtyä koodaamaan tehokasta algoritmia. Verrattuna ensimmäiseen algoritmiin meidän täytyy käytännössä onnistua tehostamaan osuuksia, joissa muuttuja k kulkee pitkän matkan samaan suuntaan. Tämä onnistuu ottamalla käyttöön kolme uutta muuttujaa: a ja b ovat nykyisen alueen vasen ja oikea reuna ja z kertoo liikkumissuunnan ($0 =$ oikea, $1 =$ vasen). Monien vaiheiden ja virheiden korjaamisen jälkeen tuloksena on seuraava toimiva koodi:

```
int k = 0;
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    if (s[i] == 'H') k++;
}
long c = 0;
int a = k, b = k;
int z = s[k] == 'H';
while (true) {
    if (z == 0) {
        a--;
        while (s[b] == 'T') b++;
    } else {
        b++;
        while (a >= 1 && s[a] == 'H') a--;
    }
    c += b-a-1;
    if (z == 1 && a == 0) break;
    z = 1-z;
}
```

Algoritmi määrittää k :n alkuarvon kuten ennenkin ja asettaa sen perusteella muut muuttujat. Tämän jälkeen alkaa pääsilmutta, jossa joka kierroksella alue laajenee joko oikealle tai vasemmalle ja liikuttu matka $b - a - 1$ lisätään askelten määrään. Silmutta päättyy, kun vasemmalle liikkumisen jälkeen $a = 0$.

Paitsi että algoritmi laskee tehokkaasti askelten määrän, se kertoo meille myös jotain muuta arvokasta. Koska algoritmi pysähtyy millä tahansa syötteellä ja il-

moittaa askelten määrän, saimme sivutuotteena ratkaistua IMO-tehtävän ensimmäisen kohdan: algoritmin olemassaolo *todistaa*, että askelten määrä on aina äärellinen.

Odotusarvon laskeminen

Entä IMO-tehtävän toinen kohta, jossa tulee määrittää askelten määrän odotusarvo? Kun meillä on koodi, joka laskee mille tahansa merkkijonolle askelten määrän, voimme alkajaisiksi laskea sen avulla odotusarvoja pienille n :n arvoille laittamalla koodin käymään läpi kaikki 2^n merkkijonoa. Saamme seuraavia tuloksia:

pituus n	odotusarvo
1	$1/2$
2	$3/2$
3	3
4	5
5	$15/2$
6	$21/2$
7	14
8	18

Nyt meillä on hyvää dataa, jonka avulla voimme arvuutella kaavaa odotusarvolle. Ehdokas kaavaksi löytyykin yllättävän helposti. Laskemalla taulukon lukujen erotuksia (ks. Solmu 1/2019) paljastuu, että odotusarvon kaava näyttää olevan polynomi

$$\frac{n^2 + n}{4}.$$

Nyt olemme saaneet jo luultavasti selville vastauksen, mutta meillä ei ole vielä mitään tietoa, miksi vastaus on tuollainen. Tai ehkä on sittenkin: kaava näyttää hyvin samalta kuin summakaava

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2},$$

jakaja vain on 4 eikä 2. Voisimme koettaa pyrkiä kohti todistusta, jossa olisi jotenkin lukujen summa.

Tässä vaiheessa on taas hyvä pysähtyä miettimään, miten muuttuja k oikeastaan liikkuu algoritmissamme. Saamme laskettua odotusarvon kaavalla

$$\frac{f(n)}{2^n},$$

missä $f(n)$ on summa kaikkien liikeratojen askelten määristä. Esimerkiksi kun $n = 2$, liikeradat ovat:

- HH : 2 askelta vasemmalle
- HT : 1 askel vasemmalle
- TH : 1 askel oikealle, 2 askelta vasemmalle
- TT : 0 askelta

Niinpä $f(2) = 2 + 1 + 3 + 0 = 6$, ja tapauksen $n = 2$ odotusarvo on $6/2^2 = 3/2$.

Aiemmin huomasimme, että muuttujan k liikerata muodostuu osuuksista, jotka kulkevat vuorotellen eri suuntiin ja jokainen osuus on edellistä pidempi. Mutta voimme ajatella asiaa myös käänteisesti: jos on mikä tahansa liikerata, voimme saada muuttujan k kulkemaan sen, kunhan luomme sopivan merkkijonon, ja tietyllä n :n arvolla kyseinen merkkijono on yksikäsitteinen.

Tämän avulla pystymme johtamaan kaavan

$$f(n) = 2f(n-1) + 2^{n-1}n,$$

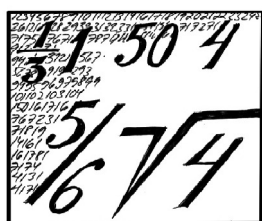
jossa on ideana, että n merkin merkkijonolla voidaan ensinnäkin muodostaa kaikki samat liikeradat kuin $n-1$ merkin merkkijonolla, mistä tulee $f(n-1)$ askelta. Lisäksi voidaan muodostaa liikeratoja, jossa viimeisen osuuden pituus on n ja sitä ennen on lyhempiä osuuksia. Näistä liikeradoista tulee $f(n-1) + 2^{n-1}n$ askelta, koska $n-1$ merkin liikeratoja on 2^{n-1} erilaista ja jokaisesta tulee n askelta lisää viimeisen osuuden myötä. Laskemalla vielä vähän lisää selviää, että

$$\frac{f(n)}{2^n} = \frac{n^2 + n}{4},$$

mikä olikin odotettavaa.

Aiheeseen liittyvää

- Peter Taylor: Comparisons of the IMO and IOI. *Olympiads in Informatics* 2012.
- IMO 2019 Problems. Saatavilla osoitteessa <https://www.imo-official.org/>.
- Antti Laaksonen: Kuinka löytää kaava lukujonolle? *Solmu* 1/2019.



Sairaustestauksesta: lukujen paradoksaalisista osuuksista

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Aina toisinaan kuulee ehdotuksia, että koko kansa olisi testattava jonkin tarttuvan taudin varalta. Yleensä näitä ehdotuksia kuulee silloin, kun joku on tahallaan leivittänyt HI-virusta, ja yleensä ehdotuksiin liittyy myös ajatus tehdä kuvakatalogi kaikista sairautta kantavista. Ei puututa nyt tässä ehdotuksen eettisiin ongelmiin, eikä myöskään taloudellisiin vaikutuksiin tai vaivaan mikä siitä seuraisi (noin viiden miljoonan suomalaisen testaaminen ei olisi ihan halpaa tai nopeaa touhua). Analysoidaan nyt miltä testitulokset näyttäisivät.

Suomalaisia oli 5509856 maaliskuun 11. päivänä vuonna 2017 [3]. HIV-positiivisia oli tuolloin 3771 THL:n tilastojen [1] mukaan, eli tämä luku viittaa siis niihin, jotka olivat saaneet positiivisen testituloksen. Varmainkin osa näistä ihmisistä oli jo kuollut, mutta toisaalta, jos koko kansa testattaisiin, pointti olisi tietenkin löytää piilevät tapaukset. Ajatellaan siis, että tuo 3771 ei sisällä kaikkia tapauksia, vaan että todellinen määrä olisi vaikka 5000, mikä on siis vain karkea arvaus. Tällöin siis Suomessa olisi

$$5509856 - 5000 = 5504856$$

HIV-negatiivista ihmistä.

ELISA-testissä noin 99,3–99,7 % HIV-positiivisista saa positiivisen testituloksen. Lopuilla testitulos on negatiivinen testattavan HIV-positiivisuudesta huolimatta. Lasketaan sen mukaan, että väärä negatiivisia tuloksia tulisi mahdollisimman vähän, eli testi olisi mahdollisimman luotettava. Tällöin 0,3 % HIV-positiivisista

saisi negatiivisen testituloksen, eli

$$0,3 \% \cdot 5000 = 0,003 \cdot 5000 = 15$$

ihmistä. Loput $5000 - 15 = 4985$ saavat siis positiivisen testituloksen.

Siirrytään nyt toiseen ihmisryhmään, eli terveisiin ihmisiin (tai no, yleisestä terveydentilasta tässä tuskin voi mitään sanoa, eli kyse on HIV-negatiivisista ihmisistä). Näitä on siis 5504856. Testin tarkkuus terveillä on peräti noin 99,97 %, eli terveistä 99,97 % saa terveen paperit, ja vain 0,03 % sairaan. Lasketaan nyt mitä tämä käytännössä tarkoittaa. Ensinnäkin $0,03 \% \cdot 5504856 = 0,0003 \cdot 5504856 \approx 1651$ ihmistä, ja nyt olemmekin asian ytimessä! Loput, eli

$$5504856 - 1651 = 5503205$$

saavat terveen paperit. Tehdäänpä nyt taulukko saaduista tuloksista:

	terveet	HIV-positiiviset
testitulos negatiivinen	5503205	15
testitulos positiivinen	1651	4985

Taulukon pystyivät kuvaavat testien luotettavuutta: Kuinka todennäköisesti sairas saa tuloksen, joka todella osoittaa ihmisen olevan sairas, ja kuinka todennäköisesti terve saa tuloksen, joka osoittaa ihmisen olevan terve.

Täysin toinen kysymys on se, että mikä johtopäätöksen tulee olla, jos testitulos on positiivinen, ja toisaalta,

mikä on mielekäs johtopäätös, jos testitulos on negatiivinen. Ensimmäinen rivi vastaa negatiivisen testituloksen saaneita. Heistä 5503205 on terveitä ja 15 sairaita. Tulos on siis melkoisen luotettava.

Taulukon toinen rivi onkin ehkä hieman mielenkiintoisempi: Toisella rivillä on positiivisen testituloksen saaneiden jakauma terveisiin ja HIV-positiivisiin. Yhteensä positiivisen testituloksen on saanut

$$1651 + 4985 = 6636.$$

Heistä terveitä on

$$\frac{1651}{6636} \approx 0,25 = 25 \, \%.$$

Tämä on ihan valtavasti. Tässä herää kaksi kysymystä:

- Miten ihmeessä tämä on mahdollista? Testinhän pitäisi olla hyvä. Suurella todennäköisyydellä testi antaa ihan oikean tuloksen riippumatta siitä, onko ihminen sairas vai terve.
- Onko oletettavaa, että joka neljäs HIV-positiiviseksi oletettu onkin terve?

Jälkimmäinen kysymys on itse asiassa helpompi, joten aloitetaan siitä. Ei, noin joka neljäs HIV-positiivinen ei ole terve. Positiiviset testitulokset varmistetaan. Eräs menetelmä on nimeltään Western blot. Elisan ja Western blot -testin jälkeen noin kolme ihmistä 250000 ihmisestä saa positiivisen tuloksen, vaikka onkin terve. Suomessa tämä tarkoittaisi sitä, että noin 60 ihmistä saisi virheellisesti HIV-diagnoosin. Tämä on paljon. Tämäkin olisi vielä yli prosentti HI-virusta sairastavien määrästä, jos koko väestö testattaisiin. Jos taas oletetaan, että testeihin ei mene kovin paljon terveitä ihmisiä, ei valheellisten positiivisten lukumäärä ole kovinkaan korkea.

Sitten se ensimmäinen kysymys. Miten tämä kaikki on oikein mahdollista? Selitys on se, että terveiden joukko on niin valtavasti suurempi kuin sairaiden, että vaikka lähes jokainen terve saisi terveen testituloksen, silti niitä, jotka saisivat sairausdiagnoosin, olisi huomattava määrä verrattuna oikeasti sairaiden kokonaismäärään. Testi antaa sekä terveille että sairaille kyllä luotettavan tuloksen, mutta toisen ryhmän suuri koko verrattuna

toiseen ryhmään muuttaa ryhmien välisiä suhteellisia kokoja. Asia on ehkä helpoin nähdä niin, että sairaiden osuus koko väestöstä on noin promille, eli prosentin kymmenesosa, sairaan diagnoosin saaneiden terveiden osuus taas kolme prosentin sadasosaa, eli noin kolmasosa promillea.

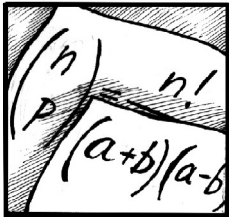
Testit paranevat ja muuttuvat luotettavammiksi. Se ei kuitenkaan poista sitä ongelmaa, että jokaisessa testissä on heikkoutensa. Joko toinen sairaus voi hämätä testiä, tai laborantti voi tehdä virheen, tai tauti voi olla vaiheessa, jossa se ei näy, tai jotain muuta voi mennä vikaan. Luotettavaa testiä ei ole. Virhetodennäköisyyttä voi vähentää, mutta täysin sitä ei voi poistaa.

Tehtävät

1. Tee vastaava analyysi vuoden 1986 datalla. Vuonna 1986 kaikkien koskaan todettujen tapausten määrä ylitti 100 Suomessa, ja meni jopa selkeästi yli. Luku on varmasti ollut pahasti alakanttiin, joten voit ajatella vaikkapa, että todellinen luku olisi ollut esimerkiksi 500. Onko terveiden vai sairaiden osuus suurempi positiivisen testituloksen saaneiden joukossa ensimmäisen testikierroksen jälkeen?
2. Kuinka paljon sairastuneita pitäisi olla, jotta jo ensimmäisen testikierroksen jälkeen terveiden osuus positiivisen testituloksen saaneiden joukossa olisi vain yksi prosentti?

Viitteet

- [1] HIV Suomessa – HIS i Finland, THL, tilasto 5.3.2017 raportoidut tapaukset. <https://www.thl.fi/ttr/gen/rpt/hivsuo.pdf>
- [2] How Often Do False Positive and False Negative HIV Tests Occur? <https://www.verywell.com/prevalence-of-false-positive-hiv-test-49134>
- [3] Väestörekisterikeskus <https://vrk.fi/etusivu>, haettu 11.3.2017.



Muirheadin epäyhtälö

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Kerromme tässä artikkelissa Muirheadin epäyhtälöstä. Se on tehokas työkalu tietynlaisten symmetrisien epäyhtälöiden todistamiseen. Keskitymme vain esimerkkeihin ja ongelmiin, joissa Muirheadin epäyhtälö on yksinään riittävä. Esitämme myös täyden todistuksen sille. Jotkin vastaan tulevat kohdat ovat huomattavan mutkikkaita, ja halutessaan lukijan kannattaakin hypätä hankalien kohtien yli.

Hieman merkintöjä esimerkein

Jatkossa n tulee yleensä olemaan positiivinen kokonaisluku, joka kertoo muuttujien lukumäärän todistettavissa epäyhtälöissä. Nämä n muuttujaa tulevat usein olemaan $x_1, x_2, \dots, x_n$, joiden oletetaan olevan epänegatiivisia reaalilukuja. Vaihtelun vuoksi saatamme käyttää muuttujia a ja b , kun $n = 2$, tai x, y ja z , kun $n = 3$, ja niin edelleen.

Tulemme tarkastelemaan lausekkeita, joissa esiintyy näiden muuttujien potenssien tuloja. Merkitsemme eksponenttien jonoja ja niiden elementtejä pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla

$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \quad \text{ja} \quad \beta = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle,$$

ja niin pois päin. Kaikissa tilanteissamme nämä luvut $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ tulevat olemaan epänegatiivisia reaalilukuja, joille pätee $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ ja $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$.

Koska olemme kiinnostuneita symmetrisistä lausekkeista, otamme käyttöön epäyhtälökirjallisuudessa yleisen symbolin $\sum_{\text{sym}}$. Erityisesti,

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

tarkoittaa summaa kaikista termeistä, jotka saadaan, kun annetaan muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ vaihtaa tai olla vaihtamatta paikkoja keskenään kaikin mahdollisin tavoin. Koska näitä eri tapoja on tunnetusti aina $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ kappaletta, on siis summassa aina $2! = 2$ termiä kahden muuttujan tapauksessa, $3! = 6$ termiä kolmen muuttujan tapauksessa, $4! = 24$ termiä neljän muuttujan tapauksessa, ja niin edelleen.

Esimerkiksi, kun $n = 2$ ja muuttujat ovat x_1 ja x_2 , ovat eksponenttijonoja $\langle 2, 1 \rangle$ ja $\langle 1, 0 \rangle$ vastaavat symmetriset summat

$$\sum_{\text{sym}} x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} x_1 = x_1 + x_2.$$

Samoin, jos reaalimuuttujiamme ovat vaikkapa a ja b , niin on

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b = a^2 b + a b^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} a = a + b.$$

Kun $n = 3$ ja reaalimuuttujamme ovat x_1, x_2 ja x_3 , on

eksponenttijonoa $\langle 3, 2, 1 \rangle$ vastaava summa

$$\sum_{\text{sym}} x_1^3 x_2^2 x_3 = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^3 x_3^2 x_2 + x_2^3 x_1^2 x_3 \\ + x_2^3 x_3^2 x_1 + x_3^3 x_1^2 x_2 + x_3^3 x_2^2 x_1,$$

ja eksponenttijonoa $\langle 4, 0, 0 \rangle$ vastaava

$$\sum_{\text{sym}} x_1^4 = \sum_{\text{sym}} x_1^4 x_2^0 x_3^0 \\ = x_1^4 x_2^0 x_3^0 + x_1^4 x_3^0 x_2^0 + x_2^4 x_1^0 x_3^0 \\ + x_2^4 x_3^0 x_1^0 + x_3^4 x_1^0 x_2^0 + x_3^4 x_2^0 x_1^0 \\ = 2x_1^4 + 2x_2^4 + 2x_3^4.$$

Jos reaaliuuttujamme olisivat vaikkapa a, b ja c , niin olisi

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b = a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b,$$

ja jos reaaliuuttujamme sattuisivat olemaan x, y ja z , olisi

$$\sum_{\text{sym}} x^4 = 2(x^4 + y^4 + z^4) \quad \text{ja} \quad \sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz.$$

Samassa hengessä pätee yleisesti

$$\sum_{\text{sym}} x_1 x_2 \cdots x_n = n! x_1 x_2 \cdots x_n,$$

sillä kaikki $n!$ eri tapaa järjestellä muuttujia $x_1, x_2, \dots, x_n$ keskenään johtavat aina samaan termiin, joka on muuttujien tulo. Samoin,

$$\sum_{\text{sym}} x_1^5 = (n-1)! (x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5),$$

sillä esiintyyhän esimerkiksi termi x_1^5 summassa niin monta kertaa kuin miten monella tavalla muuttujia $x_2, x_3, \dots, x_n$ voi järjestellä keskenään, eli $(n-1)!$ kertaa.

Hieman mutkikkaampi esimerkki olisi eksponenttijonoa $\langle 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$, missä 1 esiintyy k kertaa ja 0 siten $n-k$ kertaa jollakin $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, vastaava symmetrinen summa

$$\sum_{\text{sym}} x_1 x_2 \cdots x_k \\ = k! (n-k)! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

missä viimeisessä summassa otetaan summa niiden kokonaislukujen jonojen $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ yli, joille pätevät epäyhtälöt $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Toisin sanoen, viimeisessä summassa otetaan kaikki k eri muuttujan tulot muuttujista $x_1, x_2, \dots, x_n$, ja lasketaan ne yhteen. Termejä summassa on binomikertoimen $\binom{n}{k}$ osoittama määrä.

Mitä tavoittelemme tässä?

Olemme kiinnostuneita siitä, mitä epänegatiivisten reaali lukujen eksponenttijonoilta $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$, missä n on positiivinen kokonaisluku, pitääkään vaatia, että olisi

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$$

kaikilla epänegatiivisilla reaali luvuilla $x_1, x_2, \dots, x_n$?

Olettakaamme, että eksponenttijonot α ja β ovat tällaisia, ja tarkastellaan, mitä tästä seuraa. Koska eksponenttien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ permutointi ei vaikuta mitenkään vasemman puolen arvoon, voimme huoletta olettaa, että luvut ovat vähenevässä järjestyksessä. Sama pätee eksponentteihin $\beta_1, \dots, \beta_n$, eli voimme olettaa, että

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \quad \text{ja} \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n.$$

Olkoon x jokin positiivinen reaali luku, ja katsotaan, mitä oletettu epäyhtälö sanoo, kun

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x.$$

Vasemmalla puolella summan jokainen termi on suuruudeltaan $x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$, ja oikealla puolella jokainen termi on $x^{\beta_1 + \dots + \beta_n}$. Siispä oletettu epäyhtälö on tässä erikoistapauksessa

$$n! x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geq n! x^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}.$$

Kun $x \rightarrow \infty$, on luonnollisesti oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n,$$

jotta tämä epäyhtälö pätsisi. Samoin, kun $x \rightarrow 0+$, on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n.$$

Yhdessä näistä seuraa, että on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n.$$

Hyvä, olkoon seuraavaksi $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, ja tarkastelkaamme hieman monimutkaisempaa erikoistapausta, jossa

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$$

ja

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 1,$$

jolloin epäyhtälön molemmilla puolilla jokainen termi on muuttujan x potenssi. Vasemmalla puolella korkein esiintyvä potenssi on $x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}$ ja oikealla puolella

$x^{\beta_1+\dots+\beta_k}$. Täten päädyimme siihen, että jotta epäyhtälö voisi päteä, kun $x \rightarrow \infty$, on oltava

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k.$$

Kaiken kaikkiaan olemme nyt päätyneet sellaisiin vaatimuksiin, että

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n,$$

ja

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \beta_1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &\geq \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &\geq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ &\vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} &\geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1}. \end{aligned}$$

Näiden kaikkien vaatimusten vallitessa merkitsemme $\alpha \succ \beta$, ja sanomme, että jono α majorisoi jonoa β . Jos lisäksi $\alpha \neq \beta$, eli $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$ ainakin yhdellä $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, niin merkitsemme $\alpha \succ \beta$. On hyvin tärkeää pitää mielessä, että yllä luetellut ehdot majorisoinnille $\alpha \succ \beta$ ovat mielekkäitä näin kirjoitettuna vain silloin, kun kummassakin jonoista α ja β luvut ovat vähenevässä järjestyksessä.

Esimerkki 1. Päteekö kaikille positiivisille reaalityluille a, b ja c epäyhtälö

$$\begin{aligned} a^{1/2} b^{1/2} + b^{1/2} c^{1/2} + c^{1/2} a^{1/2} \\ \geq a^{3/5} b^{1/5} c^{1/5} + a^{1/5} b^{3/5} c^{1/5} + a^{1/5} b^{1/5} c^{3/5}? \end{aligned}$$

Entä päteekö epäyhtälö jos $\geq$ -merkin vaihtaa $\leq$ -merkiksi?

Ratkaisu. Vasen puoli on

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{1/2} b^{1/2} \quad \text{ja oikea} \quad \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{3/5} b^{1/5} c^{1/5}.$$

Kumpikaan ehdotettu epäyhtälö ei päde, sillä

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle \not\geq \left\langle \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle \quad \text{ja} \quad \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle \not\leq \left\langle \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle,$$

edellinen siksi, että $1/2 \not\geq 3/5$ ja jälkimmäinen siksi, että

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \not\geq 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

muistaen, että molemmissa eksponenttien jonoissa luvut ovat vähenevässä järjestyksessä. Luonnollisesti voimme osoittaa epäyhtälöt mahdottomiksi konkreettisesti. Nimittäin, jos epäyhtälö pätee $\geq$ -merkillä, niin valittaessa $a = x$ ja $b = c = 1$ mielivaltaisella positiivisella reaalityluvulla x , olisi oltava

$$2x^{1/2} + 1 \geq x^{3/5} + 2x^{1/5},$$

mutta selvästi oikea puoli kasvaisi nopeammin, kun $x \rightarrow \infty$, eli tämä on mahdotonta. Esimerkiksi, kun $x = 1024$, on

$$2x^{1/2} + 1 = 65 \not\geq 72 = x^{3/5} + 2x^{1/5}.$$

Samoin, jos epäyhtälö pätee $\leq$ -merkillä, olisi valittaessa $a = b = x$ ja $c = 1$ oltava

$$x + 2x^{1/2} \leq 2x^{4/5} + x^{2/5},$$

mistä jälleen seuraa ristiriita, kun $x \rightarrow \infty$. Esimerkiksi, kun $x = 1024$, on

$$x + 2x^{1/2} = 1088 \not\leq 528 = 2x^{4/5} + x^{2/5}. \quad \square$$

Muirheadin epäyhtälö

Yllä tarkastelimme välttämättömiä ehtoja sille, että

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$$

kaikilla epänegatiivisilla reaalityluilla $x_1, x_2, \dots, x_n$, ja totesimme, että on pädetävä $\alpha \succ \beta$ sen jälkeen kun jonojen α ja β luvut on uudelleenjärjestetty vähenevään järjestykseen. Muirheadin epäyhtälön sisältö on nyt siinä, että paitsi, että $\alpha \succ \beta$ on välttämätön kokoelma ehtoja alkuperäisen epäyhtälön paikkansapitävyydelle, se on myös riittävä kokoelma ehtoja!

Lause 2 (Muirheadin epäyhtälö). Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot α ja β epänegatiivisten reaalitylukujen jonoja, joissa on kummassakin n lukua vähenevässä järjestyksessä, ja joille $\alpha \succ \beta$. Tällöin

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$$

kaikille epänegatiivisille reaalityluille $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Lisäksi positiivisilla reaalityluilla $x_1, x_2, \dots, x_n$ epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $\alpha = \beta$ tai $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Tämän todistus on varsin monimutkainen ja sen pä vuoksi ensin tutustumme joukkoon esimerkkejä epäyhtälön käytöstä palaten todistukseen vasta myöhemmin artikkelissa.

Esimerkkejä Muirheadin epäyhtälön käytöstä

Esimerkki 3. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalitylukuja. Osoita, että

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Ratkaisu. Ensinnäkin pätee $\langle 4, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle$, sillä

$$4 \geq 0 \geq 0, \quad 2 \geq 1 \geq 1,$$

sekä

$$4 + 0 + 0 = 4 = 2 + 1 + 1, \quad 4 \geq 2,$$

ja

$$4 + 0 = 4 \geq 3 = 2 + 1.$$

Täten Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a^4 \geq \sum_{\text{sym}} a^2 bc,$$

eli

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2 bc + a b^2 c + ab c^2),$$

mistä pienellä sievennyksellä seuraa toivottu

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c). \quad \square$$

Esimerkki 4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ epänegatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \dots a_n.$$

Jos $n \in \mathbb{Z}_+$ ja jos $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat epänegatiivisia reaalilukuja, niin sijoittamalla esimerkin epäyhtälöön

$$a_1 = x_1^{1/n}, \quad a_2 = x_2^{1/n}, \quad \dots, \quad a_n = x_n^{1/n},$$

saamme välittömästi tutun epäyhtälön

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Esimerkin 4 epäyhtälö on täten itse asiassa aritmeettis-geometrinen epäyhtälö, joka siis seuraa mukavasti Muirheadin epäyhtälöstä.

Esimerkin 4 epäyhtälön todistus. Todetaan ensin, että $\langle n, 0, \dots, 0 \rangle \succ \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$, missä siis kummallakin puolella esiintyy n lukua. Luonnollisesti

$$n \geq 0 \geq 0 \geq \dots \geq 0 \quad \text{ja} \quad 1 \geq 1 \geq 1 \geq \dots \geq 1,$$

ja

$$n + 0 + 0 + \dots + 0 = n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1,$$

sekä lisäksi

$$\begin{aligned} n &\geq 1, \\ n + 0 &= n \geq 2 = 1 + 1, \\ n + 0 + 0 &= n \geq 3 = 1 + 1 + 1, \\ &\vdots \\ n + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{(n-1) \times 0} &= n \geq n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \times 1}. \end{aligned}$$

Nyt Muirheadin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{\text{sym}} a_1^n \geq \sum_{\text{sym}} a_1 a_2 \dots a_n,$$

eli

$$(n-1)!(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) \geq n! a_1 a_2 \dots a_n,$$

mistä väite seuraakin jakamalla puolittain kertomalla $(n-1)!$. $\square$

Esimerkki 5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivisia reaalilukuja. Jokaiselle $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$ määritellään

$$P_\nu = \frac{1}{\binom{n}{\nu}} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\nu \leq n} \sqrt[\nu]{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_\nu}},$$

missä siis otetaan summa kaikkien kokonaislukujonon $\langle i_1, i_2, \dots, i_\nu \rangle$ yli, joille $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\nu \leq n$. Osoita, että

$$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq \dots \geq P_n.$$

Ratkaisu. Asian ydin on siinä, että

$$\begin{aligned} \langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle &\succ \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0 \right\rangle \\ &\succ \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots, 0 \right\rangle \\ &\succ \dots \\ &\succ \left\langle \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0 \right\rangle \\ &\succ \left\langle \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaisessa näistä n reaaliluvun jonoista esiintyy vain epänegatiivisia reaalilukuja vähenevässä järjestyksessä, ja siitä, että jokaisessa jonossa lukujen summa on täsmälleen 1. Tarkistaaksemme osasummiin liittyvät majorisoinnin vaatimat ehdot, olkoon $\nu \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ja tarkastellaan eksponenttijonoja

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle = \left\langle \underbrace{\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}, \dots, \frac{1}{\nu}}_{\nu \times \frac{1}{\nu}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-\nu) \times 0} \right\rangle$$

ja

$$\begin{aligned} \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle &= \left\langle \underbrace{\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu+1}, \dots, \frac{1}{\nu+1}}_{(\nu+1) \times \frac{1}{\nu+1}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-\nu-1) \times 0} \right\rangle. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Meidän pitäisi osoittaa, että

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Kun $k \leq \nu$, tämä pätee, koska silloin

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{k}{\nu} \geq \frac{k}{\nu+1} = \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Kun $k \geq \nu+1$, tämä pätee sen vuoksi, että silloin

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 = \sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Siten voimme käyttää Muirheadin epäyhtälöä, ja näemme, että

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} a_1^{1/\nu} a_2^{1/\nu} \cdots a_\nu^{1/\nu} \\ \geq \sum_{\text{sym}} a_1^{1/(\nu+1)} a_2^{1/(\nu+1)} \cdots a_{\nu+1}^{1/(\nu+1)}, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} \nu! \cdot (n-\nu)! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\nu \leq n} \sqrt[\nu]{a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\nu}} \\ \geq (\nu+1)! (n-\nu-1)! \\ \cdot \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{\nu+1} \leq n} \sqrt[\nu+1]{a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_{\nu+1}}}, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa jakamalla puolittain kertomalla $n!$. $\square$

Esimerkki 6. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \geq 3.$$

Ratkaisu. Aloittakaamme kertomalla puolittain tulolla $(1+a)(1+b)(1+c)$, jolloin todistettava epäyhtälö muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} (a+b)(1+a)(1+b) + (b+c)(1+b)(1+c) \\ + (c+a)(1+c)(1+a) \\ \geq 3(1+a)(1+b)(1+c). \end{aligned}$$

Kertomalla kaiken auki ja tekemällä ilmeiset sievennykset tämä muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ + (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) \\ \geq 3 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + 3abc. \end{aligned}$$

Kertomalla jokaisessa termissä sopivalla tulon $abc = 1$ potenssilla niin, että kaikkien termien asteiksi tulee 3, voimme kirjoittaa tämän vielä suoraviivaisemmassa muodossa

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} + \sum_{\text{sym}} a^2 b \\ \geq \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3} b^{2/3} c^{2/3} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3} b^{4/3} c^{1/3} \\ + \sum_{\text{sym}} abc. \end{aligned}$$

Nyt, jos asiointila sattuu olemaan sellainen, että

$$\langle 2, 1, 0 \rangle \succ \left\langle \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle, \quad \text{ja} \quad \langle 2, 1, 0 \rangle \succ \left\langle \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle,$$

sekä

$$\left\langle \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \succ \langle 1, 1, 1 \rangle,$$

niin saamme Muirheadin epäyhtälöstä arviot

$$\sum_{\text{sym}} a^2 b \geq \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3} b^{2/3} c^{2/3} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3} b^{4/3} c^{1/3}$$

ja

$$\sum_{\text{sym}} a^{7/3} b^{1/3} c^{1/3} \geq \sum_{\text{sym}} abc,$$

joiden summa olisi toivottu epäyhtälö. Mutta asiointila on toivotunlainen, sillä onhan

$$2 \geq 1 \geq 0, \quad \frac{5}{3} \geq \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3},$$

$$\frac{4}{3} \geq \frac{4}{3} \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{3} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}, \quad \text{ja} \quad 1 \geq 1 \geq 1,$$

sekä

$$\begin{aligned} 2 + 1 + 0 &= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + 1 + 1 = 3, \end{aligned}$$

sekä vielä

$$2 \geq \frac{5}{3}, \quad 2 + 1 = 3 \geq \frac{7}{3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3},$$

ja

$$2 \geq \frac{4}{3}, \quad 2 + 1 = 3 \geq \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3},$$

ja vielä

$$\frac{7}{3} \geq 1, \quad \text{ja} \quad \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \geq 2 = 1 + 1. \quad \square$$

Esimerkki 7. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja, joille $abc = 1$. Osoita, että

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ratkaisu. Kertomalla epäyhtälö puolittain ilmeisellä tulolla $4(1+a)(1+b)(1+c)$ se saa muodon

$$\begin{aligned} 4a^3(1+a) + 4b^3(1+b) + 4c^3(1+c) \\ \geq 3(1+a)(1+b)(1+c), \end{aligned}$$

mikä kertomalla kaiken auki muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} 4(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^3 + b^3 + c^3) \\ \geq 3 + 3(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) + 3abc, \end{aligned}$$

missä kertomalla termejä sopivilla tulon $abc = 1$ potensseilla niin, että kaikki termit ovat samaa astetta 4, voimme kirjoittaa tämän muodossa

$$\begin{aligned} & 4(a^4 + b^4 + c^4) \\ & + 4(a^{10/3}b^{1/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{10/3}c^{1/3} + a^{1/3}b^{1/3}c^{10/3}) \\ & \geq 3(a^2bc + ab^2c + abc^2) + 6a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3} \\ & + 3(a^{5/3}b^{5/3}c^{2/3} + a^{5/3}b^{2/3}c^{5/3} + a^{2/3}b^{5/3}c^{5/3}), \end{aligned}$$

tai vielä yksinkertaisemmin muodossa

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\text{sym}} a^4 + 2 \sum_{\text{sym}} a^{10/3}b^{1/3}c^{1/3} \\ & \geq \frac{3}{2} \sum_{\text{sym}} a^2bc + \sum_{\text{sym}} a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3} + \frac{3}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3}b^{5/3}c^{2/3}. \end{aligned}$$

Tämä puolestaan seuraa Muirheadin epäyhtälöstä, jos vain sattuu olemaan

$$\left\langle \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \succ \left\langle \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle \succ \left\langle \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\rangle$$

ja

$$\langle 4, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 1 \rangle \succ \left\langle \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\rangle,$$

koska silloin voimme arvioida

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\text{sym}} a^{10/3}b^{1/3}c^{1/3} \\ & \geq \frac{3}{2} \sum_{\text{sym}} a^{5/3}b^{5/3}c^{2/3} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3}, \end{aligned}$$

ja

$$2 \sum_{\text{sym}} a^4 \geq \frac{3}{2} \sum_{\text{sym}} a^2bc + \frac{1}{2} \sum_{\text{sym}} a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3}.$$

Mutta yllä mainitut pätevät, sillä onhan

$$\begin{aligned} \frac{10}{3} & \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{3} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{2}{3}, \\ \frac{4}{3} & \geq \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3}, \quad 4 \geq 0 \geq 0, \quad \text{ja} \quad 2 \geq 1 \geq 1, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{10}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\ & = 4 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 = 4, \end{aligned}$$

ja vielä

$$\frac{10}{3} \geq \frac{5}{3} \geq \frac{4}{3},$$

ja

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \geq \frac{10}{3} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} \geq \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3},$$

samoin kuin

$$4 \geq 2 = \frac{6}{3} \geq \frac{4}{3},$$

sekä

$$4 + 0 = 4 \geq 3 = 2 + 1 = \frac{9}{3} \geq \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}. \quad \square$$

Esimerkki 8. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalityyppisiä lukuja, joille $abc = 1$. Todista, että

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ratkaisu. Kertomalla puolittain tulolla

$$2a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a)$$

saamme todistettavalle epäyhtälölle ekvivalentin muodon

$$\begin{aligned} & 2a^3b^3(b+c)(c+a) + 2b^3c^3(c+a)(a+b) \\ & + 2c^3a^3(a+b)(b+c) \\ & \geq 3a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Kertomalla tulot auki ja ryhmittelemällä termit uudelleen todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\begin{aligned} & 2(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4) \\ & + 2(a^3b^3c^2 + a^3b^2c^3 + a^2b^3c^3) \\ & + 2(a^4b^3c + a^3b^4c + a^4b^3c^3 \\ & + a^3b^4c^4 + a^4b^3c^3 + a^4b^3c^4) \\ & \geq 3a^3b^3c^3(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) \\ & + 6a^4b^4c^4. \end{aligned}$$

Ottaen huomioon, että $abc = 1$, voimme oikealla puolella jakaa huoletta tulolla $a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3}$ niin, että molemmat puolet ovat homogeenisia ja astetta 8, ja kirjoittaa todistettavan epäyhtälön symmetristen summien avulla muodossa

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{sym}} a^4b^4 + \sum_{\text{sym}} a^3b^3c^2 + 2 \sum_{\text{sym}} a^4b^3c \\ & \geq 3 \sum_{\text{sym}} a^{11/3}b^{8/3}c^{5/3} + \sum_{\text{sym}} a^{8/3}b^{8/3}c^{8/3}. \end{aligned}$$

Tämä seuraa suoraan Muirheadin epäyhtälöstä, jos pätee

$$\langle 4, 4, 0 \rangle \succ \left\langle \frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right\rangle, \quad \langle 4, 3, 1 \rangle \succ \left\langle \frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3} \right\rangle,$$

sekä

$$\langle 3, 3, 2 \rangle \succ \left\langle \frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right\rangle.$$

Mutta nämä pitävät kuin pitävätkin paikkansa, sillä onhan tietenkin

$$\begin{aligned} 4 \geq 4 \geq 0, \quad \frac{11}{3} \geq \frac{8}{3} \geq \frac{5}{3}, \quad 4 \geq 3 \geq 1, \\ 3 \geq 3 \geq 2, \quad \text{ja} \quad \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} 4 + 4 + 0 &= \frac{11}{3} + \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = 4 + 3 + 1 \\ &= 3 + 3 + 2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 8, \end{aligned}$$

sekä vielä

$$4 = \frac{12}{3} \geq \frac{11}{3}, \quad 4 + 4 = 8 = \frac{24}{3} \geq \frac{19}{3} = \frac{11}{3} + \frac{8}{3},$$

ja

$$4 = \frac{12}{3} \geq \frac{11}{3}, \quad 4 + 3 = 7 = \frac{21}{3} \geq \frac{19}{3} = \frac{11}{3} + \frac{8}{3},$$

sekä vielä

$$3 = \frac{9}{3} \geq \frac{8}{3}, \quad \text{ja vielä} \quad 3 + 3 = \frac{18}{3} \geq \frac{16}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3}. \quad \square$$

Muirheadin epäyhtälön rajoituksista

Muirheadin epäyhtälö ratkaisee mukavasti ongelman yhdenlaisesta termistä $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ symmetrisoimalla saatujen summien mahdollisista epäyhtälöistä. Kuitenkin verrattaessa symmetrisiä lausekkeita, joissa esiintyy useammanlaisia termejä, ei Muirheadin epäyhtälö enää tavoita kaikkia epäyhtälöitä. Esimerkiksi Schurin epäyhtälö eksponentille 3 sanoo, että epänegatiivisille reaalityyppisille a, b ja c pätee

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \\ \geq a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2. \end{aligned}$$

Koska tässä esiintyville eksponenttijonoille pätee

$$\langle 3, 0, 0 \rangle \succ \langle 2, 1, 0 \rangle \succ \langle 1, 1, 1 \rangle,$$

pätee Muirheadin epäyhtälön nojalla epäyhtälöt

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq \\ &\frac{1}{2} (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2), \end{aligned}$$

ja

$$3abc \leq \frac{1}{2} (a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2),$$

missä jälkimmäisessä epäyhtälössä epäyhtälömerkin järjestys on eri kuin Schurin epäyhtälössä, ja siis Schurin epäyhtälö ei ole välitön Muirheadin epäyhtälön seuraus. Itse asiassa Schurinkin epäyhtälö ehdottomasti kannattaa pitää käsien ulottuvilla Muirheadin epäyhtälöä käyttäessään.

Muirheadin epäyhtälön todistus

On tullut aika todistaa Muirheadin epäyhtälö. Todistuksen ajatuksena on muokata siinä esiintyvää eksponenttijonoa α muokkaamalla kahta eksponenttia kerrallaan niin, että vastaavan symmetrisen summan arvo ei voi kasvaa, ja niin että eksponentit yksi tai kaksi kerrallaan muuttuvat eksponenteiksi β . Todistamme ensin Lemman 9, joka toteuttaa tämän kahden eksponentin muokkauksen. Tämä lemma on selvästi mutkikkain osa todistusta. Kun se on todistettu, Muirheadin epäyhtälö seuraa suoraan käyttämällä lemmaa toistuvasti, kunnes jono α on muuttunut jonoksi β .

Ennen lemmaa ja sen todistusta esittelemme vielä yhden merkinnän: Kun n on positiivinen kokonaisluku ja $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ ovat kaksi jonoa, jotka kummatkin koostuvat n reaalityyppisestä, niin merkitsemme niiden erisuurten vastaavien lukujen lukumäärää $r(\alpha, \beta)$. Tarkemmin, $r(\alpha, \beta)$ on niiden indeksien $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ lukumäärä, joille $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$.

Lemma 9. *Olko n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ja $\beta = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ epänegatiivisten reaalityyppisten jonoja, joissa kummassakin on n lukua vähenevässä järjestyksessä, ja joille $\alpha \succ \beta$ ja $\alpha \neq \beta$. Tällöin on olemassa n epänegatiivisen reaalityyppisen vähenevä jono $\gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ niin, että pätee $\gamma \succ \beta$, että $r(\beta, \gamma) < r(\beta, \alpha)$, ja että*

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n}$$

kaikille epänegatiivisille reaalityyppisille $x_1, \dots, x_n$. Lisäksi positiivisille reaalityyppisille $x_1, \dots, x_n$ tässä vallitsee yhtäsuuruus jos ja vain jos $x_1 = \dots = x_n$.

Tässä $\alpha \neq \beta$ tarkoitti siis sitä, että $\alpha_\ell \neq \beta_\ell$ ainakin yhdelle $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ehto $r(\beta, \gamma) < r(\beta, \alpha)$ tarkoittaa sitä, että eksponenttien jonoilla β ja γ on enemmän yhteisiä eksponentteja samoissa kohdissa jonoja kuin eksponenttien jonoilla β ja α .

Lemman 9 todistus. Jonon γ konstruktio on selvästi mutkikkain asia, mitä teemme tässä artikkelissa. Pohjimmiltaan kyse on kuitenkin luonnollisesta asiasta: valitsemalla huolellisesti ja sopivasti kaksi eri lukua jonosta α voimme liu'uttaa niitä samaa tahtia toisiaan kohti, kunnes ainakin toinen niistä on yhtä suuri kuin vastaava luku jonossa β . Tämä liu'utettu jono on sitten γ , ja loppuosa todistuksesta kuluu sen tarkistamiseen, että sillä todella on kaikki toivotut ominaisuudet. Selvästi jonossa γ tulee olemaan yksi tai kaksi yhteistä eksponenttia jonon β kanssa enemmän kuin jonolla α oli.

No niin, aloittakaamme. Koska $\alpha \succ \beta$, on

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n,$$

jolloin myös

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) + \dots + (\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

Tarkastellaan näiden erotusten jonoa

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n - \beta_n.$$

Koska $\alpha \neq \beta$, ainakin yksi näistä erotuksista on nollasta poikkeava. Koska kaikkien erotusten summa on nolla, on jonossa esiinnyttävä sekä positiivisia että negatiivisia erotuksia.

Lisäksi vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus jonossa on positiivinen: Nimittäin, jos $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ on se indeksi, jolle $\alpha_v - \beta_v$ on vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus jonossa, niin

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{v-1} = \beta_{v-1},$$

ja toisaalta, koska oli $\alpha \succ \beta$, on

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v,$$

mistä välittömästi seuraakin, että $\alpha_v \geq \beta_v$. Koska $\alpha_v \neq \beta_v$, on siis $\alpha_v - \beta_v > 0$.

Olkoon seuraavaksi $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ se indeksi, jolle erotus $\alpha_\ell - \beta_\ell$ on vasemmanpuoleisin negatiivinen luku jonossa. Toisin sanoen, olkoon $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ se luku, jolle

$$\alpha_1 \geq \beta_1, \quad \alpha_2 \geq \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{\ell-1} \geq \beta_{\ell-1}, \quad \alpha_\ell < \beta_\ell.$$

Koska vasemmanpuoleisin nollasta poikkeava erotus oli positiivinen, on oltava $v < \ell$, ja erityisesti $\ell \geq 2$.

Voimme nyt valita indeksin $k \in \{1, 2, \dots, \ell - 1\}$ niin, että erotus $\alpha_k - \beta_k$ on oikeanpuoleisin positiivinen erotus osajonossa

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{\ell-1} - \beta_{\ell-1}.$$

Nyt meillä on siis indeksit $k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, joille $1 \leq k < \ell \leq n$, ja

$$\alpha_k > \beta_k, \quad \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad \alpha_{k+2} = \beta_{k+2}, \quad \dots, \\ \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1}, \quad \alpha_\ell < \beta_\ell.$$

Nyt ajatuksemme on kutistaa lukua α_k ja suurentaa lukua α_ℓ , pitäen summa $\alpha_k + \alpha_\ell$ vakiona, kunnes α_k on muuttunut luvuksi β_k , tai α_ℓ luvuksi β_ℓ . Molemmat voivat toteutua samanaikaisesti.

Tehdäksemme tämän täsmällisesti asetamme

$$\rho = \frac{\alpha_k + \alpha_\ell}{2} \quad \text{ja} \quad \tau = \frac{\alpha_k - \alpha_\ell}{2},$$

jolloin siis

$$\alpha_k = \rho + \tau, \quad \text{ja} \quad \alpha_\ell = \rho - \tau.$$

Liu'utuksen määrä tulee olemaan $\tau - \sigma$, missä

$$\sigma = \max \{ |\beta_k - \rho|, |\beta_\ell - \rho| \}.$$

Koska

$$\alpha_k > \beta_k \geq \beta_\ell > \alpha_\ell,$$

on $\tau > 0$, ja koska $\alpha_\ell \geq 0$, on $\tau \leq \rho$. Varmasti $\sigma \geq 0$, sillä sen määritelmässä esiintyvät itseisarvot ovat tietenkin aina epänegatiivisia. On

$$-\tau = \alpha_\ell - \rho < \beta_\ell - \rho \leq \beta_k - \rho < \alpha_k - \rho = \tau,$$

joten myös

$$\sigma = \max \{ |\beta_k - \rho|, |\beta_\ell - \rho| \} < \tau.$$

Koska

$$-\sigma \leq \beta_\ell - \rho \leq \beta_k - \rho \leq \sigma,$$

ja koska ainakin toisen erotuksista $\beta_\ell - \rho$ ja $\beta_k - \rho$ on oltava $+\sigma$ tai $-\sigma$, on itse asiassa oltava

$$-\sigma = \beta_\ell - \rho \quad \text{tai} \quad \beta_k - \rho = \sigma.$$

Joka tapauksessa siis ainakin toinen yhtäsuuruuksista

$$\beta_\ell = \rho - \sigma \quad \text{ja} \quad \beta_k = \rho + \sigma$$

pätee. Lisäksi aina

$$\rho - \sigma \leq \beta_\ell \leq \beta_k \leq \rho + \sigma.$$

Määrittelemme nyt toivotun jonon $\gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ asettamalla

$$\begin{cases} \gamma_1 = \alpha_1, & \gamma_2 = \alpha_2, & \dots & \gamma_{k-1} = \alpha_{k-1}, \\ \gamma_k = \rho + \sigma, \\ \gamma_{k+1} = \alpha_{k+1}, & \gamma_{k+2} = \alpha_{k+2}, & \dots, & \gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1}, \\ \gamma_\ell = \rho - \sigma, \\ \gamma_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1}, & \gamma_{\ell+2} = \alpha_{\ell+2}, & \dots & \gamma_n = \alpha_n. \end{cases}$$

Pätee $\gamma_\ell = \beta_\ell$ tai $\gamma_k = \beta_k$, jolloin

$$r(\beta, \gamma) = r(\beta, \alpha) - 1,$$

jos vain yksi niistä pätee, ja

$$r(\beta, \gamma) = r(\beta, \alpha) - 2,$$

jos molemmat pätevät. Joka tapauksessa siis varmasti

$$r(\beta, \gamma) < r(\beta, \alpha).$$

Koska $\sigma < \tau \leq \rho$, on $\gamma_\ell \geq 0$, ja on varsin selvää, että nyt

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \dots, \quad \gamma_n \geq 0.$$

Osoitamme seuraavaksi, että $\gamma \succ \beta$. Ensinnäkin,

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_{k-1},$$

koska

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{k-1}.$$

Lisäksi, $\gamma_{k-1} \geq \gamma_k$, sillä

$$\gamma_{k-1} = \alpha_{k-1} \geq \alpha_k = \rho + \tau > \rho + \sigma = \gamma_k,$$

jos siis sattuu olemaan $k \geq 2$. Jos $\ell = k + 1$, niin luonnollisesti

$$\gamma_k = \rho + \sigma \geq \rho - \sigma = \gamma_\ell = \gamma_{k+1}.$$

Jos taas $\ell > k + 1$, niin

$$\gamma_k = \rho + \sigma \geq \beta_k \geq \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = \gamma_{k+1},$$

ja

$$\gamma_{k+1} \geq \gamma_{k+2} \geq \dots \geq \gamma_{\ell-1},$$

sillä

$$\alpha_{k+1} \geq \alpha_{k+2} \geq \dots \geq \alpha_{\ell-1},$$

ja vielä

$$\gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1} \geq \beta_\ell \geq \rho - \sigma = \gamma_\ell.$$

Lopuksi, jos $\ell < n$, niin

$$\gamma_\ell = \rho - \sigma > \rho - \tau = \alpha_\ell \geq \alpha_{\ell+1} = \gamma_{\ell+1},$$

ja

$$\gamma_{\ell+1} \geq \gamma_{\ell+2} \geq \dots \geq \gamma_n,$$

sillä

$$\alpha_{\ell+1} \geq \alpha_{\ell+2} \geq \dots \geq \alpha_n.$$

Siispä kaiken kaikkiaan

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n.$$

Lisäksi, muistaen, että

$$\gamma_k + \gamma_\ell = \rho + \sigma + \rho - \sigma = 2\rho = \rho + \tau + \rho - \tau = \alpha_k + \alpha_\ell,$$

näemme, että

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k + (\gamma_{k+1} + \dots + \gamma_{\ell-1}) \\ &\quad + \gamma_\ell + (\gamma_{\ell+1} + \dots + \gamma_n) \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) + \alpha_k + (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{\ell-1}) \\ &\quad + \alpha_\ell + (\alpha_{\ell+1} + \dots + \alpha_n) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n. \end{aligned}$$

Todistamme seuraavaksi, että

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$$

jokaisella $\nu \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jos $\nu < k$, niin

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_\nu = \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu \geq \beta_1 + \dots + \beta_\nu.$$

Jos $\nu = k$, niin

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \dots + \gamma_\nu &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k \\ &\geq (\beta_1 + \dots + \beta_{k-1}) + \beta_k = \beta_1 + \dots + \beta_\nu. \end{aligned}$$

Jos $\nu \in \{k+1, k+2, \dots, \ell-1\}$, niin, muistaen, että oli

$$\gamma_{k+1} = \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \quad \dots, \quad \gamma_{\ell-1} = \alpha_{\ell-1} = \beta_{\ell-1},$$

on

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \dots + \gamma_\nu &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_k) + (\gamma_{k+1} + \dots + \gamma_\nu) \\ &\geq (\beta_1 + \dots + \beta_k) + (\beta_{k+1} + \dots + \beta_\nu) \\ &= \beta_1 + \dots + \beta_\nu. \end{aligned}$$

Lopuksi, jos $\nu \geq \ell$, niin muistaen, että $\gamma_k + \gamma_\ell = \alpha_k + \alpha_\ell$, on

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \dots + \gamma_\nu &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_{k-1}) + \gamma_k + (\gamma_{k+1} + \dots + \gamma_{\ell-1}) \\ &\quad + \gamma_\ell + (\gamma_{\ell+1} + \dots + \gamma_\nu) \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}) + \alpha_k + (\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{\ell-1}) \\ &\quad + \alpha_\ell + (\alpha_{\ell+1} + \dots + \alpha_\nu) \\ &= \alpha_1 + \dots + \alpha_\nu \geq \beta_1 + \dots + \beta_\nu. \end{aligned}$$

Ja kas näin olemme todistaneet, että $\gamma \succcurlyeq \beta$.

Todistettavanamme on enää lemmän epäyhtälö ja sen yhtäsuuruusehto. Todistetaan epäyhtälö ensin. Se seuraa tarkastelemalla erotusta

$$\mathcal{E} = 2 \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} - 2 \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n},$$

missä siis $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat mielivaltaisia epänegatiivisia reaalityyppisiä. Haluaisimme siis osoittaa, että $\mathcal{E} \geq 0$. Tämän voi tehdä muokkaamalla erotus muotoon, jossa epänegatiivisuus on ilmeistä. Nimittäin, otamalla yhteisiä tekijöitä ilmeisellä tavalla, $\mathcal{E}$ on

$$\begin{aligned} &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\alpha_\ell} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad + \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\alpha_\ell} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \dots x_{\ell-1}^{\alpha_{\ell-1}} x_\ell^{\alpha_k} x_{\ell+1}^{\alpha_{\ell+1}} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad - \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\gamma_k} x_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \dots x_{\ell-1}^{\gamma_{\ell-1}} x_\ell^{\gamma_\ell} x_{\ell+1}^{\gamma_{\ell+1}} \dots x_n^{\gamma_n} \\ &\quad - \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} x_k^{\gamma_\ell} x_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \dots x_{\ell-1}^{\gamma_{\ell-1}} x_\ell^{\gamma_k} x_{\ell+1}^{\gamma_{\ell+1}} \dots x_n^{\gamma_n} \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \dots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \dots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \dots x_n^{\alpha_n} \\ &\quad \cdot (x_k^{\alpha_k} x_\ell^{\alpha_\ell} + x_k^{\alpha_\ell} x_\ell^{\alpha_k} - x_k^{\gamma_k} x_\ell^{\gamma_\ell} - x_k^{\gamma_\ell} x_\ell^{\gamma_k}), \end{aligned}$$

missä sirkumfleksi $\widehat{}$ tekijöiden $x_k^{\alpha_k}$ ja $x_\ell^{\alpha_\ell}$ päällä tarkoittaa, että ne unohdetaan tulosta $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Nyt

voimme jatkaa jakamalla summattavien termien viimeisen tekijän yksinkertaisemmiksi tekijöiksi:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\cdot (x_k^{\rho+\tau} x_\ell^{\rho-\tau} + x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho+\tau} - x_k^{\rho+\sigma} x_\ell^{\rho-\sigma} - x_k^{\rho-\sigma} x_\ell^{\rho+\sigma}) \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\cdot x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho-\tau} (x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}) (x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma}).\end{aligned}$$

Tässä summassa jokaisen termin jokainen tekijä, mahdollisesti kahta viimeistä tekijää $x_k^{\tau\pm\sigma} - x_\ell^{\tau\pm\sigma}$ lukuun ottamatta, on epänegatiivinen. Jos $x_k \geq x_\ell$, niin kaksi viimeistäkin tekijää ovat epänegatiivisia, ja vastaava termi siis myös epänegatiivinen. Jos taas $x_k < x_\ell$, niin kaksi viimeistä tekijää ovat molemmat negatiivisia, ja niiden tulo siis positiivinen. Joka tapauksessa summassa $\sum_{\text{sym}}$ jokainen termi on epänegatiivinen, ja siis $\mathcal{E} \geq 0$, kuten pitikin.

Lopuksi, meidän riittää enää todistaa yhtäsuuruusehto. Olkoot sitä varten $x_1, \dots, x_n$ positiivisia reaalityyppisiä, joille

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \cdots x_n^{\gamma_n}.$$

Tällöin yllä määritelty lauseke $\mathcal{E}$ on nolla, ja jo tehtyjen laskujen perusteella itse asiassa pätee

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{x_k^{\alpha_k}} \cdots \widehat{x_\ell^{\alpha_\ell}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &\cdot x_k^{\rho-\tau} x_\ell^{\rho-\tau} (x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}) (x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma}).\end{aligned}$$

Lisäksi tiedämme jo, että jokainen termi tässä summassa on epänegatiivinen. Koska termien summa on nolla, on siis jokaisen termin oltava nolla. Koska kaikki muuttujat $x_1, \dots, x_n$ olivat positiivisia, tarkoittaa tämä sitä, että jokaisessa termissä tulo

$$(x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma}) (x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma})$$

on nolla, jolloin siis on oltava

$$x_k^{\tau+\sigma} - x_\ell^{\tau+\sigma} = 0 \quad \text{tai} \quad x_k^{\tau-\sigma} - x_\ell^{\tau-\sigma} = 0.$$

Molemmista ehdoista seuraa $x_k = x_\ell$. Koska summassa käydään läpi kaikki lukujen $x_1, \dots, x_n$ uudelleenjärjestelyt, tarkoittaa tämä sitä, että $x_\kappa = x_\lambda$ kaikille indeksipareille $\kappa, \lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$, joille $\kappa \neq \lambda$, ja tietenkin silloin $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Lopuksi, koska on helppo tarkistaa, että näiden yhtäsuuruuksien vallitessa epäyhtälössä varmasti pätee yhtäsuuruus, olemme valmiit ja lemma on viimein todistettu. $\square$

Muirheadin epäyhtälön todistus. Jos pätee $\alpha = \beta$, niin epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuret, ja asia on selvä. Olettakaamme siis, että $\alpha \neq \beta$. Lemma 9 antaa silloin n epänegatiivisen reaalityyppisen vähenevän

jono $\gamma_1 = \langle \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,n} \rangle$, jolle $\gamma_1 \succ \beta$, ja $r(\beta, \gamma_1) < r(\beta, \alpha)$, ja vielä

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}}$$

kaikille epänegatiivisille reaalityyppisille $x_1, \dots, x_n$, ja missä yhtäsuuruus pätee positiivisilla reaalityyppisillä $x_1, \dots, x_n$ täsmälleen silloin, kun $x_1 = \dots = x_n$.

Nyt, jos $\gamma_1 = \beta$, olemme valmiit. Oletetaan siis, että $\gamma_1 \neq \beta$. Tällöin löytyy samassa hengessä n epänegatiivisen reaalityyppisen vähenevä jono $\gamma_2 = \langle \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,n} \rangle$ niin, että $\gamma_2 \succ \beta$, $r(\beta, \gamma_2) < r(\beta, \gamma_1)$, ja

$$\sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}} \geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{2,1}} x_2^{\gamma_{2,2}} \cdots x_n^{\gamma_{2,n}}$$

kaikille epänegatiivisille reaalityyppisille $x_1, \dots, x_n$, ja missä yhtäsuuruus jälleen vallitsee positiivisilla reaalityyppisillä $x_1, \dots, x_n$ vain ja ainoastaan silloin, kun $x_1 = \dots = x_n$.

Jälleen, jos $\gamma_2 = \beta$, olemme valmiit. Jos taas $\gamma_2 \neq \beta$, niin jatkamme samassa hengessä käyttäen lemmaa 9 uudelleen ja uudelleen. Koska jokaisessa askeleessa saadaan uusi eksponenttijono, jolla on enemmän yhteisiä eksponentteja samoissa kohdissa jonon β kanssa kuin aiemmilla, ei prosessi voi jatkua ikuisesti, ja lopulta saamme lemmasta 9 ulos itse eksponenttijonon β . Näin saamme jonon n epänegatiivisen reaalityyppisen väheneviä jonoja

$$\gamma_1 = \langle \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,n} \rangle,$$

$$\gamma_2 = \langle \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}, \dots, \gamma_{2,n} \rangle,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\gamma_{N-1} = \langle \gamma_{N-1,1}, \gamma_{N-1,2}, \dots, \gamma_{N-1,n} \rangle,$$

$$\gamma_N = \langle \gamma_{N,1}, \gamma_{N,2}, \dots, \gamma_{N,n} \rangle,$$

missä N on positiivinen kokonaisluku, niin, että

$$\alpha \succ \gamma_1 \succ \gamma_2 \succ \dots \succ \gamma_{N-1} \succ \gamma_N = \beta,$$

ja

$$\begin{aligned}\sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{1,1}} x_2^{\gamma_{1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{1,n}} \\ &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{2,1}} x_2^{\gamma_{2,2}} \cdots x_n^{\gamma_{2,n}} \\ &\geq \dots \\ &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{N-1,1}} x_2^{\gamma_{N-1,2}} \cdots x_n^{\gamma_{N-1,n}} \\ &\geq \sum_{\text{sym}} x_1^{\gamma_{N,1}} x_2^{\gamma_{N,2}} \cdots x_n^{\gamma_{N,n}} \\ &= \sum_{\text{sym}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}.\end{aligned}$$

Lisäksi, jos luvut $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat kaikki positiivisia, niin lemma 9 takaa, että jokaisessa näistä epäyhtälöistä vallitsee yhtäsuuruus vain ja ainoastaan silloin, kun $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. $\square$

Haasteita lukijalle

Ongelma 1. Olkoot a , b ja c epänegatiivisia reaalitykkuja. Osoita, että

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Ongelma 2. Olkoot a , b ja c epänegatiivisia reaalitykkuja. Osoita, että

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

Ongelma 3. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalitykkuja, joille $abc = 1$. Todista, että

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Ongelma 4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jolle $n \geq 2$, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ epänegatiivisia reaalitykkuja. Osoita, että

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a_i a_j} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ongelma 5. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalitykkuja. Todista Nesbittin epäyhtälö

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ongelma 6. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalitykkuja. Todista, että

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ongelma 7. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalitykkuja. Todista, että

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Lähteistä ja kirjallisuudesta

Yllä annettu Muirheadin epäyhtälön todistus seuraa oleellisesti ottaen klassikkoteoksen [7] esitystä. Mainitakoon, että [7] tarkastelee mielenkiintoisella tavalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä Muirheadin epäyhtälön todistuksen valossa.

Esimerkki 1 on oleellisesti ottaen kirjan [7] esimerkki 78 ja esimerkki 5 sen lause 79. Esimerkit 3 ja 8 ovat tehtävät 12.8 ja 12.11 kirjassa [2]. Esimerkki 6 on teoksen [1] esimerkki 6.14, ja esimerkki 7 sen harjoitustehtävä 6d.6.

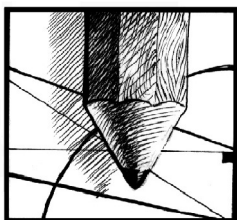
Ongelmat 1, 2 ja 4 ovat tehtävät 12.2(a), 12.3 ja 12.2(c) kirjassa [10]. Ongelmat 2 ja 5 ovat esimerkit 6.12 ja 6.13

teoksessa [1], ja ongelma 6 on saman teoksen tehtävä 6d.4. Lopuksi, ongelma 7 on harjoitustehtävä 12.9 kirjassa [2].

Luonnollisesti Muirheadin epäyhtälön kanssa voi käyttää muitakin klassisia epäyhtälöitä, kuten vaikkapa aritmeettis-geometrista epäyhtälöä tai Schurin epäyhtälöä. Klassisia epäyhtälöitä on käsitelty monien muiden teosten ohella kirjoissa [1, 2, 7, 8, 10], Solmun sivuilla artikkeleissa [3, 4, 5, 6], ja Internetissä vaikkapa matematiikan olympiavalmennuksen materiaalisivuilla [9, 11].

Viitteet

- [1] BRADLEY, C. J.: *Introduction to Inequalities*, Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010.
- [2] CVETKOVSKI, Z.: *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.
- [3] ERNVALL-HYTÖNEN, A.-M.: *Aritmeettinen ja geometrisen keskiarvo*, Solmu, 1/2016, 27–30.
- [4] HALMETOJA, M.: *Epäyhtälöistä, osa 1*, Solmu, 2/2010, 11–14.
- [5] HALMETOJA, M.: *Epäyhtälöistä, osa 2*, Solmu, 3/2010, 18–22.
- [6] HALMETOJA, M.: *Karamatan epäyhtälö*, Solmu, 3/2013, 24–28.
- [7] HARDY, G., J. E. LITTLEWOOD, ja G. PÓLYA: *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1952.
- [8] HUNG, P. K.: *Secrets in Inequalities: volume 1 — basic inequalities*, GIL Publishing House, 2007.
- [9] LAPPALAINEN, J., ja A.-M. ERNVALL-HYTÖNEN: *Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin*, <http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf>.
- [10] STEELE, J. M.: *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Mathematical Association of America Problem Books Series, Cambridge University Press, 2004.
- [11] VADERLIND, P.: *Epäyhtälöiden kieltämätön viehätyks: lyhyt opastettu kierros algebrallisten epäyhtälöiden viidakkoon*, <http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf>.



Lisäys rinkulan pisteisiin

Hannu Korhonen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen kirjoitti rinkulan pisteistä Solmussa 3/2017.¹ Aiheena oli niiden kokonaislukupisteiden lukumäärä, joiden etäisyys d origosta on $r < d \leq r + 1$, missä $r \in \mathbb{N}$. Tehdä on läheistä sukua Gaussin ympyräprobleemalle (ks. esimerkiksi <http://mathworld.wolfram.com/GaussCircleProblem.html>) ja ratkaistavissa tämän tunnetun ratkaisun avulla. Kaiken saa puristetuksi yhdeksi Geogebra-tiedostoksi <https://www.geogebra.org/m/huhyjm2e>, kuva 1.

Rinkulan pisteiden määriä voidaan laskea esimerkiksi verkossa sivulla <https://oeis.org/A000328> olevista Gaussin ympyräprobleeman ratkaisujen arvoista. Ernvall-Hytönen on taulukoinut artikkeliinsa rinkulan pinta-alan ja pisteiden määrän r :n arvoilla 0-10. Siitä näkyy, että rinkulan pinta-ala antaa kohtuullisen arvon rinkulaan sisältyvien kokonaislukupisteiden määrälle, vaikka hän ei sitä suoraan sanokaan. Ensimmäisten 45 rinkulan kohdalla pinta-alaan perustuvan kokonaislukupisteiden määrän likiarvon suhteellinen virhe vaihtelee OEIS:n listan perusteella laskien välillä 0-13 prosenttia, keskimäärin noin kuusi prosenttia.

Geogebra laskee ensimmäiset sata lukumäärää suhteellisen vaivattomasti. Peräkkäisten arvojen määrä vaihtelee huomattavasti, sillä esimerkiksi r :n arvoilla 98, 99 ja 100 Geogebra antaa lukumäärät 608, 660 ja 600. Pinta-alan antama lukumäärän arvio poikkeaa näistä 2, -5 ja -4 prosenttia.

Intuitiivisesti ajatellen tuntuu luonnolliselta, että kokonaislukupisteitä olisi keskimäärin yksi yksikköneliön kokoista rinkulan osaa kohti, sillä taso voidaan täyttää yksikköneliöillä, joiden keskipisteenä on kokonaislukupiste. Geogebralla voidaan tutkia tätä suurillakin r :n arvoilla. Jaetaan esimerkiksi r :n arvolla 1000 synnyvä rinkula origosta lähtevillä puolisuorilla likimäärin yksikköneliön kokoihin osiin, siis tässä tapauksessa 6283 puolisuoralla. y -akselin läheisyydessä kutakin osaa kohti on selvästi yksi kokonaislukupiste. Rinkulan osat ovat aluksi niin lähellä koordinaatistoruudun yksikköneliöitä, että ero ei näy kuvassa. Ympyräviivan kaartuminen alkaa näkyä vasta, kun x -koordinaatti lähestyy kymmentä, puolisuorien osien eroaminen koordinaatistoruudun pystyviivoista ei vielä sittenkään, <https://www.geogebra.org/m/pzbrbhd>, kuva 2.

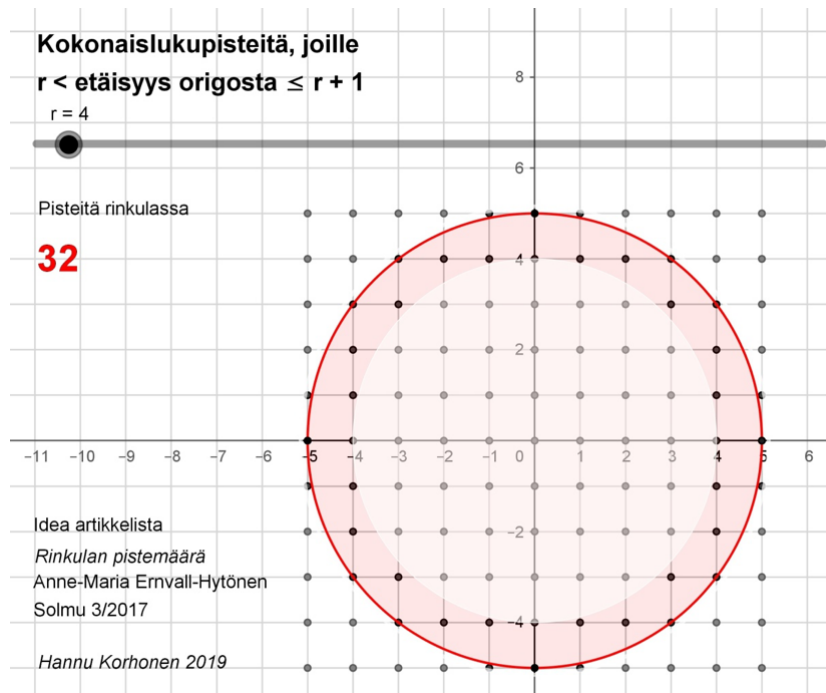
Näin säännöllistä kokonaislukupisteiden sijoittuminen ei suinkaan ole muualla. Esimerkiksi suoran $y = x$ läheisyydessä voi olla neliöitä, jossa ei ole yhtään kokonaislukupistettä, esimerkkinä vihreä ruutu seuraavassa kuvassa, <https://www.geogebra.org/m/vgdrk9am>, kuva 3. Tällainen tarkastelu ei tuota tietenkään mitään uutta varsinaiseen ongelmaan eikä Ernvall-Hytösen tekstiinkään nähden, mutta ehkä auttaa näkemään niitä mahdollisuuksia, joita ilmaisohjelmatkin voivat antaa vanhastaan vain laskemiseen perustuneiden ratkaisujen havainnollistamiseen.

Yksinomaan jo sen hahmottaminen, miltä tilanne näyttää ympyrän $r = 1000$ ja suoran $y = x$ leikkauspisteen

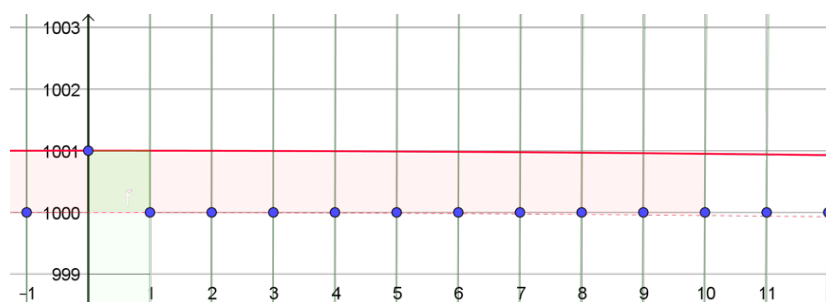
¹<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/3/pistelaskenta.pdf>

lähiympäristössä, saattaa olla vaivan arvoista. Ja sen tietäminen, että kuvan piirtäminen on suhteellisen vai-
vatonta dynaamisilla matematiikkaohjelmilla, on olen-

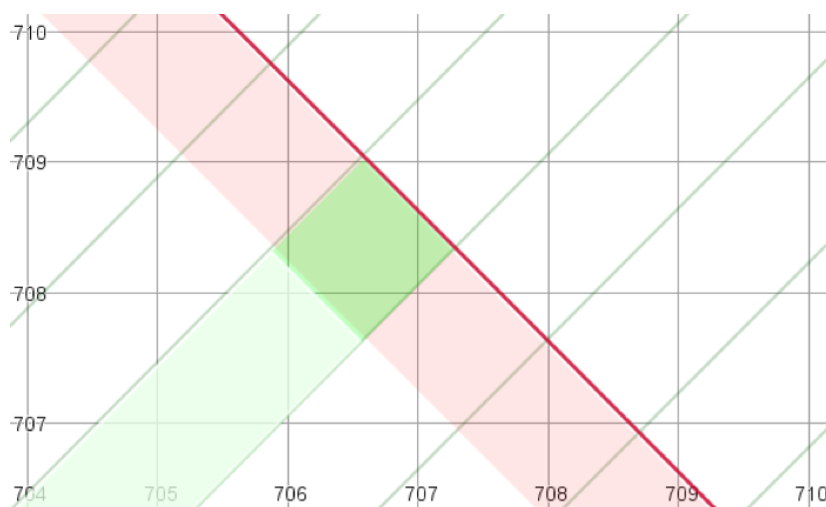
nainen osa niitä kokemuksia, joihin nykyaikainen käsi-
tys matematiikasta ja sen oppimisen mahdollisuuksista
perustuu.



Kuva 1.



Kuva 2.



Kuva 3.

Solmu 3/2019

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkadiplomit:

Juha Ruokolainen, juha piste ruokolainen 'at' yahoo piste com

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Numeroon 1/2020 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.1.2020 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.