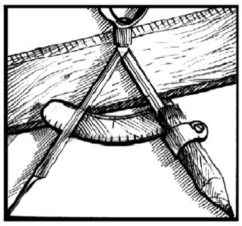

Mikä on hyvä tehtävä?

Jukka Tuomela
Itä-Suomen yliopisto, Joensuu
jukka.tuomela@uef.fi

Sattumalta katsoin lukion matematiikkakilpailun tehtäviä.[1] Seuraava tehtävä tämän vuoden loppukilpailussa innoitti kirjoittamaan tämän jutun.

Ratkaise, mille luvuille x on voimassa

$$x\big(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\big) \le 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x},$$

kun $0 < x \le 1$.

Tämähän on varsin perinteinen tehtävä, jota varmasti edelleen käytetään vaikkapa yliopistojen ja ammattikorkeakoulujen peruskursseilla harjoitustehtävissä ja tenteissä. Mutta onko tämä tehtävä oikeastaan enää mielekäs? Matematiikkakilpailuissa ei kaiketi saa käyttää mitään apuvälineitä, vaan kaikki pitää tehdä kynällä ja paperilla. Mielestäni hyvän tehtävän pitäisi kuitenkin perustua johonkin muuhun kuin siihen, että ”oikeita” apuvälineitä ei saa käyttää.

Tarkastellaan vaikkapa seuraavaa tehtävää:

Olkoon

$$a = 32345734953920504928520598204359840583 49,$$
$$b = 98329527439972527952398573249852439857 27.$$

Laske ab mahdollisimman tarkasti.

Tämähän on varsin haastava tehtävä kynällä ja paperilla, mutta tuskin kovin mielekäs. Sen sijaan logaritmitaulukon tai laskutikun avulla saisi varsin helposti järkevän tuloksen. Jos käyttää logaritmeissa neljää merkitsevää numeroa, niin suhteellinen virhe on promillen luokkaa.

Jos sitten avaan ohjelman wxMaxima,[2] jota saa käyttää ylioppilaskokeessa,[3] vastaus tietysti tulee heti.

Mutta wxMaxima tekee myös tuon kilpailutehtävän vähän hassuksi, jopa kahdella tavalla. Määritellään ensin

$$f(x) = 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x} - x\big(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\big).$$

Suoraan piirtämällä f:n kuvaaja nähdään, että f kasvaa monotonisesti ja ratkaisu on siis muotoa $[b, 1]$, missä $f(b) = 0$. Numeerisesti saadaan $b = 0{,}5999999$, minkä jälkeen suoraan sijoittamalla nähdään, että $f(3/5) = 0$. Tämän jälkeen on helppo tarkistaa vielä, että $f' > 0$ tarkasteltavalla välillä, joten vastaus on todella $[3/5, 1]$.

Mielestäni tämä ratkaisumenetelmä on sellainen, että se helposti tulee lukiolaisen mieleen. Minulle puolestaan tuli mieleen, että tässä vain kynällä ja paperilla pitää laskea sellaista, mikä wxMaximalla ja itse asiassa kai nykyisillä peruslaskimillakin on aivan rutiinijuttu.

[1] https://matematiikkakilpailut.fi/MAOL/
[2] https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/
[3] https://www.ylioppilastutkinto.fi/ylioppilastutkinto/digitaalinen-ylioppilastutkinto/koejarjestelman-ohjelmat

Tässä mielessä tehtävä muistuttaa tuota toista tehtävää, jossa piti laskea kahden luvun tulo ilman logaritmitaulukoita tai muita järkeviä apuvälineitä.

Toinen ratkaisumalli ei varmaankaan ole lukiolaisille tuttu, ellei opettaja ole sattumalta maininnut tällaisista wxMaximan ominaisuuksista. Tämä mielestäni hyvin osoittaa, että ylioppilaskirjoituksissa saattaa jatkossa tulla hyvinkin erityyppisiä ratkaisuja kuin mitä tehtävän laatija on ajatellut. On myös kiinnostavaa verrata tätä tehtävän mallivastaukseen.

Olkoon $y = \sqrt{1-x}$, $z = \sqrt{1+x}$ ja tarkastellaan seuraavaa polynomisysteemiä:

$$\begin{cases} f_0 = 11z - 16y - x(z+8y) = 0, \\ f_1 = y^2 + z^2 - 2 = 0, \\ f_2 = x + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Jos siis löydetään jokin ratkaisu (x_0, y_0, z_0) tälle systeemille, niin x_0 on potentiaalinen ratkaisukandidaatti nollakohdalle b. Koska ei olla varsinaisesti kiinnostuttu muuttujista y ja z, niin eliminoidaan ne. wxMaximassa on komento eliminate, jonka avulla voidaan polynomisysteemeistä eliminoida muuttujia. Kun y ja z eliminoidaan, saadaan

$$g^4 = \left(65x^3 + 171x^2 + 99x - 135\right)^4 = 0.$$

Kun tämän jakaa tekijöihin, saadaan

$$g = (5x-3)(13x^2 + 42x + 45),$$

mikä antaa vastauksen.

Kun on päästy näin pitkälle, niin voisi epäillä, että tuo polynomi g on keskeinen ratkaisun kannalta, ja todellakin mallivastauksessa päädytään tähän polynomiin. Tilanteen voisi kuvailla siten, että on tunnettu algoritmi, jolla g voidaan laskea. Tätä algoritmia ei kuitenkaan kerrota oppilaalle, vaan hänen pitää laskea g jotain ”muuta kautta”. Tässähän tietysti riittää ”korottaa sopivasti neliöön”:

$$\begin{aligned} & f = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (8x+16)\sqrt{1-x} = (11-x)\sqrt{1+x} \quad \Leftrightarrow \\ & (8x+16)^2(1-x) = (11-x)^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \\ & g = 0. \end{aligned}$$

Mallivastauksessa sitten myös jaetaan polynomi g tekijöihin käsin, mikä sekin tuntuu hassulta.

Muuttujien eliminointi esiintyy osatehtävänä hyvin monissa tehtävissä. Tuo eliminointikomento saattaa siis helpottaa yllättävällä tavalla monenlaisia lukiossakin esiintyviä tehtäviä. Annetaan nyt tässä vain pieni esimerkki tämänkaltaisesta tilanteesta.

Kardioidi voidaan esittää napakoordinaateissa yhtälöllä $r = 1 - \cos(\theta)$. Mikä on tämän käyrän yhtälö (x, y)-koordinaateissa?

Ensin saadaan vastaava parametrisoitu käyrä

$$\begin{cases} x = (1 - \cos(\theta))\cos(\theta), \\ y = (1 - \cos(\theta))\sin(\theta). \end{cases}$$

Merkitään sitten $c = \cos(\theta)$ ja $s = \sin(\theta)$, jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} x = (1-c)c, \\ y = (1-c)s, \\ c^2 + s^2 = 1. \end{cases}$$

Eliminoimalla muuttujat c ja s saadaan vastaukseksi

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0.$$

wxMaxima eliminoi muuttujia resultanttien avulla. Tämä itse asiassa ei ole paras tapa, vaan yleisesti ottaen olisi parempi laskea eliminointi-ideaali Gröbner-kantojen avulla. Tämän avulla nähdään, että wxMaximan kilpailutehtävän vastauksessa oleva eksponentti on turha, eikä anna lisäinformaatiota ratkaisun luonteesta.

Luonnollisesti lukiokursseissa ei puhuta polynomi-ideaaleista eikä resultanteista. Kuitenkin modernit laskentamenetelmät, jotka ovat tarjolla lukiolaisille, antavat vahvoja työkaluja sellaisille, jotka osaavat niitä käyttää. Polynomi-ideaaleihin ja Gröbner-kantoihin tutustumisen voi aloittaa erinomaisesta kirjasta [1].

Viitteet

[1] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015.