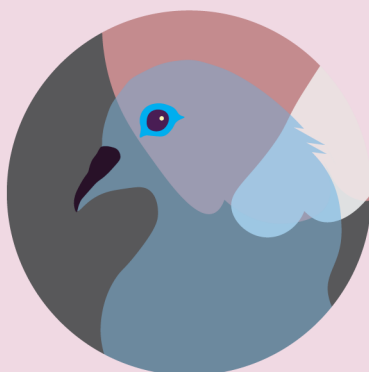


S&LMU

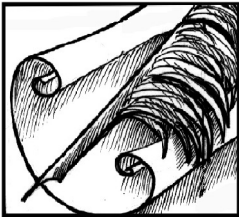
MATEMATIIKKALEHTI 2/2019

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Pitkän matematiikan kirjoittamisesta (Anne-Maria Ernvall-Hytönen).....	3
Laatikkoperiaatteen ihmeitä (Neea Palojärvi).....	5
Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöistä (Esa V. Vesalainen)	7
Heittäydytäänpä filosofiseksi (Tuomas Korppi).....	12
Interpolaatio, käyrän sovitus ja lukujonot (Heikki Apiola)	16
Pätevä päättely, värikkäät sammakot ja ylioppilastehtävä (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) ...	26
EGMO 2019 (Idaliina Kuusisto, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Hilma Tillqvist).....	28



Pitkän matematiikan kirjoittamisesta

Pääkirjoitus

Viime aikoina on jälleen keskusteltu ahkerasti yliopistojen sisäänotosta. Tyypillisesti kyseenalaistetaan se, onko mielekästä, että oikeastaan riippumatta siitä, mihin pyrkii, pitkä matematiikka antaa valtavasti pisteitä.

Matematiikka opettaa loogista ajattelua ja pitkäjänteisyyttä. Niistä on hyötyä kaikessa. Pitkäjänteisyyttä toki oppii myös esimerkiksi vierasta kieltä systemaattisesti opiskelemalla. Monessa paikassa tarvitaan matematiikkaa jossain muodossa, esimerkiksi kielentutkimuksen tilastollisissa menetelmissä.

Pitkässä matematiikassa on 13 valtakunnallista kurssia, eli melkoisesti pitää opiskella, jos haluaa hyvät pisteet ylioppilaskirjoituksista. On vain reilua, että tästä palkitaan. Pitkässä matematiikassa on valtakunnallisia kursseja enemmän kuin missään muussa aineessa. Pitkät aineet paitsi vaativat työtä, myös mahdollisesti karsivat paljon muita mahdollisuuksia pois. Tässä on hyviä ja huonoja puolia, mutta en rehellisesti näe, miten esimerkiksi pitkää matematiikkaa, pitkää kieltä, pitkää fysiikkaa tai äidinkieltä voitaisiin mitenkään järkevästi opettaa nykyistä vähemmällä kurssimäärällä, joten opetuksen taso ja oppimisen laatu asettavat omat rajansa. Olisin itse aikoinaan halunnut lukea kaikki kouluni tarjoamat psykologian kurssit. Olisin myös halunnut aloittaa espanjan lyhyenä kielenä lukiossa. Pitkän saksan, pitkän englannin, pitkän matematiikan ja pitkän fysiikan kanssa oli pakko hieman karsia suunnitelmia: espanja jäi täysin, psykologiaa luin yhden kurssin.

Osmo Soininvaara kirjoitti blogissaan [1] pitkän matematiikan ja tulojen yhteydestä. Hän viittaa Otto Lepäsen grafiikkaan, jonka mukaan mitä paremmalla arvosanalla on pitkän matematiikan kirjoittanut, sitä paremmat ovat keskimäärin tulot kymmenen vuotta myöhemmin. Sama pätee lyhyen matematiikan sisällä. Tämä ei ole yllättävää. Yllättävää on se, että pitkän matematiikan approbatur ennustaa parempia tuloja kuin lyhyen matematiikan laudatur ja lyhyen matematiikan eximia menee tasoihin pitkän matematiikan improbatuurin kanssa. Huonoin tuloennuste on niillä, jotka eivät ole matematiikkaa lainkaan (edes hylätysti) kirjoittaneet.

Kuten Soininvaara toteaa, osa kuvaajasta selittyy varmasti aloittaisilla palkkaeroilla, eli kärjistäen siis sillä, että insinöörin palkka on humanistia kovempi. Päätös lukea ja kirjoittaa lyhyt matematiikka on varmasti yhteydessä pyrkimykseen päästä humanistiselle alalle. Matematiikka ei kovin paljon kiinnosta tai yksinkertaisesti 13 kurssia on liikaa. Selittääkö tämä kuitenkin täysin pelkän matematiikan kirjoittamisen merkitystä? Osittain varmasti. Tästä olisi mielenkiintoista nähdä tutkimus.

Jos on päättänyt kirjoittaa pitkän matematiikan, opiskelee varmasti ahkerammin kuin jos sen aikoi jättää kirjoittamatta. Pitkän matematiikan kirjoittaminen vaatii kaikkien pitkän matematiikan kymmenen pakollisen kurssin lukemista. Pitkäjänteisyys kehittyy. Oppia tarttuu. Mutta mitä mielenlaatua ja päättäväi-

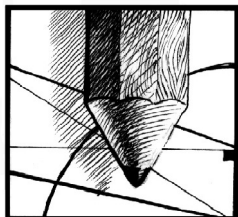
syyttä vaatii se, että menee kirjoittamaan sen pitkän matematiikan vaikka tietäisi, että se ei välttämättä tai ehkä edes todennäköisesti mene läpi? Se aiheuttaa työtä. Epäonnistumisriski on suuri. Epäonnistuminen on pelottavaa. Luultavasti hanskojen tiskiin heittäminen olisi todella houkuttelevaa, mutta ei, kokelas päättää kirjoittaa pitkän matematiikan ja kirjoittaa sen. Kunniotettava päätös. Tästä asenteesta on hyötyä myöhemminkin. Tämän ajatusketjun jälkeen en ainakaan itse ylläty siitä, että jo pelkkä kirjoitettu matematiikka ennustaa parempia tuloja kuin kirjoittamatta jätetty.

Hyvää kesää! Onnea kaikille ylioppilaskirjoituksiin osallistuneille!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Viitteet

- [1] <https://www.soininvaara.fi/2019/06/12/huonokin-arvosana-pitkassa-matikassa-tuottaa-hyvät-tulot/>



Laatikkoperiaatteen ihmeitä

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Sanotaan, että rakkaalla lapsella on monta nimeä. Tämä näyttää pätevän myös laatikkoperiaatteen, joka tunnetaan myös esimerkiksi kyyhkyslakka- ja lokeroperiaatteena sekä Dirichlet'n periaatteena. Mikä laatikkoperiaate sitten oikein on?

Lause 1 (Laatikkoperiaate). Jos on n kappaletta laatikoita ja niihin asetetaan $n + 1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine.

Todistus. Koska itse todistettava väite vaikuttaa melko itsestään selvältä, mutta voi olla haastavaa suoraan sanoa, miksi väite pätee, on helpointa lähestyä todistusta vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että kuhunkin laatikkoon tulee korkeintaan yksi esine. Koska laatikoita on n kappaletta, niin niihin tulee yhteensä korkeintaan $n \cdot 1 = n$ esinettä. Mutta laatikoihin haluttiin laittaa $n + 1$ esinettä. Siispä, jos laatikoihin laitetaan $n + 1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine. $\square$

Laatikkoperiaatteen todistuksesta itse asiassa huomataan, että jos laatikoita on n ja esineitä *yli* n kappaletta, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine. Näin ollen $n + 1$ esinettä on *pienin* määrä esineitä, jolla tämä väite pätee.

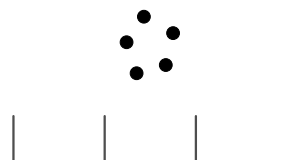
Lisäksi laatikkoperiaate kertoo, että *jossain* laatikossa on yli yksi esine, mutta se ei kerro, *missä* laatikossa näin on. Voi myös olla, että useammassa laatikossa on yli yksi esine. Esimerkiksi, jos laatikoita on kolme ja esineitä neljä, niin laatikoissa olevien esineiden määrät voivat olla esimerkiksi 2, 1 ja 1 tai 1, 2 ja 1 tai 2, 2 ja 0.

Laatikkoperiaatteesta voidaan muotoilla yleisempikin versio, jossa saadaan suurempi alaraja laatikossa ole-

ville esineille kuin yksi. Tutustutaan siihen seuraavaksi:

Lause 2. Jos on n kappaletta laatikoita ja niihin asetetaan $nk + 1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli k esinettä.

Todistus. Todistetaan tämä väite samalla tavalla kuin edellinen lause. Oletetaan, että kuhunkin laatikkoon tulee korkeintaan k esinettä. Koska laatikoita on n kappaletta, niin niihin tulee yhteensä enintään nk esinettä. Mutta $nk < nk + 1$ eli tämä ei ole mahdollista. Siis vähintään yhteen laatikkoon tulee yli k esinettä. $\square$



Kuvassa on kaksi laatikkoa ja $5 = 2 \cdot 2 + 1$ esinettä. Mitä laatikkoperiaatteen yleisempi versio sanoo tästä tilanteesta?

Aivan samalla tavalla kuin laatikkoperiaatteen tavallisen version kohdalla tässäkin tapauksessa voidaan tehdä havaintoja väitteen toteuttavista esineiden määristä. Huomataan, että väite pätee aina, kun esineitä on *yli* nk kappaletta ja $nk + 1$ esinettä on *pienin* tämän ehdon toteuttava esineiden määrä.

Mitä hyötyä laatikkoperiaatteesta sitten on? Tarkastellaan tätä muutamilla arkielämään liittyvillä esimerkeillä. Teksti on saanut inspiraationsa kirjoituksesta [1].

Levitteitä leiville

Ruokalassa on tarjolla viittä eri levitettä – sanokaamme vaikkapa margariinia ja voita sekä hummus-, ruohosipuli- ja pippurilevitteitä. Rajoitteena on, että yksi ihminen saa ottaa korkeintaan neljä leipää. Koska $5 > 4$, niin laatikkoperiaatteen nojalla jos haluaa ottaa kaikkia levitteitä, niin ainakin yhdelle leivälle tulee yli yhtä levitettä.

Luokan oppilaiden määristä

Koulun ensimmäiselle luokka-asteelle on tulossa 64 opilasta. Heille on varattu kolmen luokan verran tilaa ja opettajia. Koska $64 = 3 \cdot 21 + 1$, niin laatikkoperiaatteen nojalla ainakin yhteen luokkaan tulee vähintään 22 opilasta.

Sukkien löytäminen

Oletetaan, että laatikossa on kymmenen paria sukkaa ja kymmenen sukkaa, joilla ei ole paria. Sukat ovat hajan hajan ja halutaan löytää niiden joukosta sukkapari. Tehdään tämä nostamalla sukkaa umpimähkään laatikosta. Kysymys kuuluu, kuinka monta sukkaa joudutaan korkeintaan nostamaan, jotta saadaan varmasti sukkapari.

Yhteensä erilaisia sukkatyyppejä on $10 + 10 = 20$, kun otetaan huomioon sukat, joilla on pari, ja sukat, joilla ei ole paria. Laatikkoperiaatteen nojalla siis, jos nostetaan 21 sukkaa, niin saadaan ainakin yksi sukkapari. Toisaalta on mahdollista nostaa 20 paritonta sukkaa nostamalla yksi sukka kutakin sukkatyyppiä. Vastaus on siis 21.

Tämän tekstin lukijoiden ystävät

Oletetaan, että tämän tekstin lukee n henkilöä, missä $n \geq 2$ on kokonaisluku. (Tämä on järkevä oletus, sillä tekstin kirjoittaja sekä vähintäänkin lehden päätoimittaja lukevat tekstin.) Tarkastellaan, kuinka monta ystävää kullakin lukijalla on tämän tekstin lukijoiden joukossa. Oletetaan, että ystävyys on molemminpuolista – toisin sanoen, jos A on henkilön B ystävä, niin B on myös henkilön A ystävä. Kukaan lukija ei myöskään voi olla itsensä ystävä. Osoitetaan, että tämän tekstin lukijoiden joukossa vähintään kahdella on sama määrä ystäviä.

Oletusten mukaan kullakin lukijalla voi olla $0, 1, \dots, n-2$ tai $n-1$ ystävää lukijoiden joukossa, sillä kukaan ei voi olla itsensä ystävä. Oletetaan ensin, että jollain henkilöllä ei ole yhtään ystävää tekstin lukijoiden joukossa. Tällöin kaikilla lukijoilla voi olla $0, 1, \dots, n-2$

ystävää lukijoiden joukossa, sillä kukaan ei voi olla itsensä tai sen henkilön, jolla ei ole ystäviä lukijoiden joukossa, ystävä. Näitä eri mahdollisuuksia on $n-1$ kappaletta, kun taas lukijoita on n kappaletta. Siis laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kahdella lukijalla on sama määrä ystäviä.

Tarkastellaan vielä samalla tavalla tapaus, jossa kaikkialla on vähintään yksi ystävä lukijoiden joukossa. Tällöin mahdolliset ystävien määrät ovat $1, 2, \dots, n-1$. Näitä on $n-1$ kappaletta ja lukijoita n kappaletta. Jälleen kerran laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kahdella lukijalla on sama määrä ystäviä tekstin lukijoiden joukossa.

Erityisesti on huomattava, ettei tässä esimerkissä tarvita lukijoista mitään muuta tietoa kuin, että heitä on vähintään kaksi ja lukijoita on äärellinen määrä. Jännittävää, eikö totta?

Ravintolan menu-kokonaisuudet

Laatikkoperiaatetta voidaan luonnollisesti soveltaa useampaan kertaan saman ongelman tarkasteluun. Tutustutaan seuraavaksi tilanteeseen, jossa näin on tehty.

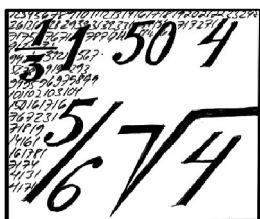
Eräässä ravintolassa halutaan koostaa useita viiden ruokalajin menuita. Kuhunkin ruokalajiin on neljä eri vaihtoehtoa ja halutaan, että mitkä tahansa kaksi eri menua eroavat ainakin kolmen ruokalajin kohdalta. Osoitetaan, että erilaisia menuita voidaan koostaa korkeintaan 64 kappaletta.

Tehdään vasta oletus, että erilaisia menuita on ainakin 65 kappaletta. Koska $65 = 4 \cdot 16 + 1$, niin laatikkoperiaatteen nojalla ainakin 17 eri menulla on sama ensimmäinen ruoka. Edelleen, koska on $17 = 4 \cdot 4 + 1$, niin laatikkoperiaatteen mukaan ainakin viidellä edellisistä menuista on myös sama toinen ruoka. Tästä taas seuraa, että ainakin kahdella edellisistä menuista on myös sama kolmas ruoka. Mutta nämä menut eroavat korkeintaan kahden ruokalajin kohdalta, mikä on vastoin haluttuja ehtoja. Siispä halutut ehdot toteuttavia menuita on enintään 64 kappaletta.

On huomattava, että edellisessä esimerkissä osoitetaan nimenomaan erilaisia menuita olevan *enintään* 64 kappaletta. Se ei tarkoita, että nämä 64 menua saataisiin muodostettua. Tämä kysymys jätetään aktiivisen lukijan pohdittavaksi.

Viitteet

- [1] Talwalkar, P.: *16 fun applications of the pigeonhole principle*, Nov 2008.
<https://mindyourdecisions.com/blog/2008/11/25/16-fun-applications-of-the-pigeonhole-principle/>



Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöistä

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tämän pienen artikkelin tarkoituksena on satuilla hie-
man algebrallisista yhtälöistä. Erityisesti tarkoituksena
olisi antaa jonkinlainen kuva siitä, miten kolmannen ja
neljännen asteen yhtälöitä voi ratkaista. Vaikka kaikki
tämä olisi luonnollisempaa, jos käyttäisimme komplek-
silukuja, yritämme kuitenkin yksinkertaisuuden nimis-
sä vältellä niitä.

Toisen asteen yhtälö

Aloittakaamme ratkaisemalla toisen asteen yhtälö.
Yleisen toisen asteen yhtälön

$$aX^2 + bX + c = 0,$$

missä a , b ja c ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, voimme luon-
nollisesti yksinkertaistaa jakamalla sen puolittain lu-
vulla a , mikä johtaa toisen asteen yhtälöön

$$X^2 + AX + B = 0,$$

missä

$$A = \frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad B = \frac{c}{a}.$$

Voimme yksinkertaistaa yhtälöä lisää ottamalla käyt-
töön uuden muuttujan $x = X + A/2$, jolloin tietenkin
 $X = x - A/2$, ja yhtälö muuttuu muotoon

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + A\left(x - \frac{A}{2}\right) + B = 0,$$

mistä kertomalla kaiken auki saamme

$$x^2 - Ax + \frac{A^2}{4} + Ax - \frac{A^2}{2} + B = 0,$$

ja sieventämällä

$$x^2 + p = 0,$$

missä

$$p = B - \frac{A^2}{4}.$$

Tämän yhtälön osaammekin ratkaista ja sen ratkaisut
ovat

$$x = \pm\sqrt{-p}.$$

Luonnollisesti, jos $p > 0$, niin reaalisia ratkaisuita ei
ole. Itse asiassa ratkaisuita on kuitenkin kaksi kappa-
letta tässä tapauksessa, mutta ne ovat kompleksilukuja,
ja pyrimme välttämään kompleksiluvut tässä kirjoituk-
sessa.

Jos $p < 0$, niin saamme kaksi erisuurta reaalista rat-
kaisua, ja tapauksessa $p = 0$ saamme täsmälleen yhden
reaalisen ratkaisun $x = 0$. Nyt voimme myös ratkaista

$$X = -\frac{A}{2} + x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{-p} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Sijoittamalla vielä alkuperäiset kertoimet tähän saam-
me pienellä sievennyksellä kaikkien tunteman ystäväl-
lisen ratkaisukaavan

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkiksi yhtälöä

$$5X^2 - 65 = 0$$

yllä kuvatulla tavalla. Jakamalla ensin kertoimella 5 jäljelle jää yhtälö

$$X^2 - 12X + 35 = 0.$$

Tekemällä seuraavaksi muuttujanvaihto $X = x + 6$ yhtälö muuttuu muotoon

$$(x + 6)^2 - 12(x + 6) + 35 = 0,$$

mikä on auki kirjoitettuna

$$x^2 + 12x + 36 - 12x - 72 + 35 = 0,$$

ja edelleen sieventämällä

$$x^2 = 1.$$

Tämän ratkaisut ovat tietenkin $x = \pm 1$. Alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat siten $X = 6 \pm 1$ eli $X = 5$ ja $X = 7$.

Pieni toisen asteen yhtälön sovellus

Tarkastelkaamme seuraavaa ongelmaa: Meillä on kaksi tuntematonta reaalilukua a ja b , joista tiedämme summan $S = a + b$ ja tulon $T = ab$. Voimmeko selvittää luvuista S ja T luvut a ja b ?

Luonnollisestikaan emme voi selvittää lukujen a ja b järjestystä, jos ne ovat erisuuret, sillä onhan $a+b = b+a$ ja $ab = ba$. Mutta osoittautuu, että muutoin luvut a ja b voi kuin voikin selvittää.

Asian ydin on seuraava: yhtälön

$$(x - a)(x - b) = 0$$

ratkaisut ovat täsmälleen a ja b . Nimittäin, toisaalta voimme suoraan laskea, että

$$(a - a)(a - b) = 0 \cdot (a - b) = 0,$$

ja

$$(b - a)(b - b) = (b - a) \cdot 0 = 0.$$

Toisaalta, jos x on jokin yhtälön ratkaisu, niin silloin

$$x - a = 0 \quad \text{tai} \quad x - b = 0,$$

sillä tulo on nolla vain ja ainoastaan silloin, kun ainakin yksi tulontekijä on nolla. Mutta nyt tietenkin

$$x = a \quad \text{tai} \quad x = b.$$

Voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

ja tämän yhtälön kertoimet tiedämme, sillä yhtälöhän on

$$x^2 - Sx + T = 0,$$

missä S ja T ovat jo tiedossamme. Tämän yhtälön osaamme ratkaista ja sen ratkaisut ovat

$$\frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - T}.$$

Esimerkki

Kahdesta tuntemattomasta reaaliluvusta a ja b tiedetään, että

$$a + b = 12 \quad \text{ja} \quad ab = 35.$$

Selvittäkäämme nämä luvut a ja b .

Yhtälön

$$(x - a)(x - b) = 0$$

ratkaisut ovat täsmälleen a ja b . Toisaalta, tämä yhtälö on

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

eli

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisut ovat

$$\frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} = 6 \pm 1,$$

eli 5 ja 7. Siten on oltava

$$a = 5 \quad \text{ja} \quad b = 7,$$

tai

$$a = 7 \quad \text{ja} \quad b = 5.$$

Kolmannen asteen yhtälön yksinkertaistaminen

Siirtykäämme sitten tarkastelemaan kolmannen asteen yhtälöä

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0,$$

missä a , b , c ja d ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$. Luonnollisesti voimme aina jakaa yhtälön puolittain luvulla a , jolloin se yksinkertaistuu muotoon

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0,$$

missä tietenkin

$$A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad C = \frac{d}{a}.$$

Mutta osoittautuu, että voimme yksinkertaistaa yhtälöä vielä hieman enemmänkin ja hävittää siitä yksinkertaisella muuttujanvaiholla toisen asteen termin kokonaan. Nimittäin, ottamalla käyttöön uusi tuntematon

$$x = X + \frac{A}{3}, \quad \text{jolloin} \quad X = x - \frac{A}{3},$$

yhtälö muuttuu muotoon

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä suoraviivaisen laskemisen jälkeen saamme uusille kertoimille lausekkeet

$$p = B - \frac{A^2}{3} \quad \text{ja} \quad q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C.$$

Esimerkki

Esimerkiksi, jos tarkastelemme yhtälöä

$$3X^3 + 27X^2 + 60X + 36 = 0,$$

niin jakamalla puolittain kertoimella 3 se yksinkertaistuu muotoon

$$X^3 + 9X^2 + 20X + 12 = 0.$$

Nyt muuttujanvaiholla $x = X + 3$ yhtälö muuttuu muotoon

$$(x - 3)^3 + 9(x - 3)^2 + 20(x - 3) + 12 = 0,$$

mistä kertomalla kaiken auki ja sieventämällä jäljelle jää yhtälö

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

jossa toisen asteen termiä ei enää ole. Jos nyt keinolla tai toisella ratkaisemme tämän yhtälön ja löydämme sen ratkaisut $x = 1$, $x = 2$ ja $x = -3$, niin alkuperäisen yhtälön ratkaisut ovat vastaavasti

$$X = 1 - 3 = -2, \quad X = 2 - 3 = -1$$

ja

$$X = -3 - 3 = -6.$$

Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen

Riittää siis tarkastella yhtälöä

$$x^3 + px + q = 0,$$

missä p ja q ovat annettuja reaalilukuja. Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitumme vain tilanteeseen, jossa

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Tässä tilanteessa yhtälöllä on täsmälleen yksi reaalinen ratkaisu. Todettakoon, että tilanteessa, jossa $D < 0$, yhtälöllä on täsmälleen kolme erisuurta reaalista ratkaisua, mutta alla johdetuissa laskuissa joudutaan silloin ottamaan kuutiojuuria kompleksiluvuista. Muutoin kaikki kuitenkin toimii samalla tavalla. Tapauksessa $D = 0$ alla johdettu kaava antaa myös ratkaisun, mutta emme murehdi sitä tapausta kuitenkaan tässä.

Aloitamme yhtälön ratkaisemisen valitsemalla tuntemattomat luvut u ja v niin, että

$$x = u + v \quad \text{ja} \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Tiedämme aiemmista pohdinnoistamme, että on olemassa enintään yksi tällainen pari lukuja u ja v , lukuun ottamatta lukujen järjestystä, tietenkin. Ja itse asiassa tällaiset kaksi lukua on aina olemassa kompleksilukuihin, ja tarkastelemassamme tilanteessa $D > 0$ kyseiset luvut ovat reaalisia.

Näillä uusilla muuttujilla u ja v voimme kirjoittaa yhtälön muodossa

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

mistä kertomalla auki saamme

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0,$$

mistä edelleen sieventämällä, muistaen, että valitsimme luvut u ja v niin, että $uv = -p/3$, yhtälö muuttuu muotoon

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Lisäksi tiedämme, että

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Nyt kuutiot u^3 ja v^3 ovat kaksi tuntematonta lukua, joiden summa ja tulo tiedetään, eli voimme selvittää ne aiemmin kuvailemallamme tavalla. Tarkemmin, yhtälön

$$(y - u^3)(y - v^3) = 0,$$

missä y on tuntematon, ratkaisut ovat täsmälleen luvut u^3 ja v^3 , ja toisaalta, tämä yhtälö on

$$y^2 - (u^3 + v^3)y + u^3 v^3 = 0,$$

eli

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Tämän osaammekin ratkaista mukavasti. Sen ratkaisu, eli luvut u^3 ja v^3 jommassa kummassa järjestyksessä, ovat

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Tässä neliöjuuren alla on siis oletustemme mukaan positiivinen luku, eli u^3 ja v^3 ovat kaksi reaalilukua. Koska voimme valita lukujen u ja v järjestyksen haluamallamme tavalla, voimme valita merkit niin, että

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

ja

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Toisin sanoen, olemme löytäneet (ainoan) reaalisen ratkaisun

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkkinä yhtälöä

$$x^3 - 11x + 20 = 0.$$

Tässä tapauksessa otamme käyttöön uudet tuntemattomat muuttujat u ja v niin, että

$$u + v = x \quad \text{ja} \quad uv = \frac{11}{3}.$$

Nyt yhtälömme muuttuu muotoon

$$u^3 + v^3 = -20.$$

Lisäksi tiedämme, että

$$u^3 v^3 = \left(\frac{11}{3}\right)^3 = \frac{11^3}{27}.$$

Siten luvut u^3 ja v^3 ovat täsmälleen yhtälön

$$(y - u^3)(y - v^3) = 0,$$

eli yhtälön

$$y^2 + 20y + \frac{11^3}{27} = 0$$

ratkaisut. Tämän yhtälön ratkaisut ovat täsmälleen

$$-10 \pm \sqrt{\frac{20^2}{4} - \frac{11^3}{27}},$$

ja niin saamme alkuperäisen yhtälömme ainoan reaalisen ratkaisun

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{20^2}{4} - \frac{11^3}{27}}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{20^2}{4} - \frac{11^3}{27}}}.$$

Vaikkakaan se ei ole mitenkään selvää tästä lausekkeesta, on itse asiassa $x = -4$.

Neljannen asteen yhtälöstä

Emme ratkaise yleistä neljannen asteen yhtälöä tässä huolellisesti, mutta ehkä lieene paikallaan hahmotella, miten se onnistuu. On kiintoisaa, että se onnistuu samanlaisin ideoin kuin kolmannen asteen yhtälönkin ratkaisu. Ja sopivan kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen on vieläpä eräs välivaihe yleisen neljannen asteen yhtälön ratkaisemisessa.

Nimittäin, samoin kuin aiemmin, yleinen neljannen asteen yhtälö

$$aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0,$$

missä a, b, c, d ja e ovat reaalilukuja ja $a \neq 0$, voidaan tietenkin yksinkertaistaa jakamalla puolittain kertoimella a muotoon

$$X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0,$$

ja edelleen muuttujanvaihhdolla $x = X + A/4$ muotoon

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Nyt, jos x on ratkaisu, voimme valita uudet muuttujat u, v ja w niin, että

$$u + v + w = x \quad \text{ja} \quad uv + vw + wu = \frac{x^2}{2} + \frac{p}{4},$$

sekä

$$uvw = -\frac{q}{8}.$$

Näiden kolmen lausekkeen arvot kiinnittävät luvut u, v ja w järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla, sillä ne ovat yhtälön

$$(t - u)(t - v)(t - w) = 0,$$

missä t toimittaa tuntemattoman virkaa, ratkaisut. Tämän yhtälön voi kirjoittaa muodossa

$$t^3 - (u + v + w)t^2 + (uv + vw + wu)t - uvw = 0,$$

missä kertoimet ovat annettuja. Lisäksi ehdoista seuraa, että

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}.$$

Alkuperäinen neljannen asteen yhtälömme sievenee lukujen u, v ja w tulon ja neliöiden summan arvojen avulla muotoon

$$u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}.$$

Nyt neljannen asteen yhtälön ratkaisemisen ideana on, että

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2},$$

ja

$$u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2 = \frac{p^2 - 4r}{16},$$

sekä

$$u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}.$$

Siten luvut u^2 , v^2 ja w^2 ovat kolmannen asteen yhtälön

$$(y - u^2)(y - v^2)(y - w^2) = 0,$$

eli yhtälön

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0,$$

ratkaisut ja tämän yhtälön ratkaiseminen onnistuu. Lopuksi, luvuista u^2 , v^2 ja w^2 voi ottaa neliöjuuret niin, että luvut u , v ja w ovat tiedossa, ja kunhan vain neliöjuurissa etumerkit valitaan niin, että $uvw = -q/8$, saamme neliöjuurien summista $x = u + v + w$ neljännen asteen yhtälön ratkaisut.

Esimerkki

Tarkastelkaamme esimerkkinä sitä, miltä yllä kuvaut neljännen asteen yhtälön ratkaisun ideat näyttävät konkreettisen yhtälön

$$x^4 - 62x^2 - 240x - 239 = 0$$

tapauksessa. Tässä tapauksessa valitsemme tuntemattomat luvut u , v ja w niin, että

$$u + v + w = x$$

ja

$$uv + vw + wu = \frac{x^2}{2} + \frac{-62}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{31}{2}$$

sekä

$$uvw = -\frac{-240}{8} = 30.$$

Nyt voimme laskea, että

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + wu) \\ &= x^2 - 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{31}{2}\right) = 31, \end{aligned}$$

ja, muistaen, että $x^4 - 62x^2 = 240x + 239$, että

$$\begin{aligned} u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 &= (uv + vw + wu)^2 - 2uvw(u + v + w) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{31}{2}\right)^2 - 2 \cdot 30 \cdot x \\ &= \frac{x^4 - 62x^2 + 31^2}{4} - 60x \\ &= \frac{240x + 239 + 31^2}{4} - 60x = 300. \end{aligned}$$

Koska vielä $u^2v^2w^2 = 30^2 = 900$, on kolmannen asteen yhtälö

$$(y - u^2)(y - v^2)(y - w^2) = 0$$

siis

$$y^3 - 31y^2 + 300y - 900 = 0.$$

Sen ratkaisut y , ja siis myös luvut u^2 , v^2 ja w^2 , ovat loppujen lopuksi 6, 10 ja 15. Luvuiksi u , v ja w voidaan siis valita $\pm\sqrt{6}$, $\pm\sqrt{10}$ ja $\pm\sqrt{15}$, missä merkit on valittava niin, että $uvw = 30$.

Näin päädyimme yhtälön ratkaisuihin

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}, \\ x &= \sqrt{6} - \sqrt{10} - \sqrt{15}, \\ x &= -\sqrt{6} + \sqrt{10} - \sqrt{15} \end{aligned}$$

sekä

$$x = -\sqrt{6} - \sqrt{10} + \sqrt{15}.$$

Kirjallisuudesta

Yllä esitetyt kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden tarkastelut perustuvat erityisesti klassikkoteokseen [6], josta voi opiskella paljon laajemminkin klassista algebraa. Kolmannen asteen yhtälöitä on tarkasteltu Solmun sivuilla aiemminkin artikkeleissa [5, 1], joista varsinkin edellinen sisältää paljon yksityiskohtaisemman tarkastelun.

Tässä kirjoituksessa välttelimme kompleksilukuja, mutta ne ovat hirmuisen tärkeitä. Niihin voi tutustua esimerkiksi artikkelista [3]. Eräs erityisen kaunis seikka kompleksilukuihin ja algebrallisiin yhtälöihin liittyen on algebran peruslause, jota voi ihmetellä vaikkapa artikkelista [2].

Sivuutimme historialliset seikat kokonaan. Matematiikan historiaan algebralliset seikat mukaan lukien voi tutustua suomeksi teoksesta [4].

Viitteet

- [1] AJANKI, L.: *Kompleksiluvut ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisut*, Solmu, 2/2013, 15–17.
- [2] HYTÖNEN, T.: *Algebran peruslause lukiolaisille*, Solmu, 3/2011, 6–8.
- [3] LEHTINEN, M.: *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*, Solmu, 1/2006, 17–22.
- [4] LEHTINEN, M.: *Matematiikan vuosituhanneet: perustiedot matematiikan historiasta*, Eukleides-kirjat, 2017.
- [5] SAKSMAN, E.: *Kolmannen asteen yhtälöä ratkaisemassa*, Solmu, 1/2000–2001, 5–12.
- [6] VÄISÄLÄ, K.: *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Tiedekirjasto, 17, Otava, 1961.



Heittäydytäänpä filosofiksi

Tuomas Korppi

Johdanto

Filosofit ovat kehittäneet teorioitaan kaikesta mahdollisesta. Jotkut filosofit ovat kehittäneet teorioitaan myös matematiikasta. Tyypillisiä kysymyksiä, joista filosofit ovat matematiikassa kiinnostuneet, ovat esimerkiksi seuraavat:

- Mitä matemaattiset oliot (luvut, vektorit, lukujoukot kuten $\mathbb{R}$ ym.) tarkalleen ottaen ovat?
- Missä mielessä todet matemaattiset väitteet ovat tosia?
- Missä määrin ihmiset voivat luotettavasti hahmottaa äärettömyyttä, esim. äärettömiä lukujoukkoja?

Filosofit harvoin ovat yksimielisiä mistään, ja tämä pätee myös matematiikkaa koskeviin filosofisiin kysymyksiin. Tässä kirjoitelmassa esittelenkin muutamia matematiikanfilosofia koulukuntia, ja heidän vastauksiaan yllä mainittuihin kysymyksiin.

Platonismi

Platon oli antiikin Kreikassa elänyt filosofi. Platonin filosofialle ominaista oli se, että hän uskoi todellisimmassa mielessä olemassa oleviksi sellaiset asiat kuten hyvyys, kauneus ja totuus. Näitä kolmea hän käytti esimerkkeinä tosiolevasta, mutta samaan kategoriaan voidaan lukea kaikki ominaisuudet tai yleiskäsitteiden

kuvaamat abstraktit asiat kuten punaisuus ja pyöreys. Ne yksittäiset asiat, joita havaitsemme aistein arkielämässämme, olivat Platonille vain tosiolevan epätäydellistä heijastumaa.

Mietitään lukua kaksi. Se voidaan kirjoittaa arabialaisin numeroin 2, roomalaisin numeroin II, sanallisesti kaksi tai englanniksi two. Kuitenkin näillä ilmauksilla 2, II, kaksi ja two on jotain yhteistä. Tekisi mieli ajatella, että nämä ilmaukset kaikki nimeävät saman olion, abstraktin luvun kaksi. Lukua on vaikea ajatella merkinä paperilla, koska tällöin näyttäisi siltä, että jonkun neljästä mainitusta ilmauksesta pitäisi olla ”oikea” kakkonen. Ennenkin kuitenkin näyttää siltä, että nuo neljä ilmausta ovat yhtä oikeita nimiä jollekin, joka on enemmän kuin mikään näistä ilmauksista.

Ajatellaan sitten sellaista matemaattista oliota kuin täydellisen pyöreää ympyrää. Matemaatikot operoivat sillä täysin rutiininomaisesti, mutta fyysikaalisesta maailmasta ei sellaista löydy. Yrittäpä valmistaa kuinka pyöreän kiekon tahansa, siihen jää aina pieniä epätasaisuuksia. Täydellisen pyöreä ympyrä onkin idealisoitu, teoreettinen olio.

Matemaattiset oliot kuten luvut, vektorit, lukujoukot ja täydellisen pyöreät ympyrät voidaan siis ajatella samalla tavoin abstrakteina, idealisoituina olioina kuin hyvyys, kauneus, totuus ja punaisuus. Nykyään platonismiksi kutsutaankin matematiikanfilosofian suuntausta, jonka mukaan on olemassa ”oikeasti olemassa oleva” matemaattisten olioiden todellisuus, johon abstraktit matemaattiset oliot kuuluvat.

Platonistien mukaan matemaattisten olioiden todellisuus on ikuinen ja ihmisestä riippumaton. Matemaattisten väitteiden totuus on platonistille ongelmaton: Esimerkiksi väite ”Alkulukuja on ääretön määrä” on tosi, koska matemaattisten olioiden todellisuudessa on ääretön määrä olioita, jotka ovat alkulukuja.

Suhtautuminen äärettömyyteen on samoin ongelmallista: Vaikka ihmisen hahmotuskyky samoin kuin arkimaailma on äärellinen, ei ole mitään periaatteellista estettä, miksei ihmisestä ja arkitodellisuudesta irrallisuudessa matemaattisten olioiden todellisuudessa voisi olla äärettömiä olioita, esimerkiksi reaali lukujen joukko $\mathbb{R}$.

Lukijasta yllä mainittu filosofia voi tuntua kummalliselta, ja minustakin on kummallista, että filosofit ovat tosiaan väitelleet siitä, ovatko sellaiset asiat kuten punaisuus ja pyöreys oikeasti olemassa. Mitä annettavaa platonismilla on siis matemaatikolle?

Vastaus kuuluu: Työskennellessään suurin osa ammattimatemaatikoista ajattelee matemaattisia olioita ikään kuin ne olisivat juuri sellaisia kuin platonistit väittävät! Tämä on yksinkertaisesti tehokkain tapa löytää päteviä todistuksia. Olen kuullut myös huhuja matemaatikoista, jotka ajattelevat kaavoja, eivät abstrakteja matemaattisia olioita, mutten kykene itse hahmotamaan, kuinka nämä myyttiset kaavamatemaatikot pystyvät työskentelemään.

Sunnuntaikristittyjen lisäksi olenkin kuullut puhutavan sunnuntaiformalisteista. Sunnuntaiformalisti on matemaatikko, joka arkisin käytännössä työskentelee platonistisista lähtökohdista käsin, mutta sunnuntaisin, tehdessään matematiikanfilosofiaa, omaksuu jonkun muun matematiikanfilosofian koulukunnan kannan, esimerkiksi formalismin.

Formalismi

Mitä maallikolle tulee mieleen, kun joku sanoo sanan matematiikka? No kaavat. Formalismi onkin matematiikanfilosofinen kanta, jonka mukaan platonistin abstrakteja matemaattisia olioita ei ole olemassa, vaan matematiikassa on kyse kaavoista ja niiden manipuloimisesta.

Mitä kaavojen manipulointi sitten tarkoittaa? Lukijalle lienee tuttua, että esimerkiksi kaavan $(x + 1)^2$ saa purkaa muotoon $x^2 + 2x + 1$. Matematiikassa on paljon tällaista kaavamanipulaatiota, mutta voidaanko koko matematiikka esittää tällaisena?

Formalisti tyypillisesti ajattelee matematiikan lähtevän liikkeelle aksiomista, jotka voidaan ilmaista kaavoina.

Matematiikan tekeminen on formalistin mielestä sitä, että aksiomista päätellään uusia kaavoja, teoreemoja, päättelysääntöjen mukaan. Päättelysääntöjen pitää olla sellaisia, että ne ovat esitettävissä yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa.¹

On ollut jo yli sata vuotta tiedossa, että alkeislogiikan² päättelysäännöt voidaan esittää yksinkertaisena merkkijonomanipulaationa. Esimerkiksi väitteestä ”A ja B” voidaan päätellä väite ”A”, ja samoin väite ”B”. Muut alkeislogiikan päättelysäännöt ovat samanhenkisiä, jotkut ehkä hiukan monimutkaisempia.

Ehkä tärkein aksiomien ominaisuus on se, että aksiomien täytyy olla ristiriidattomat, eli sellaiset, että niistä ei voida päätellä ristiriitaa. Formalisti tyypillisesti pitääkin matemaattisesti tasa-arvoisina kaikkia ristiriidattomia aksiomasysteemejä. Muita tärkeämpiä si jonkun tietyn aksiomatisoinnin voi tehdä joku ei-matemaattinen syy, esimerkiksi se, että fyysikko tarvitsee työssään tietynlaista matematiikkaa.

Matemaatikon on teoreettisesti mahdollista olla formalisti, koska suurin osa käytännössä tehdystä matematiikasta palautuu joukko-oppiin. Melkein mitä tahansa matematiikkaa voidaan tehdä joukko-opin ZFC-aksiomista käsin, käyttäen alkeislogiikan päättelysääntöjä päättelysääntöinä. Ongelma vain on siinä, että osataan todistaa, että ZFC-aksiomien ristiriidattomuutta ei voida todistaa, joten formalistille jää aina pieni epäilyksen siemen koskien niiden ristiriidattomuutta.

Äärettömyys on formalistille ongelmallista. Hän voi kirjoittaa aksioman, joka esimerkiksi sanoo, että ääretön joukko on olemassa, ja tällaista aksiomaa voi käyttää kuten muitakin aksiomia. Formalistin aksiomat ja uusien kaavojen johdot ovat äärellisiä operaatioita äärellisillä merkkijonoilla, joten tällä tavoin formalisti onnistuu kiertämään äärettömyyttä koskevat ongelmat.

Formalismin ongelma on matemaattisten väitteiden totuus. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”Alkulukuja on ääretön määrä.” Formalistin mielestä tämä väite ei ole sananmukaisesti tosi, koska sellaisia olioita kuin alkulukuja ei ole olemassakaan. Formalisti joutuukin uudelleentulkitsemaan väitteen väitteeksi ”Aksiomistani voi johtaa väitteen *Alkulukuja on ääretön määrä.*”, ja vasta tämä väite on sananmukaisesti tosi. Puhuesaan muiden matemaatikkojen kanssa matematiikasta formalisti joutuukin koko ajan salaa ajattelemaan, että hän tarkoittaa hiukan jotain muuta kuin mitä hän sanoo ääneen.

Toinen formalismin ongelma on se, että tehdessään matematiikkaa monet matemaatikot tosiaan ajattelevat

¹Olennaista on, että aksiomat, teoreemat ja päättelyt voidaan haluttaessa ilmaista kaavoina ja kaavamanipulaatioina. On yhdenmukaista, ilmaistaanko ne käytännössä luonnollisella kielellä vai kaavoilla, kunhan ne voitaisiin haluttaessa ilmaista kaavoina.

²Alkeislogiikalla tarkoitan tässä ensimmäisen kertaluvun predikaattikalkyyliä.

abstrakteja matemaattisia olioita, eivät kaavoja, ja formalistinen matematiikanfilosofia ei oikein selitä, kuinka tämä on mahdollista. Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen entinen johtaja Jouko Väänänen onkin sanonut, että matemaatikolle formalismi on lähinnä tapa päästä eroon filosofeista. Kun filosofi tulee kyselemään matemaatikolta kiusallisia kysymyksiä matematiikanfilosofiasta, matemaatikko voi vastata: ”Minä vain raapustelen näitä kaavoja liitutaululle. Jätä minut rauhaan.”

Fiktionalismi

Fiktionalismia on montaa lajia, ja alla käsittelen Mark Balaguerin fiktionalismia.

Platonismin ongelma on se, että platonistit olettavat epämääräisiä ”oikeasti olemassa olevia” abstrakteja matemaattisia olioita. Formalismissa taas oli muita ongelmia. Kuinka platonismin hyvät puolet voitaisiin säilyttää, kuitenkin niin, ettei epämääräisiä olemassaoloväitteitä tarvittaisi? Eräs ratkaisuehdotus on fiktionalismi. Fiktionalismin mukaan matematiikassa on kyse abstrakteista matemaattisista olioista ja niiden ominaisuuksista, mutta nämä matemaattiset oliot ovat fiktiivisiä.

Ensimmäinen mieleen tuleva kysymys on tietysti se, että mitä opetettavaa fiktiivisten olioiden pyörittelyllä olisi meille, jos matematiikassa on siitä kyse. Kuitenkin muista yhteyksistä tiedämme, että fiktio on joskus hyvinkin opettavaista. Esimerkiksi Orwellin romaanin 1984 on aivan loistava varoitus totalitarismin vaaroista. Samoin fyysikkojen kilon painoista pistemäistä kappaletta ei ole oikeasti olemassa, mutta sitä voidaan hyvinkin käyttää havainnollistavana esimerkkinä fysiikassa. Näin ollen en itse ole yhtään sitä mieltä, että matemaattisten olioiden pitäminen fiktiivisinä vähentäisi matematiikan arvoa.

Äärettömyys on tietysti fiktionalistille ongelmatonta. Mikään ei estä fiktionalistia kuvittelemasta äärettömiä joukkoja. Samoin käytännön matemaatikon työskentely abstraktien matemaattisten olioiden parissa on filosofisesti ongelmatonta: Matemaatikko kuvittelee matemaattiset oliot!

Toisin kuin formalisti, fiktionalisti ei joudu uudelleen-tulkitsemaan matematiikan lauseita, vaan hänelle ”Alkulukuja on ääretön määrä” tosiaan tarkoittaa sitä, että alkulukuja on ääretön määrä. Onko väite sitten fiktionalistille tosi vai epätosi onkin hiukan kinkkisempi juttu. Ainakin se on yhtä tosi kuin ne kaikkien tuntevat tosiasiat, että Joulupukilla on valkoinen parta, ja että Frodo Reppuli on kotoisin Konnusta.

Mark Balaguerin mukaan tietyt platonismin alalajit ja hänen versionsa fiktionalismista tulevat hyvin lähelle

toisiaan. Ero on vain matemaattisten olioiden ”todelisessa” olemassaolossa, mitä Balaguer pitää hyvin vähämerkityksisenä kysymyksenä.

On myös huomattava, että platonisti, formalisti ja Balaguerlainen fikcionalisti käytännössä hyväksyvät päteviksi täsmälleen samat matematiikan tulokset, ja nämä tulokset ovat myös ne, jotka ei-filosofisesti suuntautuneet matemaatikot hyväksyvät. Seuraavaksi esitelen kaksi matematiikanfilosofian koulukuntaa, jotka eivät hyväksy päteviksi kaikkia matemaatikkojen hyväksymiä matematiikan tuloksia.

Finitismi

Ryhdy mielessäsi laskemaan *yksi, kaksi, kolme, neljä, ...* Kuinka pitkälle pääsit? Ehkä sataan? Et ainakaan päässyt loppuun asti; et luetellut kaikkia luonnollisia lukuja. Miesi on rajoittunut äärelliseen. Lähde nyt juoksemaan. Kuinka pitkälle pääsit? Juoksit ehkä kilometrin tai kaksi. Et kuitenkaan päässyt äärettömän pitkälle. Myös arkimaailmamme on rajoittunut äärelliseen.

Mielemme tai se maailma, missä elämme, ei tavoita ääretöntä. Kuinka tällaisessa tilanteessa voisimme tuntea äärettömyyden ja operoida sillä pätevästi? Finitistisen matematiikanfilosofian koulukunnan mukaan et voikaan. Finitistien mielestä ainoastaan äärellistä käsittelevä matematiikka on pätevää.

Finitismi on kuitenkin hankala matematiikanfilosofia matemaatikolle, koska äärettömyyteen törmää lähes kaikkialla modernissa matematiikassa. Lukujoukot ovat äärettömiä, äärettömiä lukujonoja tarvitaan lähes kaikkialla, ja jopa yksikköväli $[0, 1]$ on äärettömän monta pistettä. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona, ja raja-arvo puolestaan äärettömän lähestymisen avulla.

Finitistit siis pelaavat ”varman päälle”. He hyväksyvät vain sellaisen matematiikan, joka on ihan satavarmasti pätevää, mutta samalla he pelaavat liian varman päälle: He menettävät modernin matematiikan äärettömyyksiä koskevat tulokset. Finitismi ei siis selitä sitä, kuinka on mahdollista, että matemaatikot kuitenkin pystyvät käytännössä täysin ongelmattomasti käsittelemään äärettömyyksiä.

Intuitionismi

Mitä matemaatikot tekevät työkseen? He ajattelevat matemaattisia olioita ja mielessään todistavat niille tuloksia. Intuitionistisen koulukunnan filosofit lähtevät liikkeelle tästä. Intuitionismin mukaan matematiikassa on kyse matemaatikkojen ajatuksista, niin sanotuista mentaalisista konstruktioista.

Ajattele mielessäsi joukot $A = \{a, b, c\}$ ja $D = \{d, e\}$. Ajattele seuraavaksi funktiota $f: A \rightarrow D$; $f(a) = f(b) = d$, $f(c) = e$. Hyvä. Suoritit juuri mentaalisen konstruktion. Konstruoit funktion f . Katso sitten, onko funktion f kuvajoukko sama kuin D . Hyvä. Konstruoit juuri todistuksen sille, että f on surjektio.

Tällaista on intuitionistin mielestä matematiikka. Intuitionistit eivät kuitenkaan vaadi, että matemaatikoiden on oltava muistihirviöitä, vaan he sallivat kynän ja paperin käytön muistin tukena, joten paperilla laskeminen on intuitionistillekin mahdollista.

Intuitionistit suhtautuvat vakavasti ajatukseen, että mieli kykenee hahmottamaan vain äärellisiä asioita. Kuitenkin intuitionistit sallivat jonkun verran äärettömiä matemaattisia olioita, mutta eivät niin paljoa kuin platonistit/formalistit/fiktionalistit. Intuitionistille äärettömät matemaattiset oliot ovat nimittäin sellaisia, joiden konstruktioita voi halutessaan jatkaa niin pitkälle kuin haluaa.

Tutkitaan esimerkiksi lukujonoa $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i = 1/2^i$. Intuitionistille tämä lukujono on täysin kelvollinen, koska luetteloa $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, \dots$ voi jatkaa niin pitkälle kuin haluaa. Se, että luetteloa jatkaessa paperi loppuu jossain vaiheessa universumista, ei ole intuitionistille periaatteellinen este; konstruktioita tekevällä matemaatikolla intuitionistit yleensä tarkoittavat jonkunlaista idealisoitua matemaattikkoa, joka kykenee hahmottamaan pelkästään äärellistä, mutta kuitenkin kuinka suurta äärellistä tahansa.

Siinä missä platonisti puhuu olemassa olevista matemaattisista olioista, intuitionisti puhuu konstruoiduista matemaattisista olioista. Tämä tarkoittaa sitä, että intuitionisti saa operoida vain sellaisilla matemaattisilla olioilla, jotka hän on konstruoinut mentaalisesti, tai väljemmin, joista on osoitettu, että ne olisi periaatteessa mahdollista konstruoida mentaalisesti.

Siinä missä platonisti puhuu tosista matemaattisista väitteistä, intuitionisti puhuu todistetuista matemaattisista väitteistä. Intuitionisti saa olettaa todeksi vain sellaiset matemaattiset väitteet, jotka on todistettu.

Viimeksi mainitut kaksi seikkaa saavat intuitionistin ja platonistin mieltämään alkeislogiikan eri tavoin. Tutkitaan esimerkiksi väitettä ”A tai ei-A”. Platonistin mielestä tämä on tosi väite. A on nimittäin tosi tai epätosi. Jos A on epätosi, ei-A on tosi. Joka tapauksessa siis toinen lauseista A ja ei-A on tosi, joten väite ”A tai ei-A” on väistämättä tosi.

Jotta ”A tai ei-A” olisi intuitionistin mielestä todistettu, pitäisi joko A:n tai ei-A:n olla todistettu. Jälkimmäisen todistaminen tarkoittaisi ristiriidan johtamista A:sta. On kuitenkin täysin mahdollista, että kumpakaan näistä todistuksista ei ole tehty, ja on myös täysin mahdollista, että kumpaakaan näistä todistuksista

ei ole edes periaatteessa mahdollista tehdä, joten intuitionistin mielestä ”A tai ei-A” ei ole samalla tavalla väistämättä tosi lause kuin platonistin mielestä.

Nämä kaksi piirrettä, äärettömien matemaattisten olioiden hyväksyminen vain siinä tapauksessa, että ne on mahdollista konstruoida, ja platonistia heikompi alkeislogiikka aiheuttavat sen, että intuitionistit eivät hyväksy suurta osaa nykymatematiikan tuloksista. Intuitionismin suurin ongelma onkin se, että intuitionistisesti oikeaoppinen matematiikka on mopo: Siinä voidaan todistaa vähemmän kuin platonistin matematiikassa, ja todistukset ovat vielä usein työläämpiä.

Loppusanat

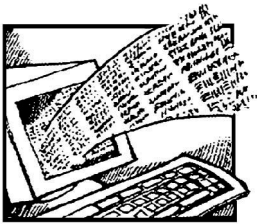
Filosofiassa harvoin on lopullisia vastauksia. Kaikilla yllä mainituilla koulukunnilla on vahvuutensa ja heikkoutensa, ja jokaista ovat kannattaneet ihan järkevätkin ihmiset. Fiktionalismia lukuun ottamatta kaikki yllä mainitut koulukunnat ovat jo vanhoja ja vakiintuneita, ja uusiakin tulokkaita koulukunniksi on, vaikkei niitä olekaan tässä käyty läpi.

Itse olen nykyään taipuvainen kannattamaan fiktionalismia. Syy tähän on se, että fiktionalismi ja platonismi ovat ne kaksi koulukuntaa, jotka parhaiten vastaavat sitä, mitä matemaatikot oikeasti tekevät, ja fiktionalismilla on platonismia vähemmän ontologista (eli ole-massaoloa koskevaa) painolastia.

Intuitionismi on idealtaan kiehtova, matematiikka ja matemaatikon mieli ovat perustavalla tavalla kytköksissä toisiinsa. Kuitenkin kaikkein mielenkiintoisinta matematiikkaa on mielestäni juuri se monimutkaisilla äärettömyyksillä pelaava matematiikka, jota intuitionismi ei hyväksy. Ja intuitionistien vastaväitteistä huolimatta sellaistakin matematiikkaa onnistutaan tekemään ilman, että ongelmia käytännössä esiintyy.

Kirjallisuutta

- Benacerraf, Paul ja Putnam, Hilary (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Tämä on kattava kokoelma 1900-luvun tärkeimpiä artikkeleita matematiikanfilosofiasta.
- Balaguer, Mark, *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Tämä on suosikkikirjani matematiikanfilosofiasta, ja tämän kirjoitelman luvussa Fiktionalismi esittämäni Balaguerin fiktionalismi perustuu tähän kirjaan.
- Heyting, Arend, *Intuitionism: An introduction*. Kirjassa kehitetään perusmatematiikkaa intuitionistisista lähtökohdista käsin.



Interpolaatio, käyrän sovitus ja lukujonot

Heikki Apiola

Aalto-yliopisto, matematiikan ja systeemianalyysin laitos, lehtori emeritus
heikki.apiola@aalto.fi

Kirjoituksen lähtökohtana on Solmun numerossa 1/2019 julkaistu *Antti Laaksosen* artikkeli ”Kuinka löytää kaava lukujonolle”.

Laaksonen esittelee joitakin kokonaislukujonoja ja kysyy, miten voidaan löytää funktio, jonka arvoja jonon luvut ovat. Toki kysymys ei yleisessä muodossa ole mielekäs, onhan selvää, että ratkaisuja on ääretön määrä. Etsittävien funktioiden joukkoa tulee siis rajoittaa. Luonnollisin funktioluokka on varmasti *polynomit*, joihin kirjoittaja keskittyy.

Kysymys johtaa näin polynomi-interpolaatioon. Tuossa kirjoituksessa käsitellään asiaa laskemalla data-arvojen erotuksia. Itse asiassa tätä tekniikkaa käytetään *Newtonin interpolaatiomenetelmässä*, johon tämän kirjoituksen interpolaatiotekniikoiden esittely tietyllä tavalla huipentuu.

Noin 15 vuotta sitten kirjoitin Solmuun interpoloinnista varsin seikkaperäisesti (viite [s04]). Kertaan tiiviisti tuossa kirjoituksessa varsin yksityiskohtaisesti esitetyjä teemoja, ja täydennän esitystä menetelmillä, joita tuolloin en ottanut mukaan. Esitykseni ei toki edellytä aiemman kirjoitukseni lukemista/muistamista. (Voihan olla, ettet ollut edes syntynyt sen ilmestymisen aikaan.)

Tarkastelen lopuksi näiden tekniikoiden sovelluksena *Antti Laaksosen* kirjoituksen hengessä eräiden muidenkin lukujonojen, erityisesti sarjojen osasummien saatamista ns. ”suljettuun muotoon” interpolaatiotekniikoja käyttäen. Tässä yhteydessä otan käyttöön sym-

bolilaskennan ohjelmistoja. Esitän lopuksi esimerkin **tietokoneavusteisesta indukti todistuksesta** tietyn osasummalausekkeen yleispätevyyden osoittamiseksi, ja ehdotan joitain tähän liittyviä harjoitustehtäviä lukijalle.

Varoitus: Teksti saattaa joillakin kohdin edetä hiukan vauhdikkaasti ja sisältää kenties lukijalle uusia käsitteitä ja merkintätapoja: *matriisi*, *summa*- ja *tulosymbolit*:

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad \prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Voit huoletta jatkaa lukemista, vaikka jokin yksityiskohta ei heti avautuisikaan.

Ohjelmointia: Kirjoituksen henki on sellainen, että esitetyt kaavat ja algoritmit pyritään saattamaan korkean tason ohjelmointikieltä käyttäen mahdollisimman läpinäkyvästi koneella suoritettavaan muotoon. Suurin osa ohjelmakoodista on MATLAB-kieltä, lähes kaikki esimerkit voi toteuttaa OCTAVE:lla, joka on vapaasti saatava MATLAB-”klooni”. Lisäksi käytän symbolilaskentaohjelmia, vapaasti käytettävää MAXIMA:a, MATLAB:n symbolic toolboxia ja MAPLE:a. Kaksi viimeksi mainittua sisältyy yleensä oppilaitosten kampuslisensseihin.

Yllytän **vuorovaikutteiseen lukutapaan**. Vaikka et koodin yksityiskohtia heti ymmärrä, voit sijoittaa koodia ohjelman komentoikkunaan tai editoriin ja kokeilla ja tehdä omia muunnelmia.

Ohjelmisto-ohjeita ja viitteitä

Kirjoituksessa esiintyy edellä mainittuihin ohjelmistoihin/kieliin liittyviä käyttöesimerkkejä. Suurin osa on MATLAB-kieltä, jota OCTAVE uskollisesti noudattaa.

1. - <https://www.gnu.org/software/octave/>
- <https://octave-online.net/> Ei tarvitse asentaa, rekisteröidy, niin voit käyttää ”skriptejä”, eli Octave-komentoja sisältäviä tekstitiedostoja, ns. m-tiedostoja.
- LINUX (Ubuntu)-käyttäjälle asennus on vaivattominta: Komentoikkunaan kirjoitetaan:
`sudo apt-get install octave.`
2. <https://math.aalto.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt>
Kaipaa päivittelyä, mutta pääsee alkuun.
3. <http://maxima.sourceforge.net/>
4. <http://www.wolfram.com/> Wolfram Alpha, MATHEMATICA:n tekijän, Steven Wolframin kehittynyt symbolilaskin.

Neljän kohdan pikaohje

OCTAVE:n käyttöliittymä: Kaksi pääikkunaa: *komentoikkuna* ja *editori*.

1. Voit kirjoittaa suoraan komentoikkunaan tyyliin:
`>> komento` tai voit kirjoittaa editori-ikkunaan ja suorittaa komennot sieltä.
2. MATLAB-nimi viittaa termiin ”Matrix Laboratory”, siksi erityisesti kertolasku, jakolasku ja potenssiin korotus tarkoittavat matriisilaskutoimituksia. Niinpä vaakavektorin v ja samanpituisten pystyvektorien p tulo $v \cdot p$ tarkoittaa vektorien ”sisätuloa” eli vastinalkioiden tulojen summaa: $v_1 p_1 + v_2 p_2 + \dots + v_n p_n$.
3. *Alkioittaiset, pisteittaiset laskutoimitukset*: Usein tarvitaan esim. vektorien u ja v vastinalkioittaista tuloa $u \cdot v$, joka siis on vektori $[u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n]$. Vastaavasti pisteittäinen jakolasku ja potenssi saadaan liittämällä piste $(.)$ operaatiomerkin eteen. Siis $.*$ $.^$ $./$
4. Vektorin rakentaminen:
vaakavektori: `>> v=[1 2 3]` tai `v=1:3`
pystyvektori: `>> p=[1;2;3]` tai `p=v'`

Näillä ja esimerkkikoodien kommentailla pääsee toivotavasti eteenpäin. **Huomaa**: Tässä tekstissä oleva heitomerkki (') ei ”copypastessa” tulkkaudu oikein, se pitää kirjoittaa itse, mikä muutenkin on suositeltavaa.

Jos et ole aiemmin ohjelmia käyttänyt, kohtaat todennäköisesti alkuunpääsyongelmia. Suositeltava foorumi kysymyksille on **Facebook-ryhmä ”Matematiikka-lehti Solmu”**.

Liikkeellelähtö

Aloitetaan keväisellä kysymyksellä: Mikä on seuraava luku jonossa 1995, 2011, 2019?

Luonnollinen lähtökohta on etsiä polynomia, joka kulkee annettujen datapisteiden kautta, ts. *interpolaatiopolynomia* datapisteille $(0, 1995)$, $(1, 2011)$, $(2, 2019)$. Luonnollinen ratkaisu on kirjoittaa yhtälöryhmä polynomin $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tuntemattomien kertoimien a_0, a_1, a_2 määrittämiseksi, kun vaaditaan ehdot: $p(0) = 1995, p(1) = 2011, p(2) = 2019$. Tässäpä sopiva pieni harjoitus lukijalle, kun vielä a_0 saadaan ilmaiseksi.

Esitän toisen laskutekniikan, jossa lasketaan erotuksilla. Tekniikka on helppo oppia mekaanisesti, palataan perusteluun *Newtonin interpolaatiomenetelmän* yhteydessä.

0	y_0		
1	y_1	$\frac{y_1 - y_0}{1 - 0} = 16$	
2	y_2	$\frac{y_2 - y_1}{2 - 1} = 8$	$\frac{8 - 16}{2 - 0} = -4$

Tämä merkitsee, että interpolaatiopolynomi on

$$p(x) = 1995 + 16x - 4x(x - 1) = 1995 + 20x - 4x^2.$$

Kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli, ja kaiken lisäksi $p(3) = 2019$, ja tuosta arvot vain pienenevät. Koska y -arvojen on oltava aidosti kasvava jono vuosilukuja, ei mallinnus interpolaatiopolynomilla toimi tälle datalle. Lasketaanpa nyt harjoittelun vuoksi OCTAVE:lla erotuksia:

```
>> yd=[1995 2011 2019];
>> d1=diff(yd) % yd-vektorin erotukset
d1 =
    16     8
>> d2=diff(d1) % Toiset erotukset
d2 = -8
```

$d2$ edustaa diskreettiä 2. derivaattaa, sen negatiivisuus merkitsee siis ylöspäin kuperuutta.

Datan soveltumattomuus johtuu siis siitä, että 2. differenssi < 0 , eli 1. differenssit pienenevät. Tässä erotukset sattuvat jopa puolittumaan aikaväleillä. Jos näin jatkuu, niin seuraava tapaus olisi jo 2023. Jääkiekkoväkeä tämä ehkä tyydyttäisi enemmän kuin interpolaatiomahdollisuus.

Voit ottaa ensituntumaa OCTAVE:en asentamalla ja kirjoittamalla suoraan komentoikkunaan. Tai kirjautumalla sivulle OCTAVE online, kuten yllä neuvotaan. Yllä käytetty komento `diff` on erittäin hyödyllinen työkalu, jolla voi myös laskea numeerisia derivaattoja.

Shakkiongelman

Antti Laaksonen käsittelee kysymystä: ”Miten monella tavalla voidaan $n \times n$ -shakkilaudalla sijoittaa kaksi ratsua niin, etteivät ne uhkaa toisiaan?” Tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ antavat selvästi mahdollisuuksia 0 ja 6. Kirjoittaja perustelee tapauksen $n = 3$ luettelemalla systemaattisesti kaikki mahdollisuudet, josta nähdään tulos: 28. Loppuosan jonosta hän antaa viitaten tietokone-laskelmiin. Mahdollisuus tämän datan esittämiseen lukumääräänsä selvästi alempiasteisena polynomina antaa hypoteesin jonon jatkumisesta tätä polynomifunktiota noudattaen.

Laaksonen kirjoituksessa lasketaan datavektorin peräkkäisiä erotuksia. Katsotaanpa, miten toimittaisiin OCTAVE:lla, jossa MATLAB:n mallin mukaan funktiot ope-roivat yleensä kokonaisiin vektoreihin. Tässä tarjoutuu itsestään selvästi edellä esitelty funktio `diff`:

```
s=[0; 6; 28; 96; 252; 550; 1056; 1848];
d0=s;
d1=diff(d0);% y-datan 1. erotukset
d2=diff(d1);% 2. erotukset
d3=diff(d2);% 3. erotukset
d4=diff(d3) % 4. erotukset (näytetään)
d5=diff(d4) % 5. erotukset (tietysti)
```

Rakennettaessa erotusten taulukkoa tarvitaan täyttö-alkioita, koska `diff` lyhentää vektoria 1:llä. Tällaiseksi tarjoutuu symboli NaN, ”Not a Number”. OCTAVE:ssa laskutoimitus 0/0 ei aiheuta ohjelman keskeytymistä virheeseen, vaan tuottaa tuloksen NaN, jota voidaan mukavasti hyödyntää. Alla näkyy taulukon rakentami-nen latomalla sarakkeet toistensa viereen.

```
taulukko=[d0,[NaN;d1],[NaN;NaN;d2],...
[NaN;NaN;NaN;d3],[NaN;NaN;NaN;NaN;d4],...
[NaN;NaN;NaN;NaN;NaN;d5]]
d4 = % Tilan säästämiseksi rivivektorina
    12    12    12    12
d5 = % ... samoin
    0     0     0
taulukko =
    0    NaN    NaN    NaN    NaN    NaN
    6     6    NaN    NaN    NaN    NaN
   28    22    16    NaN    NaN    NaN
   96    68    46    30    NaN    NaN
  252   156    88    42    12    NaN
  550   298   142    54    12     0
 1056   506   208    66    12     0
 1848   792   286    78    12     0
```

Siis 4. erotukset ovat vakioita, joten 5. erotukset = 0. Kuten Laaksonen toteaa, tästä voidaan päätellä, että koko annettu data voidaan esittää astetta 4 olevalla polynomilla.

Kirjoituksen lopulla palataan tähän differenssitauluk-koon.

Yleinen interpolaatiotehtävä

Olkoon annettu taulukko

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

TAULUKKO 1

Voidaan ajatella, että kyse on annetun funktion tau-lukoiduista arvoista pisteissä $x_0, x_1, \dots, x_n$. Toisaalta taulukko voi edustaa johonkin havaintoaineistoon tai kokeeseen liittyviä mittaustuloksia, kuten lämpötilaa mitattuna vaikkapa tunnin välein, ym.

Jos tiedetään, että luvut edustavat jonkin ”si-leän”¹ funktion arvoja hyvällä tarkkuudella lasket-tuna/mitattuna, voi olla järkevää asettaa tehtäväksi määrittää johonkin sopivaan funktioluokkaan kuuluva funktio, jonka kuvaaja kulkee tarkalleen kaikkien an-nettujen pisteiden kautta. Tällöin puhutaan *interpolaatiosta*.

Toisaalta, jos mittaukset ovat epätarkkoja, tai kaik-kien pisteiden kautta kulkemisen vaatimus on muuten tilanteeseen sopimaton, voidaan etsiä aineistoon liitty-vää pääsuuntaa, ”trendiä” sopivan optimaalisuuskritee-rin suhteen. Näistä eniten käytetty on ns. **pienimmän neliösumman** (PNS) approksimaatio. Tällöin puhu-taan interpolaatiota yleisemmin käyrän sovittamisesta aineistoon.

Lasketaan esimerkki Matlabin/Octaven valmiil-la työkaluilla

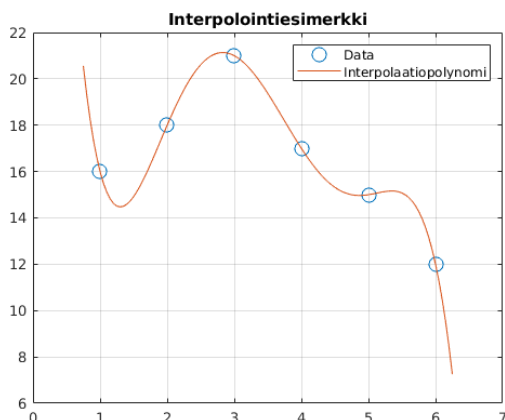
MATLAB:n ja OCTAVE:n käyttöympäristön pääosat ovat *komentoikkuna* ja *editori*. Komentoja voidaan syöttää suoraan komentoikkunaan tai ne voidaan kir-joittaa editorilla komento- eli skriptitiedostoon, vaikka-pa `komennot.m` ja suorittaa kirjoittamalla komentoik-kunaan: `>> komennot`

Seuraava istunto on tehty OCTAVE:lla. Kehotetta (`>>`) seuraavat rivit ovat ohjelman komentoja ja muut ko-mennon antamia tulosteita. Tuloste estetään puolipis-teellä (;) komennon perässä.

```
>> xd=1:6 % xdata: [1,2,3,4,5,6]
xd =
    1     2     3     4     5     6
>> yd=[16 18 21 17 15 12] % ydata
yd =
    16    18    21    17    15    12
>> N=length(xd); % vektorin pituus
>> c=polyfit(xd,yd,N-1)
```

¹Sileydellä tarkoitamme ao. sovelluksen kannalta riittävän monen derivaatan olemassaoloa.

```
% Interpolaatiopolynomin kertoimet
c =
    -0.24167    4.33333   -28.95833
    87.66667  -115.80000    69.00000
>> x=.75:.05:6.25; % Pisteet,joissa polynomin
                    % arvot lasketaan.
>> p=polyval(c,x); % Polynomin arvot
                    % x-pisteissä (HUOM (;))
>> plot(xd,yd,'o',x,p); grid on
>> legend('Data','Interpolaatiopolynomi')
>> title('Interpolointiesimerkki')
```



Polynomi esitetään MATLAB:ssa kertoimien vektorina alkaen korkeimman asteen kertoimesta. Siten polynomimme on (desimaaleja karsien):

$$p(x) = -0.24x^5 + 4.33x^4 - 28.95x^3 + 87.66x^2 - 115.8x + 69.$$

Huomaa, että komennossa `>> c=polyfit(xd,yd,N-1)` on `N-1` yhtä pienempi kuin datapisteiden lukumäärä, jolloin kyse on interpolaatiosta. (Kahden pisteen kautta suora, kolmen pisteen kautta paraabeli jne.)

Näemme, että tehtävä on kuvan tarkkuudella oikein ratkaistu, koska polynomimme kulkee kaikkien datapisteiden kautta.

Tarkkaavainen lukija saattaa ihmetellä, miksei `polyfit`-koodiin ole upotettu interpolaatiotehtävän datan määräämää parametriä `N-1` sisäisellä komennolla `N = length(xdata)`; No, koska `polyfit` on kirjoitettu niin yleispäteväksi, että sillä voidaan laskea myös interpolaatiopolynomia alempiasteisia *pienimman neliösumman (PNS)* polynomisovituksia kutsuamalla funktiota `(N-1):tä` pienemmillä arvoilla.

Interpolaatiopolynomin muodostaminen

Edellä laskettiin polynomin kertoimet ja arvot ”mustalla laatikolla” `polyfit`. Käsittelen nyt erilaisia tapoja näiden laskentaan.

Lineaarinen yhtälöryhmä

Puetaan yleiseen muotoon alkuesimerkin yhtälöryhmän muodostus. Lähdetään liikkeelle taulukon 1 yleisestä datasta, jossa oletetaan vain, että x_k -pisteet ovat erillisiä. Etsitään polynomia:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Otetaan tässä yleisemmin kirjallisuudessa esiintyvä muoto kertoimien järjestyksen suhteen. Vaatimus:

$$p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n.$$

Toisin sanoen:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Ratkaistavana on siten $n + 1$ yhtälöä ja $n + 1$ tuntematonta (kertoimet $a_0, a_1, \dots, a_n$) käsittävä lineaarinen yhtälöryhmä.

Matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Jos matriisilaskenta ei ole tuttua, niin ylempi muoto näyttää, mitä matriisi kertaa pystyvektori tarkoittaa. Samoin kuin polynomin kerroinvektori määrää polynomin, määräävät matriisi ja oikean puolen y-vektori yhtälösystemin.

Ratkaistaan nyt edellä käsitelty esimerkki. Tehtävä palautuu siis lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuun, johon OCTAVE:ssa on suora komento: `a=V\y`, missä `V`:llä merkitään yllä olevaa matriisia. Tätä muotoa olevaa matriisia kutsutaan *Vandermonden* matriisiksi, jonka määrää x -datavektori: $x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$. Yhtälöryhmän ratkaisukomennossa `a=V\y` voidaan ajatella, että takakeno (`\`) tarkoittaa jakoviivaa, nimittäjässä on matriisi `V`, ja siten vektori `y` ”jaetaan matriisilla” `V`. Kootaan komennot skriptitiedostoon `vanderinterp.m` käyttäen OCTAVE:n editoria:

```
xd=(1:6)'; % xdata pystyvektorina
yd=[16;18;21;17;15;12];
% ydata pystyvektorina
N=length(xd); % datapisteiden lukumäärä
ykkoset=ones(N,1); % Sama kuin [1 1 1 1 1 1]'
V=[ykkoset xd xd.^2 xd.^3 xd.^4 xd.^5];
a=V\yd; % Yhtälöryhmän ratkaisu
```

Muista: $\mathbf{x}d.^k$ tarkoittaa vektorin $\mathbf{x}d$ jokaisen komponentin korottamista potenssiin k , eli ”pisteittäistä” potenssia.

Suositeltavaa on sijoittaa komennot tiedostoon `vanderinterp.m` ja ajaa run-painikkeella tai kirjoittamalla komentoikkunaan `vanderinterp`. Tällöin voit esim. editoida rivien loppujen puolipisteitä pois, jolloin näet välituloksia, joita emme näytä.

```
>> vanderinterp
a =
    69.00000
   -115.80000
    87.66667
   -28.95833
    4.33333
   -0.24167
```

Saadaan samat kuin edellä, mutta käännettyssä järjestyksessä, koska käsiteltiin polynomia kasvavien potenssien järjestyksessä. Kun haluamme laskea polynomin arvoja, käännetään se komennolla `flipud` (ud viittaa suuntaan ”updown”, vaakavektorin tapauksessa `fliplr`, ”leftright”). Nyt voidaan laskea arvoja vaikkapa edellisen esimerkin vektorilla ja piirtää näillä komennolla:

```
>> x=0.75:.05:6.25;
>> c=flipud(a);
>> p=polyval(c,x);plot(x,p);grid on
```

Huomaa, että monet komennot, kuten tässä `polyval`, `plot` toimivat yhtä hyvin vaaka- kuin pystyvektoreilla. Matriisialgebrassa näin ei yleensä ole.

Kysymys: Onko yhtälöryhmällä aina yksikäsitteinen ratkaisu? Jotkut lukijat saattavat tietää, että on, jos matriisin V determinantti $\neq 0$. Voidaan osoittaa, että Vandermonden matriisin determinantti on x -datavektorin erotusten tulo, ja siis $\neq 0$, kun x -datapisteet ovat erilliset. Mutta verrattomasti helpommalla päästään puhtaasti polynomien perusominaisuuden avulla:

Jos kaksi korkeintaan astetta n olevaa polynomia yhtyy $(n+1)$:ssä pisteessä, ne yhtyvät kaikkialla, eli ovat identtiset.

Tämä perustuu siihen yksinkertaiseen havaintoon, että jos polynomilla p on nollakohta x_0 , niin $p(x)$ on jaollinen $(x - x_0)$:lla. Kts. [s04] Lause 1 ja Seuraus 1.

Pydetään avuksi herroja *Lagrange* ja *Newton*

Edellä esitetty Vandermonden matriisiin perustuva menetelmä on samalla hyvä lähtökohta pienimmän neliösumman approksimaatiolle. Huonoa siinä on etenkin interpolaation kannalta matriisin ”häiriöalttius”, kun sen koko kasvaa. Numeerisen lineaarialgebran kannalta

determinantin merkitys on vähäinen, tärkeää on ”melkein singulaarisuus”, josta determinantin ”melkein nolla” ei kerro. Häiriöalttiutta arvioidaan erilaisella keinolla, jota ei tässä voida pitemmälle kehitellä. MATLAB/OCTAVE:ssa on funktiot `cond` ja `rcond` tähän tarkoitukseen.

Molempien menetelmien ydin on polynomien nokkelassa esitysmuodossa. Samalla, kun herrat konstruivat ratkaisun, he saavat ratkaisun yleisen olemassaolotodistuksen tarvitsematta mitään muuta kuin edellä mainittua polynomien perusominaisuutta. Siis olemassaolotodistus ja ratkaisun laskennan kannalta tehokas ja vähemmän virhealtis konstruktio samassa paketissa.

1. Lagrangen menetelmä

Kirjoitin tämän auki jutussa [s04] hyvin konkreettisesti ja seikkaperäisesti. Mennään nyt suoraan yleiseen tapaukseen korostamalla menetelmän keksimisen ideaa.

Lähdetään hakemaan eräässä mielessä ortogonaalista polynomijoukkoa (”kantaa”) $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$. Asetetaan kaksi vaatimusta:

1. Polynomit $L_k(x)$ ovat astetta n .
2. Ne toteuttavat ”ortogonaalisuusehdon”:

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j} = 1, \text{ kun } i = j, \text{ ja } 0, \text{ kun } i \neq j.$$

Jos tällaiset polynomit löydetään, voidaan ratkaisupolynomi p kirjoittaa suoraan:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x),$$

kuten kohta osoitetaan.

Miten nämä kantapolynomit löydetään? Tarvitaan astetta n oleva polynomi $L_k(x)$, joka saa arvon 0 kaikissa pisteissä $x_j, j \neq k$. No mutta eihän ole muuta mahdollisuutta kuin valita:

$$L_k(x) = c(x-x_0) \dots (x-x_{k-1}) \dots (x-x_{k+1}) \dots (x-x_n).$$

Tässä on yksi vapaasti valittava kerroin c , joka määrätään normerausehdosta: $L_k(x_k) = 1$. Siis, jos merkitään

$$l_k(x) = (x-x_0) \dots (x-x_{k-1}) \dots (x-x_{k+1}) \dots (x-x_n),$$

niin

$$c = \frac{1}{l_k(x_k)} \quad \text{ja siis:} \quad L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Sanallisesti: Osoittajassa on termit $(x - x_j), j \neq k$, ja nimittäjässä $(x_k - x_j), j \neq k$. (Nimittäjästä puuttuu termi, joka tekisi sen nolllaksi.)

Interpolaatioehto toteutuu:

$$p(x_k) = \underbrace{y_0 L_0(x_k)}_{=0} + \dots + \underbrace{y_k L_k(x_k)}_{=y_k} + \underbrace{y_{k+1} L_{k+1}(x_k)}_{=0} + \dots + \underbrace{y_n L_n(x_k)}_{=0} = y_k.$$

(Jos $k = 0$, saadaan $y_0 + 0 + \dots + 0$.)

Huom: Lagrangen polynomit riippuvat pelkästään x -datasta.

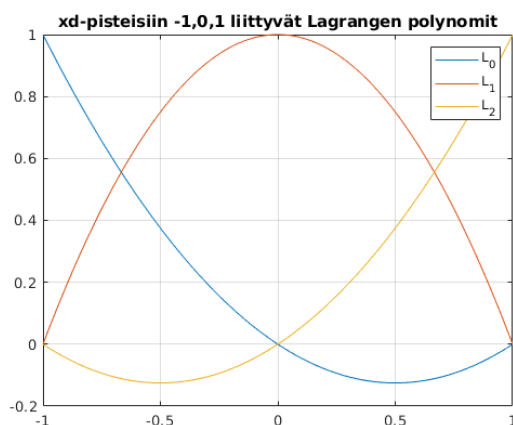
Kirjoitetaan Matlab-koodiksi (Octave:lla)

Ideoidaan ensin pienellä ”manuaalisella” esimerkillä:

```
% Tiedosto Lag2.m
%% Lagrangen 2. asteen polynomit
% Muodostetaan ’manuaalisesti’ xd-dataan
% liittyvät Lagrangen (2. asteen) polynomit
% Huom! Vektorin indeksit alkavat 1:stä..
xd=[-1 0 1];
x=linspace(-1,1,100);% Laskentapisteet 100 kpl
L0=(x-xd(2)).*(x-xd(3))./((xd(1)-xd(2)).*(x-xd(1)-xd(3)));
L1=(x-xd(1)).*(x-xd(3))./((xd(2)-xd(1)).*(x-xd(2)-xd(3)));
L2=(x-xd(1)).*(x-xd(2))./((xd(3)-xd(1)).*(x-xd(3)-xd(2)));
plot(x,L0,x,L1,x,L2); grid on
legend('L_0','L_1','L_2')
title('xd-pisteisiin liittyvät L-polynomit')
```

Huomaa, että $(x-xd(2)).*(x-xd(3))$ on 100:n pituisten vektorien vastinalkioittainen tulo, samoin muut vastaavat. Nimittäjässä kerrotaan skalaareja, joten piste $(.)$ ei ole tarpeen, mutta ei haittaisiakaan.

Editoi komennot vaikka tiedostoksi `Lag2.m` ja kirjoita komentoikkunaan `Lag2` saadaksesi alla olevan, Lagrangen polynomien ominaisuuksia havainnollistavan kuvan.



Tältä pohjalta on helppo rakentaa funktio, joka suorittaa Lagrangen interpolaation:

```
function y=LagrangeInterp(xd,yd,x)
N=length(xd);
y=zeros(size(x));% Summavektorin alustus: 0
for i=1:N
    y=y+yd(i)*L(i,xd,x); % skal. kertaa vektori
end
% L_k-funktio alifunktiona:
function y = L(k,xd,x)
% xd-data-vektoriin liittyvä Lagrangen
% kantafunktio L_k laskettuna vektorilla x.
n=length(xd);
y=ones(size(x));% Tulovektorin alustus: 1
for j=[1:k-1 k+1:n]
    y=y.*((x-xd(j))./(xd(k)-xd(j)));
end
```

Huom1: Kuten MATLAB-ohjelmoinnissa hyviin tapoihin kuuluu, laskentapisteitä ”pitää sallia” ainakin kokonaisen vektorin verran. Tämä hoidetaan ”pisteittäisillä” laskutoimituksilla $(.*)$ ja $(./)$.

Huom2: Kutsu `L(1,...)` johtaa indeksivektoriin: `for j=[1:0 2:n]`, joka on `[2,...,n]`, kuten pitää, koska `1:0` on tyhjä vektori, katsotaan:

```
>> 1:0
ans = 1×0 empty double row vector
```

Leikitään vähän LagrangeInterp-työkalulla

Jotta voisit käyttää kirjoittamaamme funktiota, täytyy koodi kirjoittaa tekstitiedostoon `LagrangeInterp.m`, joka sijaitsee työhakemistossa tai polun (`path`) varrella. Funktiota kutsutaan aivan samoin kuin mitä tahansa OCTAVE:n sisäänrakennettua funktiota, siis komentoikkunassa kirjoitetaan esim. `>> y=LagrangeInterp(xd,yd,x)`, kun muuttujille `xd`, `yd`, `x` on annettu halutut arvot.

Kun halutaan muuttaa parametrejä ja tehdä erilaisia testiajoja, on suositeltavaa kirjoittaa tarvittavat parametrien muodostamiskomennot ja funktiokutsut skriptitiedostoon, vaikka `ajo.m` ja komentaa: `>> ajo`. Näillä komennoilla suoritettaisiin nyt edellä `vanderinterp`-tyylillä käsitelty esimerkki.

```
xd=1:6
yd=[16 18 21 17 15 12]
x=.75:.05:6.25;
p=LagrangeInterp(xd,yd,x);
plot(xd,yd,'o',x,p,'MarkerSize',10)
grid on
```

Huomattavaa on, että `LagrangeInterp`-funktioimme toimii myös symbolisella argumentilla x , jos käytössä on MATLAB, jossa on ”symbolic toolbox”. Palataan tähän loppupuolella.

2. Newtonin menetelmä

Ajatellaanpa, että olemme onnistuneet tavalla tai toisella muodostamaan interpolaatiopolynomin sano-kaamme datalle

x_0	x_1	x_2
y_0	y_1	y_2

Halutkaamme lisätä datapiste (x_3, y_3) ja laajentaa polynomimme tälle uudelle datapisteistölle. Edellä esitellyillä menetelmillä ei auttaisi muu kuin laskea koko homma alusta uudelleen. Olkoon tuo edellä saatu polynomi $p_2(x)$. (Ankaraa mietintää...)

HEUREKA! Lisätään polynomiimme sellainen polynomi $q(x)$, joka saa arvon 0 kaikissa vanhoissa pisteissä x_0, x_1, x_2 ja on asteeltaan yhtä korkeampi. No mutta (ainoa) sellainenhan on:

$$q(x) = c(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Tämän polynomin lisääminen ei tuhoa interpolaatioehtoja vanhoissa pisteissä, ja siinä on yksi määrättävä vakio c , jonka avulla säädetään uusi ehto voimaan. Siispä $y_3 = p_3(x_3) = p_2(x_3) + q(x_3)$, joten

$$c = \frac{y_3 - p_2(x_3)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Jälleen päivän selvä oivallus, kunhan sen vain keksii! (Joillekin mm. Ar-, Ga-, La-, Ne- alkuisille näitä sattuu useammin kuin toisille!).

Newtonin muoto interpolaatiopolynomille voidaan kehittää aloittamalla astetta 0 olevasta polynomista $p_0 \equiv y_0$, sitten $p_1(x) = y_0 + c_1(x - x_0)$, $p_2(x) = p_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$ jne. Vakioiden c_k määrittämiseksi saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} y_0 = c_0 \\ y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ \vdots \end{cases}$$

Taaskaan ei tarvita yhtälöryhmän yleistä ratkaisua, vaan voidaan edetä ylhäältä alas ratkaisemalla kullakin rivillä yksi ensimmäisen asteen yhtälö.

Näin päädytään yleiseen muotoon (NP):

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Tämä on **Newtonin interpolaatiopolynomi** ja sen konstruktio tapa on samalla aiemmista riippumaton todistus tehtävän yksikäsitteiselle ratkaisulle. Kaikki ratkaisutavat tuottavat siis saman polynomifunktion,

mutta erilaisen, toisiinsa sievennettävissä olevan esitysmuodon.

Newtonin polynomi (NP) voidaan kirjoittaa lyhyesti tulo- ja summasymbolien avulla:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Pikkutehtävä: Olkoot pisteet $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 5, y_0 = 6, y_1 = 4, y_2 = 7$. Yhtälöryhmästä peräkkäisillä sijoituksilla ratkaisemalla saadaan: $c_0 = 6, c_1 = -2, c_2 = \frac{3}{4}$, joten

$$p(x) = 6 - 2(x - 1) + \frac{3}{4}(x - 1)(x - 2).$$

Vähän kookkaamman polynomin auki kertominen on viheliäistä puuhaa. Kannattaa käyttää ympärillä tarjoutuvia symbolilaskentamahdollisuuksia, vaikkapa *Maxima*-ohjelman **expand**-komentoa. MATLAB:n symbolic toolbox tarjoaa suoraan L^AT_EX-kaavan:

```
>> latex(expand(p))
\frac{3}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + \frac{19}{2}
```

Eli L^AT_EX-kääntäjän jäljiltä: $\frac{3}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + \frac{19}{2}$.

Kertoimet voidaan siis esimerkin tavoin laskea tuosta "alakolmioyhtälöryhmästä". Niille voidaan johtaa rekursiokaava ns. "jaettujen erotusten" avulla, jolloin saadaan helposti muistettava menetelmä käsin las-kuun ja suorastaan riemastuttavan helposti kirjoitettava MATLAB-ohjelma. Lisäkehittelyn jälkeen saadaan "tuotantokäyttöön" tehokas *Neville'n* algoritmi, mutta siihen ei nyt mennä.

Jaetut erotukset

Merkitään $y_k = f(x_k), k = 1, \dots, n$, missä f tarkoittaa (x_k, y_k) -datapisteiden määräämää diskreettiä funktiota. Merkitään $f[x_k] = f(x_k)$, ja tarkoitakoon yleisesti $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ dataan $((x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k)))$ liittyvän interpolaatiopolynomin korkeimman asteen termin kerrointa, toisin sanoen edellä kirjoitetun Newtonin esitysmuodon kerrointa c_k . Näitä kutsutaan nimellä *jaetut erotukset* seuraavan lauseen perusteella.

Lause. Jaetut erotukset toteuttavat rekursiokaavan:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Todistus. Jätän todistuksen viitteen [GC] s.188 *Theorem 8.3.1* varaan sekä ajan että tilan puutteen vuoksi. Todistus on yllättävän helppo ja elegantti yllä olevan määritelmän ansiosta ja Newtonin aste kerrallaan nousevasta esityksestä johtuen. $\square$

Neljän datapisteen jaettujen erotusten taulukko:

$$\begin{array}{cccc}
 f[x_0] & & & \\
 f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
 f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
 \end{array}$$

Taulukon lävistäjä

$$(f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], f[x_0, x_1, x_2, x_3])$$

antaa siis Newtonin esitysmuodon kertoimet.

Pikkutehtävä uudestaan:

x_j	y_j	
1	6	
2	4	$\frac{4-6}{2-1} = -2$
5	7	$\frac{7-4}{5-2} = 1$ $\frac{1+2}{5-1} = \frac{3}{4}$

Saatiin siis samat kertoimet: $6, -2, \frac{3}{4}$. Matematiikassa on magiaa!

Ja nyt kaikki osaavat rakentaa Newtonin polynomin vaikka unissaan! Johan sitä alussakin harjoiteltiin.

Palataan shakkilautatehtävään

Koska x-data on tasavälinen, jopa niin, että askel = 1, ovat jakajana olevat erotukset = $1, 2, 3, \dots$, siis alussa esitettyyn erotuskaavioon tarvitsee vain lisätä koodissa näkyvät kertoimet $1/2, 1/3, 1/4, 1/5$.

```
xdata=0:7; % Tasavälinen askel=1
ydata=[0, 6, 28, 96, 252 550 1056 1848]';
ydiff1=[NaN;diff(ydata)];
ydiff2=[NaN;1/2*diff(ydiff1)];
ydiff3=[NaN;1/3*diff(ydiff2)];
ydiff4=[NaN;1/4*diff(ydiff3)];
ydiff5=[NaN;1/5*diff(ydiff4)];
erotustaulukko=[ydata ydiff1 ydiff2...
    ydiff3 ydiff4 ydiff5]
```

Tämä skripti tuottaa tulostuksen:

```
erotustaulukko =
1.0e+03 *
    0      NaN      NaN      NaN      NaN
0.0060  0.0060      NaN      NaN      NaN
0.0280  0.0220  0.0080      NaN      NaN
0.0960  0.0680  0.0230  0.0050      NaN
0.2520  0.1560  0.0440  0.0070  0.0005
0.5500  0.2980  0.0710  0.0090  0.0005
1.0560  0.5060  0.1040  0.0110  0.0005
1.8480  0.7920  0.1430  0.0130  0.0005
```

Jätetään tilan puutteen takia viimeinen sarakke näyttämättä, vakiosarakkeesta seuraava koostuu numeerisilta osiltaan tietysti kolmesta 0:sta.

Kuten *Newtonin* ja *Lagrangen* muodoista näkyy, ja *Vandermonde*-ratkaisustakin (Gaussin eliminaatio) selviää, kokonaislukudata johtaa aina rationaalikertoimiin. Komento `diag` poimii matriisin päälävistäjän.

```
format rat % Rationaaliaritmetiikka
c=diag(erotustaulukko);
c=c(1:end-1)' % Jätetään viimeinen 0 pois
syms x % Symbolinen x, vain Matlab:ssa
p=c(1)+c(2)*x+c(3)*x*(x-1)+...
    c(4)*x*(x-1)*(x-2)+c(5)*x*(x-1)*(x-2)*(x-3)
p=expand(p)
a=sym2poly(p) % Symbolinen muoto ...
% kerroinvektoriksi
arvotxdatala=polyval(a,xdata)% Tarkistus:
% Lasketaan polynomi datapisteissä.
```

Viemällä nämä suoraan komentoikkunaan tai editoriin, josta skripti ajetaan, saadaan:

```
c =
    0      6      8      5      1/2
p =
    x^4/2 + 2*x^3 - (3*x^2)/2 + 5*x
a =
    1/2      2      -3/2      5      0
arvotxdatala =
    0      6      28      96      252 ...
    550      1056      1848
```

Kappas vaan, oikein meni!

Jos/kun operoit OCTAVE:lla, voit suoraan ”leikkausliimata” OCTAVE:sta MAXIMA:an (sijoitusmerkki `(:)`, paikallinen loppumerkki `(:)`):

```
(%i1) p:6*x+ 8*x*(x-1)+ 5*x*(x-1)*(x-2)...
    + (x*(x - 1)*(x - 2)*(x - 3))/2;
(%i2) expand(p);
(%o2)
      4      2
      x      3      3 x
      -- + 2 x - ---- + 5 x
      2      2
```

Toki voit sijoittaa lausekkeen myös Wofram Alphaan, joka tekee sievennyksiä, grafiikkaa ym. ihan pyytämättäkin.

Miten jono jatkuu?

Saatiin siis polynomimalli $p(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - \frac{3x^2}{2} + 5x$, joka selittää 3 ylimääräistä data-arvoa: [550 1056 1848] x-arvoilla: [5 6 7]. Lasketaan lisäarvoja:

```
>> lisapisteita=8:12;
>> lisarvoja=polyval(a,lisapisteita);
>> [lisapisteita;lisarvoja]
ans =
    8      9      10      11      12
3016  4662  6900  9856 13668
```


Pitääkö tämä yksinkertainen laskukaava yleisesti paikkansa? Jään odottamaan vastausta syvemmin kombinatoriikan menetelmiin perehtyneeltä matemaatikolta. Erityisen kiusallista on, että annettu data loppuu juuri oikean shakkilaudan kynnyksellä, joten jäämme tälle kynnykselle toivorikkaina luku 3016 taskussamme.

Symbolista summausta

Kaikkihan muistamme tarinan koulupojasta nimeltään *Gauss* ja laskutehtävästä: $s_n = \sum_{k=1}^n k$, ($n = 100$). Gaussin oivallus oli vektoriyhteenlasku, joka voitaisiin ilmaista OCTAVE:lla: `>> (1:10)+(10:-1:1)`, jos otetaan $n = 10$. Idea johtaa heti kaavaan: $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Myös geometrisen jonon summakaava saadaan kätevästi ilman taulukkokirjaa tai symboliohjelmaa:

$$\begin{cases} s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ qs_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1} \end{cases}$$

Vähentämällä ja ratkaisemalla saadaan: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Harvoille muille jonoille on näin yksinkertaisia summa-kaavoja näin helposti johdettavissa, jos ollenkaan. Kyse on siis lausekkeesta summalle

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

kun kerroinjono (a_k) on annettu. Tämä voidaan mieltää diskreettinä versiona annetun funktion integraalifunktion määrittämisestä. Symbolilaskentaohjelmat ovat varsin kehittyneitä tällä alueella. Toki yleisesti toimivaa algoritmia ei ole, kun ei "suljetun muodon"² ratkaisuaakaan aina ole.

Edellisten lausekkeiden tapaan voimme yrittää löytää polynomi- tai rationaalifunktiokaavan. Strategia voisi olla sellainen, että ensin kokeillaan, löytyisikö suhteellisen matalaa astetta oleva interpolaatiopolynomi, jonka asteluku ei kasva, kun jonon lukuja (dataa) lisäämään. Näin saadaan hypoteesi, joka todistetaan induktiolla oikeaksi, jos pystytään. Jos polynomin asteluku on suurempi kuin esim. 3, joudutaan induktioaskeleessa varsin pitkiin sievennyksiin. Tässä kohden parhaat symboliohjelmat ovat luotettavampia kuin ihminen, ja tällaisella tietokoneavustuksella laadittu todistus on ilman muuta hyväksyttävä (eikö vain). Siis ihminen tietää, mihin sievennyksellä pyritään, ohjelma tekee, mitä käsketään nopeasti ja luotettavasti verrattuna hitaaseen ja epäluotettavaan ihmiseen.

Esimerkki: $s_n = \sum_{k=1}^n k^p$, missä p on kokonaisluku.

Tarkastellaan tapausta $p = 5$.

```
ind=(1:10)'; % Pystyvektori transponoimalla(')
jono=(ind.^5);
S=cumsum(jono); % Kumulatiiviset summat
indeksit_jono_ja_osasummat=[ind jono S]
```

```
indeksit_jono_ja_osasummat =
    1         1         1
    2        32        33
    3       243       276
    4      1024      1300
    5     3125     4425
    6     7776    12201
    7    16807    29008
    8    32768    61776
    9    59049   120825
   10   100000   220825
```

Osasummien jaetut erotukset:

```
format rat % Pelkkiä rationaalisia laskuja
ydiff1=[NaN;diff(S)]; % Sama kuin alkup. jono
ydiff2=[NaN;1/2*diff(ydiff1)];
ydiff3=[NaN;1/3*diff(ydiff2)];
ydiff4=[NaN;1/4*diff(ydiff3)];
ydiff5=[NaN;1/5*diff(ydiff4)];
ydiff6=[NaN;1/6*diff(ydiff5)];
erotustaulukko=[S ydiff1 ydiff2 ydiff3 ydiff4...
  ydiff5 ydiff6];
c=(diag(erotustaulukko))'% Newtonin polynomin
  % kertoimet
```

Tulostus:

```
c =
    1    32   211/2    95
  125/4         4        1/6
```

Siirrytään symbolinkäsittelyyn. Teen sen nyt MATLAB:n symbolic toolboxilla, mutta tein vastaavat operaatiot myös MAXIMA:lla ja MAPLE:llä ihan leikkauksella ko. ohjelmiin.

```
>> syms n % Julistetaan n symboliseksi.
>> p=c(1)+c(2)*(n-1)+c(3)*(n-1)*(n-2)+...
  ... % Piilotetaan osa
  c(7)*(n-1)*(n-2)*(n-3)*(n-4)*(n-5)*(n-6);
>> p_n=simplify(p)
p_n =
  (n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12
>> p_nplus1=subs(p,n,n+1)
% Sijoitetaan p_n:n lausekkeeseen
% n:n paikalle n+1
p_nplus1 =
  ((n+1)^2*(n+2)^2*(2*n + 2*(n + 1)^2 + 1))/12
% Induktioaskel:
>> erotus=p_nplus1-p_n
erotus =
  ((n+1)^2*(n+2)^2*(2*n + 2*(n+1)^2 + 1))/12-...
  (n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12
```

²Alkeisfunktioiden avulla n:n lausekkeena lausuttavissa oleva muoto.

```
>> simplify(erotus)
ans =
(n + 1)^5 % Mutta niinhän sen piti olla!
>> display('MOT')
MOT
```

Kaava on todettu jo useallakin n :n arvolla, ja nyt saatiin osoitetuksi yleinen askel, joten lauseke

$$s_n = p_n = (n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1))/12$$

on voimassa kaikilla n .

Huomautuksia

1. Vähemmällä kaavan kirjoittamisella oltaisiin päästy valmiiksi ohjelmoimallamme **LagrangeInterp**-funktioilla. Tämä sisältyy esimerkiskriptiin **SymsumEsim.m**, mutta soveltuu myös harjoitustehtäväksi, mikäli MATLAB ja symbolic toolbox ovat käytössä.
2. Kaikkein helpointa luulisi olevan MATLAB-funktion **polyfit** käyttö interpolointiin. Mutta se laskee liukuluvuilla, ja viimeisissä desimaaleissa esiintyvät pyöristysvirheet estävät muuntamisen oikeiksi rationaaliluvuiksi. Oma **LagrangeInterp**-funktio toimii myös symboliselle argumentille, samoin Newtonskriptit, joiden pohjalta annoin tehtävän kehittää vastaavasti **NewtonInterp**-funktion. Molemmathan suorittavat pelkkiä rationaalilaskuja. Symboliohjelmat, kuten MAPLE (ja varmaankin myös MAXIMA) sisältävät valmiit funktiot, jotka oletusarvoisesti laskevat rationaaleilla.
3. Symboliohjelmissa on hyvät välineet symbolisten summien laskentaan, niinpä tässäkin saadaan MATLAB-toolboxilla:

```
>> syms k n;symsum(k^5,[1,n])
ans =
(n^2*(n + 1)^2*(2*n^2 + 2*n - 1))/12
```

Tehtäviä

1. Olkoot $xd=[0:20:100]$ ja $yd=[76.0\ 105.7\ 131.7\ 179.3\ 226.5\ 281.4]$ xd -arvot edustavat vuosilukuja vuoden 1900 jälkeen ja yd :t USA:n väestölaskentadataa miljoonan asukkaan yksiköissä.
 - (a) Muodosta (käsin) *Lagrange*n menetelmän mukainen muoto 2. asteen polynomille, joka interpoloi vuosilukuihin 1900, 1920, 1940 liittyvää väestödataa.
 - (b) Muodosta *Newtonin* menetelmällä asteita 0, 1 ja 2 olevat interpolaatiopolynomit samoille 3:lle ensimmäiselle datapisteelle, ja näytä, että saat saman 2.

asteen polynomin kuin (a)-kohdassa.

(c) Piirrä datapisteet. Sovita dataan interpolaatiopolynomi vaikkapa **LagrangeInterp**-funktion avulla. Piirrä polynomi samaan kuvaan. Mikä on "ennuste" vuosille 2020, 2030? Sovita myös **polyfit**:lla alemman asteisia PNS-polynomeja realistisemman kasvunennusteen saamiseksi.

2. Kirjoita funktio *NewtonInterp*, jonka kutsu on sama kuin funkiolla *LagrangeInterp*. Kehitä funktiokoodi shakkilautatehtävän alussa esiintyvän skriptin pohjalta.
3. Määritä tapauksen $p = 5$ käsittelyn tyyllillä lauseke summalle $s_n = \sum_{k=1}^n k^p$ joillakin muilla p :n arvoilla. Kokeile ehkä ensin jotain arvoa $p < 5$, ja jos haluat lisää haastetta, niin kasvata p :tä. Voit tehdä interpolaatio-osan joko **LagrangeInterp**- tai edellisen tehtävän **NewtonInterp**- funktiolla. Induktiotodistus esim. Maximalla, tai mihin nyt pääset käsiksi.
4. Vastaava tehtävä jonolle:

$$a_k = (k-1)k(k+1), k = 1, 2, 3, \dots$$

Vastaus:

```
>>S=symsum((k-1)*k*(k+1),k,[1 n])
>>expand(S)
n^4/4 + n^3/2 - n^2/4 - n/2
```

Viitteet

[AL] Antti Laaksonen: Kuinka löytää kaava lukujonolle, Solmu 1/2019.

[CM] <https://se.mathworks.com/moler.html>, MATLAB-ohjelman kehittäjän, *Cleve Molerin* kaksi erinomaista, vapaasti luettavaa verkkokirjaa: "Experiments" ja "Numerical computing" with Matlab. Erityisesti "Experiments" sisältää paljon koulumatematiikkataustaan sopivaa materiaalia.

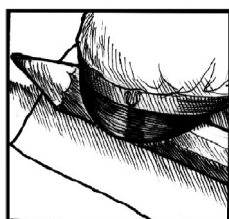
[GC] *Anne Greenbaum, Timothy P. Chartier*: Numerical Methods. Design, Analysis and Computer Implementation of Algorithms, Princeton U.P. 2012.

[Samu] *Samuli Siltanen*: Astu matematiikan maailmaan, Otava 2019.

Sisältää runsaasti matemaattiseen mallintamiseen liittyvää ajattelua ja esimerkkejä lukijaystävällisessä muodossa.

[s04] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2004/3/apiola.pdf>

[skript] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2019/2/skriptit/> Tähän kirjoitukseen liittyvät m-tiedostot, myöhemmin myös tehtävien ratkaisut.



Pätevä päättely, värikkäät sammakot ja ylioppilastehtävä

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Kevään 2019 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa oli tehtävä, jossa Harri arvioi palkkaansa ja piti arvioida, onko Harrin päättelyssä järkeä. Tehtävänanto oli seuraavanlainen:

Harri saa palkkaa 4200 euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani 4000 euroa, niin tuntipalkkani olisi $4000/160 = 25$. Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

Tämä tehtävä on ilmeisesti myös herättänyt kysymyksiä, kuten kysymyksen siitä miksei Harri vain käytä laskinta, jolla saisi suoraviivaisemmin oikean tuloksen. Se kysymys, johon tässä haluan pureutua on: mitä tarkoittaa, että päättely on pätevä tai että päättely perustuu päteviin arvioihin?

Tehtävän asetelma oli siinä suhteessa pikkuisen kiero, että Harri itse asiassa arvioi palkkaansa todella hyvin. Todellisen tuntipalkan ja arvioidun tuntipalkan ero oli

alle kymmenen senttiä. Ratkaisua ei voi siis rakentaa esimerkiksi sen varaan, että etsisi virheen, joka aiheuttaa heittoa arviossa. Päättelyn pätevyyttä on arvioitava jollain muulla keinolla.

Tuloksen oikeellisuus

Kuten yllä todettiin, oli tulos varsin lähellä oikeaa, joten argumenttia ei voi rakentaa sen varaan, että toteaisi arvion olevan mennyt metsään, tai sen varaan, että etsisi ilmeisen argumentaatio-ongelman, joka aiheuttaa arviointivirheen. Inhottavaa kyllä, päättelyn pätevyyttä ei voi perustella tuloksen oikeellisuudella. Tulos voi olla oikea, vaikka päättely olisi kuinka hullu tahansa. Toisaalta taas, periaatteessa päättely itsessään voi olla ihan fiksi, mutta kaatua pikkuruisen laskuvirheeseen, jolloin päättelyn ei voi sanoa olevan täysin pätevä, mutta logiikan päättelyn takana kylläkin. Valotetaan tilannetta ensin yhdellä hieman omituisella esimerkillä, sen jälkeen yhdellä hieman syvällisemmällä esimerkillä ja käsitellään lopulta perusteellinen ratkaisu.

Harri ja värikkäät sammakot

Oletetaan, että tilannekuvaus olisi ollut seuraavanlainen:

Harrin kuukausipalkka on 4200 euroa ja hän on töissä 155 tuntia kuussa. Harri arvioi palkkaansa näin:

"Jos olisin töissä 160 tuntia ja palkkani olisi 4000 euroa, olisi tuntipalkkani $4000/160 = 25$ euroa. Tämä on varmaan hyvä arvio." Nyt punainen sammakko kurnuttaa: "Mutta Harri, arviosi on pielessä, oikeampi arvio on euron enemmän, eli 26 euroa." Tähän vastaa sininen sammakko: "Punainen sammakko on ihan oikeassa, 26 euroa on oikeampi arvio, mutta sekin on pielessä, 27 euroa olisi vielä parempi arvio." Tähän toteaa vihreä sammakko: "Sammakkokollegani ovat ihan oikeassa. Alkuperäinen arviosi oli varsin onneton. Sen sijaan 27 euroa on oikein hyvä arvio." Lopulta Harri kiittää sammakoita sanoen: "Voi kiitos, nyt minulla on hyvä arvio palkalleni."

Olisiko Harrin päättely nyt ollut pätevä? Voiko värikkäiden sammakoiden kommentteihin palkkojen suuruuksista luottaa, jos lopullinen arvio on oikea? En usko, että kukaan vakavissaan pitää yllä olevaa päättelyä kovin järjellisenä, jos edes päättelynä. Sen sijaan sammakot ovat voineet tehdä fiksunkin päättelyn, mutta koska ne eivät kerro perusteluja tai päättelyn askelia, on niiden päättelyn pätevyyttä mahdoton arvioida.

Harri ja horjuvat arviot

Harrin kuukausipalkka on 4200 euroa ja hän on töissä 155 tuntia kuussa. Harri arvioi palkkaansa näin: "Jos olisin töissä 160 tuntia ja palkkani olisi 4000 euroa, olisi tuntipalkkani $4000/160 = 25$ euroa. Arvioin palkkani alakanttiin, joten siitä tulee pieni virhe, ehkäpä kolme euroa, eli todellinen palkka on varmaan 28 euroa. Ei mutta, unohdinkin ihan virheen työtuntien määrässä! Arvioin niitä 160 tuntiin, kun todellinen on 155 tuntia, eli todellinen palkka on varmaan myös hieman pienempi. Sanotaan 27 euroa."

Lopputulos on jälleen melko tarkka, mutta onko päättely pätevä? Päättelyn huolellisesti lukemalla näkee virheen: jos työtunteja on arvioitu ylöspäin, on saatu palkka-arvio liian pieni, ei liian suuri, kuten Harrin päättelyn lopussa väitetään. Muutos 28 eurosta 27 euroon on siis väärään suuntaan. Tämä kuitenkin tuottaa melkein oikean tuloksen, koska aiemmin on tehty virheellinen arvio. Ajatus siitä, että tuntipalkkaa pitää nostaa, koska kuukausipalkkakin on korkeampi, on oikea, mutta se ei tuo kolmen euron muutosta 25 eurosta 28 euroon.

Harri ja pätevä päättely

Aloitetaanpa alkuperäisen tehtävänannon analysointi.

Harri tietää, että hänen kuukausipalkkansa on 4200 euroa ja sen hän saa 155 työtunnilla. Ensin hän pyöristää luvun 4200 luvuksi 4000 ja luvun 155 luvuksi 160. Osoittaja pienenee, nimittäjä kasvaa, joten tulos pienenee väistämättä. Näiden arvioiden tarkoitus on muuttaa luvut läheisiksi luvuiksi, joilla on helpompi laskea.

Periaatteessa tämän kohdan arvioilla ei ole niin valtavasti merkitystä, kunhan seuraavat vaiheet tehdään huolella.

Jos palkka on 4000 euroa ja työtunteja 160, on tuntipalkka todellakin

$$\frac{4000}{160} = 25$$

euroa, kuten tehtävänannossa annettiin. Korjataan siten palkka-arvio vastaamaan todellisuutta. Heittoa on $4200 - 4000 = 200$ euroa, kuten Harri totesikin: "Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa." Tämä virhe puolestaan on

$$\frac{4200}{160} - \frac{4000}{160} = \frac{200}{160} = 1,25,$$

eli runsas euro kuten Harri totesikin, eli palkka-arvio korjaantuu näin runsaaseen 26 euroon, tarkasti ottaen 26,25 euroon. Tämän arvion järjestyys on helppo nähdä: luvut 200 ja 160 ovat hyvin lähellä toisiaan, joten niiden osamäärän on oltava lähellä ykköstä.

Viimeinen vaihe Harrin päättelyä on: "Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa."

Ensinnäkin Harri on ihan oikeassa siinä, että tuntipalkan pitää nousta, jos kuukausipalkka on vakiona ja työtuntien määrää tiputetaan. Tarkempi analyysi vaatii vähän enemmän töitä, varsinkin pääsälaskuna. Eleganti argumentti on huomata, että

$$\frac{160}{155} \approx \frac{27}{26}$$

tai toisin kirjoitettuna

$$\frac{160}{155} \cdot 26 \approx 27.$$

Hieman työläämpi vaihtoehto on huomata, että

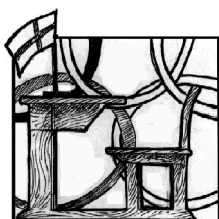
$$\frac{4200}{155} - \frac{4200}{160} = 4200 \cdot \frac{160 - 155}{160 \cdot 155} = \frac{420}{16 \cdot 31} = \frac{105}{124},$$

mikä todellakin on lähellä yhtä. Arvio on siis mielekäs. Harrilla kävi sikäli hyvä tuuri, että ensimmäinen virhe oli hiukan päälle euron ja toinen hiukan alle, jolloin yhteensä ne olivat melko tarkasti kaksi euroa.

Yksinkertaisuudessaan Harrin argumentin voi kirjoittaa muotoon:

$$\frac{4000}{160} + \left(\frac{4200}{160} - \frac{4000}{160} \right) + \left(\frac{4200}{155} - \frac{4200}{160} \right),$$

mistä on laskettu alkuperäinen murtoluku, ja molemmat murtolausekkeet vastaavat noin euron korotusta.



EGMO 2019

Idaliina Kuusisto, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Hilma Tillqvist

Vuoden 2019 Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset, EGMO, järjestettiin Kiovassa, Ukrainassa. Tämänvuotinen EGMO oli kahdeksas järjestetty. Kilpailuihin osallistui 50 joukkuetta, joista 36 Euroopasta. Kerromme ensiksi matkasta ja sitten tehtävistä, joista muutamasta ratkaisuideoiden kanssa.

Kilpailuihin osallistuminen

Veera: Osallistuin EGMO:on toista kertaa, joten tiesin mitä kilpailulta tapahtumana odottaa. Kilpailut jännittivät kohtuullisesti, kuten aina. Kuitenkin olin innostunut tulevista kilpailuista ja kaikesta muusta, mitä EGMO tulisi sisältämään. Odotin kilpailujen lisäksi myös muihin osallistujiin tutustumista.

Idaliina: Olin ensikertalainen, joten kokemus oli aivan uudenlainen. Olen yleensä melko rauhallinen, mutta ennen ensimmäistä kilpailupäivää kyllä jännitti.

Hilma: Osallistuin ensimmäistä kertaa EGMO:on. Kovin paljoa minua ei ennen kilpailua jännittänyt, mutta kun istuimme pöytien ääressä odottamassa kilpailun alkua, niin siinä kohtaa jännitti hyvin paljon. Varsinkin ajankäyttö mietitytti, että miten se oikein sujuu.

Nerissa: Osallistuin toista kertaa EGMO:on, ja kansainväliset kilpailut olivat minulle jo ennestään tuttuja. Tuttuudesta huolimatta kilpailu jännitti, koska halusin parantaa suoritustani.

Ukraina ja Kiova kokemuksena

Kiovassa ollessamme vierailimme suosituimmissa nähtävyyksissä. Kävimme retkillä esimerkiksi Kiovan keskustassa ja Ukrainan historiaa kuvaavassa ulkoilmamuseossa. Kaikilla retkillä ja muissakin tilanteissa meitä ohjasi oma paikallinen oppaamme.

Kiova oli kaupunkina odotukset ylittävä ja varsinakin kirkot olivat upeita. Pääsimme perehtymään lisäksi ukrainalaiseen kulttuuriin muun muassa ulkoilmamuseon ja perinnetanssien parissa.

Egmo tapahtumana

Kilpailu oli järjestetty hyvin. Vapaa-ajalla ja ekskursioilla tärkeää oli muihin kilpailijoihin tutustuminen. Keskustelut muiden maiden kilpailijoiden kanssa olivat kiinnostavia ja avartavia. Kilpailun alku- ja loppuseremoniat olivat hyvin onnistuneita. Juontaja piti tempoa ja ilmapiiriä hyvin yllä, ja pääsimme kuuntelemaan perinteistä musiikkia. Kilpailujen ilmapiiri oli hyvin positiivinen. Joukkueemme hyvä yhteishenki paransi matkaa paljon. Tapahtumana ja kokemuksena Egmo oli hieno ja mieleen jäävä.

Pohdintaa tehtävistä

Veera: Tehtävien vaikeustaso oli sellainen, mitä odotin. Tehtävät olivat todella mielenkiintoista pohdittavaa, ja

molempina päivinä neljän ja puolen tunnin kilpailuakataulu kului liiankin nopeasti.

Idaliina: Pelkäsin tehtävien vaativan enemmän tietoa, kuin minulla oli. Ne olivat kuitenkin aivan ratkaistavissa ja nautin niiden pohtimisesta.

Hilma: Ajattelin tehtävien olevan haastavampia ja vaikeammin ymmärrettäviä. Niitä oli kuitenkin mukava tehdä. Neljä ja puoli tuntia kului yllättävän nopeasti.

Nerissa: Tehtävien pohtiminen oli mukavaa ja kilpailuaika kului liiankin nopeasti – olisin mieluisesti pohtinut niitä pidempään. Tehtävien vaikeustaso ei poikennut odotuksistani. Keskityin kumpanakin kilpailupäivänä ratkaisemaan ensimmäisiä kahta tehtävää.

Tehtäviä kilpailuista

Tehtävä 1. Määritä kaikki reaalityökalukolmikot (a, b, c) , jotka toteuttavat ehdot $ab + bc + ca = 1$ ja $a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$.

Ratkaisu: Lähdin itse lähestymään tehtävää ensiksi erilaisia sijoituksia, kuten $a = 0$ ja $a = b = c$, kokeilemalla. Negatiivisten ratkaisujen huomioiminen on tehtävää ratkoessa muistettava, ne voivat huolimattomuutta unohtua.

Jos $a = 0$, on $bc = 1$. Tällöin myös $b = c^2a + b = a^2b + c = c$. Täten saadaan ratkaisut $(0, 1, 1)$ ja $(0, -1, -1)$. Symmetrian perusteella myös $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, -1)$, $(1, 1, 0)$ ja $(-1, -1, 0)$ ovat ratkaisuja.

Olkoot a, b ja c erisuuria kuin nolla. Ehdosta $ab + bc + ca = 1$ seuraa $a^2b + abc + a^2c = a$, $abc + bc^2 + c^2a = c$ ja $ab^2 + b^2c + abc = b$. Sijoitetaan nämä ehtoon $a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$:

$$\begin{aligned} a^2b + (abc + bc^2 + c^2a) &= b^2c + (a^2b + abc + a^2c) \\ &= c^2a + (ab^2 + b^2c + abc), \\ a^2b + bc^2 + c^2a &= b^2c + a^2b + a^2c \\ &= c^2a + ab^2 + b^2c. \end{aligned}$$

Tarkastellaan tätä: $a^2b + bc^2 + c^2a = b^2c + a^2b + a^2c$, mistä saadaan $bc^2 + c^2a = b^2c + a^2c$. Jaetaan c llä:

$$bc + ac = b^2 + a^2.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Tästä saadaan $2ab \leq a^2 + b^2$. Koska $bc + ac = b^2 + a^2$, on $2ab \leq bc + ac$. Toisaalta $bc + ac = 1 - ab$. Täten $2ab \leq 1 - ab$, eli $3ab \leq 1$. Siispä $ab \leq 1/3$.

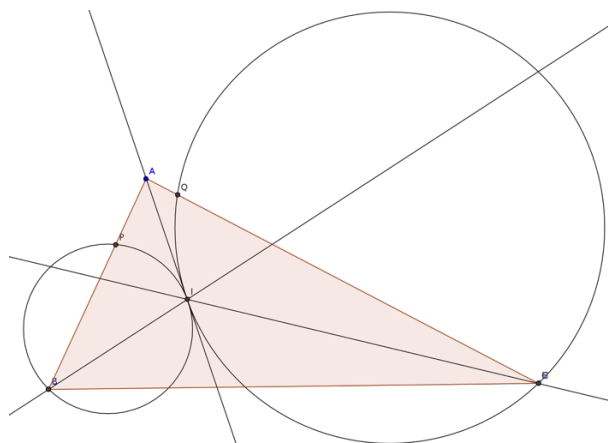
Vastaavasti saadaan myös $bc \leq 1/3$ ja $ac \leq 1/3$. Koska $ab + bc + ac = 1$, on $ab = bc = ca = 1/3$. Koska $ab = bc$, on $a = c$. Samoin $bc = ac$, joten $a = b$. Siispä $a = b = c$. Koska $ab = aa = 1/3$, niin $a = b = c = \pm 1/\sqrt{3}$. Koska

$ab = bc = ac$, on lukujen a, b, c kaikkien oltava joko positiivisia tai negatiivisia. Muuten jokin luvuista ab, bc, ac olisi erimerkkinen kuin toiset.

Näin ollaan saatu kaikki reaalityökalukolmikot $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(0, -1, -1)$, $(-1, 0, -1)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ ja $(1, 1, 0)$.

Tehtävä 4. Olkoon ABC kolmio, jonka sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste on I . Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen B kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AB jälleen pisteessä P . Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen C kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AC jälleen pisteessä Q . Osoita, että suora PQ sivuaa kolmion ABC sisäänpiirrettyä ympyrää.

Ratkaisu: Jos PQ sivuaa kolmion ABC sisäympyrää, on ympyrä myös nelikulmion $PQCB$ sisäympyrä. Tällöin nelikulmion kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä I . Haluamme siis osoittaa, että suora PI puolittaa kulman $\angle QPB$ ja suora QI puolittaa kulman $\angle CQP$.



Tehtävässä esiintyy paljon ympyröitä, joten aloitetaan ratkaiseminen ympyröiden ominaisuuksista. Pisteiden B ja C kautta kulkevat ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä I, ja suora AI on tangentti kummallekin ympyrälle. Täten pisteen potenssin mukaan:

$$\begin{aligned} AP \cdot AB &= AI^2, \\ AQ \cdot AC &= AI^2 \\ \Rightarrow AP \cdot AB &= AI^2 = AQ \cdot AC. \end{aligned}$$

Muokkaamalla yhtälöitä saamme sivujen pituuksien suhteita:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AI} &= \frac{AI}{AB}, \\ \frac{AQ}{AI} &= \frac{AI}{AC}, \\ \frac{AP}{AC} &= \frac{AQ}{AB}. \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien suhteista saamme kolme paria yhdenmuotoisia kolmioita:

$$\begin{aligned}\triangle APQ &\sim \triangle ACB \text{ (sks)}, \\ \triangle API &\sim \triangle AIB \text{ (sks)}, \\ \triangle AQI &\sim \triangle AIC \text{ (sks)}.\end{aligned}$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret:

$$\begin{aligned}\angle APQ &= \angle ACB, \\ \angle AQP &= \angle ABC, \\ \angle AIP &= \angle ABI = \frac{1}{2}\angle ABC, \\ \angle AIQ &= \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}$$

Tutkitaan lopuksi kulmia $\angle BPI$ ja $\angle QPI$. Aloitetaan kulmasta $\angle QPI$:

$$\begin{aligned}\angle QPI &= \angle API - \angle APQ \\ &= (180^\circ - \angle BAI - \angle AIP) - \angle APQ \\ &= (180^\circ - \angle BAI - \angle ABI) - \angle ACB \\ &= (180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle ABC) - \angle ACB \\ &= (\frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB) - \angle ACB \\ &= \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = \angle BAI + \angle ABI.\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä kulmaa $\angle BPI$:

$$\begin{aligned}\angle BPI &= 180^\circ - \angle API \\ &= \angle BAI + \angle AIP = \angle BAI + \angle ABI.\end{aligned}$$

Lopputulokseksi tulee $\angle QPI = \angle ABI + \angle BAI = \angle BPI$. Täten suora PI puolittaa kulman $\angle BPQ$. Symmetrian nojalla suora QI puolittaa vastaavasti kulman $\angle PQC$. Siispä kolmion ABC sisäympyrä on myös nelikulmion $PQCB$ sisäympyrä, jolloin suora PQ sivuaa sisäympyrää. Väite on siis todistettu.

Tehtävä 5. Olkoon n kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \dots, b_n$, jotka toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

(A) $a_i \leq b_i$, kun $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) lukujen $b_1, b_2, \dots, b_n$ jakojäännökset luvulla n jaettaessa ovat pareittain erisuuria (siis kaikki erisuuria keskenään);

$$(C) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right).$$

(Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaisosaa, eli suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x .)

Tehtävään on monia ratkaisutapoja. Seuraavaksi on esitetty ehkäpä yksinkertaisin tapa. Itse hyödynsin joitakin samoja asioita, mutta en löytänyt kaikkia, joten ratkaisuyrityksestäni tuli huomattavasti monimutkaisempi.

Ratkaisu: Määritellään b_i rekursiivisesti pienimmäksi mahdolliseksi kokonaisluvuksi siten, että $b_i \geq a_i$ ja b_i ei ole kongruentti millekään $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$ modulo n . Tällöin $b_i - a_i \leq i - 1$, sillä i :stä peräkkäisestä kokonaisluvusta $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+i-1}$, korkeintaan $i - 1$ on kongruentteja yhdelle $b_1, \dots, b_{i-1}$ modulo n . Koska kaikki b_i :t ovat erisuuria modulo n , meillä on

$$\sum_{i=1}^n b_i \equiv \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

joten n jakaa luvun $\sum_{i=1}^n b_i - \frac{1}{2}n(n-1)$. Lisäksi meillä on

$$\sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n (i-1),$$

joten

$$\sum_{i=1}^n b_i - \frac{1}{2}n(n-1) \leq \sum_{i=1}^n a_i.$$

Koska vasen puoli on jaollinen luvulla n , meillä on

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n b_i - \frac{1}{2}n(n-1) \right) \leq \left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right\rfloor,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right),$$

mikä täyttää viimeisen vaatimuksen.

Solmu 2/2019

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Pietari Kalmin katu 5)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Jyrki Lahtonen, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

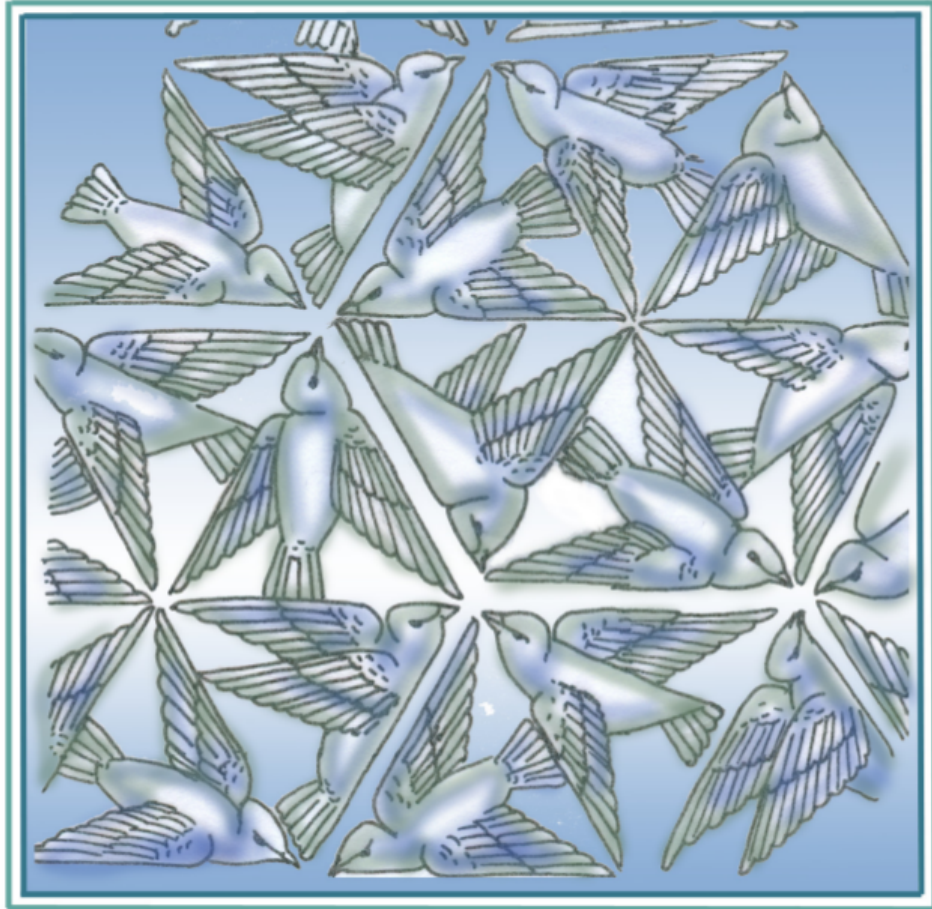
Kansikuva:

Noora Isoeskelä

Numeroon 3/2019 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 16.9.2019 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 **SOLMU**
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi