



Pätevä päättely, värikkäät sammakot ja ylioppilastehtävä

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Kevään 2019 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa oli tehtävä, jossa Harri arvioi palkkaansa ja piti arvioida, onko Harrin päättelyssä järkeä. Tehtävänanto oli seuraavanlainen:

Harri saa palkkaa 4200 euroa kuukaudessa ja hänen työtuntimääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani 4000 euroa, niin tuntipalkkani olisi $4000/160 = 25$. Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.

11.1. Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2. Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

Tämä tehtävä on ilmeisesti myös herättänyt kysymyksiä, kuten kysymyksen siitä miksei Harri vain käytä lasointia, jolla saisi suoraviivaisemmin oikean tuloksen. Se kysymys, johon tässä haluan pureutua on: mitä tarkoittaa, että päättely on pätevä tai että päättely perustuu päteviin arvioihin?

Tehtävän asetelma oli siinä suhteessa pikkuisen kiero, että Harri itse asiassa arvioi palkkaansa todella hyvin. Todellisen tuntipalkan ja arvioidun tuntipalkan ero oli

alle kymmenen senttiä. Ratkaisua ei voi siis rakentaa esimerkiksi sen varaan, että etsisi virheen, joka aiheuttaa heittoa arviossa. Päättelyn pätevyyttä on arvioitava jollain muulla keinolla.

Tuloksen oikeellisuus

Kuten yllä todettiin, oli tulos varsin lähellä oikeaa, joten argumenttia ei voi rakentaa sen varaan, että toteaisi arvion olevan mennyt metsään, tai sen varaan, että etsisi ilmeisen argumentaatio-ongelman, joka aiheuttaa arviointivirheen. Inhottavaa kyllä, päättelyn pätevyyttä ei voi perustella tuloksen oikeellisuudella. Tulos voi olla oikea, vaikka päättely olisi kuinka hullu tahansa. Toisaalta taas, periaatteessa päättely itsessään voi olla ihan fiksu, mutta kaatua pikkuruiseen laskuvirheeseen, jolloin päättelyn ei voi sanoa olevan täysin pätevä, mutta logiikan päättelyn takana kylläkin. Valotetaan tilannetta ensin yhdellä hieman omituisella esimerkillä, sen jälkeen yhdellä hieman syvällisemmällä esimerkillä ja käsitellään lopulta perusteellinen ratkaisu.

Harri ja värikkäät sammakot

Oletetaan, että tilannekuvaus olisi ollut seuraavanlainen:

Harrin kuukausipalkka on 4200 euroa ja hän on töissä 155 tuntia kuussa. Harri arvioi palkkaansa näin:

”Jos olisin töissä 160 tuntia ja palkkani olisi 4000 euroa, olisi tuntipalkkani $4000/160 = 25$ euroa. Tämä on varmaan hyvä arvio.” Nyt punainen sammakko kurnuttaa: ”Mutta Harri, arviosi on pielessä, oikeampi arvio on euron enemmän, eli 26 euroa.” Tähän vastaa sininen sammakko: ”Punainen sammakko on ihan oikeassa, 26 euroa on oikeampi arvio, mutta sekin on pielessä, 27 euroa olisi vielä parempi arvio.” Tähän toteaa vihreä sammakko: ”Sammakkokollegani ovat ihan oikeassa. Alkuperäinen arviosi oli varsin onneton. Sen sijaan 27 euroa on oikein hyvä arvio.” Lopulta Harri kiittää sammakoita sanoen: ”Voi kiitos, nyt minulla on hyvä arvio palkalleni.”

Olisiko Harrin päättely nyt ollut pätevä? Voiko värikkäiden sammakoiden kommentteihin palkkojen suuruuksista luottaa, jos lopullinen arvio on oikea? En usko, että kukaan vakavissaan pitää yllä olevaa päättelyä kovin järjellisenä, jos edes päättelynä. Sen sijaan sammakot ovat voineet tehdä fiksunkin päättelyn, mutta koska ne eivät kerro perusteluja tai päättelyn askelia, on niiden päättelyn pätevyyttä mahdoton arvioida.

Harri ja horjuvat arviot

Harrin kuukausipalkka on 4200 euroa ja hän on töissä 155 tuntia kuussa. Harri arvioi palkkaansa näin: ”Jos olisin töissä 160 tuntia ja palkkani olisi 4000 euroa, olisi tuntipalkkani $4000/160 = 25$ euroa. Arvioin palkkani alakanttiin, joten siitä tulee pieni virhe, ehkäpä kolme euroa, eli todellinen palkka on varmaan 28 euroa. Ei mutta, unohdinkin ihan virheen työtuntien määrässä! Arvioin niitä 160 tuntiin, kun todellinen on 155 tuntia, eli todellinen palkka on varmaan myös hieman pienempi. Sanotaan 27 euroa.”

Lopputulos on jälleen melko tarkka, mutta onko päätely pätevä? Päättelyn huolellisesti lukemalla näkee virheen: jos työtunteja on arvioitu ylöspäin, on saatu palkka-arvio liian pieni, ei liian suuri, kuten Harrin päättelyn lopussa väitetään. Muutos 28 eurosta 27 euroon on siis väärään suuntaan. Tämä kuitenkin tuottaa melkein oikean tuloksen, koska aiemmin on tehty virheellinen arvio. Ajatus siitä, että tuntipalkkaa pitää nostaa, koska kuukausipalkkakin on korkeampi, on oikea, mutta se ei tuo kolmen euron muutosta 25 eurosta 28 euroon.

Harri ja pätevä päättely

Aloitetaanpa alkuperäisen tehtävänannon analysointi.

Harri tietää, että hänen kuukausipalkkansa on 4200 euroa ja sen hän saa 155 työtunnilla. Ensin hän pyöristää luvun 4200 luvuksi 4000 ja luvun 155 luvuksi 160. Osoittaja pienenee, nimittäjä kasvaa, joten tulos pienenee väistämättä. Näiden arvioiden tarkoitus on muuttaa luvut läheisiksi luvuiksi, joilla on helpompi laskea.

Periaatteessa tämän kohdan arvioilla ei ole niin valtavasti merkitystä, kunhan seuraavat vaiheet tehdään huolella.

Jos palkka on 4000 euroa ja työtunteja 160, on tuntipalkka todellakin

$$\frac{4000}{160} = 25$$

euroa, kuten tehtävänannossa annettiin. Korjataan siten palkka-arvio vastaamaan todellisuutta. Heittoa on $4200 - 4000 = 200$ euroa, kuten Harri totesikin: ”Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa.” Tämä virhe puolestaan on

$$\frac{4200}{160} - \frac{4000}{160} = \frac{200}{160} = 1,25,$$

eli runsas euro kuten Harri totesikin, eli palkka-arvio korjaantuu näin runsaaseen 26 euroon, tarkasti ottaen 26,25 euroon. Tämän arvion järjestyys on helppo nähdä: luvut 200 ja 160 ovat hyvin lähellä toisiaan, joten niiden osamäärän on oltava lähellä ykköstä.

Viimeinen vaihe Harrin päättelyä on: ”Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160, ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten todellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.”

Ensinnäkin Harri on ihan oikeassa siinä, että tuntipalkan pitää nousta, jos kuukausipalkka on vakiona ja työtuntien määrää tiputetaan. Tarkempi analyysi vaatii vähän enemmän töitä, varsinkin päässä laskuna. Eleganti argumentti on huomata, että

$$\frac{160}{155} \approx \frac{27}{26}$$

tai toisin kirjoitettuna

$$\frac{160}{155} \cdot 26 \approx 27.$$

Hieman työlämpi vaihtoehto on huomata, että

$$\frac{4200}{155} - \frac{4200}{160} = 4200 \cdot \frac{160 - 155}{160 \cdot 155} = \frac{420}{16 \cdot 31} = \frac{105}{124},$$

mikä todellakin on lähellä yhtä. Arvio on siis mielekäs. Harrilla kävi sikäli hyvä tuuri, että ensimmäinen virhe oli hiukan päälle euron ja toinen hiukan alle, jolloin yhteensä ne olivat melko tarkasti kaksi euroa.

Yksinkertaisuudessaan Harrin argumentin voi kirjoittaa muotoon:

$$\frac{4000}{160} + \left(\frac{4200}{160} - \frac{4000}{160} \right) + \left(\frac{4200}{155} - \frac{4200}{160} \right),$$

mistä on laskettu alkuperäinen murtoluku, ja molemmat murtolausekkeet vastaavat noin euron korotusta.