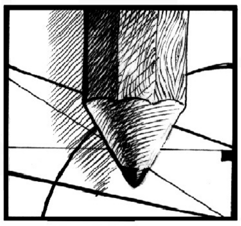


Laatikkoperiaatteen ihmeitä

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Sanotaan, että rakkaalla lapsella on monta nimeä. Tämä näyttää pätevän myös laatikkoperiaatteeseen, joka tunnetaan myös esimerkiksi kyyhkyslakka- ja lokeroperiaatteena sekä Dirichlet'n periaatteena. Mikä laatikkoperiaate sitten oikein on?

Lause 1 (Laatikkoperiaate)**.** Jos on n kappaletta laatikoita ja niihin asetetaan $n + 1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine.

Todistus. Koska itse todistettava väite vaikuttaa melko itsestään selvältä, mutta voi olla haastavaa suoraan sanoa, miksi väite pätee, on helpointa lähestyä todistusta vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että kuhunkin laatikkoon tulee korkeintaan yksi esine. Koska laatikoita on n kappaletta, niin niihin tulee yhteensä korkeintaan $n \cdot 1 = n$ esinettä. Mutta laatikoihin haluttiin laittaa $n+1$ esinettä. Siispä, jos laatikoihin laitetaan $n+1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine. □

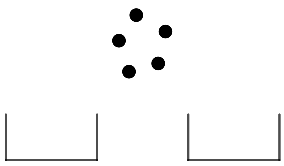
Laatikkoperiaatteen todistuksesta itse asiassa huomataan, että jos laatikoita on n ja esineitä *yli* n kappaletta, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli yksi esine. Näin ollen $n+1$ esinettä on *pienin* määrä esineitä, jolla tämä väite pätee.

Lisäksi laatikkoperiaate kertoo, että *jossain* laatikossa on yli yksi esine, mutta se ei kerro, *missä* laatikossa näin on. Voi myös olla, että useammassa laatikossa on yli yksi esine. Esimerkiksi, jos laatikoita on kolme ja esineitä neljä, niin laatikoissa olevien esineiden määrät voivat olla esimerkiksi $2, 1$ ja 1 tai $1, 2$ ja 1 tai $2, 2$ ja 0.

Laatikkoperiaatteesta voidaan muotoilla yleisempikin versio, jossa saadaan suurempi alaraja laatikossa oleville esineille kuin yksi. Tutustutaan siihen seuraavaksi:

Lause 2. Jos on n kappaletta laatikoita ja niihin asetetaan $nk + 1$ esinettä, niin ainakin yhteen laatikkoon tulee yli k esinettä.

Todistus. Todistetaan tämä väite samalla tavalla kuin edellinen lause. Oletetaan, että kuhunkin laatikkoon tulee korkeintaan k esinettä. Koska laatikoita on n kappaletta, niin niihin tulee yhteensä enintään nk esinettä. Mutta $nk < nk + 1$ eli tämä ei ole mahdollista. Siis vähintään yhteen laatikkoon tulee yli k esinettä. □



Kuvassa on kaksi laatikkoa ja $5 = 2 \cdot 2 + 1$ *esinettä. Mitä laatikkoperiaatteen yleisempi versio sanoo tästä tilanteesta?*

Aivan samalla tavalla kuin laatikkoperiaatteen tavallisen version kohdalla tässäkin tapauksessa voidaan tehdä havaintoja väitteen toteuttavista esineiden määristä. Huomataan, että väite pätee aina, kun esineitä on *yli* nk kappaletta ja $nk + 1$ esinettä on *pienin* tämän ehdon toteuttava esineiden määrä.

Mitä hyötyä laatikkoperiaatteesta sitten on? Tarkastellaan tätä muutamilla arkielämään liittyvillä esimerkeillä. Teksti on saanut inspiraationsa kirjoituksesta [1].

Levitteitä leiville

Ruokalassa on tarjolla viittä eri levitettä – sanokaamme vaikkapa margariinia ja voita sekä hummus-, ruohosipuli- ja pippurilevitteitä. Rajoitteena on, että yksi ihminen saa ottaa korkeintaan neljä leipää. Koska $5 > 4$, niin laatikkoperiaatteen nojalla jos haluaa ottaa kaikkia levitteitä, niin ainakin yhdelle leivälle tulee yli yhtä levitettä.

Luokan oppilaiden määristä

Koulun ensimmäiselle luokka-asteelle on tulossa 64 oppilasta. Heille on varattu kolmen luokan verran tilaa ja opettajia. Koska $64 = 3 \cdot 21 + 1$, niin laatikkoperiaatteen nojalla ainakin yhteen luokkaan tulee vähintään 22 oppilasta.

Sukkien löytäminen

Oletetaan, että laatikossa on kymmenen paria sukkia ja kymmenen sukkaa, joilla ei ole paria. Sukat ovat hujan hajan ja halutaan löytää niiden joukosta sukkapari. Tehdään tämä nostamalla sukkia umpimähkään laatikosta. Kysymys kuuluu, kuinka monta sukkaa joudutaan korkeintaan nostamaan, jotta saadaan varmasti sukkapari.

Yhteensä erilaisia sukkatyyppejä on $10 + 10 = 20$, kun otetaan huomioon sukat, joilla on pari, ja sukat, joilla ei ole paria. Laatikkoperiaatteen nojalla siis, jos nostetaan 21 sukkaa, niin saadaan ainakin yksi sukkapari. Toisaalta on mahdollista nostaa 20 paritonta sukkaa nostamalla yksi sukka kutakin sukkatyyppiä. Vastaus on siis 21.

Tämän tekstin lukijoiden ystävät

Oletetaan, että tämän tekstin lukee n henkilöä, missä $n \geq 2$ on kokonaisluku. (Tämä on järkevä oletus, sillä tekstin kirjoittaja sekä vähintäänkin lehden päätoimittaja lukevat tekstin.) Tarkastellaan, kuinka monta ystävää kullakin lukijalla on tämän tekstin lukijoiden joukossa. Oletetaan, että ystävyys on molemminpuolista – toisin sanoen, jos A on henkilön B ystävä, niin B on myös henkilön A ystävä. Kukaan lukija ei myöskään voi olla itsensä ystävä. Osoitetaan, että tämän tekstin lukijoiden joukossa vähintään kahdella on sama määrä ystäviä.

Oletusten mukaan kullakin lukijalla voi olla $0, 1, \ldots,$ $n-2$ tai $n-1$ ystävää lukijoiden joukossa, sillä kukaan ei voi olla itsensä ystävä. Oletetaan ensin, että jollain henkilöllä ei ole yhtään ystävää tekstin lukijoiden joukossa. Tällöin kaikilla lukijoilla voi olla $0, 1, \ldots, n-2$ ystävää lukijoiden joukossa, sillä kukaan ei voi olla itsensä tai sen henkilön, jolla ei ole ystäviä lukioiden joukossa, ystävä. Näitä eri mahdollisuuksia on $n-1$ kappaletta, kun taas lukijoita on n kappaletta. Siis laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kahdella lukijalla on sama määrä ystäviä.

Tarkastellaan vielä samalla tavalla tapaus, jossa kaikilla on vähintään yksi ystävä lukijoiden joukossa. Tällöin mahdolliset ystävien määrät ovat $1, 2, \ldots, n-1$. Näitä on $n-1$ kappaletta ja lukijoita n kappaletta. Jälleen kerran laatikkoperiaatteen nojalla vähintään kahdella lukijalla on sama määrä ystäviä tekstin lukijoiden joukossa.

Erityisesti on huomattava, ettei tässä esimerkissä tarvita lukijoista mitään muuta tietoa kuin, että heitä on vähintään kaksi ja lukijoita on äärellinen määrä. Jännittävää, eikö totta?

Ravintolan menu-kokonaisuudet

Laatikkoperiaatetta voidaan luonnollisesti soveltaa useampaan kertaan saman ongelman tarkasteluun. Tutustutaan seuraavaksi tilanteeseen, jossa näin on tehty.

Eräässä ravintolassa halutaan koostaa useita viiden ruokalajin menuita. Kuhunkin ruokalajiin on neljä eri vaihtoehtoa ja halutaan, että mitkä tahansa kaksi eri menua eroavat ainakin kolmen ruokalajin kohdalta. Osoitetaan, että erilaisia menuita voidaan koostaa korkeintaan 64 kappaletta.

Tehdään vastaoletus, että erilaisia menuita on ainakin 65 kappaletta. Koska $65 = 4 \cdot 16 + 1$, niin laatikkoperiaatteen nojalla ainakin 17 eri menulla on sama ensimmäinen ruoka. Edelleen, koska on $17 = 4 \cdot 4 + 1$, niin laatikkoperiaatteen mukaan ainakin viidellä edellisistä menuista on myös sama toinen ruoka. Tästä taas seuraa, että ainakin kahdella edellisistä menuista on myös sama kolmas ruoka. Mutta nämä menut eroavat korkeintaan kahden ruokalajin kohdalta, mikä on vastoin haluttuja ehtoja. Siispä halutut ehdot toteuttavia menuita on enintään 64 kappaletta.

On huomattava, että edellisessä esimerkissä osoitetaan nimenomaan erilaisia menuita olevan *enintään* 64 kappaletta. Se ei tarkoita, että nämä 64 menua saataisiin muodostettua. Tämä kysymys jätetään aktiivisen lukijan pohdittavaksi.

Viitteet

[1] Talwalkar, P.: *16 fun applications of the pigeonhole principle*, Nov 2008. `https://mindyourdecisions.com/blog/2008/11/25/16-fun-applications-of-the-pigeonhole-principle/`