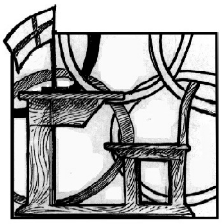


EGMO 2019

Idaliina Kuusisto, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Hilma Tillqvist

Vuoden 2019 Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset, EGMO, järjestettiin Kiovassa, Ukrainassa. Tämänvuotinen EGMO oli kahdeksas järjestetty. Kilpailuihin osallistui 50 joukkuetta, joista 36 Euroopasta. Kerromme ensiksi matkasta ja sitten tehtävistä, joista muutamasta ratkaisuideoiden kanssa.

Kilpailuihin osallistuminen

Veera: Osallistuin EGMO:on toista kertaa, joten tiesin mitä kilpailuilta tapahtumana odottaa. Kilpailut jännittivät kohtuullisesti, kuten aina. Kuitenkin olin innostunut tulevista kilpailuista ja kaikesta muusta, mitä EGMO tulisi sisältämään. Odotin kilpailujen lisäksi myös muihin osallistujiin tutustumista.

Idaliina: Olin ensikertalainen, joten kokemus oli aivan uudenlainen. Olen yleensä melko rauhallinen, mutta ennen ensimmäistä kilpailupäivää kyllä jännitti.

Hilma: Osallistuin ensimmäistä kertaa EGMO:on. Kovin paljoa minua ei ennen kilpailua jännittänyt, mutta kun istuimme pöytien ääressä odottamassa kilpailun alkua, niin siinä kohtaa jännitti hyvin paljon. Varsinkin ajankäyttö mietitytti, että miten se oikein sujuu.

Nerissa: Osallistuin toista kertaa EGMO:on, ja kansainväliset kilpailut olivat minulle jo ennestään tuttuja. Tuttuudesta huolimatta kilpailu jännitti, koska halusin parantaa suoritustani.

Ukraina ja Kiova kokemuksena

Kiovassa ollessamme vierailimme suosituimmissa nähtävyyksissä. Kävimme retkillä esimerkiksi Kiovan keskustassa ja Ukrainan historiaa kuvaavassa ulkoilmamuseossa. Kaikilla retkillä ja muissakin tilanteissa meitä ohjasi oma paikallinen oppaamme.

Kiova oli kaupunkina odotukset ylittävä ja varsinkin kirkot olivat upeita. Pääsimme perehtymään lisäksi ukrainalaiseen kulttuuriin muun muassa ulkoilmamuseon ja perinnetanssien parissa.

Egmo tapahtumana

Kilpailu oli järjestetty hyvin. Vapaa-ajalla ja ekskursioilla tärkeää oli muihin kilpailijoihin tutustuminen. Keskustelut muiden maiden kilpailijoiden kanssa olivat kiinnostavia ja avartavia. Kilpailun alku- ja loppuseremoniat olivat hyvin onnistuneita. Juontaja piti tempoa ja ilmapiiriä hyvin yllä, ja pääsimme kuuntelemaan perinteistä musiikkia. Kilpailujen ilmapiiri oli hyvin positiivinen. Joukkueemme hyvä yhteishenki paransi matkaa paljon. Tapahtumana ja kokemuksena Egmo oli hieno ja mieleen jäävä.

Pohdintaa tehtävistä

Veera: Tehtävien vaikeustaso oli sellainen, mitä odotin. Tehtävät olivat todella mielenkiintoista pohdittavaa, ja molempina päivinä neljän ja puolen tunnin kilpailuaikataulu kului liiankin nopeasti.

Idaliina: Pelkäsin tehtävien vaativan enemmän tietoa, kuin minulla oli. Ne olivat kuitenkin aivan ratkaistavissa ja nautin niiden pohtimisesta.

Hilma: Ajattelin tehtävien olevan haastavampia ja vaikeammin ymmärrettäviä. Niitä oli kuitenkin mukava tehdä. Neljä ja puoli tuntia kului yllättävän nopeasti.

Nerissa: Tehtävien pohtiminen oli mukavaa ja kilpailuaika kului liiankin nopeasti – olisin mieluisesti pohtinut niitä pidempään. Tehtävien vaikeustaso ei poikennut odotuksistani. Keskityin kumpanakin kilpailupäivänä ratkaisemaan ensimmäisiä kahta tehtävää.

Tehtäviä kilpailuista

Tehtävä 1. Määritä kaikki reaalilukukolmikot (a, b, c), jotka toteuttavat ehdot $ab + bc + ca = 1$ ja $a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$.

Ratkaisu: Lähdin itse lähestymään tehtävää ensiksi erilaisia sijoituksia, kuten $a = 0$ ja $a = b = c$, kokeilemalla. Negatiivisten ratkaisujen huomioiminen on tehtävää ratkoessa muistettava, ne voivat huolimattomuutta unohtua.

Jos $a = 0$, on $bc = 1$. Tällöin myöskin $b = c^2a + b = a^2b + c = c$. Täten saadaan ratkaisut $(0, 1, 1)$ ja $(0, -1, -1)$. Symmetrian perusteella myös $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, -1)$, $(1, 1, 0)$ ja $(-1, -1, 0)$ ovat ratkaisuja.

Olkoot a, b ja c erisuuria kuin nolla. Ehdosta $ab+bc+ca = 1$ seuraa $a^2b+abc+a^2c = a$, $abc+bc^2+c^2a = c$ ja $ab^2 + b^2c + abc = b$. Sijoitetaan nämä ehtoon $a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$:

$$\begin{aligned} a^2b + (abc + bc^2 + c^2a) &= b^2c + (a^2b + abc + a^2c) \\ &= c^2a + (ab^2 + b^2c + abc), \\ a^2b + bc^2 + c^2a &= b^2c + a^2b + a^2c \\ &= c^2a + ab^2 + b^2c. \end{aligned}$$

Tarkastellaan tätä: $a^2b + bc^2 + c^2a = b^2c + a^2b + a^2c$, mistä saadaan $bc^2 + c^2a = b^2c + a^2c$. Jaetaan c:llä:

$$bc + ac = b^2 + a^2.$$

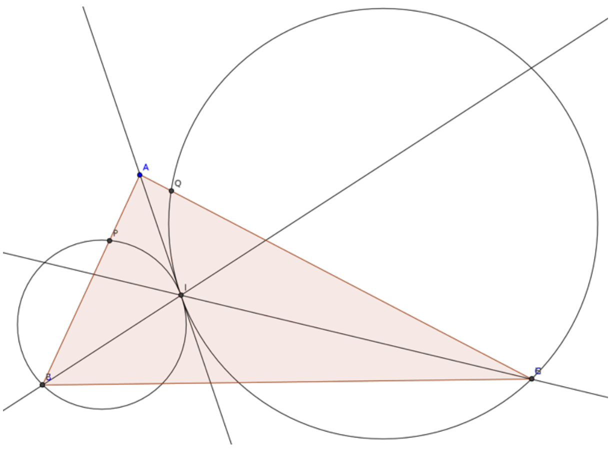
Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$. Tästä saadaan $2ab \leq a^2 + b^2$. Koska $bc + ac = b^2 + a^2$, on $2ab \leq bc + ac$. Toisaalta $bc + ac = 1 - ab$. Täten $2ab \leq 1 - ab$, eli $3ab \leq 1$. Siispä $ab \leq 1/3$.

Vastaavasti saadaan myös $bc \leq 1/3$ ja $ac \leq 1/3$. Koska $ab+bc+ac = 1$, on $ab = bc = ca = 1/3$. Koska $ab = bc$, on $a = c$. Samoin $bc = ac$, joten $a = b$. Siispä $a = b = c$. Koska $ab = aa = 1/3$, niin $a = b = c = \pm 1/\sqrt{3}$. Koska $ab = bc = ac$, on lukujen a, b, c kaikkien oltava joko positiivisia tai negatiivisia. Muuten jokin luvuista ab, bc, ac olisi erimerkkinen kuin toiset.

Näin ollaan saatu kaikki reaalilukukolmikot $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(0, -1, -1)$, $(-1, 0, -1)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ ja $(1, 1, 0)$.

Tehtävä 4. Olkoon ABC kolmio, jonka sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste on I. Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen B kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AB jälleen pisteessä P. Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen C kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AC jälleen pisteessä Q. Osoita, että suora PQ sivuaa kolmion ABC sisäänpiirrettyä ympyrää.

Ratkaisu: Jos PQ sivuaa kolmion ABC sisäympyrää, on ympyrä myös nelikulmion $PQCB$ sisäympyrä. Tällöin nelikulmion kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä I. Haluamme siis osoittaa, että suora PI puolittaa kulman $\angle QPB$ ja suora QI puolittaa kulman $\angle CQP$.



Tehtävässä esiintyy paljon ympyröitä, joten aloitetaan ratkaiseminen ympyröiden ominaisuuksista. Pisteiden B ja C kautta kulkevat ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä I, ja suora AI on tangentti kummallekin ympyrälle. Täten pisteen potenssin mukaan:

$$\begin{aligned} AP \cdot AB &= AI^2, \\ AQ \cdot AC &= AI^2 \\ \Rightarrow AP \cdot AB &= AI^2 = AQ \cdot AC. \end{aligned}$$

Muokkaamalla yhtälöitä saamme sivujen pituuksien suhteita:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AI} &= \frac{AI}{AB}, \\ \frac{AQ}{AI} &= \frac{AI}{AC}, \\ \frac{AP}{AC} &= \frac{AQ}{AB}. \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien suhteista saamme kolme paria yhdenmuotoisia kolmioita:

$$\begin{aligned}\triangle APQ &\sim \triangle ACB \text{ (sks)},\\ \triangle API &\sim \triangle AIB \text{ (sks)},\\ \triangle AQI &\sim \triangle AIC \text{ (sks)}.\end{aligned}$$

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret:

$$\begin{aligned}&\angle APQ = \angle ACB,\\ &\angle AQP = \angle ABC,\\ &\angle AIP = \angle ABI = \frac{1}{2}\angle ABC,\\ &\angle AIQ = \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}$$

Tutkitaan lopuksi kulmia $\angle BPI$ ja $\angle QPI$. Aloitetaan kulmasta $\angle QPI$:

$$\begin{aligned}\angle QPI &= \angle API - \angle APQ\\ &= (180^\circ - \angle BAI - \angle AIP) - \angle APQ\\ &= (180^\circ - \angle BAI - \angle ABI) - \angle ACB\\ &= (180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle ABC) - \angle ACB\\ &= (\frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB) - \angle ACB\\ &= \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = \angle BAI + \angle ABI.\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä kulmaa $\angle BPI$:

$$\begin{aligned}\angle BPI &= 180^\circ - \angle API\\ &= \angle BAI + \angle AIP = \angle BAI + \angle ABI.\end{aligned}$$

Lopputulokseksi tulee $\angle QPI = \angle ABI + \angle BAI = \angle BPI$. Täten suora PI puolittaa kulman $\angle BPQ$. Symmetrian nojalla suora QI puolittaa vastaavasti kulman $\angle PQC$. Siispä kolmion ABC sisäympyrä on myös nelikulmion $PQCB$ sisäympyrä, jolloin suora PQ sivuaa sisäympyrää. Väite on siis todistettu.

Tehtävä 5. Olkoon n kokonaisluku, ja olkoot a_1, a_2, …, a_n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut b_1, b_2, …, b_n, jotka toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

(A) $a_i \le b_i$, kun $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) lukujen b_1, b_2, …, b_n jakojäännökset luvulla n jaettaessa ovat pareittain erisuuria (siis kaikki erisuuria keskenään);

(C) $$\begin{aligned}&b_1 + b_2 + \ldots + b_n\\ &\qquad \le n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right).\end{aligned}$$

(Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaisosaa, eli suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x.)

Tehtävään on monia ratkaisutapoja. Seuraavaksi on esitetty ehkäpä yksinkertaisin tapa. Itse hyödynsin joitakin samoja asioita, mutta en löytänyt kaikkia, joten ratkaisuyrityksestäni tuli huomattavasti monimutkaisempi.

Ratkaisu: Määritellään b_i rekursiivisesti pienimmäksi mahdolliseksi kokonaisluvuksi siten, että $b_i \ge a_i$ ja b_i ei ole kongruentti millekään b_1, b_2, …, b_{i-1} modulo n. Tällöin $b_i - a_i \le i - 1$, sillä i:stä peräkkäisestä kokonaisluvusta a_i, a_{i+1}, …, a_{i+i-1}, korkeintaan $i - 1$ on kongruentteja yhdelle b_1, …, b_{i-1} modulo n. Koska kaikki b_i:t ovat erisuuria modulo n, meillä on

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{2} n(n-1),$$

joten n jakaa luvun $\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2} n(n-1)$. Lisäksi meillä on

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} (i-1),$$

joten

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2} n(n-1) \le \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Koska vasen puoli on jaollinen luvulla n, meillä on

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2} n(n-1)\right) \le \left\lfloor \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right\rfloor,$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \le n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right),$$

mikä täyttää viimeisen vaatimuksen.