



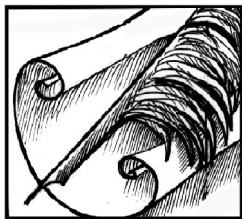
S&LMU

MATEMATIIKKALEHTI 1/2019

matematiikkalehtisolmu.fi

Sisällys

Pääkirjoitus: Oodi hyvälle opettajille (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, kuudes ja seitsemäs kurssi (Matti Lehtinen)	4
Kuinka löytää kaava lukujonolle? (Antti Laaksonen)	8
Kahden muuttujan keskiarvoista (Esa V. Vesalainen)	11
Baselin ongelma (Markku Halmetoja)	15
Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuudesta (Tuomas Korppi)	19
Kevään 2018 ylioppilastehtävä muunneltuna (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	24



Oodi hyvälle opettajille

Pääkirjoitus

Olin käsittämättömän onnekas koulussa. Minulle osui monta loistavaa matematiikan ja tietotekniikan opettajaa, useita hyviä, eikä yhtään huonoa. Toinen tulkinta tälle onnekkuudelle on yksinkertaisesti vain suomalais-ten opettajien kova taso.

Toisinaan kuulen kauhutarinoita omituisista pistevähennyksistä tai tyhjiksi kumitetuista matematiikan kirjan sivuista, koska oppilas on laskenut liian pitkälle. Välttyin näiltä. Välttyin myös valtavalta määrältä rutiinitehtävien toistoa. Rutiinitehtäviä tarvitaan, mutta rutiinitehtävien loputon toisto ei ole keino pitää yllä innostusta.

Tässä tekstissä en järkevästi voi käsitellä kaikkia loistavia opettajia, joten sivuutan esimerkiksi olympiavalmennuksen merkityksen. Sen uskon tehneeni jo aiemmin hyvin selväksi. Kotiolonikaan eivät matematiikan oppimisen kannalta olleet ihan tyypillisimmät mahdolliset. Tässä tekstissä keskityn niihin kolmeen opettajaan, joita ilman en välttämättä olisi päätenyt kilpailemaan, joita ilman en välttämättä olisi yliopistolla ja joita ilman en uskaltaisi yrittää uusia asioita.

Ala-asteen lopussa sain matematiikan opettajakseni Hannu Isolaurin. Hänen opetustekniikkansa oli yksinkertainen: Lyhyitä opetustuokioita taululla. Muun ajan laskimme. Minun näkökulmastani opetus oli loistavaa. Tätä samaa strategiaa olen käyttänyt olympiavalmennuksessa ja matematiikkakerhoissa. Kun painopiste oli omassa työskentelyssä, vahvistui laskurutiini ja lisäksi materiaalia sai edetä varsin omaan tahtiin. Kuulemma 20-30 sivua edellä sitä mitä luokassa käsiteltiin oli ihan ok. Hänen tärkein merkityksensä minulle oli kuitenkin se, että aiemmin en oikeastaan ollut tajunnut olevani mitenkään kovinkaan hyvä matematiikassa, ihan koh- tuullinen kyllä verrattuna muihin koululaisiin, mutta that's it. Kun hän kuudennella luokalla ilmoitti hom- maavansa minulle yläastekirjan lisätehtäväksi, tajusin, että tämä tyyppi ainakin uskoo minuun. Kuulemma tarkoitus oli ollut saada minulle 7. luokan kirja, mutta

vahingossa tulikin 9. luokan kirja. En valittanut. Vih- doinkin sain vastauksia kysymyksiin, joita olin mietti- nyt.

Yläasteella sain Sakari Ekon ja Kaisa Vähähyyppän. Heidän merkityksestään on mahdoton puhua riittävä- ti saati liikaa. Yläasteen aikana pääsin osallistumaan ensin kasiluokkalaisena MAOL:n peruskoulun kilpai- luun, sitten ysiluokkalaisena lukiokilpailuun. Aina van- hojen haasteiden loppuessa löytyi jotain uutta: joku li- sätehtävä tunnilla, lukiomateriaalia, mahdollisuus osal- listua sanomalehtikilpailuun, mahdollisuus haastatella kosmologia sanomalehtikilpailutyötä varten, mahdolli- suus tehdä tutkielma Tsiolkovskin laista ja niin edel- leen. Tuntui, että mielikuvitus, viitseliäisyys ja kannus- tus eivät lopu koskaan. Itse asiassa viime kesänä vii- meksi olen kysynyt neuvoa Kaisa Vähähyyppältä, koska olin saavuttanut oman järkeni ja tietämykseni rajat. Sain neuvot välittömästi ja niistä oli valtavasti hyötyä.

Näissä kaikissa opettajissa oli paljon yhtäläisyyksiä. Heidä yhdisti paitsi vahva oman alan osaaminen, oma toimiva opetustyyli ja innostus, myös viitseliäisyys ja kyky kannustaa. Osa ylimääräisistä asioista oli luulta- vasti työmäärältään suhteellisen pieniä kuten yksittäi- nen ylimääräinen matematiikan tehtävä tai yläastekir- jan hommaaminen ala-asteelle. Kannustaminenkin on helppoa: muistaa kertoa oppilaalle missä asioissa hän on hyvä, kuten vaikka ratkaisujen selittämisessä, vaik- ka kuinka uskoisi, että oppilas on asiasta tietoinen itse- kin. Tätä yritän opetella itse koko ajan. Osa opettajie- ni tekemistä asioista taas vaati huomattavaa oman ajan uhraamista kuten viikoksi sanomalehtikilpailun Euroo- pan finaaliin joukkueenjohtajana matkustaminen.

En luultavasti tajunnut silloin (jos tajuan vieläkään) miten paljon he kaikki tekivät. Kiitos. Kiitos myös kai- kille muille opettajille.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, kuudes ja seitsemäs kurssi

Matti Lehtinen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja Tommi Tikka: Juuri. Derivaatta. 168 s. Otava 2015. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 22,00–27,75 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: Tekijä. Pitkä matematiikka 6. Derivaatta.* 178 s. Sanoma Pro 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 21,00–27,40 euroa.

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja Tommi Tikka: Juuri. Trigonometriset funktiot. 144 s. Otava 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 22,00–27,75 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: Tekijä. Pitkä matematiikka 7. Trigonometriset funktiot.* 167 s. Sanoma Pro 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 21,40–27,40 euroa.

Derivaattakurssi

Matematiikan pitkän oppimäärän kuudes kurssi on saanut otsikon Derivaatta. Otsikon käsitteen lisäksi kurssiin on sisällytetty rationaalifunktio. Funktion yleinen käsite on esitetty oppimäärän aloittavassa, pitkän ja lyhyen oppimäärän yhteisessä kurssissa ja kurssissa 2 on käsitelty polynomifunktioita. On jo aikakin kasvattaa funktiotarjotinta. Kurssin tavoitteisiin kuuluvat

sitten ”havainnolliset käsitykset” funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta ja derivaatan käyttö (nimenomaan) polynomifunktioiden ominaisuuksien selvittämiseen. Yleisemmät funktioihin liittyvät käsitteet kuten funktioiden yhdistäminen ja käänteisfunktio saavat vielä odottaa vuoroaan.

Kilpailevat oppikirjasarjat ovat kuudennen kurssin kohdalla varsin lähellä toisiaan. Kumpikin jakaa aineiston viiteen lukuun. Näistä kolmella ensimmäisellä on molemmissa kirjoissa sama nimi ja kahden viimeisenkin nimissä on vain se ero, että *Juuren* otsikkojen sanaa kulku vastaa *Tekijän* otsikoissa sana derivaatta. Harjoitustehtävien lukumäärässä *Tekijä* voittaa: siinä on 342 tekstilukuihin liittyvää tehtävää ja lopussa vielä 103 kertaustyyppistä tehtävää. *Juuressa* on 273 numeroitua harjoitustehtävää ja lisäksi 37 kertaustehtävää. *Tekijä* jakaa tehtävänsä kahteen kategoriaan, perustehtäviä sisältävään sarjaan I ja perus- sekä vaativampia tehtäviä sisältävään sarjaan II. *Juuri* jakaa edelleen tehtävänsä kolmeen kategoriaan, joita kutsutaan *ydintehtäviksi*, *vahvistaviksi tehtäviksi* ja *syventäviksi tehtäviksi*. *Juuren* vastausosastossa on ensin vihjeitä (71:een numeroituun harjoitustehtävään) ja sitten vastauksia. Jos tehtävänanto alkaa sanalla ”osoita”, *Juuren* vastausosastossa on tehtävän numeron kohdalla pelkkä viiva. *Tekijä* näyttää antavan jokaiselle tehtävälle joko vastauksen tai muun ratkaisuun johtavan viitteen. *Tekijän* ratkaisuosasto onkin kaikkiaan hiukan laajempi kuin *Juuren*.

Tarkastelun kohteena olevista oppimateriaaleista *Tekijä* aloittaa esityksensä palauttamalla mieliin eräitä funktioon liittyviä käsitteitä. Palautetaan mieliin, että ”Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon lukuun täsmälleen yhden luvun, jota kutsutaan funktion arvoksi.” Kun kääntää sivua, saa sitten eteen-
sä määritelmän, jonka mukaan ”Funktion määrittelyjoukko muodostuu niistä luvuista, jotka voidaan sijoittaa funktioon muuttujan paikalle.” Kehää kuljetaan. *Juuri* ohittaa nämä tarkastelut.

Rationaalifunktioon *Tekijä* pääsee kertomalla, että murtolauseke on kahden polynomin osamäärä ja että rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa. Onko siis funktio, jonka lauseke on

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

rationaalifunktio? *Juuri* puolestaan ilmoittaa hiukan väljemmin, että rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke voidaan kirjoittaa kahden polynomin osamääränä

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Juuri esittää tässä kohdin käsitteen määrittelyehdon. Se on tietysti $Q(x) \neq 0$. Ehdon sanotaan osoittavan funktion määrittelyjoukon. Toisaalta määrittelyjoukon kerrotaan muodostuvan ”niistä kohdista, joissa funktion arvo voidaan laskea”. Aika tulkinnanvaraista. Määrittelyehto on myös *Tekijällä*. Silti *Tekijä* esittelee esi-
merkin

$$g(x) = \frac{x^4 - x}{x} + \frac{1}{x - 3}$$

ja kirjoittaa eksplisiittisesti $g(0)$ ja $g(3)$; kun g :n lausekkeeseen tulee nollanimittäjä, todetaan, että 0 ja 3 eivät kuulu g :n määrittelyjoukkoon. Kehältä näyttää taas.

Rationaalilausekkeet johtavat havaitsemaan, että luvun kurssissa ei ole vielä harjaannuttu laskemaan. Molemmat kirjat antavat lyhyet ohjeet murtolausekkeiden yhteenlaskulle ja supistamiselle. Rationaalifunktion nollakohdille ja rationaalifunktion määrittämisen epäyhtälötehtävän aika ilmeisille ratkaisuille kumpikin kirja omistaa lyhyen luvun. Kun näissä yhteyksissä on melkein vaistonvaraista ajatella tarkasteltavan osoittajan ja nimittäjän nollakohtien määrittämiä välejä, niin *Tekijän* Lauseen statukseen kohottaman ja korostettuna painaman virkkeen hyvä tarkoitus peittää sen sanatarkasti luettavan sisällön huvittavuuden: ”Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.” Lauseen alapuolella onkin sama muodos-
sa, joka ei aiheuta hymyilyä: ”Funktion nollakohdat ja kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, jakavat luku-
suoran osaväleihin. Kullakin osavälillä funktion arvot säilyvät samanmerkkisinä (joko positiivisena tai negatiivisena).” Miksei tämä ole ”lause”?

Opetussuunnitelma antaa tavoitteeksi sen, ”että opiskelija omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta”. Kyse on siis muutamasta matemaattisen analyysin peruskäsitteestä. *Juuri* esittää varsin pelkistetyn raja-arvon määritelmän: ”Funktion f raja-arvo kohdassa a on luku b , jos funktion arvo lähestyy lukua b , kun x lähestyy kohtaa a . Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.” *Tekijän* määritelmä on parempi, siinä muistetaan kertoa, että ”Lähestymisen tulee olla sellaista, että funktion f arvot saadaan niin lähelle lukua b kuin suinkin halutaan, kunhan muuttujan arvot viedään riittävän lähelle lukua a .” – Tähänkin voisi pahantahtoinen kommentaattori huomauttaa, että määritelmä saattaisi taipua antamaan funktiolle $\sin \frac{1}{x}$ jonkin raja-arvon origossa. Mutta eihän opetussuunnitelma edellytä kuin ”havainnollista käsitystä”.

Tekijä on muutenkin hiukan seikkaperäisempi raja-arvoa esitellessään. Se esittää raja-arvon rationaaliset laskusäännöt, jotka *Juuri* olettaa ilman muuta päteviksi. Ei *Tekijäkään* laskusääntöjä perustele. Kun käytössä ovat vain rationaalifunktiot, laskusäännöistä seuraa heti, että funktion raja-arvo onkin sen arvo ainakin siellä, missä funktio on määritelty. Nimittäjän nollakohdat ovat nekin aika yksinkertaisesti käsiteltävissä. *Juuri* omistaa alaluvun toispuolisille raja-arvoille, *Tekijäkin* ne määrittelee ja muistaa vielä muotoilla lauseeksi (todistamatta tietenkin) sen, että raja-arvon $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ olemassaolosta seuraa $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$.

Kumpikin kirja antaa funktion jatkuvuuden määritelmäksi kohdassa a ehdon $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Onko tämä opetussuunnitelman edellyttämää ”havainnollisuutta”, saattaa olla tulkinnanvaraista. Molemmat kirjat käsittelevät huolellisesti ilmeisesti erään takavuosisen yliopilastutkintotehtävän esiin tuomaa seikkaa, jonka mukaan funktiota voi kutsua epäjatkuvaksi jossain pisteessä vain, jos se on tässä pisteessä määritelty. Näin ollen yleistä puheenpartta, jonka mukaan $\frac{1}{x}$ olisi epäjatkuva origossa, on pidettävä virheellisenä. *Juuri* esittää määritelmän ”Funktio on jatkuva välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva kyseisen välin jokaisessa kohdassa.” Itse olisin taipuvainen – ainakin ”havainnollisesti” puhuessani – pitämään $\frac{1}{x}$ epäjatkuvana välillä $[-1, 1]$, kun ei se kerran voi määrittelemättömänä jatkuvaka-
naan origossa olla, mutta *Juuri* vaatii, että funktion tulee olla kaikissa välin pisteissä määritelty. Samoilla linjoilla on toki *Tekijäkin*. Suljettua väliä varten se tarvitsee vielä käsitteet oikealta ja vasemmalta jatkuva.

Kumpikin kirja nimeää kolmannen päälukunsa Derivaataksi ja aloittaa tarpeellisella huomautuksella siitä, että kysymys on muutoksesta ja sen nopeudesta. *Tekijä* kertoo miltei heti, että derivaataksi $f'(a)$ kutsutaan funktion kuvaajan kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin

kulmakerrointa. *Juuri* lähtee ensin esittelemään erilaisia muuttuvia suureita, esittää keskimääräisen muutosnopeuden kuvaajien avulla ja ilmoittaa veren puudutusaineen pitoisuutta ajan funktiona esittävän käyrän (silmämääräisesti) piirretyn tangentin kulmakertoimen olevan pitoisuuden muutosnopeus. Kuvassa tangenti on laskeva suora, joten muutosnopeus on negatiivinen. Runsaiden esimerkistöjen jälkeen kirjat pääsevät esittämään derivaatan määritelmän erotusosamäärän raja-arvona, *Tekijän* mukaan

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ja *Juuren* mukaan

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (1)$$

Jostain syystä *Tekijä* on sijoittanut muodon (1) ”Syventävää tietoa” -otsikon alle. Derivaatan raja-arvomuotoisen määritelmän jälkeen molemmat kirjat sitten määrittelevät f :n kuvaajan tangentin suoraksi, jonka kulmakerroin on $f'(a)$. Molemmat kirjat määrittelevät derivaattafunktion (joka historiallisesti on sekä sanan derivaatta että merkinnän f' takana), ja *Tekijä* muistaa mainita, että derivaattafunktiolla saattaa olla myös derivaattafunktio f'' jne. *Juuren* lukija kohtaa toisen derivaatan vain myöhemmin vastaan tulevassa esimerkkitehtävässä, jossa kysytään hetkeä, jolloin lääkeaineen pitoisuus vähenee nopeimmin.

Jotta polynomifunktioiden derivaattoja voitaisiin muodostaa, on oltava tieto potenssien derivaatan muodostamisesta ja tieto derivointioperaation lineaarisuudesta. Edelliseen tietoon kumpikin oppikirja johdattaa muutaman derivaatan määritelmän perusteella lasketun pienen eksponentin tapauksen kautta. *Juuri* perustelee menettelyn yleiselle eksponentille käyttämällä lausekkeen $x^n - a^n$ tekijöihin jakoa $(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ (perusteluna ”sulkujen auki kirjoittaminen”), *Tekijä* taas viittaa todistuksessa harjoitustehtävään, jossa derivointikaava pyydetään todistettavaksi induktiolla, mutta samalla ilmoitetaan induktion opetuksen tapahtuvan kurssissa 11. Derivaatan muodostuksen lineaarisuutta *Tekijä* perusteleeekin, *Juurelle* se on ilmoitusasia.

Entä funktioiden tulon derivaatta? *Tekijä* perustelee kaavan manipuloidulla erotusosamäärää kaikkiaan kymmenen rivin yhtälöketjussa. *Juuri* lykkää koko kaavan esittämisen rationaalifunktion derivaatan käsitteilyn yhteyteen ja selviää hiukan vähemmällä yhtälöillä. *Juuri* kertoo lisäksi, että tulofunktion derivaattaa ei kurssissa tarvita muuta kuin osamäärän derivaatan kaavan johtamiseen. Molemmat kirjat sitten johtavatkin osamäärän

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

derivointikaavan kertomalla ensin, että h voidaan erotusosamäärää tarkastelemalla osoittaa derivoituvaksi

ja ratkaisemalla h' yhtälöstä $f'(x) = h(x)g'(x) + g(x)h'(x)$. Yksi uskottelukohda olisi voitu ohittaa, jos olisi manipuloitu osamäärän erotusosamäärää hyvin samalla tapaa kuin tulofunktion tapauksessa.

Derivaattaa voidaan käyttää funktion kulun ja ääriarvojen tutkimiseen. Kun derivaatta on paikallisesti määritelty suure, syntyy ongelmaa globaalimpien ominaisuuksien suhteen. Jos esimerkiksi tiedetään funktio kasvavaksi, on aika ilmeistä, että sen derivaatta ei voi olla negatiivinen. Mutta se, että derivaatan ei-negatiivisuus implikoi kasvamisen, perustellaan yleensä differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla. Tämän molemmat kirjat muistavat sanoa, ja *Juuressa* on väliarvolauseen ymmärrettäväksi tekevä kuvakin. Sen sijaan se keskeinen tosiasia, että suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla on suurin ja pienin arvo, joudutaan ottamaan käyttöön vain kertomalla, että asian todistaminen edellyttää lukion kurssin ylittäviä tietoja. Näinhän asia onkin.

Olen aikaisemmin kritisoinut koulukirjoja, nytkin esillä olevia sarjoja, siitä, että ne eivät suostu sovittamaan omalle rivilleen ladottavia kaavoja muuhun tekstiin ja esimerkiksi jättävät ne välimerkeiksi. Sekä *Tekijä* että *Juuri* näyttävät nyt horjuvan. Samalla sivulla saattavat jotkin kaavat olla oikeilla välimerkeillä varustettuja, toiset taas eivät. Ja monesti kaavojen viereen on eri kirjasinlajeilla ja sinisellä värillä (*Tekijä*) tai keltaisella pohjalla (*Juuri*) painettu tekstiä, jonka voisi ajatella olevan esimerkiksi kaavaa taululle kirjoittavan puhumaa selitystä. Askel matematiikassa normaalin kielenkäytön suuntaan on otettu.

Opetussuunnitelman kurssille asettaman kuuden tavoitteen joukossa on myös se, että opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kurssiin liittyvien tehtävien ratkaisemisessa. Hyvä niin, mutta silti pysäyttävä on *Juuren* harjoitustehtävä, jonka a- ja b-kohdissa on osoitettava, että tietty lukujono toteuttaa kaksi yksinkertaista epäyhtälöä, ja c-kohdassa sitten pyydetään sopivaa ohjelmaa käyttäen ”varmistamaan a- ja b-kohtien tulokset”. Kone tietää enemmän?

Trigonometrisia funktioita

Pitkän matematiikan seitsemännen kurssin opetussuunnitelma antaa itsessään jotenkin lapsellisen vaikutelman: siinä ilmaistaan eksplisiittisenä tavoitteena, että oppilas osaa kaavat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Opetussuunnitelman listaamien seitsemän tavoitteen ja viiden keskeisen sisällön joukossa on yksi trigonometrisia funktioita yleisemmän tason asia, yhdistetty funktio ja sen derivaatta. Trigonometriset funktiot rikastuttavat hiukan analyysia, jota toistaiseksi on harrastettu vain polynomi- ja rationaalifunktiolla. Matematiikan

perinteen mukainen käsittelyjärjestys olisi kaikkien alkeisfunktioiden käyttöönotto ennen esimerkiksi differentiaalilaskennan mukaantuloa.

Sisällysluetteloa katsoen selvin ero *Tekijä*- ja *Juuri*-sarjojen seitsemannen kurssin esittelyssä on tämän yhdistetyn funktion ja sen derivaatan sijoittamisessa. *Tekijä* aloittaa siitä. *Juuri* taas on asettanut yhdistetyn funktion käsittelyn kirjan viimeiseksi luvuksi. Sijoittamisella ei ole suurta merkitystä. Kumpikin kirja esittää yhdistetyn funktion derivoinnin, ketjusaännön, johdon erotusosamäärän avulla. Vain *Juuri* muistaa huomauttaa, että muotoon

$$\begin{aligned} \frac{(u \circ s)(x+h) - (u \circ s)(x)}{h} \\ = \frac{u(s(x+h)) - u(s(x))}{s(x+h) - s(x)} \cdot \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \end{aligned}$$

kirjoitetussa erotusosamäärässä saattaa tulla nollalla-jakamistilanne. Miten asiasta selvittäisiin, jää kuitenkin kertomatta. Kumpikaan kirja ei mainitse tilannetta, jossa sisäkkäin olisi useampia funktioita. Ketjusaännön yleistäminen tällaisiin tapauksiin olisi kuitenkin aivan triviaalia. Varsinaisen trigonometriaan liittyvän asian kumpikin kirja aloittaa radiaanin määrittelystä. *Juuren* esittämästä määritelmästä näyttää seuraavan, että radiaanin yksikkö on pituuden yksikkö! Toisaalta *Juuri* esittää joukon tyyppiä $360^\circ = 2\pi$ olevia yhtälöitä ja "lauseen": "Jos ympyrän säde ei ole 1, kulman suuruus radiaaneina saadaan jakamalla kaaren pituus säteellä." *Tekijä* on tässä korrektimmilla linjoilla.

Molemmat kirjat esittävät yleisen kulman sinin ja kosinin normaaliilla tavalla yksikköympyrän kehäpisteen koordinaatteina. Kulman tangentti sen sijaan saa vaihtelevan käsittelyn. *Tekijän* mukaan kulman tangentti on sen sinin ja kosinin osamäärä, kun kosini ei ole nolla, mutta *Juuren* mukaan kulman tangentti on sen tangenttipisteen y -koordinaatti. Tangenttipiste taas on se piste, jossa suora, johon muuttuvan kulman kiertävä kylki kuuluu, leikkaa yksikköympyrän pisteeseen $(1, 0)$ asetetun tangentin. Mutta *Tekijäkin* tarvitsee tangenttipistettä esimerkiksi määritelläkseen tangenttifunktion ja löytääkseen sen jakson. Lukija ihmettelee, miksei yhteys

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

riitä. Kun sitten tullaan tangenttifunktion derivaataan, niin tangentti on taas sinin ja kosinin osamäärä. Olisiko niin, että tekijäkollektiivin eri jäsenet ovat

kirjoittaneet omia jaksojaan, ja yhdenmukaistava koordinointi on jäänyt kesken?

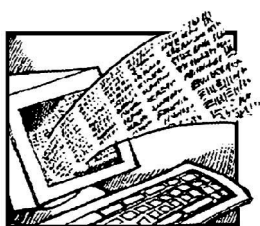
Derivaatan esittelyssä *Juuri* voittaa. Sinin derivaatta perustellaan. Tosin tarvittavat apuneuvot, sinin yhteenlaskukaava ja raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

on esitetty harjoitustehtävissä, joihin derivaatan johdossa viitataan vain kirjan luvun tarkkuudella. *Tekijä* määrittelee vain tylästi sini- ja kosinifunktion derivaatat esittämättä asioille muuta perustelua kuin "tutkimustehtävän", jossa pyydetään piirtämään – arvattavasti jotain ohjelmaa käyttäen – sini- ja kosinifunktioiden kuvaajat ja määrittämään niistä derivaatan arvo viidessä pisteessä.

Kaiken kaikkiaan hiukan hämmentää molempien kirjojen tapa ensin määritellä $\sin x$ ja $\cos x$ kaikille suunnistetuille (tai suunnatuille) kulmille ja siis kaikille reaaliarvoille x ja aloittaa sitten uusi luku, jonka sisältö on "sini ja kosini funktioina". Hämmennystä ei ainaakaan vähennä *Tekijän* toteamus "Kosinifunktion $\cos x$ arvo on kulman x kehäpisteen x -koordinaatti." Miksi kulman symbolina on x , kun eletään koordinaatistossa, jonka pisteiden totunnainen esitys on (x, y) ? Miksei $\sin t$, $\cos t$? Helposti paremmaksi kohennettavia ilmauksia löytyy *Juurestakin*. Määriteltään funktion f , jonka arvo on kulman x tangentti, kirja toteaa, "että funktion f arvoa ei voi laskea kohdissa $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$," vaikka edellisessä kurssissa on opittu, että funktiolla on määrittelyjoukko. Voi kuvitella funktion ja määrittelyjoukon pisteen, jossa funktion arvon laskeminen ei onnistu, mutta tässähän ollaan selvästi määrittelyjoukon ulkopuolella. Ja jos $\tan \alpha = a$, niin "yhtälön $\tan x = a$ täydellinen ratkaisu" ei ehkä olisi " $x = \alpha + n \cdot \pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku". Jokainen tällainen luku lienee yhtälön yksittäinen ratkaisu.

Tällaiset hiuksenhalkomiset jääkööt. Mutta vakavana puutteena on pidettävä sitä, että kumpikaan kirja ei hiiskahda sanallakaan kolmesta muusta ainakin englanninkielisissä luonnontieteellis-teknisissä yhteyksissä melko varmasti vastaan tulevasta trigonometrisestä perusfunktioista kotangentti, sekantti ja kosekantti. Ja kyllä trigonometristen funktioiden yhteydessä voisi arkusfunktioitkin mainita, vaikka käänteisfunktion käsitettä pantataankin aina kurssiin 13. Laskimistakin löytyy näitä varten näppäimiä.



Kuinka löytää kaava lukujonolle?

Antti Laaksonen

Helsingin yliopisto
ahslaaks@cs.helsinki.fi

Olemme saaneet käsiimme lukujonon, joka alkaa $[1, -1, 3, 13, 29, \dots]$, mutta emme tiedä sille *kaavaa* eli funktiota $f(x)$, jonka avulla lukujono voidaan esittää muodossa $[f(0), f(1), f(2), \dots]$. Kuinka voisimme löytää tällaisen kaavan?

Tämä kirjoitus esittelee menetelmän, jonka avulla lukujonoa vastaava kaava löytyy aina olettaen, että se on *polynomi* eli muotoa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$. Tämä oletus pätee melko monen vastaan tulevan lukujonon kohdalla. Menetelmää voi käyttää käsin, tai sen voi ohjelmoida tietokoneelle.

Menetelmän toiminta

Menetelmässä on ideana laskea lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksia, niiden erotuksia jne., kunnes syntyy lukujono, jonka jokainen jäsen on sama. Esimerkissämme meidän riittää laskea kaksi tasoa erotuksia, ennen kuin näin tapahtuu:

1	
-1	-2
3	6
13	10
29	16

Kun näin käy, on aihetta juhlaan: lukujono on ilmeisesti polynomi ja voimme myös jo päätellä sen asteen k sekä kertoimen a_k . Aste k on yhtä suuri kuin tasojen määrä, jotka muodostimme erotuksista. Tässä esimerkissä aste on 2. Kerroin a_k saadaan puolestaan kaavalla $x/k!$, missä x on viimeisellä tasolla toistuva luku. Tässä esimerkissä kerroin a_k on $6/2! = 3$. Tiedämme nyt siis, että polynomin korkeimman asteen termi on $3x^2$.

Muodostamme sitten uuden lukujonon vähentämällä saamamme termin jokaisesta lukujonon jäsenestä, eli jäsenestä $f(x)$ tulee $f(x) - a_kx^k$. Esimerkissämme uusi lukujono on $[1, -4, -9, -14, -19, \dots]$. Tämän jälkeen laskemme erotukset uudelle lukujonolle:

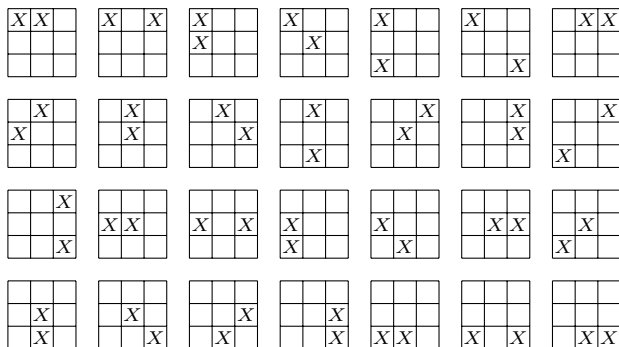
1	
-4	-5
-9	-5
-14	-5
-19	-5

Tämä tarkoittaa, että aste k on 1 ja kerroin a_k on $-5/1 = -5$, eli polynomin toinen termi on $-5x$. Kun vähennämme tämän termin lukujonosta, tuloksena on $[1, 1, 1, 1, \dots]$. Tässä lukujonossa jokainen jäsen on valmiiksi sama, joten enää ei tarvitse laskea erotuksia, vaan voimme päätellä, että polynomin vakiotermi

on 1. Kokonaisuutena haettu polynomi on siis $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Nyt kannattaa vielä testata, toimiiko polynomi varmasti. Esimerkiksi $f(1) = -1$ ja $f(4) = 29$, joten tilanne näyttää hyvältä.

Toinen esimerkki

Montako tapaa on asettaa $n \times n$ -shakkilaudalle kaksi ratsua niin, etteivät ne uhkaa toisiaan? Esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ vastaus on 28, koska tavat ovat:



Laskemalla pieniä tapauksia ohjelmoinnin avulla selviää, että kyseinen lukujono alkaa $[0, 6, 28, 96, 252, 550, 1056, 1848, \dots]$.

Voimme nyt kokeilla, löytäisimmekö lukujonolle kaavan polynomina. Erotukset ovat seuraavat:

0		
	6	
6		16
	22	30
28		46
	68	42
96		88
	156	54
252		142
	298	66
550		208
	506	78
1056		286
	792	
1848		

Lukujono näyttää olevan polynomi! Tasolla 4 erotukset ovat samat, joten polynomin aste on 4. Toistuva luku on 12, joten $a_4 = 12/4! = 1/2$. Tämän jälkeen voisimme selvittää muut polynomin termit vastaavasti.

Miksi menetelmä toimii?

Menetelmän idea on yksinkertainen, mutta miksi se toimii? Miten erotukset liittyvät asiaan, ja mistä ilmestyy kertoma jakajaksi?

Voimme ymmärtää menetelmän toiminnan tarkastelemalla, miten erotusten laskeminen vaikuttaa polynomin arvoihin. Oletetaan, että polynomin aste on k ja laskettavana on erotus $f(x+1) - f(x)$. Polynomin korkeimman asteen termin osalta erotus on

$$a_k(x+1)^k - a_k x^k = a_k(kx^{k-1} + A),$$

missä A kuvaa polynomin $(x+1)^k$ termejä, joiden aste on alle $k-1$. Tämän vuoksi erotuksessa termin x^{k-1} kertoimena on $a_k k$.

Voimme jatkaa vastaavaa päättelyä ja havaita, että seuraavalla tasolla kertoimena on $a_k k(k-1)$, sitä seuraavalla $a_k k(k-1)(k-2)$ jne., eli kertoma $k!$ syntyy taso kerrallaan termin $(x+1)$ kautta. Viimeisellä tasolla kerroin on $a_k k!$, joten saamme alkuperäisen kertoimen jakamalla tämän $k!$:lla. Lisäksi jokaisella tasolla erotukset poistavat polynomeista vakiotermit ja vähentävät muiden termien asteita yhdellä, joten viimeisellä tasolla jokaisessa kohdassa on luku $a_k k!$.

Entä jos polynomia ei ole?

Menetelmään liittyy yksi sudenkuoppa: se antaa *aina* jonkin polynomin, vaikka lukujonoa ei todellisuudessa voisi esittää polynomina. Esimerkiksi Fibonaccin lukujonoa ei voi esittää polynomina, mutta saamme silti lukujonolle $[0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots]$ polynomin

$$\frac{x^5}{24} - \frac{13x^4}{24} + \frac{61x^3}{24} - \frac{119x^2}{24} + \frac{47x}{12}.$$

Tämä johtuu siitä, että n luvun lukujonon voi aina esittää polynomina, jonka aste on $n-1$. Tällöin erotusten laskemisessa viimeisellä tasolla on vain yksi erotus. Menetelmän antama tulos onkin luotettava vain silloin, kun viimeisellä tasolla on *useita* samoja erotuksia ja polynomin aste on pienempi kuin $n-1$.

Toisaalta polynomin muodostamisessa on aina riskinä, että polynomi perustuu vain lukujonon alkuosaan eikä meillä ole tietoa, mitä lukuja jonossa on sen jälkeen. Esimerkiksi teoriassa on mahdollista, että lukujonon sata ensimmäistä jäsentä noudattavat yksinkertaista polynomia, mutta niiden jälkeen tulee jotain muuta. Käytännössä esiintyvissä lukujunoissa tämä riski on kuitenkin äärimmäisen pieni.

Silti jos haluamme olla varmoja, että polynomi toimii aina, viimeinen vaihe on *todistaa* se oikeaksi. Tämä toki vaatii tietoa siitä, mistä lukujono on tullut, kuten mihin kombinatoriikan ongelmaan se liittyy.

Menetelmän ohjelmointi

Vaikka menetelmää voi käyttää mainiosti käsin, tämä on pidemmän päälle melko työlästä. Seuraavassa on menetelmän toteutus Python3-ohjelmalla:

```

from fractions import Fraction

t = [1,-1,3,13,29]
a = 0

def etsi(t,c,f):
    if min(t) == max(t):
        return (t[0]/f,c)
    u = [t[i+1]-t[i]
        for i in range(len(t)-1)]
    return etsi(u,c+1,f*(c+1))

t = [Fraction(x) for x in t]

while True:
    p = etsi(t,0,1)
    if p == (0,0):
        break
    print(str(p[0])+"*x^"+str(p[1]))
    t = [t[i]-p[0]*(a+i)**p[1]
        for i in range(len(t))]

```

Ohjelman alussa listassa `t` annetaan lukujonon alkusosa. Muuttuja `a` puolestaan ilmaisee, mikä on lukujonon ensimmäisen jäsenen kohta. Esimerkissämme ohjelma tulostaa näin:

```

3*x^2
-5*x^1
1*x^0

```

Tämä vastaa polynomia $3x^2 - 5x + 1$.

Funktio `etsi` muodostaa erotuksia rekursiivisesti. Sen parametrit ovat lukujono `t`, polynomin asteluku `k` sekä vastaava kertoma `f`. Jos lukujonon pienin luku on yhtä suuri kuin suurin luku, kaikki luvut ovat yhtä suuria ja funktio päättyy. Muuten funktio muodostaa uuden lukujonon erotuksista ja kutsuu itseään rekursiivisesti.

Pääohjelmassa lukujonon `t` sisältö muutetaan ensin murtoluvuiksi (`Fraction`), jotta laskut suoritetaan tarkasti. Tämän jälkeen tulee silmukka, joka etsii joka kierroksella seuraavaksi suurimman polynomin termin ja tulostaa sen. Silmukka päättyy, kun sekä termin kerroin että aste ovat nolla, jolloin kaikki polynomin termit on löydetty.

Muuttamalla ohjelmaa voimme nyt muodostaa helposti myös kokonaisen kaavan ratsujen sijoitustapojen määrittämiselle, jota laskimme toisessa esimerkissä. Annamme lukujonon ohjelmalle näin:

```

t = [0,6,28,96,252,550,1056,1848]
a = 1

```

Tässä tapauksessa `a` on 1, koska lukujonon ensimmäinen jäsen vastaa tapausta $n = 1$. Ohjelma tuottaa seuraavan tuloksen:

```

1/2*x^4
-9/2*x^2
12*x^1
-8*x^0

```

Ratsujen sijoitustapojen määrä $n \times n$ -shakkilaudalla on siis

$$\frac{n^4}{2} - \frac{9n^2}{2} + 12n - 8.$$

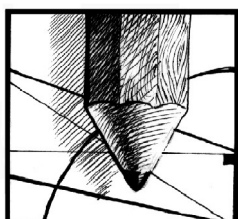
Tehtäviä

1. Todista, että äskenen kaava ratsujen sijoitustapojen määrälle toimii aina.
2. Summa $1^k + 2^k + \dots + n^k$ voidaan esittää aina polynomina, kun k on positiivinen kokonaisluku. Esimerkiksi kun $k = 2$, pätee

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Tutki menetelmän avulla, millaisia kaavoja saadaan suuremmille k :n arvoille.

3. Shakkiin liittyvät kombinatoriset ongelmat voi usein esittää polynomina. Millainen olisi esimerkiksi kaava, joka kertoo, monellako tavalla *kolme* ratsua voidaan sijoittaa shakkilaudalle niin, etteivät ne uhkaa toisiaan?



Kahden muuttujan keskiarvoista

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Olkoot a ja b positiivisia reaalilukuja. Niiden kvadraattinen keskiarvo Q , (aritmeettinen) keskiarvo A , geometrinen keskiarvo G ja harmoninen keskiarvo H saadaan kaavoista

$$Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad A = \frac{a + b}{2},$$

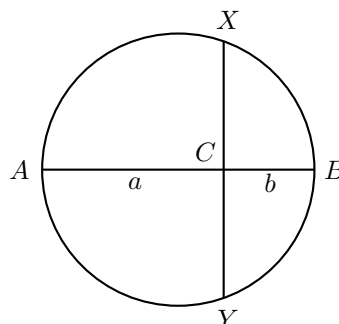
$$G = \sqrt{ab}, \quad \text{ja} \quad H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Näille tunnetusti pätevät hyvin klassiset ja tyylikkäävät epäyhtälöt $Q \geq A \geq G \geq H$. Lisäksi tunnetusti pätee, että jos jotkin kaksi keskiarvoista Q , A , G ja H ovat yhtä suuria, niin silloin itse asiassa on $a = b$ ja $Q = A = G = H$.

Kuitenkin nämä keskiarvot voivat äkkiseltään tuntua hieman abstrakteilta tai kummallisilta. Tässä pienessä kirjoituksessa tarkoituksenamme on kertoa muutamista geometrisista tilanteista, joissa näitä keskiarvoja luonnollisilla tavoilla esiintyy, mikä toivottavasti saa ne ja yllä kuvatut epäyhtälöt näyttämään ystävällisemmiltä.

Ympyrä, jonka halkaisijan pituus on $a + b$

Tarkastellaan ensin ympyrää, jonka halkaisijan AB pituus on $a + b$, ja piirretään halkaisijalle AB kohtisuora, joka pilkkoo sen näihin osiin:



Tässä siis pisteet X ja Y sijaitsevat ympyrän kehällä niin, että $XY \perp AB$, ja janojen AB ja XY leikkauspiste on C . Lisäksi $AC = a$ ja $CB = b$.

Lause. Yllä kuvatussa tilanteessa pätee

$$XC = CY = \sqrt{ab}.$$

Todistus. Kehäkulmalauseen nojalla on luonnollisesti oltava $\angle CAX = \angle BYC$, ja tietenkin on myös $\angle XCA = \angle YCB = 90^\circ$, joten kolmiot $\triangle ACX$ ja $\triangle YCB$ ovat yhdenmuotoisia. Siten vastaavien sivuparien suhteet ovat yhtä suuria, ja erityisesti

$$\frac{AC}{CY} = \frac{XC}{CB} \quad \text{eli} \quad AC \cdot CB = XC \cdot CY.$$

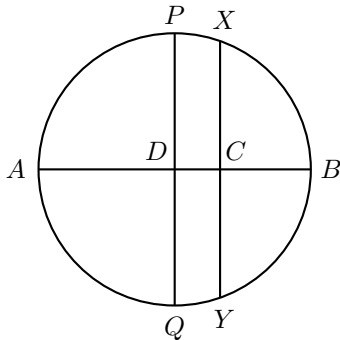
Lisäksi, koska kuvio on itse asiassa peilisymmetrinen halkaisijan AB suhteen, on $XC = CY$, eli

$$XC^2 = CY^2 = AC \cdot CB = ab,$$

ja siis $XC = CY = \sqrt{ab}$. $\square$

Tämä tarjoaa myös näppärän tavan laskea kahden janan geometrisen keskiarvon vaikkapa harpilla ja viivaimella. Soveltamalla konstruktioita janoihin, joiden pituudet ovat a ja $b = 1$, voimme käyttää samaa konstruktioita myös neliöjuuren $\sqrt{a}$ laskemiseen.

Kuviosta löytyy myös lukujen a ja b aritmeettinen keskiarvo. Nimittäin, piirretään ympyrälle toinen halkaisija PQ , jolle $PQ \perp AB$. Olkoon janojen PQ ja AB leikkauspiste D . Tietenkin $PD = DQ = (a + b)/2$.



Nyt on visuaalisesti varsin selvää, että on oltava $PD \geq XC$, eli aritmeettinen keskiarvo on aina vähintään geometrisen keskiarvo, ja lisäksi yhtäsuuruus vallitsee vain ja ainoastaan silloin, kun $P = X$ ja $D = C$, eli kun $AC = CB$, eli kun $a = b$.

Nopeuksien keskiarvoja

Aritmeettinen ja harmoninen keskiarvo esiintyvät luonnollisesti tarkasteltaessa nopeuksien keskiarvoja. Seuraavaksi ihmettelemme kahta esimerkkiä tästä. Seuraava on klassinen kilpailutehtävä:

Ongelma. *Arthurin pitää päästä Davidin luo autolla. Mikäli Arthur ajaa 60 km/h, saapuu hän 5 minuuttia myöhässä. Mikäli hän ajaa 90 km/h, saapuu hän 5 minuuttia etuajassa. Mitä nopeutta hänen on ajettava olakseen täsmälleen oikeaan aikaan perillä?*

Ratkaisu. Olkoon ℓ se matka, joka Arthurin on ajettava, olkoon t se aika, jossa Arthurin on oltava perillä, ja olkoon v kysytty nopeus. On selvitettävä $v = \ell/t$, kun tiedetään, että

$$60 \text{ km/h} = \frac{\ell}{t + 5 \text{ min}} \quad \text{ja} \quad 90 \text{ km/h} = \frac{\ell}{t - 5 \text{ min}}.$$

Kirjoittamalla nämä yhtälöt muodossa

$$t + 5 \text{ min} = \ell \cdot \frac{1}{60 \text{ km/h}} \quad \text{ja} \quad t - 5 \text{ min} = \ell \cdot \frac{1}{90 \text{ km/h}},$$

ja laskemalla nämä yhteen, saadaan

$$2t = \ell \cdot \left(\frac{1}{60 \text{ km/h}} + \frac{1}{90 \text{ km/h}} \right),$$

ja edelleen, että

$$\begin{aligned} v = \frac{\ell}{t} &= \frac{2}{\frac{1}{60 \text{ km/h}} + \frac{1}{90 \text{ km/h}}} = \frac{2}{\frac{3}{180} + \frac{2}{180}} \text{ km/h} \\ &= \frac{360}{5} \text{ km/h} = 72 \text{ km/h}. \end{aligned} \quad \square$$

Toinen esimerkkinä nopeuksien keskiarvoista olisi tällainen¹:

Ongelma. *Aarne ja Bertta pyöräilevät Ankkavaarasta Hanhisiin. Aarne pyöräilee puolet etäisyydestä nopeudella v_1 ja toiset puolet nopeudella $v_2 \neq v_1$. Bertta taas pyöräilee puolet matkaa nopeudella v_1 ja toiset puolet nopeudella v_2 . Kumpi heistä saapuu perille nopeammin?*

Ratkaisu. Olkoon matkaetäisyys d , ja olkoon Aarnen matka-aika t_A ja Bertan t_B . Aarne kulkee puolet etäisyydestä ajassa $d/(2v_1)$ ja toiset puolet ajassa $d/(2v_2)$. Siten

$$t_A = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right).$$

Bertta taas kulkee puolessa ajastaan etäisyyden $t_B v_1/2$ ja toisella puolella etäisyyden $t_B v_2/2$, jolloin

$$d = \frac{t_B}{2} (v_1 + v_2), \quad \text{eli} \quad t_B = \frac{2d}{v_1 + v_2}.$$

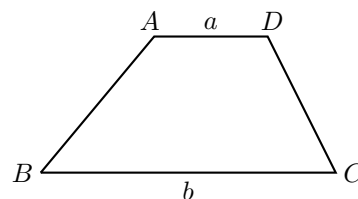
Nyt aritmeettis-harmonisen epäyhtälön nojalla

$$t_A = d \cdot \frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2} > d \cdot \frac{2}{v_1 + v_2} = t_B,$$

eli Bertta saapuu perille nopeammin. $\square$

Puolisuunnikas, jonka kannat ovat a ja b

Tarkastellaan puolisuunnikasta $ABCD$, jonka kantojen pituudet ovat $AD = a$ ja $BC = b$.

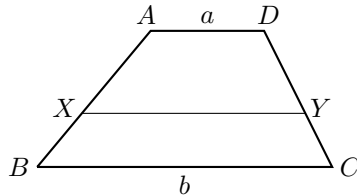


¹Tämä on poimittu C. J. Bradleyn teoksesta *Introduction to Inequalities* (Handbooks, Number Two, United Kingdom Mathematics Trust, 2010).

Osoittautuu, että tästä kuviosta löytyvät kaikki neljä keskiarvoa Q , A , G ja H , vieläpä geometrisesti luonnollisilla tavoilla!²

Lause. Sijaitkoot piste X sivulla AB ja piste Y sivulla CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$, ja että puolisuunnikkaiden $AXYD$ ja $XBCY$ alat ovat yhtä suuret. Tällöin

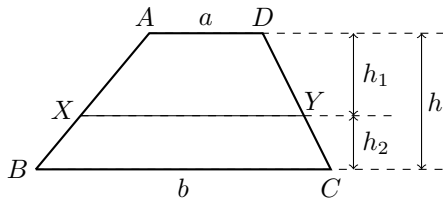
$$XY = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



Todistus. Olkoon alkuperäisen puolisuunnikkaan korkeus h , jolloin sen pinta-ala on tunnetusti

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Olkoon puolisuunnikkaan $AXYD$ ala A_1 ja korkeus h_1 , ja olkoon puolisuunnikkaan $XBCY$ ala A_2 ja korkeus h_2 , jolloin luonnollisesti $h_1 + h_2 = h$:



Janan XY määritelmän nojalla on siis $A_1 = A_2 = A/2$, eli

$$\frac{a+XY}{2} \cdot h_1 = \frac{XY+b}{2} \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Tästä voimme ratkaista korkeudeksi h_2

$$h_2 = \frac{(a+b)h}{2(XY+b)}.$$

Koska $h_1 = h - h_2$, voimme myös laskea

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} \cdot h &= (a+XY)h_1 = (a+XY)(h-h_2) \\ &= (a+XY) \left(h - \frac{(a+b)h}{2(XY+b)} \right) \\ &= (a+XY) \cdot \frac{2XY+2b-(a+b)}{2(XY+b)} \cdot h, \end{aligned}$$

mistä sieventämällä edelleen

$$(a+b)(XY+b) = (a+XY)(2 \cdot XY + b - a).$$

Kertomalla kaiken auki saamme

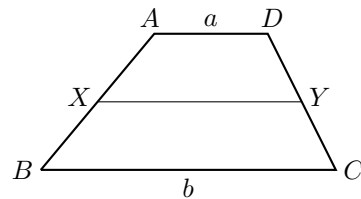
$$\begin{aligned} a \cdot XY + ab + b \cdot XY + b^2 \\ = 2a \cdot XY + ab - a^2 + 2 \cdot XY^2 + b \cdot XY - a \cdot XY, \end{aligned}$$

josta supistuu mukavasti termejä pois niin, että

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot XY^2, \quad \text{eli} \quad XY = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}. \quad \square$$

Lause. Olkoon X sivun AB keskipiste, ja olkoon Y sivun CD keskipiste. Tällöin $AD \parallel XY \parallel BC$ ja

$$XY = \frac{a+b}{2}.$$



Todistus. Olkoon puolisuunnikkaan $ABCD$ korkeus h . Koska oli $AD \parallel BC$, on kumpikin pisteistä X ja Y yhtä etäällä suorasta AD kuin suorasta BC . Siispä $AD \parallel XY \parallel BC$, ja lisäksi puolisuunnikkaiden $AXYD$ ja $XBCY$ korkeudet ovat yhtä suuria, nimittäin yhtä suuria kuin $h/2$. Mutta koska näiden kahden puolisuunnikkaan alojen summan on oltava puolisuunnikkaan $ABCD$ ala, voimme todeta, että

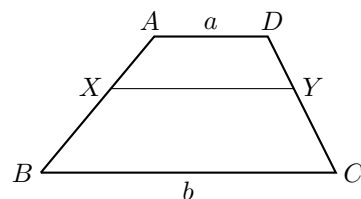
$$\frac{a+XY}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{XY+b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

mistä saa sieventämällä

$$XY = \frac{a+b}{2}. \quad \square$$

Lause. Sijaitkoot piste X sivulla AB ja piste Y sivulla CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$, ja että nelikulmiot $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset. Tällöin

$$XY = \sqrt{ab}.$$



²Kirjoittaja löysi tämän yllättävän seikan E. Beckenbachin ja R. Bellmanin teoksesta *An Introduction to Inequalities* (New Mathematical Library, 3, Random House, 1961).

Todistus. Koska $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset, saamme vertailemalla vastaavia sivuja AD ja XY , ja toisaalta vastaavia sivuja XY ja BC , että

$$\frac{AD}{XY} = \frac{XY}{BC}, \quad \text{eli} \quad XY^2 = AD \cdot BC = ab,$$

eli $XY = \sqrt{ab}$, kuten pitikin. $\square$

Lause. *Sivulta AB voi valita pisteen X , ja sivulta CD pisteen Y niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$, ja että puolisuunnikkaat $AXYD$ ja $XBCY$ ovat yhdenmuotoiset.*

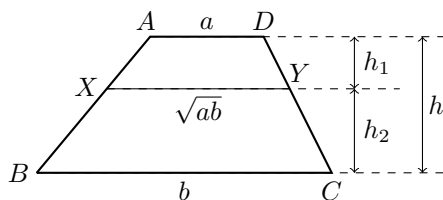
Todistus. Olemassaolon todistaminen on helppoa tapauksessa $AD = BC$, sillä silloin kyseessä on suunnikas ja riittää vain valita pisteeksi X sivun AB keskipiste ja pisteeksi Y sivun CD keskipiste, jolloin jana XY jakaa suunnikkaan kahdeksi yhteneväksi kapeammaksi suunnikkaaksi. Oletetaan siis, että $AD \neq BC$. Ilman yleisyyden menettämistä voimme olettaa, että $AD < BC$. Koska $AD < \sqrt{AD \cdot BC} < BC$, voimme valita pisteen X sivulta AB ja pisteen Y sivulta CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$ ja $XY = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{ab}$. Nyt $AXYD$ on puolisuunnikas, jossa $AD \parallel XY$, ja $XBCY$ on puolisuunnikas, jossa $XY \parallel BC$. Lisäksi kulmille selvästi pätee $\angle XAD = \angle BXY$, $\angle YXA = \angle CBX$, $\angle DYX = \angle YCB$ ja $\angle ADY = \angle XYC$, sillä jokaisessa näistä yhtäsuuruuksista on kyse samankohtaisista kulmista, missä jokin suora leikkaa kaksi keskenään samansuuntaista suoraa. Riittää siis enää tarkistaa, että vastinsivujen pareilla on oikeat pituuksien suhteet. Tarkemmin, osoitamme, että

$$\frac{AX}{XB} = \frac{DY}{YC} = \frac{AD}{XY} = \frac{XY}{BC} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Näistä kaksi viimeistä yhtäsuuruutta seuraavat suoraan janan XY konstruktiosta, sillä onhan

$$\frac{AD}{XY} = \frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{ja} \quad \frac{XY}{BC} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Olkoot puolisuunnikkaan $ABCD$ korkeus h , puolisuunnikkaan $AXYD$ korkeus h_1 , ja puolisuunnikkaan $XBCY$ korkeus h_2 , jolloin jälleen $h_1 + h_2 = h$.



Aiomme osoittaa, että $h_1/h_2 = \sqrt{a/b}$, sillä kun tämä on todistettu, on oltava

$$\frac{AX}{XB} = \frac{h_1}{\sin \angle YXA} \cdot \frac{\sin \angle CBX}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ja

$$\frac{DY}{YC} = \frac{h_1}{\sin \angle DYX} \cdot \frac{\sin \angle YCB}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Koska puolisuunnikkaiden $AXYD$ ja $XBCY$ alojen summa on puolisuunnikkaan $ABCD$ ala, on oltava

$$\frac{a + \sqrt{ab}}{2} \cdot h_1 + \frac{\sqrt{ab} + b}{2} \cdot h_2 = \frac{a + b}{2} (h_1 + h_2),$$

mistä seuraa pienellä sievennyksellä

$$h_1 (b - \sqrt{ab}) = h_2 (\sqrt{ab} - a),$$

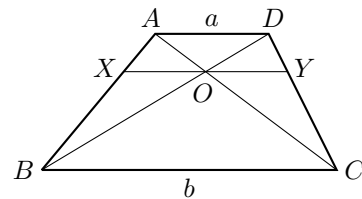
ja edelleen

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{ab} - a}{b - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ja olemme valmiit. $\square$

Lause. *Olkoon O lävistäjien AC ja BD leikkauspiste, ja sijaitkoot piste X sivulla AB ja piste Y sivulla CD niin, että $AD \parallel XY \parallel BC$ ja että jana XY kulkee pisteen O kautta. Tällöin*

$$XY = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$



Todistus. Todistamme, että

$$XO = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

jolloin tietenkin, tarkastellen puolisuunnikasta $DCBA$ puolisuunnikkaan $ABCD$ sijaan, on oltava myös

$$OY = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad \text{ja siis} \quad XY = XO + OY = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

kuten pitikin.

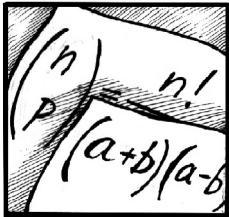
Koska kolmiot $\triangle AXO$ ja $\triangle ABC$ ovat yhdenmuotoiset, on oltava

$$\frac{XO}{BC} = \frac{AX}{AB} = \frac{AB - XB}{AB} = 1 - \frac{BX}{BA}.$$

Koska lisäksi kolmiot $\triangle BXO$ ja $\triangle BAD$ ovat yhdenmuotoisia, on oltava $BX/BA = XO/AD$, josta sijoittamalla edelliseen laskuun saadaan

$$\frac{XO}{BC} = 1 - \frac{XO}{AD}, \quad \text{eli} \quad XO \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{AD} \right) = 1,$$

ja olemme valmiit. $\square$



Baselin ongelma

Markku Halmetoja

Kirjoitukseni [1] johdannossa totesin, että Leonhard Euler (1707–1783) päätyi yhtälöön

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

tavalla, joka ei vastaa nykyaikaisen matemaattisen analyysin tarkkuusvaatimuksia. Mainittu kirjoitus koski peruskoulun matematiikkaa ja tarkoitukseni oli suureen auktoriteettiin vedoten osoittaa, että myös epätydellisellä päättelyllä saattaa olla arvonsa.

Koulumatematiikassakin asiat tulisi selittää eikä antaa valmiita laskukaavoja ulkoa opeteltaviksi. Esimerkiksi lukion differentiaali- ja integraalilaskennassa (vanhemmissa oppikirjoissa) annetut perustelut sisälsivät usein täsmällisten todistusten ideat vaikka niitä ei puutteellisen lukukäsityksen takia voitu viedä loppuun. Opetussuunnitelmia ja oppimateriaaleja valmisteltaessa olisi-kin muistettava, että kussakin ikäluokassa on mukana myös matemaattisesti keskimääräistä lahjakkaampia oppilaita, jotka turhautuvat kaavojen ulkolukuun.

Tässä kirjoituksessa kerrotaan, miten Euler johti yhtälön (1), ja esitetään sille toinenkin todistus. Sarjan

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

laskeminen oli hänen aikanaan jo liki sata vuotta vanha ongelma. Ensimmäisinä sitä lienevät miettineet ranskalainen René Descartes (1596–1650) ja italialainen Pietro Mengoli (1626–1686) sekä myöhemmin saksalainen Gottfried Leibniz (1646–1716) ja sveitsiläinen Jakob

Bernoulli (1655–1705). Sarjan suppeneminen oli kaikille selvää. Esimerkiksi Bernoulli todisti sen seuraavasti: Jos $k \geq 1$, niin $k^2 \geq k$, $2k^2 \geq k(k+1)$, ja edelleen

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}.$$

Tästä seuraa, että kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$

$$S_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^m \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) = 2 - \frac{2}{m+1},$$

joten osasumma $S_m \leq 2$. Jono (S_m) on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu, mistä seuraa että se suppenee.

Mainituista matemaatikoista Jakob Bernoulli käytti eniten aikaa sarjan määrittämiseen siinä kuitenkaan onnistumatta. Lopulta hän luovutti ja kirjasi ongelman matemaattiselle yhteisölle suunnatun avunpyynnön erääseen teokseensa. Summan tarkan arvon määrittäminen nimettiin hänen kotipaikkansa mukaan *Baselin ongelmaksi*.

Euler tarttui kysymykseen hieman yli 20-vuotiaana ja vuonna 1731 hän onnistui johtamaan sarjalle vaihtoehdoisen esityksen

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = (\ln 2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} = \Sigma.$$

Se ei tuonut ratkaisua lähemmäksi, mutta tarjosi mukavamman tavan likiarvon määrittämiseen, sillä tämä

sarja suppenee oleellisesti nopeammin kuin alkuperäinen: osasummassa S_{1000} vain kaksi ensimmäistä desimaalia on oikein mutta osasummassa Σ_{14} niitä on kuusi.

Varsinaisen ongelman ratkaisemiseen Euler tarvitsi eräitä polynomien perusominaisuuksia. Olkoon

$$q(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

polynomi, jolla on n kappaletta nollakohtia; olkoot ne $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ne ovat nollasta eroavia, sillä $q(0) = 1$. Nollakohtiensa avulla q voidaan kirjoittaa tulomuotoon:

$$q(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right).$$

Myös sinifunktio oli tarpeen. Ehkä matematiikkaa harastava lukiolainen tuntee sen sarjakehitelmän

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) = xp(x), \end{aligned}$$

mutta jos se ei ole tuttu, niin asiaan voi perehtyä lukemalla Pekka Alestalon artikkelin [3]. Sinifunktion nollakohdat ovat $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, joten funktion

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

nollakohdat ovat arvoa $x = 0$ lukuun ottamatta samat. Lisäksi p muistuttaa edellä nähtyä q -polynomia ($p(0) = 1$), joten Euler tulkitsi sen ∞ -asteiseksi polynomiksi. Nollakohtiensa avulla se siis voidaan kirjoittaa tuloksi

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots, \end{aligned}$$

mistä sulut auki kertomalla seuraa

$$p(x) = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots\right)x^2 + \left(\dots\right)x^4 - \dots$$

Vertaamalla p :n lausekkeissa x :n neliön kertoimia saadaan

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \frac{1}{4^2\pi^2} + \dots\right),$$

ja lopuksi

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eulerin ratkaisu oli sensaatio ja se sinetöi hänen maineensa 1700-luvun johtavana matemaatikkona. Erityisesti π :n esiintyminen tuloksessa hämmästytti, vaikka muutamia siihen liittyviä päättymättömiä summia ja tuloja oli jo löydetty. Jakob Bernoulli ei Eulerin saatutusta ehtinyt näkemään. Hänen nuoremman veljensä Johann Bernoullin (1667–1748) kerrotaan todenneen Eulerin ratkaisun luettuaan: ”Olisipa veljeni elossa”.

Todistusta pidettiin sen syntyhetkellä moitteettomana, mutta nykyisen käsityksen mukaan siinä on ongelmana tuo ∞ -asteinen polynomi. Polynomin asteahan on aina äärellinen eikä ole itsestään selvää, että päättymätön potenssisarja voidaan muuntaa nollakohtiensa avulla tulomuotoon. Likiarvon laskeminen kuitenkin vahvisti uskoa tuloksen oikeellisuuteen sekä se, että tuloesityksestä

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

x :n arvolla $\frac{\pi}{2}$ seurasi jo 1600-luvulla tunnettu Wallisin kaava

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \left(1 + \frac{1}{2k}\right).$$

John Wallis (1616–1703) julkaisi sen vuonna 1656.

Myöhemmin Euler esitti analyyttisesti vahvempia ratkaisuja Baselin ongelmalle. Kun tulos tiedettiin, oli helpompaa määrätietoisesti pyrkiä sitä kohti. Nykyään tunnetaan lukuisia tapoja johtaa tämä yhtälö. Esimerkiksi teoksessa [4] se tehdään kolmella eri tavalla. Niistä yksi perustuu pääosin sellaiseen matematiikkaan, jota on joskus opiskeltu lukion pitkässä matematiikassa. Käymme läpi tämän todistuksen, mutta aloitamme pienellä kertauksella, sillä se edellyttää nykyiseen ja mitä ilmeisimmin myös tulevaan opetussuunnitelmaan kulumatonta oppiainesta.

Tulemme tarvitsemaan kompleksilukuja. Niitä on ajoittain käsitelty lukion oppimäärässä. Perustiedot löytyvät kätevimmin Matti Lehtisen artikkelista [5]. Aktiivinen lukija voi sen luettuaan todistaa induktiolla de Moivre'n kaavan: Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx. \quad (2)$$

Abraham de Moivre (1667–1754) julkaisi sen vuonna 1722. Kotangenttifunktiota tarvitsemme myös. Sen määritelmä on seuraava:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Eräiden maiden kouluissa opetellaan näiden neljän funktion lisäksi vielä kaksi muutakin trigonometrista funktiota, mutta emme tarvitse niitä tässä. Tulevassa todistuksessa riittää yhtälö

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x. \quad (3)$$

Polynomi yhtälöiden käsittely on lukiossa supistunut lähes pelkästään toisen asteen yhtälöä koskevaksi. Toivottavasti jatkossakin sen juurien ja kertoimien väliset yhtälöt pysyvät opetuksessa, sillä niistä saa aikaan viihdyttäviä tehtäviä. Korkeamman asteen polynomi yhtälöillä on myös juurien ja kertoimien väliset yhtälöt, mutta ne ovat hieman monimutkaisempia. Tarvitsemme niistä vain yhden. Olkoon siis $c_n \neq 0$ ja yhtälön

$$c(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$$

juuret $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ja a_n . Niiden avulla c voidaan kirjoittaa tuloksi

$$c(x) = c_n (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Kun sulut kerrotaan auki, saadaan

$$c(x) = c_n x^n - c_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n) x^{n-1} + \dots,$$

mistä kertoimia vertaamalla nähdään, että

$$c_{n-1} = -c_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

ja edelleen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Ratkaisemme nyt Baselin ongelman johtamalla sarjan (1) osasummalle S_m alarajan α_m ja ylärajan β_m siten, että

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

Koska kaksoisepäyhtälö $\alpha_m \leq S_m \leq \beta_m$ pätee kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, seuraa tästä, että myös osasummalla S_m on sama raja-arvo. Aloitetaan määrittämällä lausekkeen $(\cos x + i \sin x)^n$ imaginaariosa. Yhtälön (2) mukaan se on $\sin nx$, mutta se saadaan myös kehittämällä potenssilauseke binomikaavan mukaan. Koska lukija (ainakin artikkelin [5] luettuaan) hallitsee imaginaariyksikön potenssit, voimme kirjoittaa sen ilman välivaiheita ja saamme yhtälön

$$\sin nx = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \dots$$

Valitaan nyt n parittomaksi, eli $n = 2m + 1$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$, ja olkoon

$$x = x_r = \frac{r\pi}{2m+1}, \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Koska $\sin nx = \sin r\pi = 0$, tulee yllä oleva yhtälö muotoon

$$\binom{n}{1} \sin x_r \cos^{n-1} x_r - \binom{n}{3} \sin^3 x_r \cos^{n-3} x_r + \dots = 0.$$

Tämän yhtälön voi jakaa luvulla $\sin^n x_r$, sillä se on positiivinen; $x_r \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Näin saamme yhtälön

$$\binom{n}{1} \cot^{n-1} x_r - \binom{n}{3} \cot^{n-3} x_r + \dots = 0,$$

ja edelleen sijoittamalla $n = 2m + 1$,

$$\binom{2m+1}{1} \cot^{2m} x_r - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2} x_r + \dots = 0.$$

Täten m -asteisella polynomi yhtälöllä

$$\binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \dots = 0$$

on m kappaletta keskenään erisuuria juuria

$$a_r = \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right), \quad r = 1, 2, \dots, m.$$

Korkeimpien potenssien kertoimet tunnetaan, joten

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Siis

$$\sum_{r=1}^m \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Lisäämällä m tämän yhtälön molemmille puolille saadaan yhtälön (3) avulla

$$\sum_{r=1}^m \sin^{-2} \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

Nyt todistus voi jatkua voimassa olevan opetus suunnitelman tiedoin. Tiedämme, että $x_r \in]0, \frac{\pi}{2}[$, joten

$$(0 <) \sin x_r \leq x_r \leq \tan x_r.$$

Käänteisluvut ovat vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä, eli

$$(0 <) \cot x_r \leq \frac{1}{x_r} \leq \sin^{-1} x_r,$$

ja niiden neliöt ovat samassa järjestyksessä:

$$(0 <) \cot^2 x_r \leq \frac{1}{x_r^2} \leq \sin^{-2} x_r. \quad (4)$$

Summaamalla (4) 1:stä r :ään saamme

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \leq \sum_{r=1}^m \left(\frac{2m+1}{r\pi} \right)^2 \leq \frac{2m(2m+2)}{6},$$

mistä seuraa

$$\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{r=1}^m \frac{1}{r^2} \leq \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6}.$$

Etsityt rajat ovat siis

$$\alpha_m = \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ja} \quad \beta_m = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2} \frac{\pi^2}{6}.$$

Selvästi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler ei tyytynyt ainoastaan Baselin ongelman ratkaisemiseen, vaan hän laski myös summat

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (5)$$

s :n arvoilla 4, 6 ja jopa 24. Osoittautui, että

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{ja} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Oudolta näyttävälle ζ -merkinnälle löytyy selitys matematiikan historiasta. Sitä kutsutaan *Riemannin zeta-funktioksi* Bernhard Riemannin (1826–1866) mukaan. Se on koko kompleksitasossa pistettä $s = 1$ lukuun ottamatta määritelty kaikkien kertalukujen derivaatat omaava funktio, joka määritellään sarjana (5) ainoastaan puolitasossa $\operatorname{Re}(s) > 1$. Muualla sen määritelmä on monimutkaisempi. Riemann osoitti, että funktiolla on mielenkiintoinen yhteys alkulukujen jakautumiseen kokonaislukujen joukossa. Se liittyy toistaiseksi todistamattomaan *Riemannin hypoteesiin*, jonka mukaan ζ -funktion ns. epätriviaalit nollakohdat sijaitsevat suoralla $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Hypoteesin todistamisesta on eräs amerikkalainen säätiö luvannut miljoonan dollarin palkkion. Funktiolla on myös suhteellisen helposti löytyviä nollakohtia negatiivisella reaaliakselilla.

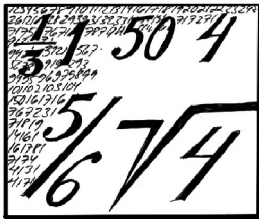
Euler siis tutki ζ -funktion rajoittumaa joukolle $\{2, 3, 4, \dots\}$. Funktio ei ole määritelty pisteessä $s = 1$, sillä tällöin sarja (5) hajaantuu, ks. Pekka Alestalon artikkeli [6]. Ilmeisesti $\zeta(s)$ pystytään määrittämään, kun s on parillinen kokonaisluku. Sen sijaan parittomilla s :n arvoilla funktion arvoista ei tiedetä vielä kukaan juuri mitään, vaikka Eulerkin yritti ilmeisen tosissaan laskea lukua $\zeta(3)$. Vuonna 1978 onnistuttiin todistamaan, että se on irrationaalinen. Luultavasti tarkoilla arvoilla ei ole kovin suurta merkitystä. Ehkä $\zeta(3)$ joskus putkahtaa yllättävästi esiin jonkin tärkeämmän tuloksen yhteydessä. Joka tapauksessa ratkaisija tulee liittymään Bernoullista ja Eulerista alkavaan ketjuun ja saa nimensä matematiikan historiaan.

Kirjoittaja ei lopuksi malta olla muistelematta Finlandialassa järjestettyä Koulumatematiikka-85 tapahtumaa. Sen päättäneessä paneelissa käsiteltiin peruskoulun matematiikan opetusta. Tuolloin oltiin poistamassa matematiikan tasokursseja yläkoulusta ja myöhen-tämässä perusalgebran oppimista toiselle asteelle. Näitä ratkaisuja perustellakseen silloisen Kouluhallituksen matematiikan ylitarkastaja tivasi läsnäolijoilta, että mihin polynomeja oikeastaan tarvitaan. Tässä kirjoituksessa nähty olisi käynyt vastaukseksi ylitarkastajalle. Toivottavasti kirjoitus myös rohkaisee nykyisiä opetussuunnitelmien laatijoita säilyttämään polynomien ominaisuudet lukion matematiikassa sekä palauttamaan kompleksilukujen perusominaisuudet oppimäärään pysyvästi. On jokseenkin noloa, että maassa, jonka matemaattinen maine maailmalla perustuu pääosin kompleksianalyysin tutkimukseen, ylioppilaisiksi valmistuvat eivät edes tiedä, mikä on kompleksiluku.

Ilman viitettä annetut historialliset tiedot ovat peräisin teoksesta [2].

Viitteet

- [1] https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/tyhjaa_parempia_perusteluja.pdf
- [2] William Dunham: *Euler The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, 1999.
- [3] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/1/alestalo.pdf>
- [4] M.Aigner, G.M.Ziegler: *Proofs from THE BOOK*, Third Edition, Springer 2004.
- [5] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/lehtinen.pdf>
- [6] <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/harmsarja.pdf>



Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuudesta

Tuomas Korppi

Johdanto

Kuten lukija varmaan tietääkin, luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Tämä mahdollisuus on ominainen luonnollisille luvuille. Esimerkiksi rationaali- tai reaaliluvuille ei voida tehdä induktiotodistuksia¹. Luonnollisten lukujen järjestelmän aksiomatisoinnissa yleensä mahdollisuus tehdä induktiotodistuksia otetaan aksioomaksi.

Induktioaksioman avulla voidaan todistaa seuraavat luonnollisten lukujen joukon ominaisuudet

Teoreema 1. *Jos $A \subset \mathbb{N}$, niin joukossa A on pienin alkio tai A on tyhjä joukko.*

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa, ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \dots$ luonnollisia lukuja.*

Tässä kirjoittelussa ensin aksiomatisoimme luonnollisten lukujen järjestelmän ja sen jälkeen pohdimme, voitaisiinko aksiomatisoinnissa induktioaksioma korvata jommallakummalla yllä mainituista ominaisuuksista.

Lineaarijärjestys

Mietitään luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestysrelaatiota $<$. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös

$x < z$. Lisäksi kaikille luvuille x, y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta väitteestä: $x < y$, $y < x$ tai $x = y$.

Seuraavaksi määrittelemme yleisen järjestyksen käsitteen yllä mainittujen kahden huomion pohjalta. Määritelmämme siis kertoo, millainen mielivaltaisessa joukossa X määritellyn relaation olisi oltava, että olisimme valmiit pitämään sitä järjestysrelaationa.

Olkoon X joukko. Sanomme, että $<$ on lineaarijärjestys, jos se on 2-paikkainen relaatio joukossa X , joka täyttää seuraavat ehdot:

- Jos $x, y, z \in X$, joille $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$.
- Jos $x, y \in X$, täsmälleen yksi seuraavista kolmesta ehdosta pätee: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

Esimerkiksi reaalilukujen järjestys, rationaalilukujen järjestys, kokonaislukujen järjestys ja luonnollisten lukujen järjestys ovat lineaarijärjestyksiä.

Lineaarijärjestyksiä voidaan kuitenkin määritellä lähes miten tahansa, kunhan yllä mainitut ehdot toteutuvat. Esimerkiksi joukkoon $\{\text{Ville}, 42, \text{Punaisuus}\}$ voidaan määritellä lineaarijärjestys vaikkapa niin, että $\text{Ville} < 42$, $42 < \text{Punaisuus}$ ja $\text{Ville} < \text{Punaisuus}$.

¹Rationaaliluvun nimittäjä ja osoittaja ovat kokonaislukuja, ja näille voidaan toki tehdä induktiotodistuksia. Näin rationaaliluvuillekin voidaan todistaa asioita (luonnollisten lukujen) induktiolla, vaikei rationaaliluvuille sellaista induktiota voidakaan tehdä, jossa induktioaskeleessa $P(q)$ johdettaisiin siitä, että $P(q')$ pätee, kun $q' < q$.

Mielivaltaista lineaarijärjestystä $<$ voidaan ajatella suuruusjärjestyksenä siinä mielessä, että järjestyksestä $<$ puhuttaessa käytetään usein sellaisia ilmauksia kuten ”pienin alkio”, ”suurempi kuin”, ”alkioiden x ja y välissä” jne., ja nämä tarkoitetaan ymmärrettäviksi järjestyksen $<$ suhteen.

Luonnollisten lukujen joukon aksiomatisointi

Luonnollisten lukujen joukko voidaan aksiomatisoida esimerkiksi seuraavasti:

Aksiomatisointi A:

1. $<$ on lineaarijärjestys luonnollisten lukujen joukossa.
2. On olemassa pienin luonnollinen luku 0.
3. Jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa välittömästi seuraava luonnollinen luku $s(n)$. Toisin sanoen, kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $n < s(n)$, eikä lukujen n ja $s(n)$ välissä ole luonnollisia lukuja.
4. Jos $N \subset \mathbb{N}$, jolle $0 \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $s(n) \in N$, niin tällöin $N = \mathbb{N}$.

Viimeistä aksioomaa kutsutaan induktioaksioomaksi. Se olennaisesti sanoo, että luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Se sanoo, että jos N on joukko, joka sisältää kaikki induktiossa tavoitettavat luvut, niin tällöin N sisältää kaikki luonnolliset luvut.

Lukija voi helposti todeta, että luonnollisten lukujen joukko toteuttaa Aksiomatisoinnin A.

Nyt herää kysymys, voisiko olla muita joukkoja kuin luonnollisten lukujen joukko, jotka toteuttavat ko. aksioomat. Jos siis X on joukko, ja $<$ relaatio X :ssä, joka toteuttaa alla olevat aksioomat

Aksiomatisointi B:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
4. Jos $N \subset X$, jolle $\bar{0} \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$, niin tällöin $N = X$.

niin onko X jollain perustavalla tavalla samanlainen kuin luonnollisten lukujen joukko? (Jos lukija ei jaks kahlata kaikkia aksioomia läpi, niin kerrottakoon, että

tämä aksiomatisointi on muutoin sama kuin Aksiomatisointi A, mutta luonnollisten lukujen joukon sijaan puhutaan joukosta X .)

Huomautettakoon, että muut tavalliset lukujoukot kuin $\mathbb{N}$ eivät kelpaa X :ksi: Kokonaislukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 3, muttei aksioomia 2 ja 4. Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomia 3 ja 4. Jos reaaliluvulle x yritettäisiin valita seuraaja $s(x)$, tämä ei olisi välitön seuraaja, koska esimerkiksi luku $(x + s(x))/2$ olisi x :n ja $s(x)$:n välissä. Lukujoukko $\{0, 1, \dots, 100\}$ toteuttaa aksioomat 1 ja 2, muttei aksioomaa 3, koska luvulla 100 ei ole seuraajaa tässä joukossa. Tämä joukko toteuttaa kylläkin hiukan muokatun version induktioaksioomasta, kun induktioaksioomaa muokataan niin, että se huomioi alkion $s(100)$ puutteen. (Näin ollen joukolle $\{0, 1, \dots, 100\}$ voidaan tehdä induktiotodistuksia.)

Oletetaan edelleen, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin B. Vastaus esittämäämme kysymykseen on: Kyllä, X on perustavalla tavalla samanlainen kuin $\mathbb{N}$, kun perustavalla tavalla samanlainen määritellään oikein. Se nimittäin määritellään niin, että $\mathbb{N}$ ja X ovat perustavalla tavalla samanlaisia, koska on olemassa aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Funktio b määritellään induktiivisesti seuraavasti:

- $b(0) = \bar{0}$.
- Jos $b(n)$ on jo määritelty, niin $b(s(n))$ määritellään $b(s(n)) = \bar{s}(b(n))$.

Seuraavien kolmen kohdan todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi:

- $b(n)$ tulee induktiossa määritellyksi kaikille $n \in \mathbb{N}$.
- b on aidosti kasvava.
- b on bijektio.

Todistaessasi sinun kannattaa pitää mielessä, että induktiotodistuksia voidaan tehdä sekä $\mathbb{N}$:lle että X :lle. Lisäksi kannattaa pitää mielessä, että aidosti kasvavan funktion todistaminen injektioiksi on helppo näki. Kannattaa myös muistaa, että $\mathbb{N}$ on ihan tavallinen luonnollisten lukujen joukko. Todistaessasi voit käyttää kaikkea mitä tiedät $\mathbb{N}$:sta, eikä sinun tarvitse työskennellä Aksiomatisoinnista A käsin. X :stä et tosin voi olettaa tietäväsi muuta kuin sen, että se toteuttaa Aksiomatisoinnin B.

Seuraava voi mennä lukijalta yli hilseen, mutta selitän kuitenkin, mitä ammattimatematiikko päättelisi tilanteestamme: Aksiomatisoinnit A ja B ovat olennaisesti sama aksiomatisointi. Vain nimet eroavat. Aksiomatisoinnissa B kutsutaan X :ksi sitä, mitä Aksiomatisoinnissa A kutsutaan luonnollisten lukujen joukoksi. Koska luonnollisilta luvuilta on aidosti kasvava bijektio b

mille tahansa joukolle X , joka toteuttaa Aksiomatisoinnin B , on olemassa olennaisilta piirteiltään vain yksi systeemi, luonnollisten lukujen joukko, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin A/B . Toisin sanoen, erot systeemien välillä, jotka toteuttavat nämä aksiomat ovat epäolennaisia. **Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki, mitä luonnollisten lukujen järjestyksestä voidaan todistaa millä tahansa menetelmällä, on seurausta Aksiomatisoinnin A aksiomista.**²

Huomautettakoon, että Aksiomatisoinnin A päälle rakentaen voidaan määritellä myös luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolasku. Määritelmät ovat luonteeltaan induktiivisia, mutta siihen, kuinka se tehdään, emme tässä mene.

Induktioaksioman seurauksia

Nyt todistetaan johdannossa luvut luonnollisten lukujen systeemin ominaisuudet:

Teoreema 1. *Jos $N \subset \mathbb{N}$, niin joukossa N on pienin alkio tai N on tyhjä.*

Todistus: Olkoon $N \subset \mathbb{N}$. Oletetaan, että joukossa N ei ole pienintä alkioita. Luku 0 ei voi kuulua joukkoon N , koska jos se kuuluisi, se olisi N :n pienin alkio. Oletetaan, että luvuista $0, \dots, n$ mikään ei kuulu joukkoon N . Myöskään $s(n)$ ei voi kuulua joukkoon N , koska jos se kuuluisi, se olisi N :n pienin alkio. Siinä tulikin induktion lähtökohta ja induktioaskel. Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \notin N$. Siis N on tyhjä joukko. $\square$

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \dots$ luonnollisia lukuja.*

Todistus: Jos tällainen jono olisi olemassa, niin $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ olisi epätyhjä joukko luonnollisia lukuja, jossa ei ole pienintä alkioita. Mutta tällaista joukkoa ei edellisen teoreeman nojalla ole olemassa. $\square$

Vaihtoehtoisia aksiomatisointiyrityksiä

Tässä luvussa induktioaksioma yritetään korvata jommalla kummalla edellisen luvun tuloksista. Tällöin saadaan toki aksiomat, jotka luonnolliset luvut toteuttavat, mutta syntyykö muita ongelmia?

Oletetaan siis, että $X = \mathbb{N}$, ja tutkitaan seuraavia kahden aksiomatisointia.

Aksiomatisointi 1:

- $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
- On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
- Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
- Jos $N \subset X$, niin N :ssä on pienin alkio tai N on tyhjä joukko.

Aksiomatisointi 2:

- $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
- On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
- Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
- Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkiota.

(Huomautettakoon, että nämä aksiomatisoinnit ovat samat kuin Aksiomatisointi B , josta induktioaksioma on korvattu uudella aksiomalla.)

Ongelma on siinä, että kaikki joukot X , jotka toteuttavat nämä aksiomatisoinnit, eivät ole olennaisesti samanlaisia kuin $\mathbb{N}$.

X voidaan valita seuraavasti: X koostuu kahdesta luonnollisten lukujen joukon kopiosta³, ensimmäisestä ja jälkimmäisestä. Kaikki jälkimmäisen kopion alkioita ovat suurempia (X :ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki ensimmäisen kopion alkioita. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten luonnollisten lukujen joukon järjestys.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi todistaa, että X tosiaan toteuttaa sekä Aksiomatisoinnin 1 että Aksiomatisoinnin 2.

X ja $\mathbb{N}$ eivät kuitenkaan ole olennaisesti samanlaisia: $\mathbb{N}$:ssä jokaisella alkiolla n paitsi 0 :lla on välitön edeltäjä $e(n)$, jolle $e(n) < n$, ja $e(n)$:n ja n :n välissä ei ole alkiota. X :ssä taas jälkimmäisessä kopiossa on pienin alkio p . p :llä ei ole välitöntä edeltäjää, koska kaikki p :tä pienemmät alkioita ovat ensimmäisen kopion alkiota, eikä näiden joukossa ole suurinta. Myöskään p ei ole $\bar{0}$, koska $\bar{0}$ on ensimmäisen kopion pienin alkio.

²Pidemmälle ehtineille selitän, että tarkoitan lihavoidulla lauseella seuraavaa: Olkoon $P(X)$ mikä tahansa järjestyksstruktuurien ominaisuus (eli ominaisuus, joka voi olla tai olla olematta kullakin järjestyksstruktuurilla X) siten, että $P(\mathbb{N})$ pätee, eli luonnollisten lukujen systeemillä on tämä ominaisuus. Nyt voidaan todistaa seuraava väite: *Kaikilla systeemeillä X pätee, että jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin B , niin myös $P(X)$ pätee*, eli toisin sanoen $P(X)$ on seurausta Aksiomatisoinnista B . Vastaavasti myös $P(\mathbb{N})$ on seurausta Aksiomatisoinnista A .

³Kopiot voivat olla esimerkiksi $Y' = \{0', 1', 2', \dots\}$ ja $Y'' = \{0'', 1'', 2'', \dots\}$. Idea siis on, että sekä Y' että Y'' toimivat samoin kuin luonnollisten lukujen joukko, mutta $Y' \cap Y'' = \emptyset$.

Jos olisi aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$, niin $b(n) = p$ jollain $n \neq 0$. Tällöin $b(e(n)) = q$ jollain $q < p$. Nyt kuitenkin $q:n$ ja $p:n$ välissä on alkioita, jolle mikään $\mathbb{N}$:n alkio ei voi kuvautua. Ristiriita.

X ei myöskään voi toteuttaa induktioaksioomaa, koska jos se toteuttaisi sen, se toteuttaisi koko aksiomatisoinnin B, ja aidosti kasvava bijektio b olisi olemassa. Näin ollen induktioaksiooma ei seuraa aksiomatisoinnista 1 tai aksiomatisoinnista 2.

Ohimennen mainittakoon, että Aksiomatisoinnin 1 toteuttavia systeemejä kutsutaan ordinaaleiksi. Joukkooppia ammatikseen tutkivat matemaatikot ovat paljon tekemisissä ordinaalien kanssa. Ordinaaleille voidaan tehdä eräänlaisia, luonnollisten lukujen induktiota monimutkaisempia induktiotodistuksia. Tätä tekniikkaa kutsutaan transfiniittiseksi induktioksi, mutta yksityiskohtiin emme tässä mene.

Vielä yksi aksiomatisointiyritys

Edellisissä aksiomatisoinneissa jouduttiin ongelmiin, koska aksioomilla oli malli X , jossa oli alkio, jolla ei ollut välitöntä edeltäjää. Entä jos välittömän edeltäjän olemassaolo otettaisiin aksioomaksi induktioaksiooman sijaan?

Aksiomatisointi 3:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n):n$ ja $n:n$ välissä ole X :n alkioita.

(Edelleen sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu uudella aksiomalla.)

Luonnollisten lukujen systeemi toteuttaa nämä aksiomat, OK! Mutta nyt X voidaan valita myös seuraavasti: X koostuu luonnollisten lukujen joukon kopiosta, jonka perässä on kokonaislukujen joukon kopio. Kaikki kokonaislukujen joukon kopion alkiot ovat suurempia (X :ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki luonnollisten lukujen joukon kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten kyseisissä lukujoukoissa.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että X tosiaan toteuttaa Aksiomatisoinnin 3.

X on olennaisesti erilainen kuin $\mathbb{N}$, koska X :ssä on osajoukko A , jossa ei ole pienintä alkioita. A :ksi voidaan valita yksinkertaisesti se kokonaislukujen joukon kopio.

Myöskään ei ole olemassa aidosti kasvavaa bijektiota $b: \mathbb{N} \rightarrow X$, koska jos tällainen bijektio olisi olemassa, joukon A alkukuva olisi $\mathbb{N}$:n epättyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkioita.

Samasta syystä kuin edellisessä luvussa, X ei toteuta induktioaksioomaa, eikä näin ollen induktioaksiooma seuraa aksiomatisoinnista 3.

Toimiva ratkaisu

Aksiomatisointi 3 ei takaa, että kaikilla osajoukoilla on pienin alkio, eikä Aksiomatisointi 1 takaa, että jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on edeltäjä. Mutta entä, jos näiden molempien uudet aksiomat otettaisiin aksioomiksi? Tällöin saadaan toimiva ratkaisu.

Aksiomatisointi 4:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n):n$ ja $n:n$ välissä ole X :n alkioita.
5. Jos $N \subset X$, niin joko N on tyhjä tai N :ssä on pienin alkio.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksiomalla.)

Teoreema 3. *Jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4, niin tällöin X toteuttaa myös induktioaksiooman (Aksiomatisoinnin B viimeinen aksioma.)*

Todistus: Oletetaan, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4. Olkoon $N \subset X$ sellainen, että $\bar{0} \in N$, ja $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$. Tehdään vastaoletus $N \neq X$. Siis $X \setminus N$ on epättyhjä, ja siinä on pienin alkio n . Nyt $n \neq \bar{0}$, joten on olemassa alkio $\bar{e}(n)$. Mutta koska $\bar{e}(n) < n$, pätee $\bar{e}(n) \in N$. Siis oletuksen nojalla $n = \bar{s}(\bar{e}(n)) \in N$. Ristiriita. $\square$

Nyt siis jokainen Aksiomatisoinnin 4 toteuttava systeemi toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B, ja on olennaisesti samanlainen luonnollisten lukujen systeemin kanssa.

Tutkitaan vielä seuraavaa aksiomatisointia:

Aksiomatisointi 5:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.

2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkioille n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkioilla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n :n välissä ole X :n alkioita.
5. Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksiooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että jos X toteuttaa tämän aksiomatisoinnin, se toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B. Helpointa lienee todistaa väliaiheena, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4.

Aksiomatisointi 5 tietysti sopii huonosti luonnollisten lukujen aksiomatisoinniksi, koska viimeisessä aksioomassa luonnolliset luvut oletetaan jo valmiiksi tunnetuiksi; indeksien on tosiaan tarkoitus viitata oikeisiin luonnollisiin lukuihin, ei joukon X alkioihin. Tästä ongelmasta huolimatta on kuitenkin mielenkiintoista tutkia, ovatko nämä aksioomat yhtäpitäviä Aksiomatisoinnin B kanssa.

Loppusanat

Kun pistämme kirjoitelman tulokset yhteen, saamme tuloksen, että Teoreemojen 1 ja 2 väitteet ovat kumpikin yhtäpitäviä luonnollisten lukujen induktioaksiooman kanssa.

Luonnolliset luvut toteuttavat Teoreemojen 1 ja 2 väitteet, ja luvussa 3 konstruoitu aidosti kasvava bijektio takaa, että kaikki luonnollisten lukujen järjestysominaisuudet seuraavat Aksiomatisoinnista A, ja näin olen myös Aksiomatisoinnista B, joten Aksiomatisointi B (tai aidosti kasvavan bijektion b olemassaolo) implikoi Aksiomatisointien 4 ja 5 väitteet. Sekä Aksiomatisointi 4 että Aksiomatisointi 5 puolestaan implikoi Aksiomatisoinnin B väitteet edellisen luvun tulosten nojalla.

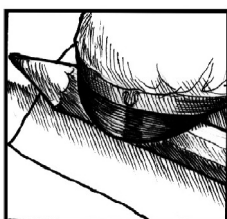
Yllä oleva voidaan kiteyttää seuraavasti:

Teoreema 4. *Olkoon X systeemi, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin 3. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

- X toteuttaa induktioaksiooman.
- Kaikissa X :n epätyhjissä osajoukoissa on pienin alkio.
- Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.
- On olemassa aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Aksioomat harvoin ovat yhtäpitäviä tyhjiössä, vaan ne ovat yhtäpitäviä joidenkin muiden aksioomien vallitessa. Tässä tapauksessa induktioaksiooman ja Teoreemojen 1 ja 2 väitteiden yhtäpitävyyden kannalta ratkaisevaksi osoittautui aksiooma, joka sanoo välittömien edeltäjien olemassaolon.

Jos kiinnostuit tässä kirjoituksessa esitetyistä pääteletyknikoista, sinun kannattaa lähteä yliopistoon lukemaan matematiikkaa ja erikoistua logiikkaan. Logiikassa on osa-alue, malliteoria, jossa tutkitaan sitä, millaisia aksioomat toteuttavia systemeejä voidaan millekin aksioomajoukolle muodostaa.



Kevään 2018 ylioppilastehtävä muunnelmineen

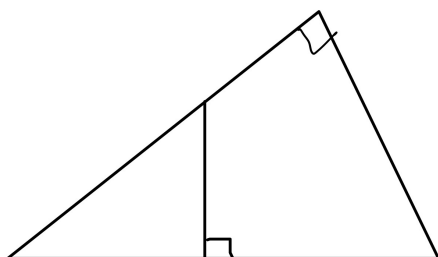
Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Kevään 2018 eräessä ylioppilastehtävässä pyydettiin selvittämään, missä suhteessa suora jakaa suorakulmaisen kolmion pidemmän kateetin, mikäli se jakaa hypotenuusan kohtisuorasti kahteen keskenään yhtä pitkään osaan.

Tehtävän tarkka muotoilu on seuraava:

Tehtävä. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.

Tilanne havainnollistuu seuraavalla kuvalla:

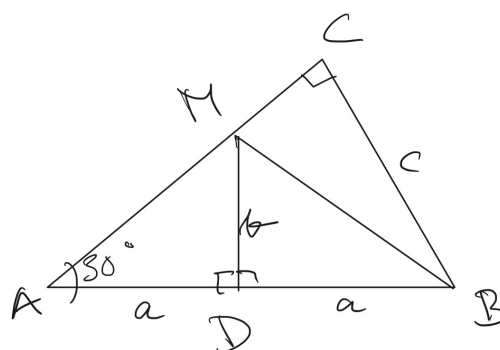


Tämän voi ratkaista hyvin monella erilaisella tavalla. Lisäksi tätä kysymystä voi yleistää erilaisiin tilanteisiin: Mitä tapahtuu, jos kulmien kokoa muutetaan? Entäs, jos hypotenuusaa ei jaetakaan kahteen yhtä suureen osaan?

Aloitetaan kuitenkin alkuperäisestä tehtävästä ja sen erilaisista ratkaisuista.

Ratkaisuja alkuperäiseen tehtävään

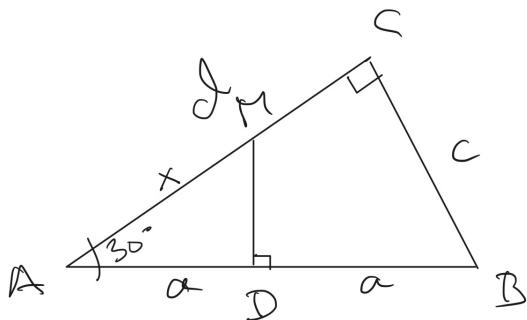
Ensimmäinen ratkaisu on uskomattoman elegantti. Piirretään kateetin jakopisteen ja kuudenkymmenen asteen kulman välille jana. Kas näin:



Kuvan notaatiolla ovat kolmiot ADM ja BDM yhteneviä, koska niillä on yhteinen sivu, niiden kannat ovat yhtä pitkiä ja näiden sivujen välissä oleva kulma on suora. Siispä $\angle DBM = 30^\circ$. Koska $\angle DBC = 60^\circ$, on oltava myös $\angle MBC = 30^\circ$. Kolmion MBC kulmat ovat siis yhtä suuret kuin kolmion BDM kulmat. Niillä on yhteinen hypotenuusa, joten nekin ovat yhteneviä. Kysytty suhde on siis sellaisen suorakulmaisen

kolmion, jonka kulmat ovat 30° ja 60° , lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan, eli $1 : 2$.

Toinen ratkaisu rakentuu yhdenmuotoisten kolmioiden varaan.



Oheisen kuvan notaatiolla alkuperäisen kolmion sivut ovat c , d ja $2a$. Kolmiot ABC ja ADM ovat yhdenmuotoiset, koska ne molemmat ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen terävä kulma on 30 astetta.

Tämän ratkaisun voisi tehdä useallakin tavalla. Oleellista on jollain keinolla hyödyntää kolmion mallia ja ison ja pienen kolmion välistä suhdetta.

Kolmio on ns. muistikolmio. Tiedetään siis, että $d = \sqrt{3}a$. Jos tätä tietoa ei muista, voi tämän helposti selvittää trigonometristen funktioiden kautta tai esimerkiksi piirtämällä kaksi tällaista kolmiota vierekkäin niin, että saa tasasivuisen kolmion, ja tämän jälkeen käyttämällä Pythagoraa lausetta.

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan

$$\frac{a}{x} = \frac{d}{2a},$$

johon voidaan sijoittaa $a = \frac{1}{\sqrt{3}}d$:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}d}{x} = \frac{d}{2a} = \frac{d}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}d} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

joten

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}d,$$

joten toisen osan pituus on $\frac{1}{3}d$, eli osien välinen suhde on $1 : 2$.

Hienoinen variantti tästä ratkaisusta nojautuu trigonometriin funktioihin. Ensinnäkin

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{x}$$

ja

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{2a}.$$

Lisäksi

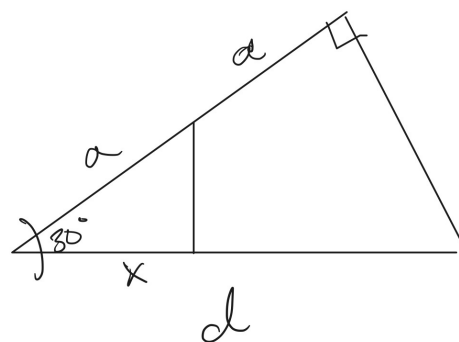
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kaksi ensimmäistä yhtälöä vastaavat kolmioiden yhdenmuotoisuuksia. Viimeinen taas muistikolmion antamia mittoja. Näiden yhtälöiden jälkeen käy ratkaisun loppuun saattaminen täsmälleen samoin kuin edellisenkin.

Nyt käsitellyämme alkuperäisen tehtävän ratkaisuvaihtoehtoja voimme siirtyä eteenpäin erilaisiin variantteihin.

Kateetin jakaminen tasan

Alkuperäisessä tehtävänannossa jaettiin hypotenuusa tasan kahteen osaan. Mitä tapahtuukaan, jos tämä tehdään pitkälle kateetille?



Niin elegantti kuin yhteneviin kolmioihin perustuva ratkaisu onkin, ei se mene läpi ainakaan sellaisenaan tässä tilanteessa. Helpointa lienee argumentoida yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Nyt $2a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. Lisäksi

$$\frac{x}{a} = \frac{2a}{d},$$

joten sijoittamalla pituuksien a ja d välinen suhde sekä ratkaisemalla x saadaan

$$x = \frac{2a^2}{d} = \frac{3d^2}{8d} = \frac{3}{8}d.$$

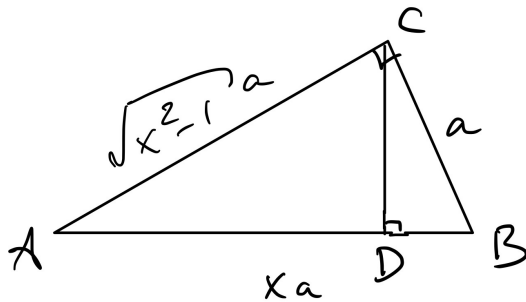
Toinen osa hypotenuusaa on siis $\frac{5}{8}d$. Osien suhde tässä tilanteessa on siis $3 : 5$.

Siirrytään nyt muunlaisiin suorakulmaisiin kolmioihin ja muihin jakosuhteisiin.

Yleistys tilanteesta

Helpointa on tarkastella yleistystä tarkastelemalla kolmiota, jonka lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan on $1 : x$. Muistikolmion tapauksessa tämä suhde on $1 : 2$. Oletetaan lisäksi, että hypotenuusa on jaettu suhteessa $y : 1$ pienemmästä kulmasta lähtien. Kolmion sivut ovat siis a , xa ja $\sqrt{x^2 - 1}a$.

Selvitetään ensin millainen jakosuhteen on oltava, jotta kohtisuora jakaa pitkän eikä lyhyen kateetin. Tarkastellaan siis aluksi rajatapaus, eli se, jossa jakoviiva kohtaa suoran kulman.



Kuvan notaatiolla

$$\frac{AB}{BC} = x,$$

ja yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

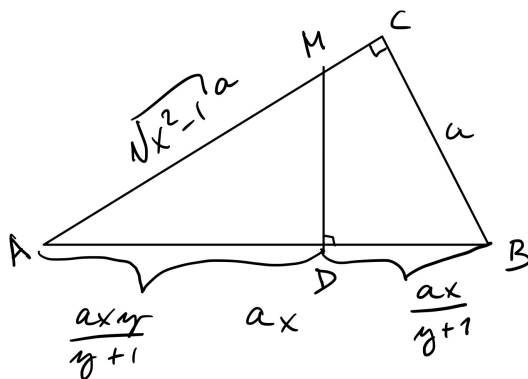
$$\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{BC},$$

joten

$$DB = \frac{a}{x}.$$

Alkuperäisessä ylioppilaskokeen tehtävässä, eli tilanteessa, jossa $x = 2$, tämä olisi tarkoittanut sitä, että hypotenuusa olisi jaettu suhteessa $2 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, eli $3 : 1$ pidempi pätkä pienemmän kulman päähän sijoittaen.

Piirretään nyt kuva yleisestä tilanteesta:



Kuvan notaatiolla

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} a}{x a} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

Siispä

$$AM = AD \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{a x^2 y}{(y + 1) \sqrt{x^2 - 1}}$$

ja

$$\begin{aligned} MC &= AC - AM = \sqrt{x^2 - 1} a - \frac{a x^2 y}{(y + 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{x^2 a - y a - a}{(y + 1) \sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Kysytty suhde on tässä tilanteessa siis

$$\frac{a x^2 y}{(y + 1) \sqrt{x^2 - 1}} : \frac{x^2 a - y a - a}{(y + 1) \sqrt{x^2 - 1}},$$

joka sievenee muotoon $x^2 y : (x^2 - y - 1)$.

Loppusanat

Minun näkökulmastani tehtävän ratkaisujen lukemisen viehätys oli erilaisten ratkaisumallien näkeminen ja ratkaisutapojen soveltuvuuden pohtiminen yleistettyihin tilanteisiin. Ensimmäinen ratkaisutapa alkuperäiseen tehtävään on ehdoton oma suosikkini, mutta sitä en saanut yleistettyä. Toinen viehätys minulle tässä tehtävässä on se, että koska kaikki toimii yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, suhdeluvut ovat varsin siistejä ja esimerkiksi luvut $x^2 y$ ja $x^2 - y - 1$ ovat kokonaislukuja, jos luvut x ja y ovat kokonaislukuja.

Aktiiviselle lukijalle jätetään muiden yleistysten tekeminen. Bonustehtävänä on luonnollisestikin sen tekeminen missä minä epäonnistuin: yrittää saada ensimmäinen ratkaisumalli toimimaan mahdollisimman yleisessä tilanteessa.

Solmu 1/2019

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

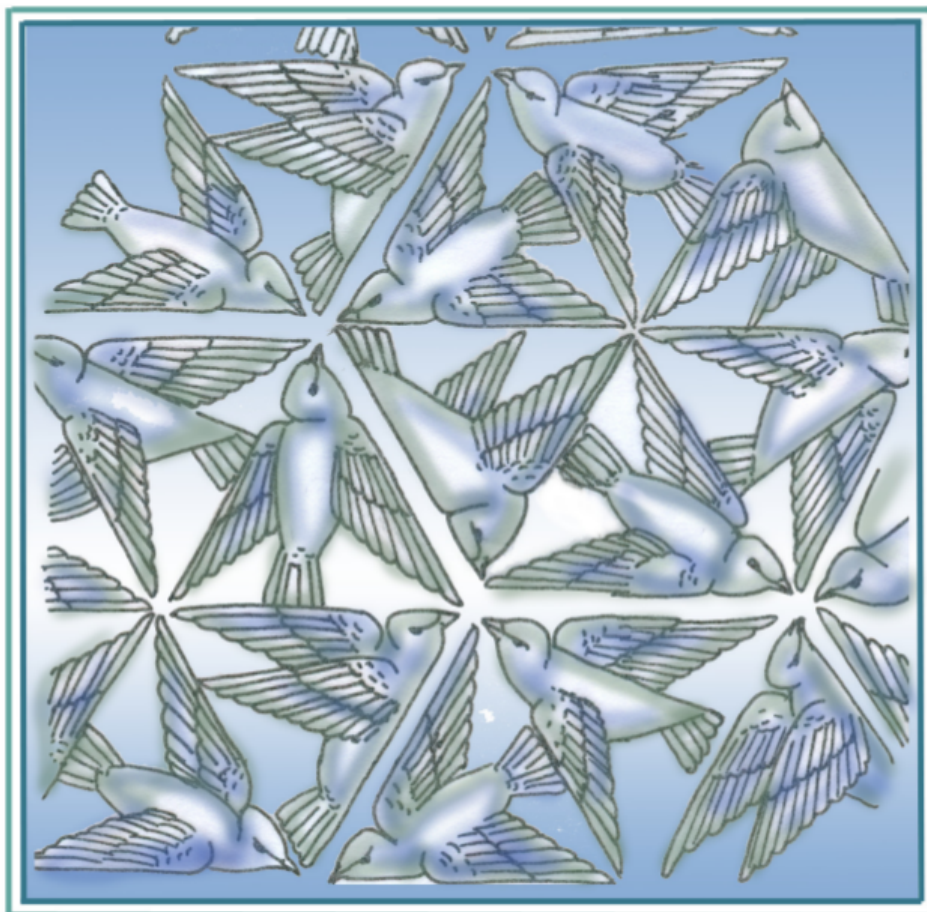
Petteri Harjulehto, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 2/2019 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 1.5.2019 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi