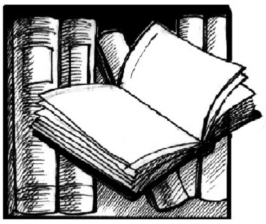

Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, kuudes ja seitsemäs kurssi

Matti Lehtinen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka*: **Juuri. Derivaatta.** 168 s. Otava 2015. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 22,00 -27,75 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 6. Derivaatta.** 178 s. Sanoma Pro 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 21,00–27,40 euroa.

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka*: **Juuri. Trigonometriset funktiot.** 144 s. Otava 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 22,00–27,75 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 7. Trigonometriset funktiot.** 167 s. Sanoma Pro 2017. Hinta lokakuussa 2018 eri verkkokaupoissa 21,40–27,40 euroa.

Derivaattakurssi

Matematiikan pitkän oppimäärän kuudes kurssi on saanut otsikon Derivaatta. Otsikon käsitteen lisäksi kurssiin on sisällytetty rationaalifunktio. Funktion yleinen käsite on esitetty oppimäärän aloittavassa, pitkän ja lyhyen oppimäärän yhteisessä kurssissa ja kurssissa 2 on käsitelty polynomifunktioita. On jo aikakin kasvattaa funktiotarjotinta. Kurssin tavoitteisiin kuuluvat sitten ”havainnolliset käsitykset” funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta ja derivaatan käyttö (nimenomaan) polynomifunktioiden ominaisuuksien selvittämiseen. Yleisemmät funktioihin liittyvät käsitteet kuten funktioiden yhdistäminen ja käänteisfunktio saavat vielä odottaa vuoroaan.

Kilpailevat oppikirjasarjat ovat kuudennen kurssin kohdalla varsin lähellä toisiaan. Kumpikin jakaa aineiston viiteen lukuun. Näistä kolmella ensimmäisellä on molemmissa kirjoissa sama nimi ja kahden viimeisenkin nimissä on vain se ero, että *Juuren* otsikkojen sanaa kulku vastaa *Tekijän* otsikoissa sana derivaatta. Harjoitustehtävien lukumäärässä *Tekijä* voittaa: siinä on 342 tekstilukuihin liittyvää tehtävää ja lopussa vielä 103 kertaustyyppistä tehtävää. *Juuressa* on 273 numeroitua harjoitustehtävää ja lisäksi 37 kertaustehtävää. *Tekijä* jakaa tehtävänsä kahteen kategoriaan, perustehtäviä sisältävään sarjaan I ja perus- sekä vaativampia tehtäviä sisältävään sarjaan II. *Juuri* jakaa edelleen tehtävänsä kolmeen kategoriaan, joita kutsutaan *ydintehtäviksi*, *vahvistaviksi tehtäviksi* ja *syventäviksi tehtäviksi*. *Juuren* vastausosastossa on ensin vihjeitä (71:een numeroituun harjoitustehtävään) ja sitten vastauksia. Jos tehtävänanto alkaa sanalla ”osoita”, *Juuren* vastausosastossa on tehtävän numeron kohdalla pelkkä viiva. *Tekijä* näyttää antavan jokaiselle tehtävälle joko vastauksen tai muun ratkaisuun johtavan viitteen. *Tekijän* ratkaisuosasto onkin kaikkiaan hiukan laajempi kuin *Juuren*.

Tarkastelun kohteena olevista oppimateriaaleista *Tekijä* aloittaa esityksensä palauttamalla mieliin eräitä funktioon liittyviä käsitteitä. Palautetaan mieliin, että ”Funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon lukuun täsmälleen yhden luvun, jota kutsutaan funktion arvoksi.” Kun kääntää sivua, saa sitten eteensä määritelmän, jonka mukaan ”Funktion määrittelyjoukko muodostuu niistä luvuista, jotka voidaan sijoittaa funktioon muuttujan paikalle.” Kehää kuljetaan. *Juuri* ohittaa nämä tarkastelut.

Rationaalifunktioon *Tekijä* pääsee kertomalla, että murtolauseke on kahden polynomin osamäärä ja että rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke on polynomien ja murtolausekkeiden summa. Onko siis funktio, jonka lauseke on

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

rationaalifunktio? *Juuri* puolestaan ilmoittaa hiukan väljemmin, että rationaalifunktio on funktio, jonka lauseke voidaan kirjoittaa kahden polynomin osamääränä

$$\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Juuri esittää tässä kohdin käsitteen määrittelyehdon. Se on tietysti $Q(x) \neq 0$. Ehdon sanotaan osoittavan funktion määrittelyjoukon. Toisaalta määrittelyjoukon kerrotaan muodostuvan ”niistä kohdista, joissa funktion arvo voidaan laskea”. Aika tulkinnanvaraista. Määrittelyehto on myös *Tekijällä*. Silti *Tekijä* esittelee esimerkin

$$g(x) = \frac{x^4 - x}{x} + \frac{1}{x-3}$$

ja kirjoittaa eksplisiittisesti $g(0)$ ja $g(3)$; kun g:n lausekkeeseen tulee nollanimittäjä, todetaan, että 0 ja 3 eivät kuulu g:n määrittelyjoukkoon. Kehältä näyttää taas.

Rationaalilausekkeet johtavat havaitsemaan, että lukion kursseissa ei ole vielä harjaannuttu laskemaan. Molemmat kirjat antavat lyhyet ohjeet murtolausekkeiden yhteenlaskulle ja supistamiselle. Rationaalifunktion nollakohdille ja rationaalifunktion määrittämän epäyhtälötehtävän aika ilmeisille ratkaisuille kumpikin kirja omistaa lyhyen luvun. Kun näissä yhteyksissä on melkein vaistonvaraista ajatella tarkasteltavan osoittajan ja nimittäjän nollakohtien määrittämiä välejä, niin *Tekijän* Lauseen statukseen kohottaman ja korostettuna painaman virkkeen hyvä tarkoitus peittää sen sanatarkasti luettavan sisällön huvittavuuden: ”Rationaalifunktion arvot voivat vaihtaa merkkiään ainoastaan funktion nollakohdissa ja kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.” Lauseen alapuolella onkin sama muodossa, joka ei aiheuta hymyilyä: ”Funktion nollakohdat ja kohdat, joissa funktio ei ole määritelty, jakavat lukusuoran osaväleihin. Kullakin osavälillä funktion arvot säilyvät samanmerkkisinä (joko positiivisena tai negatiivisena).” Miksei tämä ole ”lause”?

Opetussuunnitelma antaa tavoitteeksi sen, ”että opiskelija omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta”. Kyse on siis muutamasta matemaattisen analyysin peruskäsitteestä. *Juuri* esittää varsin pelkistetyn raja-arvon määritelmän: ”Funktion f raja-arvo kohdassa a on luku b, jos funktion arvo lähestyy lukua b, kun x lähestyy kohtaa a. Tällöin merkitään $\lim_{x\to a} f(x) = b$.” *Tekijän* määritelmä on parempi, siinä muistetaan kertoa, että ”Lähestymisen tulee olla sellaista, että funktion f arvot saadaan niin lähelle lukua b kuin suinkin halutaan, kunhan muuttujan arvot viedään riittävän lähelle lukua a.” – Tähänkin voisi pahantahtoinen kommentaattori huomauttaa, että määritelmä saattaisi taipua antamaan funktiolle $\sin\frac{1}{x}$ jonkin raja-arvon origossa. Mutta eihän opetussuunnitelma edellytä kuin ”havainnollista käsitystä”.

Tekijä on muutenkin hiukan seikkaperäisempi raja-arvoa esitellessään. Se esittää raja-arvon rationaaliset laskusäännöt, jotka *Juuri* olettaa ilman muuta päteviksi. Ei *Tekijäkään* laskusääntöjä perustele. Kun käytössä ovat vain rationaalifunktiot, laskusäännöistä seuraa heti, että funktion raja-arvo onkin sen arvo ainakin siellä, missä funktio on määritelty. Nimittäjän nollakohdat ovat nekin aika yksinkertaisesti käsiteltävissä. *Juuri* omistaa alaluvun toispuolisille raja-arvoille, *Tekijäkin* ne määrittelee ja muistaa vielä muotoilla lauseeksi (todistamatta tietenkin) sen, että raja-arvon $\lim_{x\to a} f(x)$ olemassaolosta seuraa $\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$.

Kumpikin kirja antaa funktion jatkuvuuden määritelmäksi kohdassa a ehdon $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Onko tämä opetussuunnitelman edellyttämää ”havainnollisuutta”, saattaa olla tulkinnanvaraista. Molemmat kirjat käsittelevät huolellisesti ilmeisesti erään takavuosien ylioppilastutkintotehtävän esiin tuomaa seikkaa, jonka mukaan funktiota voi kutsua epäjatkuvaksi jossain pisteessä vain, jos se on tässä pisteessä määritelty. Näin ollen yleistä puheenpartta, jonka mukaan $\frac{1}{x}$ olisi epäjatkuva origossa, on pidettävä virheellisenä. *Juuri* esittää määritelmän ”Funktio on jatkuva välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva kyseisen välin jokaisessa kohdassa.” Itse olisin taipuvainen – ainakin ”havainnollisesti” puhuessani – pitämään $\frac{1}{x}$ epäjatkuvana välillä $[-1, 1]$, kun ei se kerran voi määrittelemättömänä jatkuvakaan origossa olla, mutta *Juuri* vaatii, että funktion tulee olla kaikissa välin pisteissä määritelty. Samoilla linjoilla on toki *Tekijäkin*. Suljettua väliä varten se tarvitsee vielä käsitteet oikealta ja vasemmalta jatkuva.

Kumpikin kirja nimeää kolmannen päälukunsa Derivaataksi ja aloittaa tarpeellisella huomautuksella siitä, että kysymys on muutoksesta ja sen nopeudesta. *Tekijä* kertoo miltei heti, että derivaataksi $f'(a)$ kutsutaan funktion kuvaajan kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakerrointa. *Juuri* lähtee ensin esittelemään erilaisia muuttuvia suureita, esittää keskimääräisen muutosnopeuden kuvaajien avulla ja ilmoittaa veren puudutusaineen pitoisuutta ajan funktiona esittävän käyrän (silmämääräisesti) piirretyn tangentin kulmakertoimen olevan pitoisuuden muutosnopeus. Kuvassa tangentti on laskeva suora, joten muutosnopeus on negatiivinen. Runsaiden esimerkistöjen jälkeen kirjat pääsevät esittämään derivaatan määritelmän erotusosamäärän raja-arvona, *Tekijän* mukaan

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ja *Juuren* mukaan

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \qquad (1)$$

Jostain syystä *Tekijä* on sijoittanut muodon (1) "Syventävää tietoa" -otsikon alle. Derivaatan raja-arvomuotoisen määritelmän jälkeen molemmat kirjat sitten määrittelevät f:n kuvaajan tangentin suoraksi, jonka kulmakerroin on $f'(a)$. Molemmat kirjat määrittelevät derivaattafunktion (joka historiallisesti on sekä sanan derivaatta että merkinnän f' takana), ja *Tekijä* muistaa mainita, että derivaattafunktiolla saattaa olla myös derivaattafunktio f'' jne. *Juuren* lukija kohtaa toisen derivaatan vain myöhemmin vastaan tulevassa esimerkkitehtävässä, jossa kysytään hetkeä, jolloin lääkeaineen pitoisuus vähenee nopeimmin.

Jotta polynomifunktioiden derivaattoja voitaisiin muodostaa, on oltava tieto potenssien derivaatan muodostamisesta ja tieto derivointioperaation lineaarisuudesta. Edelliseen tietoon kumpikin oppikirja johdattaa muutaman derivaatan määritelmän perusteella lasketun pienen eksponentin tapauksen kautta. *Juuri* perustelee menettelyn yleiselle eksponentille käyttämällä lausekkeen $x^n - a^n$ tekijöihin jakoa $(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ (perusteluna "sulkujen auki kirjoittaminen"), *Tekijä* taas viittaa todistuksessa harjoitustehtävään, jossa derivointikaava pyydetään todistettavaksi induktiolla, mutta samalla ilmoitetaan induktion opetuksen tapahtuvan kurssissa 11. Derivaatan muodostuksen lineaarisuutta *Tekijä* perusteleekin, *Juurelle* se on ilmoitusasia.

Entä funktioiden tulon derivaatta? *Tekijä* perustelee kaavan manipuloimalla erotusosamäärää kaikkiaan kymmenen rivin yhtälöketjussa. *Juuri* lykkää koko kaavan esittämisen rationaalifunktion derivaatan käsittelyn yhteyteen ja selviää hiukan vähemmillä yhtälöillä. *Juuri* kertoo lisäksi, että tulofunktion derivaattaa ei kurssissa tarvita muuta kuin osamäärän derivaatan kaavan johtamiseen. Molemmat kirjat sitten johtavatkin osamäärän

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

derivointikaavan kertomalla ensin, että h voidaan erotusosamäärää tarkastelemalla osoittaa derivoituvaksi ja ratkaisemalla h' yhtälöstä $f'(x) = h(x)g'(x) + g(x)h'(x)$. Yksi uskottelukohta olisi voitu ohittaa, jos olisi manipuloitu osamäärän erotusosamäärää hyvin samalla tapaa kuin tulofunktion tapauksessa.

Derivaattaa voidaan käyttää funktion kulun ja ääriarvojen tutkimiseen. Kun derivaatta on paikallisesti määritelty suure, syntyy ongelmaa globaalimpien ominaisuuksien suhteen. Jos esimerkiksi tiedetään funktio kasvavaksi, on aika ilmeistä, että sen derivaatta ei voi olla negatiivinen. Mutta se, että derivaatan ei-negatiivisuus implikoi kasvamisen, perustellaan yleensä differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla. Tämän molemmat kirjat muistavat sanoa, ja *Juuressa* on väliarvolauseen ymmärrettäväksi tekevä kuvakin. Sen sijaan se keskeinen tosiasia, että suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla on suurin ja pienin arvo, joudutaan ottamaan käyttöön vain kertomalla, että asian todistaminen edellyttää lukion kurssin ylittäviä tietoja. Näinhän asia onkin.

Olen aikaisemmin kritisoinut koulukirjoja, nytkin esillä olevia sarjoja, siitä, että ne eivät suostu sovittamaan omalle rivilleen ladottavia kaavoja muuhun tekstiin ja esimerkiksi jättävät ne välimerkeittä. Sekä *Tekijä* että *Juuri* näyttävät nyt horjuvan. Samalla sivulla saattavat jotkin kaavat olla oikeilla välimerkeillä varustettuja, toiset taas eivät. Ja monesti kaavojen viereen on eri kirjasinlajilla ja sinisellä värillä (*Tekijä*) tai keltaisella pohjalla (*Juuri*) painettu tekstiä, jonka voisi ajatella olevan esimerkiksi kaavaa taululle kirjoittavan puhumaa selitystä. Askel matematiikassa normaalin kielenkäytön suuntaan on otettu.

Opetussuunnitelman kurssille asettaman kuuden tavoitteen joukossa on myös se, että opiskelija osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kurssiin liittyvien tehtävien ratkaisemisessa. Hyvä niin, mutta silti pysäyttävä on Juuren harjoitustehtävä, jonka a- ja b-kohdissa on osoitettava, että tietty lukujono toteuttaa kaksi yksinkertaista epäyhtälöä, ja c-kohdassa sitten pyydetään sopivaa ohjelmaa käyttäen "varmistamaan a- ja b-kohtien tulokset". Kone tietää enemmän?

Trigonometrisia funktioita

Pitkän matematiikan seitsemännen kurssin opetussuunnitelma antaa itsessään jotenkin lapsellisen vaikutelman: siinä ilmaistaan eksplisiittisenä tavoitteena, että oppilas osaa kaavat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Opetussuunnitelman listaamien seitsemän tavoitteen ja viiden keskeisen sisällön joukossa on yksi trigonometrisia funktioita yleisemmän tason asia, yhdistetty funktio ja sen derivaatta. Trigonometriset funktiot rikastuttavat hiukan analyysia, jota toistaiseksi on harrastettu vain polynomi- ja rationaalifunktioilla. Matematiikan perinteen mukainen käsittelyjärjestys olisi kaikkien alkeisfunktioiden käyttöönotto ennen esimerkiksi differentiaalilaskennan mukaantuloa.

Sisällysluetteloa katsoen selvin ero *Tekijä*- ja *Juuri*-sarjojen seitsemännen kurssin esittelyssä on tämän yhdistetyn funktion ja sen derivaatan sijoittamisessa. *Tekijä* aloittaa siitä. *Juuri* taas on asettanut yhdistetyn funktion käsittelyn kirjan viimeiseksi luvuksi. Sijoittamisella ei ole suurta merkitystä. Kumpikin kirja esittää yhdistetyn funktion derivoinnin, ketjusäännön, johdon erotusosamäärän avulla. Vain *Juuri* muistaa huomauttaa, että muotoon

$$\frac{(u\circ s)(x+h)-(u\circ s)(x)}{h} = \frac{u(s(x+h))-u(s(x)}{s(x+h)-s(x)}\cdot\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$$

kirjoitetussa erotusosamäärässä saattaa tulla nollallajakamistilanne. Miten asiasta selvittäisiin, jää kuitenkin kertomatta. Kumpikaan kirja ei mainitse tilannetta, jossa sisäkkäin olisi useampia funktioita. Ketjusäännön yleistäminen tällaisiin tapauksiin olisi kuitenkin aivan triviaalia. Varsinaisen trigonometriaan liittyvän asian kumpikin kirja aloittaa radiaanin määrittelystä. *Juuren* esittämästä määritelmästä näyttää seuraavan, että radiaanin yksikkö on pituuden yksikkö! Toisaalta *Juuri* esittää joukon tyyppiä $360° = 2\pi$ olevia yhtälöitä ja "lauseen": "Jos ympyrän säde ei ole 1, kulman suuruus radiaaneina saadaan jakamalla kaaren pituus säteellä." *Tekijä* on tässä korrektimmilla linjoilla.

Molemmat kirjat esittävät yleisen kulman sinin ja kosinin normaalilla tavalla yksikköympyrän kehäpisteen koordinaatteina. Kulman tangentti sen sijaan saa vaihtelevan käsittelyn. *Tekijän* mukaan kulman tangentti on sen sinin ja kosinin osamäärä, kun kosini ei ole nolla, mutta *Juuren* mukaan kulman tangentti on sen *tangenttipisteen* y-koordinaatti. Tangenttipiste taas on se piste, jossa suora, johon muuttuvan kulman kiertyvä kylki kuuluu, leikkaa yksikköympyrän pisteeseen $(1, 0)$ asetetun tangentin. Mutta *Tekijäkin* tarvitsee tangenttipistettä esimerkiksi määritelläkseen tangenttifunktion ja löytääkseen sen jakson. Lukija ihmettelee, miksei yhteys

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

riitä. Kun sitten tullaan tangenttifunktion derivaattaan, niin tangentti on taas sinin ja kosinin osamäärä. Olisiko niin, että tekijäkollektiivin eri jäsenet ovat kirjoittaneet omia jaksojaan, ja yhdenmukaistava koordinointi on jäänyt kesken?

Derivaatan esittelyssä *Juuri* voittaa. Sinin derivaatta perustellaan. Tosin tarvittavat apuneuvot, sinin yhteenlaskukaava ja raja-arvo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

on esitetty harjoitustehtävissä, joihin derivaatan johdossa viitataan vain kirjan luvun tarkkuudella. *Tekijä* määrittelee vain tylysti sini- ja kosinifunktion derivaatat esittämättä asioille muuta perustelua kuin "tutkimustehtävän", jossa pyydetään piirtämään – arvattavasti jotain ohjelmaa käyttäen – sini- ja kosinifunktioiden kuvaajat ja määrittämään niistä derivaatan arvo viidessä pisteessä.

Kaiken kaikkiaan hiukan hämmentää molempien kirjojen tapa ensin määritellä $\sin x$ ja $\cos x$ kaikille suunnistetuille (tai suunnatuille) kulmille ja siis kaikille reaaliluvuille x ja aloittaa sitten uusi luku, jonka sisältö on "sini ja kosini funktioina". Hämmennystä ei ainakaan vähennä *Tekijän* toteamus "Kosinifunktion $\cos x$ arvo on kulman x kehäpisteen x-koordinaatti." Miksi kulman symbolina on x, kun eletään koordinaatistossa, jonka pisteiden totunnainen esitys on (x, y)? Miksei $\sin t$, $\cos t$? Helposti paremmaksi kohennettavia ilmauksia löytyy *Juurestakin.* Määriteltyään funktion f, jonka arvo on kulman x tangentti, kirja toteaa, "että funktion f arvoa ei voi laskea kohdissa $x=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$," vaikka edellisessä kurssissa on opittu, että funktiolla on määrittelyjoukko. Voi kuvitella funktion ja määrittelyjoukon pisteen, jossa funktion arvon laskeminen ei onnistu, mutta tässähän ollaan selvästi määrittelyjoukon ulkopuolella. Ja jos $\tan\alpha = a$, niin "yhtälön $\tan x = a$ täydellinen ratkaisu" ei ehkä olisi "$x=\alpha+n\cdot\pi$, missä n on mikä tahansa kokonaisluku". Jokainen tällainen luku lienee yhtälön yksittäinen ratkaisu.

Tällaiset hiuksenhalkomiset jääkööt. Mutta vakavana puutteena on pidettävä sitä, että kumpikaan kirja ei hiiskahda sanallakaan kolmesta muusta ainakin englanninkielisissä luonnontieteellis-teknisissä yhteyksissä melko varmasti vastaan tulevasta trigonometrisesta perusfunktiosta kotangentti, sekantti ja kosekantti. Ja kyllä trigonometristen funktioiden yhteydessä voisi arkusfunktiotkin mainita, vaikka käänteisfunktion käsitettä pantataankin aina kurssiin 13. Laskimistakin löytyy näitä varten näppäimiä.