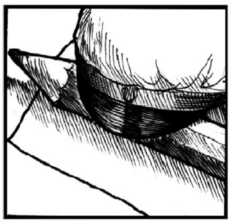


Kevään 2018 ylioppilastehtävä muunnelmineen

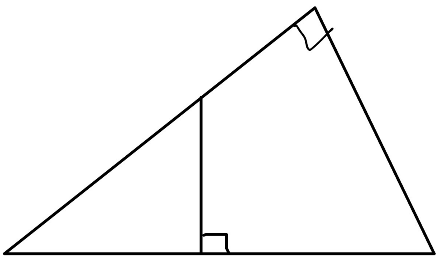
Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Kevään 2018 eräässä ylioppilastehtävässä pyydettiin selvittämään, missä suhteessa suora jakaa suorakulmaisen kolmion pidemmän kateetin, mikäli se jakaa hypotenuusan kohtisuorasti kahteen keskenään yhtä pitkään osaan.

Tehtävän tarkka muotoilu on seuraava:

Tehtävä. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteeseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.

Tilanne havainnollistuu seuraavalla kuvalla:

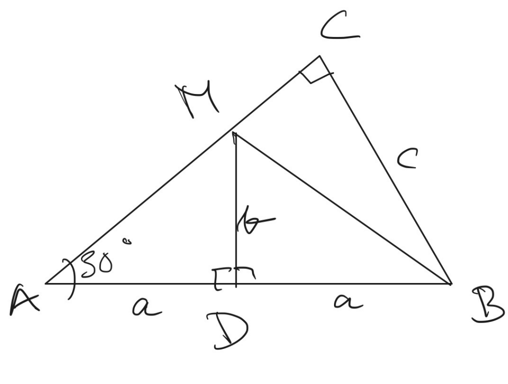


Tämän voi ratkaista hyvin monella erilaisella tavalla. Lisäksi tätä kysymystä voi yleistää erilaisiin tilanteisiin: Mitä tapahtuu, jos kulmien kokoa muutetaan? Entäs, jos hypotenuusaa ei jaetakaan kahteen yhtä suureen osaan?

Aloitetaan kuitenkin alkuperäisestä tehtävästä ja sen erilaisista ratkaisuista.

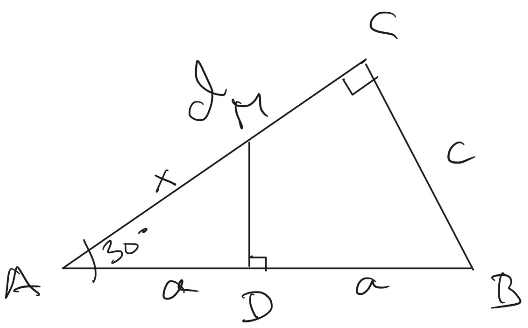
Ratkaisuja alkuperäiseen tehtävään

Ensimmäinen ratkaisu on uskomattoman elegantti. Piirretään kateetin jakopisteen ja kuudenkymmenen asteen kulman välille jana. Kas näin:



Kuvan notaatiolla ovat kolmiot ADM ja BDM yhteneviä. koska niillä on yhteinen sivu, niiden kannat ovat yhtä pitkiä ja näiden sivujen välissä oleva kulma on suora. Siispä $\angle DBM = 30°$. Koska $\angle DBC = 60°$, on oltava myös $\angle MBC = 30°$. Kolmion MBC kulmat ovat siis yhtä suuret kuin kolmion BDM kulmat. Niillä on yhteinen hypotenuusa, joten nekin ovat yhteneviä. Kysytty suhde on siis sellaisen suorakulmaisen kolmion, jonka kulmat ovat $30°$ ja $60°$, lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan, eli $1 : 2$.

Toinen ratkaisu rakentuu yhdenmuotoisten kolmioiden varaan.



Oheisen kuvan notaatiolla alkuperäisen kolmion sivut ovat c, d ja $2a$. Kolmiot ABC ja ADM ovat yhdenmuotoiset, koska ne molemmat ovat suorakulmaisia kolmioita, joiden toinen terävä kulma on 30 astetta.

Tämän ratkaisun voisi tehdä useallakin tavalla. Oleellista on jollain keinolla hyödyntää kolmion mallia ja ison ja pienen kolmion välistä suhdetta.

Kolmio on ns. muistikolmio. Tiedetään siis, että $d = \sqrt{3}\,a$. Jos tätä tietoa ei muista, voi tämän helposti selvittää trigonometristen funktioiden kautta tai esimerkiksi piirtämällä kaksi tällaista kolmiota vierekkäin niin, että saa tasasivuisen kolmion, ja tämän jälkeen käyttämällä Pythagoraan lausetta.

Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan

$$\frac{a}{x} = \frac{d}{2a},$$

johon voidaan sijoittaa $a = \frac{1}{\sqrt{3}}d$:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}d}{x} = \frac{d}{2a} = \frac{d}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}d} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

joten

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}d,$$

joten toisen osan pituus on $\frac{1}{3}d$, eli osien välinen suhde on $1 : 2$.

Hienoinen variantti tästä ratkaisusta nojautuu trigonometrisiin funktioihin. Ensinnäkin

$$\cos 30° = \frac{a}{x}$$

ja

$$\cos 30° = \frac{d}{2a}.$$

Lisäksi

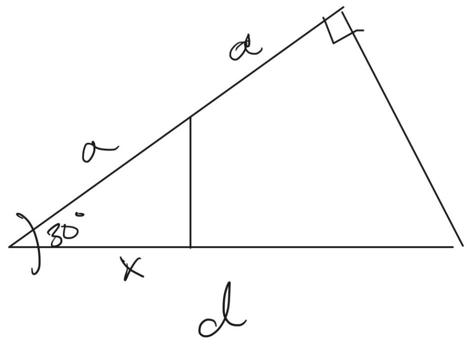
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kaksi ensimmäistä yhtälöä vastaavat kolmioiden yhdenmuotoisuuksia. Viimeinen taas muistikolmion antamia mittoja. Näiden yhtälöiden jälkeen käy ratkaisun loppuun saattaminen täsmälleen samoin kuin edellisenkin.

Nyt käsiteltyämme alkuperäisen tehtävän ratkaisuversioita voimmekin siirtyä eteenpäin erilaisiin variantteihin.

Kateetin jakaminen tasan

Alkuperäisessä tehtävänannossa jaettiin hypotenuusa tasan kahteen osaan. Mitä tapahtuukaan, jos tämä tehdään pitkälle kateetille?



Niin elegantti kuin yhteneviin kolmioihin perustuva ratkaisu onkin, ei se mene läpi ainakaan sellaisenaan tässä tilanteessa. Helpointa lienee argumentoida yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Nyt $2a = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. Lisäksi

$$\frac{x}{a} = \frac{2a}{d},$$

joten sijoittamalla pituuksien a ja d välinen suhde sekä ratkaisemalla x saadaan

$$x = \frac{2a^2}{d} = \frac{3d^2}{8d} = \frac{3}{8}d.$$

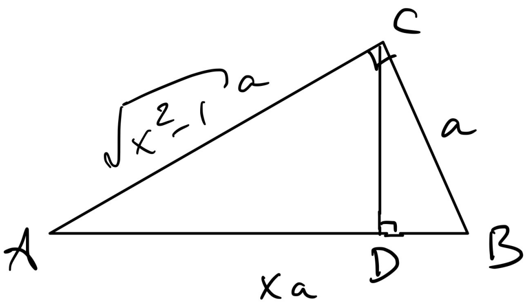
Toinen osa hypotenuusaa on siis $\frac{5}{8}d$. Osien suhde tässä tilanteessa on siis $3 : 5$.

Siirrytään nyt muunlaisiin suorakulmaisiin kolmioihin ja muihin jakosuhteisiin.

Yleistys tilanteesta

Helpointa on tarkastella yleistystä tarkastelemalla kolmiota, jonka lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan on $1 : x$. Muistikolmion tapauksessa tämä suhde on $1 : 2$. Oletetaan lisäksi, että hypotenuusa on jaettu suhteessa $y : 1$ pienemmästä kulmasta lähtien. Kolmion sivut ovat siis a, xa ja $\sqrt{x^2 - 1}\,a$.

Selvitetään ensin millainen jakosuhteen on oltava, jotta kohtisuora jakaa pitkän eikä lyhyen kateetin. Tarkastellaan siis aluksi rajatapaus, eli se, jossa jakoviiva kohtaa suoran kulman.



Kuvan notaatiolla

$$\frac{AB}{BC} = x,$$

ja yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

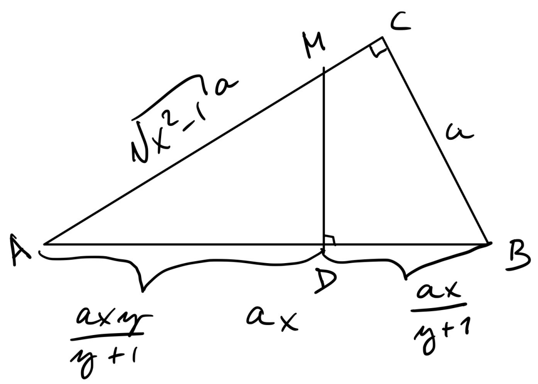
$$\frac{CB}{DB} = \frac{AB}{BC},$$

joten

$$DB = \frac{a}{x}.$$

Alkuperäisessä ylioppilaskokeen tehtävässä, eli tilanteessa, jossa $x = 2$, tämä olisi tarkoittanut sitä, että hypotenuusa olisi jaettu suhteessa $2 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, eli $3 : 1$ pidempi pätkä pienemmän kulman päähän sijoittaen.

Piirretään nyt kuva yleisestä tilanteesta:



Kuvan notaatiolla

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{x^2-1}\,a}{xa} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Siispä

$$AM = AD\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{ax^2y}{(y+1)\sqrt{x^2-1}}$$

ja

$$\begin{aligned} MC = AC - AM &= \sqrt{x^2-1}\,a - \frac{ax^2y}{(y+1)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^2a - ya - a}{(y+1)\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

Kysytty suhde on tässä tilanteessa siis

$$\frac{ax^2y}{(y+1)\sqrt{x^2-1}} : \frac{x^2a - ya - a}{(y+1)\sqrt{x^2-1}},$$

joka sievenee muotoon $x^2y : (x^2 - y - 1)$.

Loppusanat

Minun näkökulmastani tehtävän ratkaisujen lukemisen viehätys oli erilaisten ratkaisumallien näkeminen ja ratkaisutapojen soveltuvuuden pohtiminen yleistettyihin tilanteisiin. Ensimmäinen ratkaisutapa alkuperäiseen tehtävään on ehdoton oma suosikkini, mutta sitä en saanut yleistettyä. Toinen viehätys minulle tässä tehtävässä on se, että koska kaikki toimii yhdenmuotoisten kolmioiden avulla, suhdeluvut ovat varsin siistejä ja esimerkiksi luvut x^2y ja $x^2 - y - 1$ ovat kokonaislukuja, jos luvut x ja y ovat kokonaislukuja.

Aktiiviselle lukijalle jätetään muiden yleistysten tekeminen. Bonustehtävänä on luonnollisestikin sen tekeminen missä minä epäonnistuin: yrittää saada ensimmäinen ratkaisumalli toimimaan mahdollisimman yleisessä tilanteessa.