



Luonnollisten lukujen induktio-ominaisuudesta

Tuomas Korppi

Johdanto

Kuten lukija varmaan tietääkin, luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Tämä mahdollisuus on ominainen luonnollisille luvuille. Esimerkiksi rationaali- tai reaalityyppisille ei voida tehdä induktiotodistuksia¹. Luonnollisten lukujen järjestelmän aksiomatisoinnissa yleensä mahdollisuus tehdä induktiotodistuksia otetaan aksiomaksi.

Induktioaksioman avulla voidaan todistaa seuraavat luonnollisten lukujen joukon ominaisuudet

Teoreema 1. *Jos $A \subset \mathbb{N}$, niin joukossa A on pienin alkio tai A on tyhjä joukko.*

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa, ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \dots$ luonnollisia lukuja.*

Tässä kirjoittelussa ensin aksiomatisoimme luonnollisten lukujen järjestelmän ja sen jälkeen pohdimme, voitaisiinko aksiomatisoinnissa induktioaksioma korvata jommallakummalla yllä mainituista ominaisuuksista.

Linearijärjestys

Mietitään luonnollisten lukujen tai reaalityyppisten lukujen järjestysrelaatiota $<$. Jos $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös

$x < z$. Lisäksi kaikille luvuille x, y pätee täsmälleen yksi seuraavista kolmesta väitteestä: $x < y$, $y < x$ tai $x = y$.

Seuraavaksi määrittelemme yleisen järjestyksen käsitteen yllä mainittujen kahden huomion pohjalta. Määritelmämme siis kertoo, millainen mielivaltaisessa joukossa X määritellyn relaation olisi oltava, että olisimme valmiit pitämään sitä järjestyksena.

Olkoon X joukko. Sanomme, että $<$ on linearijärjestys, jos se on 2-paikkainen relaatio joukossa X , joka täyttää seuraavat ehdot:

- Jos $x, y, z \in X$, joille $x < y$ ja $y < z$, niin tällöin myös $x < z$.
- Jos $x, y \in X$, täsmälleen yksi seuraavista kolmesta ehdosta pätee: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

Esimerkiksi reaalityyppisten lukujen järjestys, rationaalityyppisten lukujen järjestys, kokonaislukujen järjestys ja luonnollisten lukujen järjestys ovat linearijärjestyksiä.

Linearijärjestyksiä voidaan kuitenkin määritellä lähes miten tahansa, kunhan yllä mainitut ehdot toteutuvat. Esimerkiksi joukkoon $\{\text{Ville}, 42, \text{Punaisuus}\}$ voidaan määritellä linearijärjestys vaikkapa niin, että $\text{Ville} < 42$, $42 < \text{Punaisuus}$ ja $\text{Ville} < \text{Punaisuus}$.

¹Rationaalityyppisen lukujen nimittäjä ja osoittaja ovat kokonaislukuja, ja näille voidaan toki tehdä induktiotodistuksia. Näin rationaalityyppisillekin voidaan todistaa asioita (luonnollisten lukujen) induktiolla, vaikkei rationaalityyppisille sellaista induktiota voidakaan tehdä, jossa induktioaskeleessa $P(q)$ johdettaisiin siitä, että $P(q')$ pätee, kun $q' < q$.

Mielivaltaista linearijärjestystä $<$ voidaan ajatella suuruusjärjestyksenä siinä mielessä, että järjestyksestä $<$ puhuttaessa käytetään usein sellaisia ilmauksia kuten ”pienin alkio”, ”suurempi kuin”, ”alkioiden x ja y välissä” jne., ja nämä tarkoitetaan ymmärrettäväksi järjestyksen $<$ suhteen.

Luonnollisten lukujen joukon aksiomatisointi

Luonnollisten lukujen joukko voidaan aksiomatoida esimerkiksi seuraavasti:

Aksiomatisointi A:

- $<$ on linearijärjestys luonnollisten lukujen joukossa.
- On olemassa pienin luonnollinen luku 0.
- Jokaiselle luonnolliselle luvulle n on olemassa välittömästi seuraava luonnollinen luku $s(n)$. Toisin sanoen, kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $n < s(n)$, eikä lukujen n ja $s(n)$ välissä ole luonnollisia lukuja.
- Jos $N \subset \mathbb{N}$, jolle $0 \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $s(n) \in N$, niin tällöin $N = \mathbb{N}$.

Viimeistä aksiomaa kutsutaan induktioaksiomaksi. Se olennaisesti sanoo, että luonnollisille luvuille voidaan tehdä induktiotodistuksia. Se sanoo, että jos N on joukko, joka sisältää kaikki induktiossa tavoitettavat luvut, niin tällöin N sisältää kaikki luonnolliset luvut.

Lukija voi helposti todeta, että luonnollisten lukujen joukko toteuttaa Aksiomatoinnin A.

Nyt herää kysymys, voisiko olla muita joukkoja kuin luonnollisten lukujen joukko, jotka toteuttavat ko. aksiomat. Jos siis X on joukko, ja $<$ relaatio X :ssä, joka toteuttaa alla olevat aksiomat

Aksiomatisointi B:

- $<$ on linearijärjestys X :ssä.
- On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
- Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
- Jos $N \subset X$, jolle $\bar{0} \in N$, ja kaikilla n ehto $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$, niin tällöin $N = X$.

niin onko X jollain perustavalla tavalla samanlainen kuin luonnollisten lukujen joukko? (Jos lukija ei jaksa kahlata kaikkia aksiomia läpi, niin kerrottakoon, että

tämä aksiomatisointi on muutoin sama kuin Aksiomatisointi A, mutta luonnollisten lukujen joukon sijaan puhutaan joukosta X .)

Huomautettakoon, että muut tavalliset lukujoukot kuin \mathbb{N} eivät kelpaa X :ksi: Kokonaislukujen joukko toteuttaa aksiomat 1 ja 3, muttei aksiomia 2 ja 4. Einegatiivisten reaalitylukujen joukko toteuttaa aksiomat 1 ja 2, muttei aksiomia 3 ja 4. Jos reaalityluvulle x yritettäisiin valita seuraaja $s(x)$, tämä ei olisi välitön seuraaja, koska esimerkiksi luku $(x + s(x))/2$ olisi x :n ja $s(x)$:n välissä. Lukujoukko $\{0, 1, \dots, 100\}$ toteuttaa aksiomat 1 ja 2, muttei aksiomaa 3, koska luvulla 100 ei ole seuraajaa tässä joukossa. Tämä joukko toteuttaa kylläkin hiukan muokatun version induktioaksiomasta, kun induktioaksiomaa muokataan niin, että se huomioi alkion $s(100)$ puutteen. (Näin ollen joukolle $\{0, 1, \dots, 100\}$ voidaan tehdä induktiotodistuksia.)

Oletetaan edelleen, että X toteuttaa Aksiomatoinnin B. Vastaus esittämäämme kysymykseen on: Kyllä, X on perustavalla tavalla samanlainen kuin \mathbb{N} , kun perustavalla tavalla samanlainen määritellään oikein. Se nimittäin määritellään niin, että \mathbb{N} ja X ovat perustavalla tavalla samanlaisia, koska on olemassa aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Funktio b määritellään induktiivisesti seuraavasti:

- $b(0) = \bar{0}$.
- Jos $b(n)$ on jo määritelty, niin $b(s(n))$ määritellään $b(s(n)) = \bar{s}(b(n))$.

Seuraavien kolmen kohdan todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi:

- $b(n)$ tulee induktiossa määritellyksi kaikille $n \in \mathbb{N}$.
- b on aidosti kasvava.
- b on bijektio.

Todistaessasi sinun kannattaa pitää mielessä, että induktiotodistuksia voidaan tehdä sekä \mathbb{N} :lle että X :lle. Lisäksi kannattaa pitää mielessä, että aidosti kasvavan funktion todistaminen injektioiksi on helppo naki. Kannattaa myös muistaa, että \mathbb{N} on ihan tavallinen luonnollisten lukujen joukko. Todistaessasi voit käyttää kaikkea mitä tiedät \mathbb{N} :sta, eikä sinun tarvitse työskennellä Aksiomatoinnista A käsin. X :stä et tosin voi olettaa tietäväsi muuta kuin sen, että se toteuttaa Aksiomatoinnin B.

Seuraava voi mennä lukijalta yli hilseen, mutta selitän kuitenkin, mitä ammattimatemaatikko päättelisi tilanteestamme: Aksiomatoinnit A ja B ovat olennaisesti sama aksiomatisointi. Vain nimet eroavat. Aksiomatoinnissa B kutsutaan X :ksi sitä, mitä Aksiomatoinnissa A kutsutaan luonnollisten lukujen joukoksi. Koska luonnollisilta luvuilta on aidosti kasvava bijektio b

mille tahansa joukolle X , joka toteuttaa Aksiomatisoinnin B , on olemassa olennaisilta piirteiltään vain yksi systeemi, luonnollisten lukujen joukko, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin A/B . Toisin sanoen, erot systeemien välillä, jotka toteuttavat nämä aksiomat ovat epäolennaisia. **Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki, mitä luonnollisten lukujen järjestyksestä voidaan todistaa millä tahansa menetelmällä, on seurausta Aksiomatisoinnin A aksiomista.**²

Huomautettakoon, että Aksiomatisoinnin A päälle rakentaen voidaan määritellä myös luonnollisten lukujen yhteen- ja kertolasku. Määritelmät ovat luonteeltaan induktiivisia, mutta siihen, kuinka se tehdään, emme tässä mene.

Induktioaksioman seurauksia

Nyt todistetaan johdannossa luvut luonnollisten lukujen systeemin ominaisuudet:

Teoreema 1. *Jos $N \subset \mathbb{N}$, niin joukossa N on pienin alkio tai N on tyhjä.*

Todistus: Olkoon $N \subset \mathbb{N}$. Oletetaan, että joukossa N ei ole pienintä alkioita. Luku 0 ei voi kuulua joukkoon N , koska jos se kuuluisi, se olisi N :n pienin alkio. Oletetaan, että luvuista $0, \dots, n$ mikään ei kuulu joukkoon N . Myöskään $s(n)$ ei voi kuulua joukkoon N , koska jos se kuuluisi, se olisi N :n pienin alkio. Siinä tulikin induktion lähtökohhta ja induktioaskel. Siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $n \notin N$. Siis N on tyhjä joukko. \square

Teoreema 2. *Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $n_0 > n_1 > n_2 > \dots$ luonnollisia lukuja.*

Todistus: Jos tällainen jono olisi olemassa, niin $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ olisi epätyhjä joukko luonnollisia lukuja, jossa ei ole pienintä alkioita. Mutta tällaista joukkoa ei edellisen teoreeman nojalla ole olemassa. \square

Vaihtoehtoisia aksiomatisointiyrityksiä

Tässä luvussa induktioaksioma yritetään korvata jommalla kummalla edellisen luvun tuloksista. Tällöin saadaan toki aksiomat, jotka luonnolliset luvut toteuttavat, mutta syntyykö muita ongelmia?

Oletetaan siis, että $X = \mathbb{N}$, ja tutkitaan seuraavia kahden aksiomatisointia.

Aksiomatisointi 1:

- $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
- On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
- Jokaiselle X :n alkioille n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
- Jos $N \subset X$, niin N :ssä on pienin alkio tai N on tyhjä joukko.

Aksiomatisointi 2:

- $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
- On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
- Jokaiselle X :n alkioille n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkiota.
- Ei ole olemassa laskevaa ääretöntä jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkiota.

(Huomautettakoon, että nämä aksiomatisoinnit ovat samat kuin Aksiomatisointi B , josta induktioaksioma on korvattu uudella aksiomalla.)

Ongelma on siinä, että kaikki joukot X , jotka toteuttavat nämä aksiomatisoinnit, eivät ole olennaisesti samanlaisia kuin \mathbb{N} .

X voidaan valita seuraavasti: X koostuu kahdesta luonnollisten lukujen joukon kopiosta³, ensimmäisestä ja jälkimmäisestä. Kaikki jälkimmäisen kopion alkiot ovat suurempia (X :ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki ensimmäisen kopion alkiot. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten luonnollisten lukujen joukon järjestys.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi todistaa, että X tosiaan toteuttaa sekä Aksiomatisoinnin 1 että Aksiomatisoinnin 2.

X ja \mathbb{N} eivät kuitenkaan ole olennaisesti samanlaisia: \mathbb{N} :ssä jokaisella alkioilla n paitsi 0 :lla on välitön edeltäjä $e(n)$, jolle $e(n) < n$, ja $e(n)$:n ja n :n välissä ei ole alkiota. X :ssä taas jälkimmäisessä kopiosta on pienin alkio p . p :llä ei ole välitöntä edeltäjää, koska kaikki p :tä pienemmät alkiot ovat ensimmäisen kopion alkiota, eikä näiden joukossa ole suurinta. Myöskään p ei ole $\bar{0}$, koska $\bar{0}$ on ensimmäisen kopion pienin alkio.

²Pidemmälle ehtineille selitän, että tarkoitan lihavoidulla lauseella seuraavaa: Olkoon $P(X)$ mikä tahansa järjestyksstruktuurien ominaisuus (eli ominaisuus, joka voi olla tai olla olematta kullakin järjestyksstruktuurilla X) siten, että $P(\mathbb{N})$ pätee, eli luonnollisten lukujen systeemillä on tämä ominaisuus. Nyt voidaan todistaa seuraava väite: *Kaikilla systeemeillä X pätee, että jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin B , niin myös $P(X)$ pätee*, eli toisin sanoen $P(X)$ on seurausta Aksiomatisoinnista B . Vastaavasti myös $P(\mathbb{N})$ on seurausta Aksiomatisoinnista A .

³Kopiot voivat olla esimerkiksi $Y' = \{0', 1', 2', \dots\}$ ja $Y'' = \{0'', 1'', 2'', \dots\}$. Idea siis on, että sekä Y' että Y'' toimivat samoin kuin luonnollisten lukujen joukko, mutta $Y' \cap Y'' = \emptyset$.

Jos olisi aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$, niin $b(n) = p$ jollain $n \neq 0$. Tällöin $b(e(n)) = q$ jollain $q < p$. Nyt kuitenkin $q:n$ ja $p:n$ välissä on alkioita, jolle mikään \mathbb{N} :n alkio ei voi kuvautua. Ristiriita.

X ei myöskään voi toteuttaa induktioaksoomaa, koska jos se toteuttaisi sen, se toteuttaisi koko aksiomatisoinnin B, ja aidosti kasvava bijektio b olisi olemassa. Näin ollen induktioaksooma ei seuraa aksiomatisoinnista 1 tai aksiomatisoinnista 2.

Ohimennen mainittakoon, että Aksiomatisoinnin 1 toteuttavia systeemejä kutsutaan ordinaaleiksi. Joukkooppia ammatikseen tutkivat matemaatikot ovat paljon tekemisissä ordinaalien kanssa. Ordinaaleille voidaan tehdä eräänlaisia, luonnollisten lukujen induktiota monimutkaisempia induktiotodistuksia. Tätä tekniikkaa kutsutaan transfiniittiseksi induktioksi, mutta yksityiskohtiin emme tässä mene.

Vielä yksi aksiomatisointiyritys

Edellisissä aksiomatisoinneissa jouduttiin ongelmiin, koska aksioomilla oli malli X , jossa oli alkio, jolla ei ollut välitöntä edeltäjää. Entä jos välittömän edeltäjän olemassaolo otettaisiin aksioomaksi induktioaksooman sijaan?

Aksiomatisointi 3:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n):n$ ja $n:n$ välissä ole X :n alkioita.

(Edelleen sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksooma on korvattu uudella aksioomalla.)

Luonnollisten lukujen systeemi toteuttaa nämä aksioomat, OK! Mutta nyt X voidaan valita myös seuraavasti: X koostuu luonnollisten lukujen joukon kopiosta, jonka perässä on kokonaislukujen joukon kopio. Kaikki kokonaislukujen joukon kopion alkioita ovat suurempia (X :ään määriteltävän järjestyksen mielessä) kuin kaikki luonnollisten lukujen joukon kopion alkioita. Kopioiden sisällä järjestys määritellään kuten kyseisissä lukujoukoissa.

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että X tosiaan toteuttaa Aksiomatisoinnin 3.

X on olennaisesti erilainen kuin \mathbb{N} , koska X :ssä on osajoukko A , jossa ei ole pienintä alkioita. A :ksi voidaan valita yksinkertaisesti se kokonaislukujen joukon kopio.

Myöskään ei ole olemassa aidosti kasvavaa bijektioita $b: \mathbb{N} \rightarrow X$, koska jos tällainen bijektio olisi olemassa, joukon A alkukuva olisi \mathbb{N} :n epätyhjä osajoukko, jossa ei ole pienintä alkioita.

Samasta syystä kuin edellisessä luvussa, X ei toteuta induktioaksoomaa, eikä näin ollen induktioaksooma seuraa aksiomatisoinnista 3.

Toimiva ratkaisu

Aksiomatisointi 3 ei takaa, että kaikilla osajoukoilla on pienin alkio, eikä Aksiomatisointi 1 takaa, että jokaisella nollasta eroavalla alkiolla on edeltäjä. Mutta entä, jos näiden molempien uudet aksioomat otettaisiin aksioomiksi? Tällöin saadaan toimiva ratkaisu.

Aksiomatisointi 4:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.
2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkiolle n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkiolla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkiolla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n):n$ ja $n:n$ välissä ole X :n alkioita.
5. Jos $N \subset X$, niin joko N on tyhjä tai N :ssä on pienin alkio.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksooma on korvattu kahdella uudella aksioomalla.)

Teoreema 3. *Jos X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4, niin tällöin X toteuttaa myös induktioaksooman (Aksiomatisoinnin B viimeinen aksiooma.)*

Todistus: Oletetaan, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4. Olkoon $N \subset X$ sellainen, että $\bar{0} \in N$, ja $n \in N$ implikoi $\bar{s}(n) \in N$. Tehdään vasta oletus $N \neq X$. Siis $X \setminus N$ on epätyhjä, ja siinä on pienin alkio n . Nyt $n \neq \bar{0}$, joten on olemassa alkio $\bar{e}(n)$. Mutta koska $\bar{e}(n) < n$, pätee $\bar{e}(n) \in N$. Siis oletuksen nojalla $n = \bar{s}(\bar{e}(n)) \in N$. Ristiriita. \square

Nyt siis jokainen Aksiomatisoinnin 4 toteuttava systeemi toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B, ja on olennaisesti samanlainen luonnollisten lukujen systeemin kanssa.

Tutkitaan vielä seuraavaa aksiomatisointia:

Aksiomatisointi 5:

1. $<$ on lineaarijärjestys X :ssä.

2. On olemassa pienin X :n alkio $\bar{0}$.
3. Jokaiselle X :n alkioille n on olemassa välittömästi seuraava X :n alkio $\bar{s}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla X :n alkioilla n pätee $n < \bar{s}(n)$, eikä alkioiden n ja $\bar{s}(n)$ välissä ole X :n alkioita.
4. Jokaisella $\bar{0}$:sta eroavalla X :n alkioilla n on välitön edeltäjä $\bar{e}(n)$. Toisin sanoen, kaikilla $n \in X, n \neq \bar{0}$, pätee $\bar{e}(n) < n$, eikä $\bar{e}(n)$:n ja n :n välissä ole X :n alkioita.
5. Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.

(Sama kuin Aksiomatisointi B, josta induktioaksioma on korvattu kahdella uudella aksiomalla.)

Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että jos X toteuttaa tämän aksiomatisoinnin, se toteuttaa myös Aksiomatisoinnin B. Helpointa lienee todistaa väliaiheena, että X toteuttaa Aksiomatisoinnin 4.

Aksiomatisointi 5 tietysti sopii huonosti luonnollisten lukujen aksiomatisoinniksi, koska viimeisessä aksiomassa luonnolliset luvut oletetaan jo valmiiksi tunnetuiksi; indeksien on tosiaan tarkoitus viitata oikeisiin luonnollisiin lukuihin, ei joukon X alkioihin. Tässä ongelmasta huolimatta on kuitenkin mielenkiintoista tutkia, ovatko nämä aksiomat yhtäpitäviä Aksiomatisoinnin B kanssa.

Loppusanat

Kun pistämme kirjoitelman tulokset yhteen, saamme tuloksen, että Teoreemojen 1 ja 2 väitteet ovat kumpikin yhtäpitäviä luonnollisten lukujen induktioaksioman kanssa.

Luonnolliset luvut toteuttavat Teoreemojen 1 ja 2 väitteet, ja luvussa 3 konstruoitu aidosti kasvava bijektio takaa, että kaikki luonnollisten lukujen järjestysominaisuudet seuraavat Aksiomatisoinnista A, ja näin olen myös Aksiomatisoinnista B, joten Aksiomatisointi B (tai aidosti kasvavan bijektio b olemassaolo) implikoi Aksiomatisointien 4 ja 5 väitteet. Sekä Aksiomatisointi 4 että Aksiomatisointi 5 puolestaan implikoi Aksiomatisoinnin B väitteet edellisen luvun tulosten nojalla.

Yllä oleva voidaan kiteyttää seuraavasti:

Teoreema 4. *Olkkoon X systeemi, joka toteuttaa Aksiomatisoinnin 3. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

- X toteuttaa induktioaksioman.
- Kaikissa X :n epätyhjiissä osajoukoissa on pienin alkio.
- Ei ole olemassa ääretöntä laskevaa jonoa $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ joukon X alkioita.
- On olemassa aidosti kasvava bijektio $b: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Aksiomat harvoin ovat yhtäpitäviä tyhjiössä, vaan ne ovat yhtäpitäviä joidenkin muiden aksiomien vallitessa. Tässä tapauksessa induktioaksioman ja Teoreemojen 1 ja 2 väitteiden yhtäpitävyyden kannalta ratkaisevaksi osoittautui aksioma, joka sanoo välittömien edeltäjien olemassaolon.

Jos kiinnostuit tässä kirjoituksessa esitetyistä päättelytekniikoista, sinun kannattaa lähteä yliopistoon lukemaan matematiikkaa ja erikoistua logiikkaan. Logiikassa on osa-alue, malliteoria, jossa tutkitaan sitä, millaisia aksiomat toteuttavia systemeejä voidaan millekin aksiomajoukolle muodostaa.