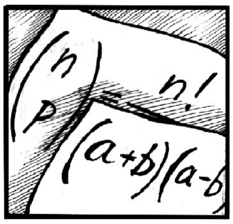

Baselin ongelma

Markku Halmetoja

Kirjoitukseni [1] johdannossa totesin, että Leonhard Euler (1707–1783) päätyi yhtälöön

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \tag{1}$$

tavalla, joka ei vastaa nykyaikaisen matemaattisen analyysin tarkkuusvaatimuksia. Mainittu kirjoitus koski peruskoulun matematiikkaa ja tarkoitukseni oli suureen auktoriteettiin vedoten osoittaa, että myös epätäydellisellä päättelyllä saattaa olla arvonsa.

Koulumatematiikassakin asiat tulisi selittää eikä antaa valmiita laskukaavoja ulkoa opeteltaviksi. Esimerkiksi lukion differentiaali- ja integraalilaskennassa (vanhemmissa oppikirjoissa) annetut perustelut sisälsivät usein täsmällisten todistusten ideat vaikka niitä ei puutteellisen lukukäsityksen takia voitu viedä loppuun. Opetussuunnitelmia ja oppimateriaaleja valmisteltaessa olisikin muistettava, että kussakin ikäluokassa on mukana myös matemaattisesti keskimääräistä lahjakkaampia oppilaita, jotka turhautuvat kaavojen ulkolukuun.

Tässä kirjoituksessa kerrotaan, miten Euler johti yhtälön (1), ja esitetään sille toinenkin todistus. Sarjan

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

laskeminen oli hänen aikanaan jo liki sata vuotta vanha ongelma. Ensimmäisinä sitä lienevät miettineet ranskalainen René Descartes (1596–1650) ja italialainen Pietro Mengoli (1626–1686) sekä myöhemmin saksalainen Gottfried Leibniz (1646–1716) ja sveitsiläinen Jakob Bernoulli (1655–1705). Sarjan suppeneminen oli kaikille selvää. Esimerkiksi Bernoulli todisti sen seuraavasti: Jos $k \geq 1$, niin $k^2 \geq k$, $2k^2 \geq k(k+1)$, ja edelleen

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}.$$

Tästä seuraa, että kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\Big) = 2 - \frac{2}{m+1},$$

joten osasumma $S_m \leq 2$. Jono (S_m) on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu, mistä seuraa että se suppenee.

Mainituista matemaatikoista Jakob Bernoulli käytti eniten aikaa sarjan määrittämiseen siinä kuitenkaan onnistumatta. Lopulta hän luovutti ja kirjasi ongelmasta matemaattiselle yhteisölle suunnatun avunpyynnön erääseen teokseensa. Summan tarkan arvon määrittäminen nimettiin hänen kotipaikkansa mukaan *Baselin ongelmaksi.*

Euler tarttui kysymykseen hieman yli 20-vuotiaana ja vuonna 1731 hän onnistui johtamaan sarjalle vaihtoehtoisen esityksen

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \big(\ln 2\big)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}} = \Sigma.$$

Se ei tuonut ratkaisua lähemmäksi, mutta tarjosi mukavamman tavan likiarvon määrittämiseen, sillä tämä sarja suppenee oleellisesti nopeammin kuin alkuperäinen: osasummassa S_{1000} vain kaksi ensimmäistä desimaalia on oikein mutta osasummassa Σ_{14} niitä on kuusi.

Varsinaisen ongelman ratkaisemiseen Euler tarvitsi eräitä polynomien perusominaisuuksia. Olkoon

$$q(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n$$

polynomi, jolla on n kappaletta nollakohtia; olkoot ne a_1, a_2, …, a_n. Ne ovat nollasta eroavia, sillä $q(0) = 1$. Nollakohtiensa avulla q voidaan kirjoittaa tulomuotoon:

$$q(x) = \Big(1 - \frac{x}{a_1}\Big)\Big(1 - \frac{x}{a_2}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{x}{a_n}\Big).$$

Myös sinifunktio oli tarpeen. Ehkä matematiikkaa harrastava lukiolainen tuntee sen sarjakehitelmän

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x\Big(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\Big) = x\,p(x),\end{aligned}$$

mutta jos se ei ole tuttu, niin asiaan voi perehtyä lukemalla Pekka Alestalon artikkelin [3]. Sinifunktion nollakohdat ovat 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, … , joten funktion

$$p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

nollakohdat ovat arvoa $x = 0$ lukuun ottamatta samat. Lisäksi p muistuttaa edellä nähtyä q-polynomia ($p(0) = 1$), joten Euler tulkitsi sen ∞-asteiseksi polynomiksi. Nollakohtiensa avulla se siis voidaan kirjoittaa tuloksi

$$\begin{aligned}p(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \\ &= \Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 - \frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{2\pi}\Big) \ldots \\ &= \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\Big) \ldots,\end{aligned}$$

mistä sulut auki kertomalla seuraa

$$p(x) = 1 - \Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \ldots\Big)x^2 + \Big(\ldots\Big)x^4 - \ldots$$

Vertaamalla p:n lausekkeissa x:n neliön kertoimia saadaan

$$-\frac{1}{3!} = -\Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \frac{1}{4^2\pi^2} + \ldots\Big),$$

ja lopuksi

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eulerin ratkaisu oli sensaatio ja se sinetöi hänen maineensa 1700-luvun johtavana matemaatikkona. Erityisesti π:n esiintyminen tuloksessa hämmästytti, vaikka muutamia siihen liittyviä päättymättömiä summia ja tuloja oli jo löydetty. Jacob Bernoulli ei Eulerin saavutusta ehtinyt näkemään. Hänen nuoremman veljensä Johann Bernoullin (1667–1748) kerrotaan todenneen Eulerin ratkaisun luettuaan: ”Olisipa veljeni elossa”.

Todistusta pidettiin sen syntyhetkellä moitteettomana, mutta nykyisen käsityksen mukaan siinä on ongelmana tuo ∞-asteinen polynomi. Polynomin astehan on aina äärellinen eikä ole itsestään selvää, että päättymätön potenssisarja voidaan muuntaa nollakohtiensa avulla tulomuotoon. Likiarvon laskeminen kuitenkin vahvisti uskoa tuloksen oikeellisuuteen sekä se, että tuloesityksestä

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{\pi}\Big)\Big(1 - \frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1 + \frac{x}{2\pi}\Big) \ldots$$

x:n arvolla $\frac{\pi}{2}$ seurasi jo 1600-luvulla tunnettu *Wallisin kaava*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2k}\Big).$$

John Wallis (1616–1703) julkaisi sen vuonna 1656.

Myöhemmin Euler esitti analyyttisesti vahvempia ratkaisuja Baselin ongelmalle. Kun tulos tiedettiin, oli helpompaa määrätietoisesti pyrkiä sitä kohti. Nykyään tunnetaan lukuisia tapoja johtaa tämä yhtälö. Esimerkiksi teoksessa [4] se tehdään kolmella eri tavalla. Niistä yksi perustuu pääosin sellaiseen matematiikkaan, jota on joskus opiskeltu lukion pitkässä matematiikassa. Käymme läpi tämän todistuksen, mutta aloitamme pienellä kertauksella, sillä se edellyttää nykyiseen ja mitä ilmeisimmin myös tulevaan opetussuunnitelmaan kuulumatonta oppiainesta.

Tulemme tarvitsemaan kompleksilukuja. Niitä on ajoittain käsitelty lukion oppimäärässä. Perustiedot löytyvät kätevimmin Matti Lehtisen artikkelista [5]. Aktiivinen lukija voi sen luettuaan todistaa induktiolla *de Moivren* kaavan: Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx. \tag{2}$$

Abraham de Moivre (1667–1754) julkaisi sen vuonna 1722. Kotangenttifunktiota tarvitsemme myös. Sen määritelmä on seuraava:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Eräiden maiden kouluissa opetellaan näiden neljän funktion lisäksi vielä kaksi muutakin trigonometrista funktiota, mutta emme tarvitse niitä tässä. Tulevassa todistuksessa riittää yhtälö

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x. \tag{3}$$

Polynomiyhtälöiden käsittely on lukiossa supistunut lähes pelkästään toisen asteen yhtälöä koskevaksi. Toivottavasti jatkossakin sen juurien ja kertoimien väliset yhtälöt pysyvät opetuksessa, sillä niistä saa aikaan viihdyttäviä tehtäviä. Korkeamman asteen polynomiyhtälöillä on myös juurien ja kertoimien väliset yhtälöt, mutta ne ovat hieman monimutkaisempia. Tarvitsemme niistä vain yhden. Olkoon siis $c_n \neq 0$ ja yhtälön

$$c(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

juuret a_1, a_2, ..., a_{n-1} ja a_n. Niiden avulla c voidaan kirjoittaa tuloksi

$$c(x) = c_n(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Kun sulut kerrotaan auki, saadaan

$$c(x) = c_n x^n - c_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x^{n-1} + \ldots \ ,$$

mistä kertoimia vertaamalla nähdään, että

$$c_{n-1} = -c_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

ja edelleen

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Ratkaisemme nyt Baselin ongelman johtamalla sarjan (1) osasummalle S_m alarajan α_m ja ylärajan β_m siten, että

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty} \beta_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

Koska kaksoisepäyhtälö $\alpha_m \le S_m \le \beta_m$ pätee kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, seuraa tästä, että myös osasummalla S_m on sama raja-arvo. Aloitetaan määrittämällä lausekkeen $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$ imaginaariosa. Yhtälön (2) mukaan se on $\sin nx$, mutta se saadaan myös kehittämällä potenssilauseke binomikaavan mukaan. Koska lukija (ainakin artikkelin [5] luettuaan) hallitsee imaginaariyksikön potenssit, voimme kirjoittaa sen ilman välivaiheita ja saamme yhtälön

$$\sin nx = \binom{n}{1}\sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x \cos^{n-3} x + \ldots$$

Valitaan nyt n parittomaksi, eli $n = 2m + 1$, missä $m \in \mathrm{Z}_+$, ja olkoon

$$x = x_r = \frac{r\pi}{2m+1}, \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Koska $\sin nx = \sin r\pi = 0$, tulee yllä oleva yhtälö muotoon

$$\binom{n}{1}\sin x_r \cos^{n-1} x_r - \binom{n}{3}\sin^3 x_r \cos^{n-3} x_r + \ldots = 0.$$

Tämän yhtälön voi jakaa luvulla $\sin^n x_r$, sillä se on positiivinen; $x_r \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$. Näin saamme yhtälön

$$\binom{n}{1}\cot^{n-1} x_r - \binom{n}{3}\cot^{n-3} x_r + \ldots = 0,$$

ja edelleen sijoittamalla $n = 2m + 1$,

$$\binom{2m+1}{1}\cot^{2m} x_r - \binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2} x_r + \ldots = 0.$$

Täten m-asteisella polynomiyhtälöllä

$$\binom{2m+1}{1}t^m - \binom{2m+1}{3}t^{m-1} + \ldots = 0$$

on m kappaletta keskenään erisuuria juuria

$$a_r = \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right), \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Korkeimpien potenssien kertoimet tunnetaan, joten

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Siis

$$\sum_{r=1}^{m} \cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Lisäämällä m tämän yhtälön molemmille puolille saadaan yhtälön (3) avulla

$$\sum_{r=1}^{m} \sin^{-2}\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}.$$

Nyt todistus voi jatkua voimassa olevan opetussuunnitelman tiedoin. Tiedämme, että $x_r \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$, joten

$$(0 <) \sin x_r \le x_r \le \tan x_r.$$

Käänteisluvut ovat vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä, eli

$$(0 <) \cot x_r \le \frac{1}{x_r} \le \sin^{-1} x_r,$$

ja niiden neliöt ovat samassa järjestyksessä:

$$(0 <) \cot^2 x_r \le \frac{1}{x_r^2} \le \sin^{-2} x_r. \tag{4}$$

Summaamalla (4) 1:stä r:ään saamme

$$\frac{2m(2m-1)}{6} \le \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{2m+1}{r\pi}\right)^2 \le \frac{2m(2m+2)}{6},$$

mistä seuraa

$$\frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6} \le \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r^2} \le \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6}.$$

Etsityt ala- ja yläraja ovat siis

$$\alpha_m = \frac{2m(2m-1)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6} \quad \text{ja} \quad \beta_m = \frac{2m(2m+2)}{(2m+1)^2}\frac{\pi^2}{6}.$$

Selvästi

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty} \beta_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler ei tyytynyt ainoastaan Baselin ongelman ratkaisemiseen, vaan hän laski myös summat

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{5}$$

s:n arvoilla 4, 6 ja jopa 24. Osoittautui, että

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{ja} \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

Oudolta näyttävälle ζ-merkinnälle löytyy selitys matematiikan historiasta. Sitä kutsutaan *Riemannin zetafunktioksi* Bernhard Riemannin (1826–1866) mukaan. Se on koko kompleksitasossa pistettä $s = 1$ lukuun ottamatta määritelty kaikkien kertalukujen derivaatat omaava funktio, joka määritellään sarjana (5) ainoastaan puolitasossa $\mathrm{Re}(s) > 1$. Muualla sen määritelmä on monimutkaisempi. Riemann osoitti, että funktiolla on mielenkiintoinen yhteys alkulukujen jakautumiseen kokonaislukujen joukossa. Se liittyy toistaiseksi todistamattomaan *Riemannin hypoteesiin*, jonka mukaan ζ-funktion ns. epätriviaalit nollakohdat sijaitsevat suoralla $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Hypoteesin todistamisesta on eräs amerikkalainen säätiö luvannut miljoonan dollarin palkkion. Funktiolla on myös suhteellisen helposti löytyviä nollakohtia negatiivisella reaaliakselilla.

Euler siis tutki ζ-funktion rajoittumaa joukolle $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Funktio ei ole määritelty pisteessä $s = 1$, sillä tällöin sarja (5) hajaantuu, ks. Pekka Alestalon Solmu-artikkeli [6]. Ilmeisesti $\zeta(s)$ pystytään määrittämään, kun s on parillinen kokonaisluku. Sen sijaan parittomilla s:n arvoilla funktion arvoista ei tiedetä vieläkään juuri mitään, vaikka Eulerkin yritti ilmeisen tosissaan laskea lukua $\zeta(3)$. Vuonna 1978 onnistuttiin todistamaan, että se on irrationaalinen. Luultavasti tarkoilla arvoilla ei ole kovin suurta merkitystä. Ehkä $\zeta(3)$ joskus putkahtaa yllättävästi esiin jonkin tärkeämmän tuloksen yhteydessä. Joka tapauksessa ratkaisija tulee liittymään Bernoullista ja Eulerista alkavaan ketjuun ja saa nimensä matematiikan historiaan.

Kirjoittaja ei lopuksi malta olla muistelematta Finlandiatalossa järjestettyä Koulumatematiikka-85 tapahtumaa. Sen päättäneessä paneelissa käsiteltiin peruskoulun matematiikan opetusta. Tuolloin oltiin poistamassa matematiikan tasokursseja yläkoulusta ja myöhentämässä perusalgebran oppimista toiselle asteelle. Näitä ratkaisuja perustellakseen silloisen Kouluhallituksen matematiikan ylitarkastaja tivasi läsnäolijoilta, että mihin polynomeja oikeastaan tarvitaan. Tässä kirjoituksessa nähty olisi käynyt vastaukseksi ylitarkastajalle. Toivottavasti kirjoitus myös rohkaisee nykyisiä opetussuunnitelmien laatijoita säilyttämään polynomien ominaisuudet lukion matematiikassa sekä palauttamaan kompleksilukujen perusominaisuudet oppimäärään pysyvästi. On jokseenkin noloa, että maassa, jonka matemaattinen maine maailmalla perustuu pääosin kompleksianalyysin tutkimukseen, ylioppilaiksi valmistuvat eivät edes tiedä, mikä on kompleksiluku.

Ilman viitettä annetut historialliset tiedot ovat peräisin teoksesta [2].

Viitteet

[1] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/tyhjaa_parempia_perusteluja.pdf`

[2] William Dunham: *Euler The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, 1999.

[3] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/1/alestalo.pdf`

[4] M.Aigner, G.M.Ziegler: Proofs from THE BOOK, Third Edition, Springer 2004.

[5] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/lehtinen.pdf`

[6] `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/harmsarja.pdf`