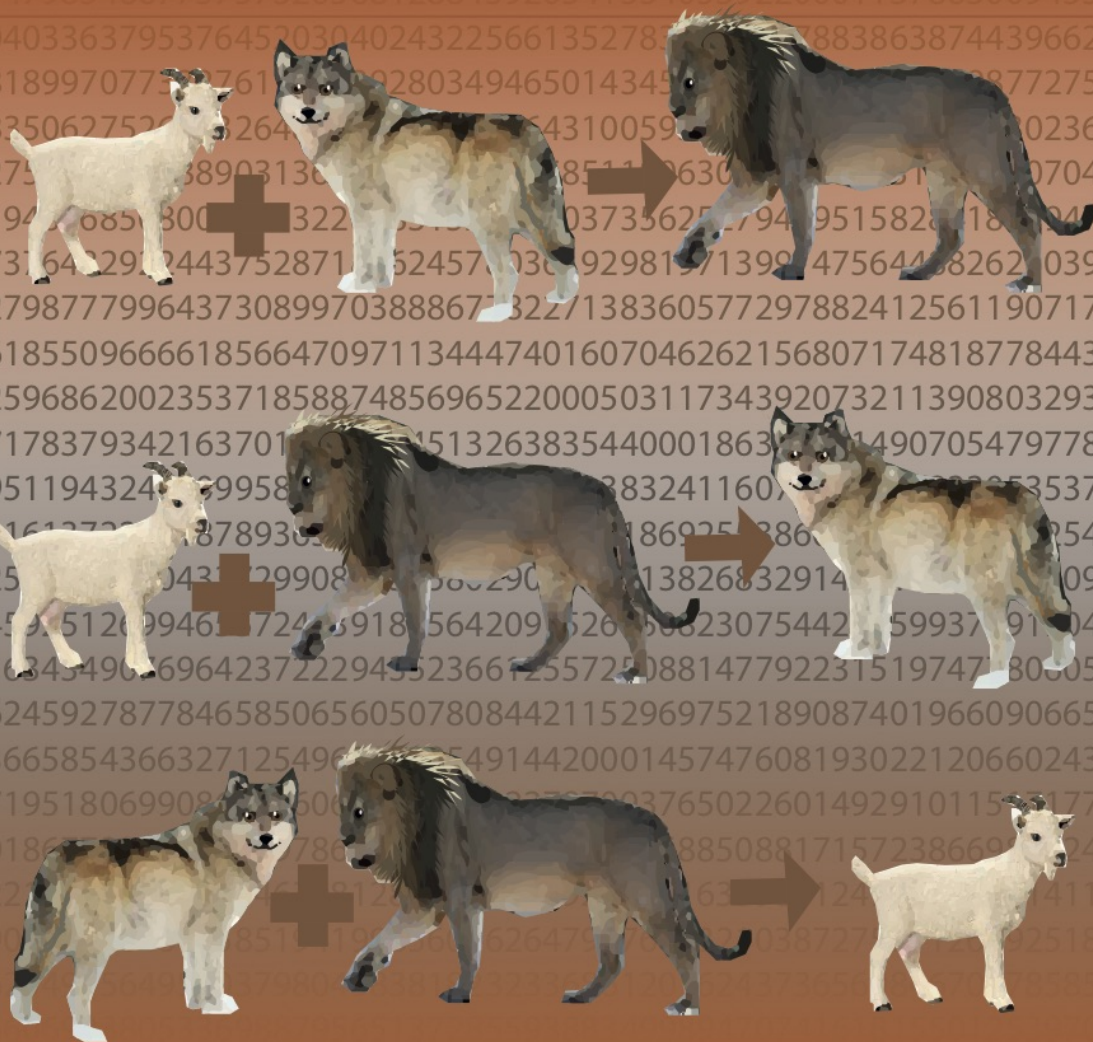


S&LMU

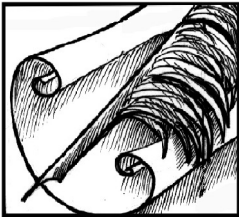
MATEMATIIKKALEHTI 3/18

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Naisista yliopistoissa (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Tason väriykestä – Hadwigerin-Nelsonin ongelma (Neea Palojärvi)	5
Miten vaikeita tehtäviä ratkotaan? (Ville Tilvis)	9
Transkendenttiluvut ja Hermiten lause (Esa V. Vesalainen)	12
Eksponenttifunktio (Pekka Alestalo)	23
Bijektio kilpailijoiden ja tehtävien välillä: IMO 2018 (Otte Heinävaara, Joonatan Honkamaa, Hermann Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järvinen, Neea Palojarvi, Nerissa Shakespeare ja Selim Virtanen)	28



Naisista yliopistoissa

Pääkirjoitus

Naisten vähyydestä akateemisissa ammateissa puhutaan jälleen yhden fysiikan Nobeleistä mentyä pitkästä aikaa naiselle. Oikeastaan kyseessä on ikuinen puheenaihe, joka ei koskaan mene pois muodista, ja hyvä niin. Kyseessä on todellinen ongelma. Se on kuitenkin tiedostettu ja asiat näyttäisivät olevan menossa parempaan suuntaan, mutta työtä on vielä paljon jäljellä.

Aihe on monitahoinen. Rakenteelliset ongelmat. Seksuaalinen häirintä. Naisten vähyyden oikeuttaminen evoluutioteorialla. Täysin epäasialliset sukupuolisidonnaiset kommentit, joita todennäköisesti jokainen nainen on joskus saanut. Tämän tekstin puitteissa en voi enkä edes yritä käsitellä kaikkia näkökulmia. Niistä on moni muu kirjoittanut jo paljon terävämmiin kuin minä ikinä kykenisin. Haluan siis keskittyä vain yhteen pienen näkökulmaan, eli muiden naisten suhtautumiseen ja siihen, mitä me naiset voimme tehdä itse.

Aikoinaan minut esiteltiin eräälle pitkän akateemisen uran tehneelle kunnianarvoisalle naiselle matematiikan olympiavalmennuksen aktiivina. Sitä olinkin, ja olin silloinkin pitämässä olympiavalmennuksesta esitelmän samassa tapahtumassa. Hänen kommenttinsa kuitenkin oli vain hieman halveksuvalla äänellä todettu ”onhan se hyvä kun tytöilläkin on esikuvia”. Vaikka minusta olisi mukavaa olla esikuva, ei luokittelu vain esikuvaksi ole mielekästä. Olen kuitenkin mukana aktiivisena toimijana enkä vain esimerkkinä, että tytötkin voivat kilpailla. En tiedä, miten monta kertaa olen joutunut selittämään muille naisille sitä, miten matematiikka on myös naisille sopiva laji.

Ennen lasten hankkimista kuulin muilta naisilta varoitelua, miten lasten kanssa ei sitten voi tehdä yhtään mitään. Melkein uskoin. Onneksi olin nähnyt riittävästi vastaesimerkkejä. Lasten kanssa voi tehdä paljonkin, kuten vaikkapa opiskella pedagogiikkaa parin kuukauden ikäinen tyyppi sylissä mukana. Myös yliopistojen hallinnossa työskentelevien naisten ohjeet kuulostivat hieman siltä kuin he olettaisivat minun häviävän totaalisesti pitkäksi aikaa. Tämän asenteen ongelmallisuus on siinä, että mikäli naiset pitävät pitkät vanhempainvapaat miesten tehdessä töitä, niin havaintojen mukaan myös sairastavien lasten kanssa kotiin jäävät naiset. Tämä heikentää naisten palkattavuutta, varsinkin pienyrityksissä.

Ei kovin kauan aikaa sitten kuulin sattumalta erään naisen lopettaneen jatko-opinnot matematiikassa, koska kuulemma parisuhteen molemmat osapuolet eivät yhtä aikaa voi olla jatko-opiskelijoita. En tiedä, mihin tämä ajatus perustuu, enkä varsinkaan tiedä, miksi naisen pitää silloin uhrautua. Tällä kyseisellä yksilöllä olisi todellakin ollut potentiaalia. Fysiikan nobelisti Donna Stricklandkin mainitsi naisten tyypillisesti uhrautuvan ns. *two body problem*in edessä: kun optimitilanteessa kahden pitäisi onnistua sijoittumaan samaan yliopistoon, mutta kahta sopivaa työpaikkaa samalla yliopistolla ei vain ole.

Koko merkillinen sukupuolijakauma ei tietenkään ole vain naisten aiheuttama vaan perustuu pitkälti vanhoihin rakenteisiin ja asenteisiin ja muihin hitaasti murtuviin jäänteisiin. En kuitenkaan usko, että naiset itse ovat toimineet parhaalla mahdollisella tavalla asian

korjaamiseksi. Kaikki luettelemani esimerkit ovat tosi pieniä asioita, mutta yhteisvaikutus on huomattava. Lisäksi ainakin minua itseäni ovat toisten naisten kommentit häirinneet selvästi enemmän kuin miehiltä tulleet sovinistiset tai idioottimaiset kommentit, sillä toisten naisten kuitenkin olettaisin ymmärtävän tilanteen paremmin. Suurin osa varmasti ymmärtääkin, mutta

pahaan saumaan tullut huolimaton kommentti voi olla musertava.

Valitaan sanamme huolellisesti, ei pelotella nuorempia ja kokemattomampia, ja ennen kaikkea, kannustetaan toisiamme.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyyntö voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen@yahoopiste.com

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

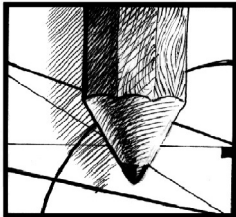
K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät



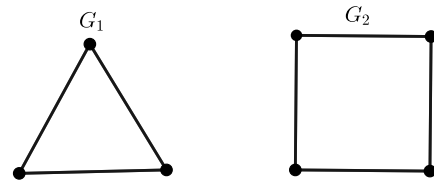
Tason väriyksestä – Hadwigerin-Nelsonin ongelma

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa tarkastellaan tason väriytystä. Kysymys on, mikä on pienin määrä värejä, joka tarvitaan tason värittämiseen, kun halutaan ettei mitään kahta pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, väritetä samalla värillä. Tunnettujen tulosten mukaan tällainen väritys on mahdollista saada aikaan seitsemää väriä käyttäen (ks. [2, 4]). Siispä Hadwigerin-Nelsonin ongelman oikea vastaus on korkeintaan seitsemän. Toisaalta tiedetään (ks. [1]), että halutun väriyksen tekemiseen tarvitaan vähintään viisi väriä. Avoimena kysymyksenä on, onko viisi, kuusi vai seitsemän oikea vastaus Hadwigerin-Nelsonin ongelmaan. Tässä kirjoituksessa tarkastellaan värien määrän alarajaan liittyviä tuloksia ja osoitetaan, että ongelman pystyy ratkaisemaan seitsemällä värillä.

Ongelman muotoilu graafiteorian avulla

Hadwigerin-Nelsonin ongelma voidaan muotoilla myös graafiteorian avulla. Tarkastellaan väritettävää tasoa äärettömänä graafina, jossa solmuina ovat tason pisteet ja kahden solmun välillä on kaari täsmälleen silloin, kun ne ovat tasossa täsmälleen etäisyydellä 1 toisistaan. Nimetään tämä graafiksi G . Nyt kysymys kuuluu, mikä on pienin määrä värejä, jotka voidaan liittää graafin G solmuihin niin, etteivät mitkään kaksi vierekkäistä solmua ole samanväriset. Tätä värien lukumäärää kutsutaan graafin *väriluvuksi*. Esimerkiksi kuvan 1 graafin G_1 väriuku on kolme ja graafin G_2 kaksi.



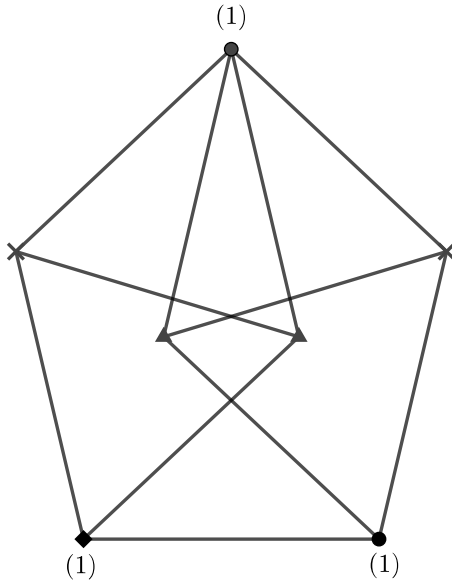
Kuva 1: Graafin G_1 väriuku on kolme ja graafin G_2 väriuku on kaksi.

Tarvittavan värien määrän alarajasta

Tarkastellaan ensin, kuinka monta väriä ainakin tarvitaan, jotta taso voidaan värittää Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa vaaditulla tavalla. Hyödynnetään tähän edellisessä luvussa kerrottua tulkintaa ongelmosta graafiteorian avulla ja erityisesti siinä määriteltä graafia G . Jos pystytään löytämään graafin G aligraafi, jonka väriuku on n , niin luonnollisesti myös koko graafin G väriuku on ainakin n . Tavoitteena on siis tutkia graafin G aligraafien väriukuja.

Leo ja William Moserin [3] todistusten mukaan havaitaan, että graafin G väriuvun on oltava ainakin neljä. Todistus perustuu Moserin graafin hyödyntämiseen. Moserin graafi on kuvassa 2 oleva graafi, joka koostuu seitsemästä solmusta ja niistä yhdistävästä 11 kaaresta. Jokaisen kaaren pituus on 1 ja täten se on graafin G aligraafi. Kuten kuvasta 2 näkyy, Moserin graafin pystyy värittämään neljällä värillä niin, etteivät

mitkään kaksi vierekkäistä solmua ole samanväriset. Eri värit on kuvattu kuvassa solmujen eri muotoina. Toisaalta Moserin graafin värittämiseen tarvitaan aina-kin neljä väriä. Nimittäin, jos graafin yrittäisi värittää käyttämällä enintään kolmea väriä, niin tutkimalla tassaivuisia kolmioita huomataan, että kuvassa luvulla 1 merkittyjen solmujen pitäisi olla samanvärisiä. Mutta tämä on mahdotonta, sillä kahden alimman solmun välillä on kaari. Täten Moserin graafin väriluku on neljä. Moserin graafin avulla saadaan siis graafin G väriluvuksi vähintään neljä.



Kuva 2: Moserin graafin väriluku on neljä.

Kuten jo alussa todettiin, alaraja neljä ei kuitenkaan ole paras tunnettu tulos värien määrälle. Tämän vuoden huhtikuussa brittiläinen harrastelijamatemaatikko Aubrey de Grey osoitti [1], että graafilla G on 1581-solmuinen aligraafi, jonka väriluku on viisi. Täten siis graafin G väriluku on vähintään viisi. Kun kerran on olemassa jokin arvio tarvittavien värien määrän alarajalle, olisi myös kiinnostava tietää, mitä tarvittavien värien ylärajasta tiedetään.

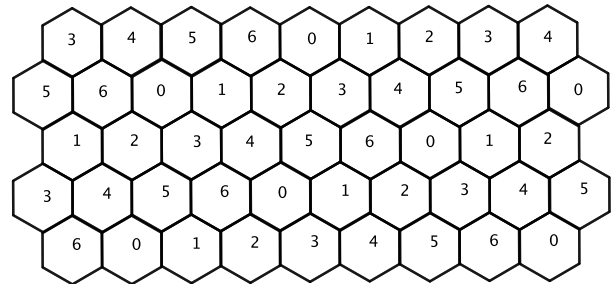
Värejä tarvitaan korkeintaan seitsemän

Tämän luvun päämääränä on osoittaa, että taso voidaan värittää seitsemällä värillä niin, että mitkään kaksi etäisyydellä 1 toisistaan olevaa pistettä eivät ole samanvärisiä. Tämä tehdään kahdessa osassa. Ensin taso väritetään sopivasti seitsemällä värillä ja sitten todistetaan, että tämä väritys toteuttaa halutut ehdot. Todistus perustuu John Isbellin (ks. esimerkiksi [2, 4]) keksimään tason väritykseen, jonka perusteella hän osoitti, että seitsemällä värillä pystytään värittämään taso Hadwigerin-Nelsonin ongelmassa vaadittujen ehtojen mukaisesti.

Tason värittäminen

Tarkastellaan nyt sellaista tason väritystä, jonka huomataan seuraavassa alaluvussa toteuttavan Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimat ehdot. Ta-voitteena on jakaa taso alueisiin, joissa kussakin on vain yhtä väriä. Koska halutaan, että kaksi pistettä, joiden etäisyys on yksi, eivät saa olla samanväriset, niin yhden samanvärisen alueen on aidosti mahdollista $\frac{1}{2}$ -säteisen ympyrän sisään. Toisaalta samanväriset alueet eivät saa olla liian lähellä toisiaan, joten alueiden on oltava riittävän suuria.

Isbellin konstruktion mukaan haluttu väritys voidaan toteuttaa täyttämällä taso säännöllisen kuusikulmion muotoisilla alueilla. Edellisessä kappaleessa tehtyjen havaintojen mukaan kuusikulmioiden halkaisijan on oltava pienempi kuin 1, mutta toisaalta riittävän suuri. Sanokaamme vaikkapa, että yhden kuusikulmion halkaisija on 0,90. Merkitään $r = 0,45$ eli r on kuusikulmion säde. Annetaan käytettävälle seitsemälle värille nimet $0, 1, \dots, 6$. Asetetaan kuusikulmiot limittäin ja väritetään ne kuvan 3 mukaisesti. Tarkastellaan väritystä vielä yksityiskohtaisemmin.



Kuva 3: Tason väritys.

Halutaan, että kuusikulmioiden väritykset noudattavat kuvassa 3 esitettyä säännönmukaisuutta. Valitaan siis, että origokeskeisen kuusikulmion väri on 0, sen oikealla puolella olevan väri on 1 ja niin edelleen. Havaitaan, että kun kuusikulmiot asetetaan limittäin, niin aina joka toisella rivillä kuusikulmioiden keskipisteillä on samat x -koordinaatit. Asetetaan ensin niihin riveihin säännölliset kuusikulmiot, joissa kuusikulmioiden keskipisteiden x -koordinaatit ovat samat kuin sillä rivillä, jossa on origokeskeinen kuusikulmio. Kun siirrytään riviltä ylöspäin sellaiselle riville, jolla on seuraavaksi saman x -koordinaatin omaava keskipiste, niin keskipisteiden y -koordinaatti kasvaa luvun $3r$ verran. Kahta riviä ylempänä kuusikulmion värin numeron modulo 7 on kasvettava kahdella. Toisaalta, aina oikealle siirryttäessä kuusikulmion värin numeron on kasvettava yhdellä modulo 7 ja Pythagoraan lauseen nojalla x -koordinaatti kasvaa luvun $\sqrt{3}r$ verran. Luonnollisesti y -koordinaatti pysyy oikealle siirryttäessä samana.

Asetetaan siis tasoon $(\sqrt{3}rx, \frac{3}{2}ry)$ -keskeiset kuusikulmiot, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku sekä väritetään ne värillä $x + y \pmod{7}$. Tällä tavoin saadaan väritettyä joka toinen kuusikulmiorivi origosta ylös- ja alaspäin katsoen. Vielä täytyy tarkastella limittäisiä rivejä.

Toimitaan limittäisten rivien kohdalla vastaavasti kuin edellisessä kappaleessa. Limittäisillä riveillä kuusikulmion keskipisteen x -koordinaatti on Pythagoraan lauseen nojalla luvun $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ verran enemmän kuin sen vasemmassa alakulmassa olevan kuusikulmion x -koordinaatti. Toisaalta taas kuusikulmion keskipisteen y -koordinaatti on tässä tilanteessa luvun $\frac{3}{2}r$ verran enemmän. Asetetaan siis tasoon $(\sqrt{3}r(x + \frac{1}{2}), \frac{3}{2}r(y + 1))$ -keskeiset kuusikulmiot, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku, sekä väritetään kukin niistä värillä $x + y + 5 \pmod{7}$. Nyt on saatu myös limittävät rivit käsiteltyä. Täten saadaan kuvan 3 kaltainen kuvio. On vielä osoitettava, että tämä väritys todella toteuttaa halutut ehdot.

Väritys toteuttaa halutut ehdot

Osoitetaan nyt, että edellisessä alaluvussa määritelty tason väritys toteuttaa Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimat ehdot. Ajatuksena on, että ensin osoitetaan väriytyksen toteuttavan hyödyllisen säännönmukaisuuden ja sitten tämän säännönmukaisuuden avulla todistetaan itse päätulos. Käsitteiden lyhentämiseksi määritellään, että kuusikulmion *vierekkäiset* kuusikulmiot ovat ne kuusikulmiot, joilla on tarkasteltavan kuusikulmion kanssa yksi yhteinen sivu. Seuraavassa lauseessa todistetaan vierekkäisiin kuusikulmioihin liittyvä ominaisuus.

Lause 1. Kuusikulmion ja sen vierekkäisten kuuden kuusikulmion värit käyvät läpi kaikki värit $0, 1, \dots, 6$.

Todistus. Oletetaan, että tarkasteltavan kuusikulmion keskipiste on pisteessä $(\sqrt{3}rx, \frac{3}{2}ry)$, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku. Väite voidaan todistaa vastaavalla tavalla myös tapauksessa, jossa kuusikulmion keskipiste on pisteessä

$$\left(\sqrt{3}r\left(x + \frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}r(y + 1)\right).$$

Nyt siis tarkasteltava kuusikulmio on väritetty värillä $x + y \pmod{7}$. Sen vierekkäiset kuusikulmiot on siis väritetty modulo 7 väreillä

$$(x + 1) + y, \quad (x - 1) + y,$$

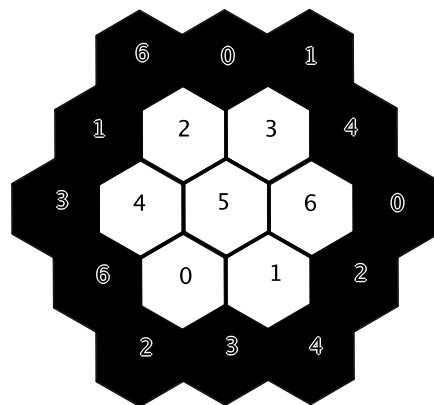
$$x + y + 5, \quad (x - 1) + y + 5,$$

$$x + (y - 2) + 5 \quad \text{ja} \quad (x - 1) + (y - 2) + 5.$$

Täten ne käyvät läpi kaikki muut jäännösluokat modulo 7 paitsi $x + y \pmod{7}$. Siis väite on todistettu. $\square$

Edellisestä lauseesta seuraa, ettei mikään kuusikulmion vierekkäisistä kuusikulmioista voi olla alkuperäisen kuusikulmion kanssa samanvärinen. Lisäksi ainoa näiden vierekkäisten kuusikulmioiden vierekkäisistä kuusikulmioista, joka on samanvärinen kuin alkuperäinen kuusikulmio, on tämä kuusikulmio itse. Nimittäin edellisen nojalla kaikki vierekkäiset kuusikulmiot ovat erivärisiä kuin kuusikulmio itse ja toisaalta näiden kuusikulmioiden vieressä on täsmälleen yksi kuusikulmio, joka on väritetty samalla värillä kuin tarkasteltava kuusikulmio. Siis tämä ainoa kyseisellä värillä väritetty kuusikulmio on tarkasteltava kuusikulmio. Tätä on havainnollistettu kuvassa 4, missä keskimmäisen kuusikulmion väri on 5.

Kutsutaan käsitteistön lyhentämiseksi edellisessä kappaleessa mainittuja vierekkäisten kuusikulmioiden vierekkäisten kuusikulmioita, jotka eivät ole alunperin tarkasteltava kuusikulmio, alkuperäisen kuusikulmion *uloimmiksi* kuusikulmioiksi. Ne on merkitty kuvassa 4 mustalla. Todistetaan nyt edellisten havaintojen avulla päätulos.



Kuva 4: Keskellä olevan, värillä 5 väritetyn kuusikulmion, vierekkäisistä tai uloimmista kuusikulmioista mikään ei ole väritetty värillä 5.

Lause 2. Edellisessä alaluvussa määritellyssä tason väriytyksessä mitkään kaksi pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, eivät ole samanväriset.

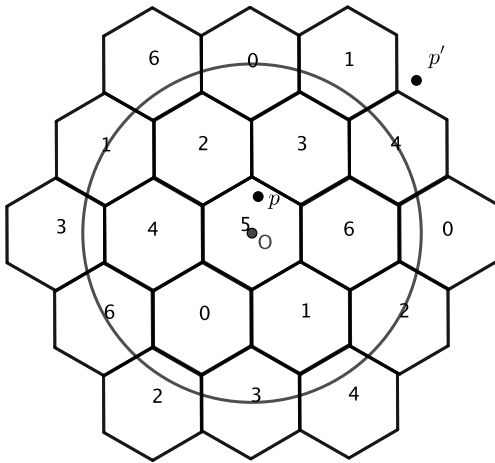
Todistus. Ensimmäinen havainto on, että jos kaksi pistettä, joiden etäisyys on 1, ovat samanväriset, ne eivät voi olla saman kuusikulmion sisällä. Nimittäin kuusikulmion halkaisija on alle 1. Voidaan siis olettaa, että jos etäisyydeltä 1 löytyy kaksi samanväristä pistettä, niin ne ovat eri kuusikulmioiden sisällä.

Todistuksen loppuosan ajatuksena on, että jos löydetään kaksi samanväristä pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 toisistaan, niin sopivan ympyrän säteelle saadaan kaksi eri arvoa. Ympyrän säteellä ei luonnollisestikaan voi olla kahta eri arvoa, joten seurauksena on ristiriita sen kanssa, etteivät kaksi samanväristä pistettä voi olla etäisyydellä 1 toisistaan.

Tarkastellaan jotain tason pistettä p ja oletetaan, että se on väritetty värillä c . Se on jonkin kuusikulmion sisällä ja olkoon tämän kuusikulmion keskipiste O . Nyt lauseen 1 ja sen jälkeisen huomion perusteella mikään tämän kuusikulmion vierekkäisistä tai uloimista kuusikulmioista ei voi olla väritetty värillä c . Tämä tarkoittaa, että jos pisteestä p etäisyydellä 1 on olemassa piste p' , joka on väritetty värillä c , niin se ei voi olla edellä mainittujen kuusikulmioiden sisällä. Piirretään nyt ympyrä, jonka keskipiste on p ja säde 1. Ympyrä kulkee pisteen p' kautta. Koska pisteen p etäisyys pisteestä O on enintään r , niin $1+r$ -säteisen ja O -keskeisen ympyrän on kuljettava pisteen p' kautta tai pisteen p' on oltava tämän ympyrän sisällä. Lisäksi tämän havainnon nojalla tarkasteltavan ympyrän on kuljettava tai peitettävä O -keskeisen kuusikulmion kuuden lähimmän uloimman kuusikulmion keskipisteet. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5, missä $c = 5$. Siis tarkasteltavan ympyrän säteen on Pythagoraan lauseen ja sijoituksen $r = 0,45$ nojalla oltava ainakin

$$\sqrt{(3r)^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}r > 1,45 = 1 + r.$$

Mutta tämä on mahdotonta, sillä ympyrän säteen tulisi olla samanaikaisesti $1+r$ ja yli $1+r$! Siis etäisyydellä 1 pisteestä p ei voi olla samanväristä pistettä. $\square$

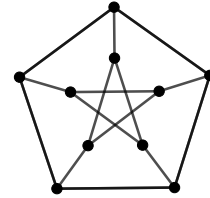


Kuva 5: O -keskeisen ja $1+r$ -säteisen ympyrän on peitettävä tai kuljettava osan uloimpien kuusikulmioiden keskipisteen kautta.

Nyt siis on osoitettu, että taso pystytään värittämään seitsemällä värillä niin, etteivät mitkään kaksi samanväristä pistettä ole etäisyydellä 1 toisistaan. Siispä Hadwigerin-Nelsonin ongelman oikea vastaus on enintään seitsemän.

Harjoitustehtäviä

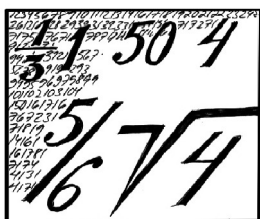
1. Mikä on kuvan Petersenin graafin väriluku?



2. Todista lauseen 1 väite tapauksessa, jossa kuusikulmion keskipiste on pisteessä $(\sqrt{3}r(x + \frac{1}{2}), \frac{3}{2}r(y + 1))$, missä x on kokonaisluku ja y parillinen kokonaisluku.
3. Tässä artikkelissa todistettiin kuusikulmioiden avulla, että Hadwigerin-Nelsonin ongelman vaatimukset toteuttavaan tason väriytykseen tarvitaan enintään seitsemän väriä. Mikäli kuusikulmioiden sijasta käytettäisiin neliöitä, mikä yläraja värien määrälle saadaan? Onko mahdollista saada neliöitä käyttämällä tarvittavalle värien määrälle ylärajaksi seitsemän?

Viitteet

- [1] de Grey, A. D. N. J.: *The chromatic number of the plane is at least 5*. ArXiv e-prints, huhtikuu 2018.
- [2] Hadwiger, H.: *Ungelöste Probleme No. 40*. Elem. Math., 16:103–104, 1961.
- [3] Moser, L. and Moser, W.: *Solution to Problem 10*. Can. Math. Bull., 4:187–189, 1961.
- [4] Soifer, A.: *Chromatic number of the plane & its relatives. Part I: The problem & its history*. Geombinatorics, 12:131–148, 2003.



Miten vaikeita tehtäviä ratkotaan?

Ville Tilvis

Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Vaikka matematiikkaa olisi opiskellut peruskoulussa ja lukiossa hyvällä menestyksellä, kokemus vaikean tehtävän pitkästä työstämisestä on voinut jäädä kokematta. Miten ratkaista ongelma, jonka ratkaisu vaatii esimerkiksi 3 tuntia? Tällaisista ratkaisustrategioista ei oppikirjoissa juuri puhuta, eivätkä loogisesti etenevät malliratkaisut yleensä muistuta ongelman todellista, usein kaoottista ratkaisuprosessia.

Asiaa valottaakseni kerron tässä artikkelissa, kuinka ratkaisin erään ongelman.

Taikasaari

Kehittelin syksyllä 2013 tehtävää Kenguru-matematiikkakilpailun lukiosarjaan. Halusin hauskan teeman, jossa eläimet syövät toisiaan ja muuttuvat maagisesti uusiksi eläimiksi. Pian minulla oli tehtävä, mutta ei ratkaisua! Näin tehtävä (jälkeenpäin tehdyn hionnan jälkeen) kuului:

Taikasaaren metsissä vaeltelee kolmenlaisia eläimiä: vuohia, susia ja leijonia. Sudet voivat syödä vuohia ja leijonat sekä vuohia että susia.



Koska kyseessä on Taikasaari:

- Jos susi syö vuohen, susi muuttuu leijonaksi.
- Jos leijona syö vuohen, leijona muuttuu sudeksi.
- Jos leijona syö suden, leijona muuttuu vuoheksi.

Nyt saarella on 17 vuolta, 55 sutta ja 6 leijonaa. Kuinka monta eläintä saarella korkeintaan on jäljellä siinä vaiheessa, kun kukaan ei voi enää syödä ketään?

Jouduin ratkaisemaan oman tehtäväni selvittääkseni, kuinka vaikea ja mielenkiintoinen se on.

Tutustuminen

Aloitin kokeilemalla, miten satunnaiset syönnit vaikuttavat tilanteeseen. Onkohan lopputulos aina sama? Tein taulukon:

Vuohia	Susia	Leijonia	
17	55	6	susi syö vuohen → leijona
16	54	7	leijona syö suden → vuohi
17	53	6	leijona syö vuohen → susi
16	54	5	

Tässä näytti menevän aivan liian kauan, joten lopetin kesken. Eläinten määrä kyllä väheni joka kierroksella, joten johonkin tämä prosessi päättyisi.

Mietin seuraavaksi, millaiseen tilanteeseen syöminen voisi loppua. Voisiko jäljellä olla enemmän kuin yhtä tyyppiä eläimiä? Varmaankaan ei, sillä leijona voi syödä suden, ja vuohen voi syödä kumpi tahansa peto. Jäljelle jäävän eläimen tyyppikään ei ole selvillä, sillä mikä tahansa kolmesta syömistapahtumasta voi olla viimeinen. Hankalaa!

Eteenpäin pääsemiseksi täytyi kokeilla jotakin muuta.

Yksinkertaistus

Päätin tarkastella tilannetta, jossa eläimiä on jäljellä vain vähän. Pienin alkuperäistä tehtävänantoa muistuttava tilanne oli yksi vuohi, yksi leijona ja kaksi sutta. Kokeilin kahta eri tapaa:

V	S	L	
1	2	1	$S+V \rightarrow L$
0	1	2	$L+S \rightarrow V$
1	0	1	$L+V \rightarrow S$
0	1	0	

V	S	L	
1	2	1	
0	3	0	$L+V \rightarrow S$

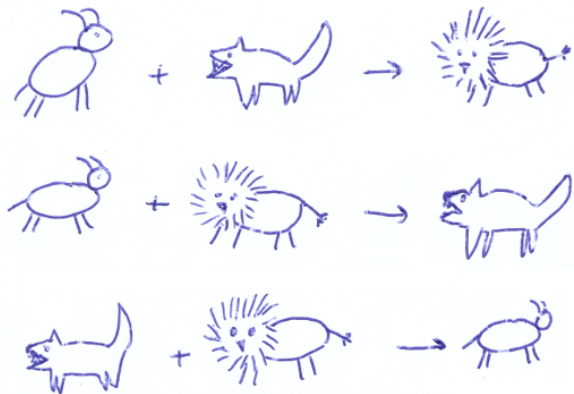
Lopputuloksista tuli erilaiset, joten ainakaan prosessi ei aina pääty samaan määrään eläimiä. Molemmissa kokeiluissa jäi jäljelle susia. Olikohan se sattumaa?

Hypoteesien testaus

Kokeilin vielä kolmatta tapaa selvittääkseni, jäisikö siinäkin jäljelle susia:

V	S	L	
1	2	1	$L+S \rightarrow V$
2	1	0	$S+V \rightarrow L$
1	0	1	$L+V \rightarrow S$
0	1	0	

Jäljelle jäi susia! Ehkä se ei ollut sattumaa? Palasin tutkimaan alkuperäisiä syömissääntöjä selvittääkseni, olisiko niissä jotakin susia suosivaa:



Nyt ei käynyt hyvin. Tarkemmin katsottuna syöminen on täysin symmetristä: kaksi erityyppistä eläintä katoaa (toinen syödään ja toisen tyyppi muuttuu), ja tilalle ilmestyy kolmatta tyyppiä oleva eläin. Susilla ei siis olekaan mitään erityisasemaa. Harmi!

Tässä kohtaa olin epävarma etenemissuunnista, sillä lupaava idea oli kuivunut kasaan.

Uusi lähestymistapa

Paremman puutteessa päätin kirjata syömisprosessin jollakin uudella, toivottavasti oivalluksen antavalla tavalla. Tarkastelin *muutoksia*, jotka syömisessä tapahtuvat:

V	S	L	
-1	-1	+1	$V+S \rightarrow L$
-1	+1	-1	$V+L \rightarrow S$
+1	-1	-1	$S+L \rightarrow V$

Joka syönnillä kahden eläinlajin määrä kulkee alaspäin, yhden ylöspäin. Jokaisen eläintyyppin lukumäärä muuttuu siis yhdellä. Ajatus: voisiko parillisuuden tarkastelusta olla iloa?

Jokaisessa syönnissä parilliset lukumäärät muuttuvat parittomiksi ja parittomat parillisiksi (eli *pariteetti* muuttuu). Alkuperäisessä tehtävänannossa (17 vuohia, 55 sutta, 6 leijonaa) susia ja vuohia on pariton määrä, leijonia parillinen. Ensimmäisen syönnin jälkeen susia ja vuohia on parillinen määrä ja leijonia pariton. Vuohien ja susien määrällä on siis aina keskenään sama pariteetti, ja leijonilla eri.

Mutta hetkinen! Lopussa kahden eläintyyppin lukumäärän tulee olla nolla. Näillä lukumäärillä on siis lopussa sama pariteetti, joten niillä pitää olla sama pariteetti koko prosessin ajan, myös alussa. Alkuperäisessä tehtävänannossa jäljelle pitäisi siis jäädä leijonia, koska leijonien ja jonkin toisen tyyppin lukumäärä ei voi yhtä aikaa olla nolla.

Tarkistin päättelyni vielä yksinkertaistetun esimerkin kanssa (1 vuohi, 2 sutta, 1 leijona). Siinä leijonilla ja vuohilla on sama pariteetti (alussa molemmat parittomia), joten vain ne voivat olla yhtä aikaa nolli. Jäljelle voi siis jäädä vain susia, kuten kokeilu oli osoittanut. Lupaavaa!

Viimeistely

Ratkaiseva oivallus tuntui löytyneen, joten kiirehdin viimeistelemään ratkaisun. Alkuperäisessä tehtävässä jäljelle voi jäädä vain leijonia, joten niiden määrä tulisi maksimoida. Leijonia syntyy lisää vain, kun sudet syövät vuohia. Vuohien määrä on susia pienempi, joten se on rajoittava tekijä.

Voisiko vuohia saada jostakin lisää? Vain silloin, kun leijona syö suden ja muuttuu vuoheksi. Tällöin meneetään yksi leijona. Vuohien ja leijonien yhteismäärä ei siis voi kasvaa mitenkään. Leijonien *maksimimäärä* lopussa on siis vuohien ja leijonien yhteismäärän $17+6=23$ suuruinen. Mutta voidaanko tämä saavuttaa? Kokeilin:

V	S	L	
17	55	6	$L+S \rightarrow V$
18	54	5	$S+V \rightarrow L$
17	53	6	
	⋮		
17	17	6	$(S+V \rightarrow L) \times 17$
	⋮		
0	0	23	

Kaikki toimi halutulla tavalla: susien määrää voi vähentää kaksi kerrallaan prosessin ”leijona syö suden, susi syö vuohen” kautta, ja kun päästään 17 suteen, ne syövät 17 vuohia. Ratkaisu on siis valmis: eläimiä voi jäädä jäljelle korkeintaan 23 kappaletta (ja ne ovat leijonia).

Joitakin huomioita

On tärkeää huomata, että ongelman ratkaissut parilisuusoivallus ei ollut suoraa seurausta mistään sitä edeltävästä työstä. Aiempi ponnistelu oli kuitenkin syöttänyt aivoille riittävästi materiaalia, jotta intuitio saattoi toimia. Epäonnistuneet yritykset eivät siis menneet hukkaan.

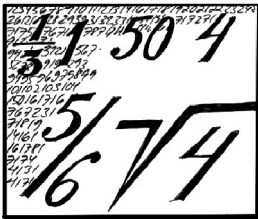
Usein ratkaisun avain on se, ettei liikaa epäröi. Ongelmanratkaisu on jatkuvaa jumissa olemista ja pienten epäonnistumisten kestämistä. Sopiva mielenlaatu on rauhallinen ja vakaan keskittynyt. Fokus tulee olla ongelmassa, ei itsessä. Mieleen nousevat ajatukset kuten ”Minusta ei ole tähän!”, ”Olenko liian tyhmä?”, ”En ole varmasti yhtään oikeilla jäljillä!” ovat luonnollisia, mutta ne kannattaa sivuuttaa ja keskittyä seuraavaan lähestymistapaan.

Korostan vielä keskittymisen merkitystä. Parasta jälkeä tulee, kun sulkee netin, sulkee oven, sulkee musiikin¹, ja tekee vain yhtä asiaa. Ajattelu on työlästä puuhaa, ja mieli siirtyy kovin liukkaasti helpompiin toimiin, jos niitä on tarjolla. Puoli tuntia rauhallista, mutta voimallista keskittymistä saa aikaan enemmän kuin kaksi tuntia multitasking-työskentelyä. Tämä pätee lähes kaikkeen yksin tehtävään ajatustyöhön. Esimerkiksi tämä artikkeli on kirjoitettu varhain hiljaisena aamuna huoneessa, jossa ei ole kännykkää, tietokoneella, jolla ei ole internet-yhteyttä.

Tässä vielä ongelmanratkaisijan työskentelytaidot pähkinänkuoressa:

- Raivaa häiriötekijät pois ja keskity yhteen asiaan.
- Ajattele ongelmaa, älä itseäsi. Työnnä epävarmuuden tunteet pois tieltä.
- Työstä ongelmaa monesta suunnasta. Jokainen umpikuja antaa lisää kokemusta.
- Nauti kykyjesi täysimääräisestä käytöstä.

¹Tässä taidan olla vähemmistöissä. Musiikin kuuntelu auttaa monia keskittymään. Itselläni musiikki kyllä tekee työskentelystä miellyttävämpää, mutta vie parhaan terän keskittymisestä. Kuuntelen musiikkia rutiinitehtäviä siivittääkseen, mutta en vaativissa töissä.



Transkendenttiluvut ja Hermiten lause

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Matematiikassa erittäin usein esiintyvä *Neperin vakio* eli luonnollisen logaritmin kanta on luku

$$e = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \approx 2,718281828459\dots$$

Yllä esiintyvät kertomat ovat $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ja niin edelleen. Tässä artikkelissa tarkoituksena on esittää yksityiskohtainen ja alkeellinen todistus Hermiten lauseelle:

Lause 1 (Hermiten lause). Luku e on transkendenttinen. Toisin sanoen, jos $P(x)$ on kokonaislukukertoimien polynomi, joka ei ole nollapolynomi, niin $P(e) \neq 0$.

Samalla yritämme taustoittaa tätä hieman vertailemalla kokonaislukukertoimisten polynomien nollakohtiin, ja kertoa hieman yleistyksistä.

Ennen aloittamista lienee syytä kertoa, että differentiaali- ja integraalilaskentaa tuntemattoman lukijan ei ole syytä pelästyä myöhemmin esiintyviä lukuisia derivaattalausekkeita. Nimittäin, seuraavassa käsitellään vain polynomien derivaattoja, jotka voi tässä määritellä suoraan alkeellisella tavalla, jolloin niiden tarvittavat perusominaisuudet ovat myös helppoja todistaa. Matemaattisesta analyysistä ei tarvita juuri mitään muita tietoja, kuin että eksponenttifunktiolla

on Taylor-kehitelämä

$$e^x = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu}}{\mu!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

mikä pätee ja on kaikin puolin matemaattisesti mielekäs kaikilla reaaliluvuilla x . Käytännön kannalta voimme käsitellä tätä ääretöntä sarjaa varsin samaan tapaan kuin äärellistä summaakin.

Alla monta perusasiaa on todistettu erikseen ja näihin yksityiskohtiin kuluukin monta sivua ennen Hermiten lauseen todistamista. Lukijan ei tule epäröidä hypätä joidenkin todistusten yli varsinkaan, jos käsiteltävä asia on jo tuttu.

Algebralliset luvut

Reaaliluku, ja yleisemmin kompleksiluku, α on *algebrallinen luku*, jos on olemassa kokonaislukukertoimien polynomi $P(x)$, joka ei ole nollapolynomi ja jolle $P(\alpha) = 0$. Pienintä mahdollista polynomin $P(x)$ astetta kutsutaan algebrallisen luvun α *asteeksi*. Jos α ei ole algebrallinen, niin se on *transkendenttinen*.

Rationaaliluvut ovat aina algebrallisia. Nimittäin, jos a on kokonaisluku ja b positiivinen kokonaisluku, niin rationaaliluku a/b on aina kokonaislukukertoimisen polynomin $bx - a$ nollakohta, ja siten ensimmäisen asteen algebrallinen luku. Kääntäen, kokonaislukukertoimisen

ensimmäisen asteen polynomin $bx - a$ nollakohta on aina rationaaliluku, nimittäin a/b . Siis ensimmäisen asteen algebrallisia lukuja ovat täsmälleen rationaaliluvut.

Mielenkiintoisempi esimerkki on luku $\sqrt{2}$, joka on algebrallinen luku, koska se on polynomin $x^2 - 2$ nollakohta. Kompleksiluku i on myös algebrallinen luku, koska se on polynomin $x^2 + 1$ nollakohta. Koska $\sqrt{2}$ on tunnetusti irrationaalinen, ja koska i ei ole edes reaali-luku ja siten ei myöskään rationaaliluku, eivät $\sqrt{2}$ ja i voi olla ensimmäisen asteen algebrallisia lukuja, joten ne ovat toisen asteen algebrallisia lukuja.

Esimerkkejä tunnetuista transkendenttisistä luvuista ovat e , π , e^π , $2^{\sqrt{2}}$, tai vaikkapa luku

0,123456789101112131415...

Lisää esimerkkejä annetaan tämän artikkelin lopussa, kun keskustellaan Hermiten lauseen yleistyksistä.

Algebrallisten lukujen perusominaisuuksia

Kuvailemme tässä ensiksi algebrallisten lukujen perusominaisuuksia. Ensimmäiseksi on luonnollista kysyä, mitä tapahtuu algebrallisille luvuille peruslaskutoimituksissa? On mahdollista todistaa, että lopputuloksena saadaan aina algebrallisia lukuja:

Lause. *Jos α ja β ovat algebrallisia lukuja, niin silloin myös luvut $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ja $\alpha\beta$ ovat algebrallisia lukuja. Jos lisäksi $\beta \neq 0$, niin myös α/β on algebrallinen luku.*

Syvällisempi kysymys olisi, millaisia ratkaisuita saadaan polynomiyhtälöistä, joissa kertoimet ovat algebrallisia lukuja. Jälleen kaikki toimii mukavasti:

Lause. *Jos α on reaali-luku (tai yleisemmin kompleksiluku), jos $P(x)$ on polynomi, jonka kertoimet ovat algebrallisia lukuja, jos $P(x)$ ei ole nollapolynomi, ja jos $P(\alpha) = 0$, niin itse asiassa α on myös algebrallinen luku.*

Tämä motivoi kauniisti transkendenttilukujen nimen: transkendenttiluvut ovat kaikkien algebrallisten operaatioiden (peruslaskutoimitusten ja polynomiyhtälöiden ratkaisun) ulottumattomissa. Tai toisin sanoen, jos lähdetään liikkeelle vaikkapa rationaaliluvuista, niin peruslaskutoimituksilla ja ratkaisemalla polynomiyhtälöitä jo konstruoiduista luvuista voi aina konstruoida vain algebrallisia lukuja.

Esimerkkejä algebrallisten lukujen teorian sovellutuksista

Emme voi mitenkään tehdä tässä oikeutta algebrallisille luvuille, mutta ehkäpä muutama valaiseva esimerk-

ki niiden esiintymisestä matematiikassa olisi kuitenkin paikallaan.

Konstruktio harpilla ja viivaimella. Algebrallisten lukujen motivaatioksi annamme joitakin esimerkkejä niiden sovelluksista. Aloitetaan seuraavista kuuluisista kolmesta konstruktio-ongelmasta:

- *Kulman kolmijako:* Jaettava annettu kulma harpilla ja viivaimella kolmeen yhtä suureen osaan.
- *Kuution kahdentaminen:* Jos on annettu kuution särmän mittainen jana, konstruoitava siitä harpilla ja viivaimella sellainen jana, jonka pituus on yhtä pitkä kuin sellaisen kuution särmä, jonka tilavuus on kaksi kertaa niin iso kuin alkuperäisen kuution tilavuus oli.
- *Ympyrän neliöinti:* Jos on annettu ympyrä, on konstruoitava harpilla ja viivaimella sellainen neliö, jolla on sama ala kuin annetulla ympyrällä.

Nämä kaikki kolme ongelmaa osoittautuvat mahdottomiksi, ja nämä mahdottomuudet näkee konseptuaalisesti miellyttävällä tavalla algebrallisten lukujen teorian kautta. Nimittäin, jos lähdetään liikkeelle jostakin yhdestä yksikön mittaisesta janasta, niin on mahdollista todistaa, että kaikkien siitä harpilla ja viivaimella konstruoitavien janojen pituudet ovat aina algebrallisia lukuja, joiden asteet ovat luvun 2 potensseja.

Kulman kolmijakon mahdottomuus seuraa nyt vaikkapa siitä, että jos kulman voisi jakaa kolmeen osaan, niin erityisesti 60° kulman voisi jakaa kolmeen osaan, jolloin voisi konstruoida 20° suuruisen kulman, ja siten esimerkiksi janan, jonka pituus olisi $\cos 20^\circ$. Kuitenkin tämä luku on yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ ratkaisu, ja osoittautuu, että $\cos 20^\circ$ on kolmannen asteen algebrallinen luku. Koska 3 ei ole luvun 2 potenssi, on kulman kolmijako siis mahdotonta.

Kuution kahdentamisen mahdottomuus sujuu samassa hengessä: Jos kuution kahdentaminen olisi aina mahdollista, niin silloin yksikkökuution kahdentaminen olisi mahdollista. Mutta tämä tarkoittaisi sellaisen janan konstruointia, jonka pituus olisi $\sqrt[3]{2}$. Ei ole kovin yllättävää, että tämä luku, joka on yhtälön $x^3 - 2 = 0$ ratkaisu, osoittautuu myös kolmannen asteen algebralliseksi luvuksi, ja on siten myös harpin ja viivaimen ulottumattomissa.

Ympyrän neliöinnin mahdottomuus on hieman kimurantimpi todistaa. Jos alkuperäisen ympyrän säde on vaikkapa 1, niin silloin ympyrän ala on π , ja halutun neliön ala olisi myös π , jolloin oleellisesti ottaen pitäisi konstruoida neliön sivuksi jana, jonka pituus olisi $\sqrt{\pi}$. Tällöin $\sqrt{\pi}$ olisi algebrallinen luku, ja koska algebrallisten lukujen tulot ovat algebrallisia, myös $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \pi$ olisi algebrallinen luku. Mutta osoittautuu, että π on transkendenttinen, ja siten ympyrän neliöinti ei ole mahdollista.

Lemma 2. Olkoot ℓ , q ja m positiivisia kokonaislukuja, joille $\ell \geq q$. Tällöin

$$q! \mid m(m+1)(m+2) \cdots (m+\ell-1).$$

Tai toisin sanoen, $q!$ jakaa aina ℓ peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulon.

Todistus. Tämä seuraa suoraan siitä tiedosta, että binomikertoimet ovat kokonaislukuja. Nimittäin, voimme laskea, että

$$\binom{m+\ell-1}{\ell} = \frac{(m+\ell-1)(m+\ell-2) \cdots (m+1)m}{\ell!},$$

eli itse asiassa $\ell!$ jakaa tulon $m(m+1) \cdots (m+\ell-1)$, jolloin myös luvun $q!$ on jaettava se. $\square$

Myöhemmin esitettävä Hermiten lauseen todistus perustuu oleellisella tavalla siihen, että kertoma $n!$ kasvaa nopeammin kuin mikään eksponenttifunktio B^n , kun positiivinen kokonaisluku n kasvaa rajatta:

Lemma 3. Olkoot A , B ja ε positiivisia reaalilukuja. Tällöin löytyy (luvuista A , B ja ε riippuva) positiivinen kokonaisluku Ξ niin, että

$$\frac{A \cdot B^n}{n!} < \varepsilon$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq \Xi$.

Todistus. Olkoon ensin $M = \lceil B \rceil$ pienin kokonaisluku, jolle $M \geq B$, ja tarkastellaan kokonaislukua n , jolle $n > 2M$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{A \cdot B^n}{n!} &= \frac{A \cdot B^{2M} \cdot B^{n-2M}}{(2M)! \cdot (2M+1)(2M+2) \cdots (n-1)n} \\ &= \frac{A \cdot B^{2M}}{(2M)!} \cdot \frac{B}{2M+1} \cdot \frac{B}{2M+2} \cdots \frac{B}{n-1} \cdot \frac{B}{n}. \end{aligned}$$

Asian ydin on, että viimeiset tekijät $B/(2M+1), \dots, B/n$ ovat kaikki pienempiä kuin $1/2$ ja voimme siten arvioida

$$\frac{A \cdot B^n}{n!} < \frac{A \cdot B^{2M}}{(2M)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2M} = \frac{A \cdot B^{2M} \cdot 2^{2M}}{(2M)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nyt varmasti pätee

$$\frac{A \cdot B^n}{n!} < \varepsilon,$$

jos pätee

$$\frac{A \cdot B^{2M} \cdot 2^{2M}}{(2M)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon.$$

Mutta tämän viimeisen voi kirjoittaa muodossa

$$2^n > \frac{A \cdot B^{2M} \cdot 2^{2M}}{\varepsilon \cdot (2M)!}.$$

Riittää siis valita haluttu kokonaisluku Ξ niin, että

$$2^\Xi > \frac{A \cdot B^{2M} \cdot 2^{2M}}{\varepsilon \cdot (2M)!} \quad \text{ja} \quad \Xi > 2M. \quad \square$$

Polynomien derivaatat

Tarkastellaan polynomia

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^d c_\nu x^\nu,$$

missä d on epänegatiivinen kokonaisluku, ja $c_0, c_1, \dots, c_d$ ovat reaalilukuja. Tavalliseen tapaan x^0 tarkoittaa vakiota 1, koska se on niin käytännöllistä. Tällöin määrittelemme polynomin $P(x)$ derivaatan $P'(x)$ asetamalla

$$P'(x) = \sum_{\nu=1}^d c_\nu \nu x^{\nu-1}.$$

Jos $d = 0$, summassa ei ole termejä ja $P'(x) = 0$. Merkitsemme derivaattaa myös

$$\frac{d}{dx} P(x) = P^{(1)}(x) = P'(x).$$

Esimerkiksi, suoraan määritelmän nojalla

$$\frac{d}{dx} (3x^3 - 4x^2 + 7x - 5) = 9x^2 - 8x + 7.$$

Samoin

$$\frac{d}{dx} 1 = 0, \quad \frac{d}{dx} x = 1, \quad \frac{d}{dx} x^2 = 2x, \quad \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2, \quad \dots,$$

ja yleisesti

$$\frac{d}{dx} x^\nu = \nu x^{\nu-1}$$

jokaisella epänegatiivisella kokonaisluvulla ν . Tässä $0x^{-1}$ tarkoittaa nollapolynomia.

Voimme luonnollisesti derivoida polynomia useampaan kertaan, ja merkitsemme toista derivaattaa

$$\frac{d^2}{dx^2} P(x) = P''(x) = P^{(2)}(x),$$

ja yleisemmin ℓ . derivaattaa, kun ℓ on epänegatiivinen kokonaisluku,

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} P(x) = P^{(\ell)}(x).$$

Erityisesti

$$\frac{d^0}{dx^0} P(x) = P^{(0)}(x) = P(x).$$

Esimerkiksi, aiemman polynomin $3x^3 - 4x^2 + 7x - 5$ toinen derivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (3x^3 - 4x^2 + 7x - 5) &= \frac{d}{dx} (9x^2 - 8x + 7) \\ &= 18x - 8, \end{aligned}$$

ja sen kolmas derivaatta on

$$\frac{d^3}{dx^3} (3x^3 - 4x^2 + 7x - 5) = \frac{d}{dx} (18x - 8) = 18.$$

Sen neljäs ja kaikki korkeammat derivaatat ovat nolla-polynomeja.

Jos ν on epänegatiivinen kokonaisluku ja ℓ on positiivinen kokonaisluku, niin

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} x^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\ell+1)x^{\nu-\ell},$$

jos $\ell \leq \nu$, ja

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} x^\nu = 0,$$

jos $\ell > \nu$. Yleisemminkin pätee, että jos $P(x)$ on reaali-kertoiminen polynomi, joka on vakio, tai jonka aste on pienempi kuin ℓ , niin

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} P(x) = 0.$$

On mielenkiintoista huomata, että positiivisilla kokonaisluvulla ν lausekkeella $x^\nu/\nu!$ on se ominaisuus, että

$$\frac{d}{dx} \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{\nu x^{\nu-1}}{\nu!} = \frac{\nu x^{\nu-1}}{\nu \cdot (\nu-1)!} = \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Tästä seuraa, että yleisemmin

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{x^{\nu-\ell}}{(\nu-\ell)!},$$

kun $\ell \leq \nu$, ja

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} \frac{x^\nu}{\nu!} = 0,$$

kun $\ell > \nu$.

Polynomien derivaattojen perusominaisuuksia

Tarvitsemme hieman perustietoja siitä, miten derivointi käyttäytyy, kun polynomeista otetaan summia ja tuloja, tai kun niissä tehdään muuttujanvaihtoja $x \mapsto x+a$ reaaliavaruuksilla a .

Lause 4. Jos $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat reaali-lukukertoimisia polynomeja, ja jos a on reaali-luku, niin

$$\frac{d}{dx} (P(x) + Q(x)) = P'(x) + Q'(x)$$

ja

$$\frac{d}{dx} (a P(x)) = a P'(x).$$

Todistus. Täydentämällä polynomeja $P(x)$ ja $Q(x)$ tarvittaessa termeillä, jotka ovat muotoa $0x^\nu$ epänegatiivisilla kokonaisluvulla ν , voimme kirjoittaa ne summina

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^d p_\nu x^\nu \quad \text{ja} \quad Q(x) = \sum_{\nu=0}^d q_\nu x^\nu,$$

missä d on positiivinen kokonaisluku ja $p_0, p_1, \dots, p_d, q_0, q_1, \dots, q_d$ ovat reaali-lukuja. Nyt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (P(x) + Q(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{\nu=0}^d p_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^d q_\nu x^\nu \right) \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^d (p_\nu + q_\nu) x^\nu = \sum_{\nu=1}^d (p_\nu + q_\nu) \nu x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=1}^d p_\nu \nu x^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^d q_\nu \nu x^{\nu-1} = P'(x) + Q'(x). \end{aligned}$$

Samassa hengessä voimme laskea

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (a P(x)) &= \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^d a p_\nu x^\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^d a p_\nu \nu x^{\nu-1} = a P'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Lause 5. Jos $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat reaali-lukukertoimisia polynomeja, niin

$$\frac{d}{dx} (P(x) Q(x)) = P'(x) Q(x) + P(x) Q'(x).$$

Todistus. Olkoot

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^a p_\nu x^\nu \quad \text{ja} \quad Q(x) = \sum_{\mu=0}^b q_\mu x^\mu,$$

missä luonnollisesti a ja b ovat epänegatiivisia kokonais-lukuja, ja $p_0, p_1, \dots, p_a, q_0, q_1, \dots, q_b$ ovat reaali-lukuja. Tällöin edellisen tuloksen nojalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (P(x) Q(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{\nu=0}^a p_\nu x^\nu \sum_{\mu=0}^b q_\mu x^\mu \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^a \sum_{\mu=0}^b p_\nu q_\mu \frac{d}{dx} x^{\nu+\mu} \\ &= \sum_{\nu=0}^a \sum_{\mu=0}^b p_\nu q_\mu (\nu + \mu) x^{\nu+\mu-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^a \sum_{\mu=0}^b p_\nu \nu x^{\nu-1} q_\mu x^\mu + \sum_{\nu=0}^a \sum_{\mu=0}^b p_\nu x^\nu q_\mu \mu x^{\mu-1} \\ &= P'(x) Q(x) + P(x) Q'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Lause 6. Jos $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat reaali-lukukertoimisia polynomeja siten, että $P(x) = Q(x+a)$ jollakin reaali-luvulla a , niin silloin

$$P^{(\ell)}(x) = Q^{(\ell)}(x+a)$$

jokaisella positiivisella kokonaisluvulla ℓ .

Todistus. Ei ole vaikea havaita, että riittää osoittaa tämä arvolla $\ell = 1$, jolloin väite suuremmilla luvun ℓ arvoilla seuraa soveltamalla tapauksen $\ell = 1$ tulosta toistuvasti. Ei ole myöskään vaikea vakuuttua siitä, että riittää osoittaa väite yhdelle monomille. Loppujen lopuksi meidän riittää osoittaa, että

$$\frac{d}{dx} (x+a)^\nu = \nu (x+a)^{\nu-1}$$

jokaisella positiivisella kokonaisluvulla ν . Tämä onnistuu näppärästi induktiolla. Ensinnäkin,

$$\frac{d}{dx} (x+a) = 1 = 1 \cdot (x+a)^0,$$

joten väite pätee, kun $\nu = 1$. Jos ν sitten on sellainen positiivinen kokonaisluku, että

$$\frac{d}{dx} (x+a)^\nu = \nu (x+a)^{\nu-1},$$

niin tulon derivoimiskaavalla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x+a)^{\nu+1} &= \frac{d}{dx} ((x+a)^\nu (x+a)) \\ &= (x+a) \frac{d}{dx} (x+a)^\nu + (x+a)^\nu \frac{d}{dx} (x+a) \\ &= (x+a) \nu (x+a)^{\nu-1} + (x+a)^\nu \cdot 1 \\ &= (\nu+1) (x+a)^\nu, \end{aligned}$$

ja induktioaskel on valmis. $\square$

Polynomien korkeamman kertaluvun derivaattojen ominaisuuksia

Binomikaava sanoo, että jos a ja b ovat reaalilukuja, ja jos ℓ on positiivinen kokonaisluku, niin

$$(a+b)^\ell = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} a^m b^{\ell-m},$$

mikä selittääkin binomikertoimien nimen. Tulon ℓ . derivaatalle pätee varsin samanhenkinen kaava:

Lemma 7. Olkoot $P(x)$ ja $Q(x)$ reaalilukukertoimia polynomeja, ja olkoon ℓ positiivinen kokonaisluku. Tällöin

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (P(x) Q(x)) = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell-m)}(x).$$

Todistus. Todistamme tämän induktiolla parametrin ℓ suhteen. Kun $\ell = 1$, kaava sanoo vain, että

$$\frac{d}{dx} (P(x) Q(x)) = P'(x) Q(x) + P(x) Q'(x),$$

mikä onkin aiemmin mainittu derivaatan perusominaisuus. Oletetaan sitten, että positiivinen kokonaisluku ℓ on sellainen, että pätee

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (P(x) Q(x)) = \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell-m)}(x).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (P(x) Q(x)) &= \frac{d}{dx} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (P(x) Q(x)) \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell-m)}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m+1)}(x) Q^{(\ell-m)}(x) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell-m+1)}(x) \\ &= \sum_{m=1}^{\ell+1} \binom{\ell}{m-1} P^{(m)}(x) Q^{(\ell+1-m)}(x) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell+1-m)}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{m} P^{(m)}(x) Q^{(\ell+1-m)}(x), \end{aligned}$$

missä käytämme viimeisessä yhtäsuuruudessa niitä seikkoja, että

$$\binom{\ell}{0} = \binom{\ell+1}{0} = \binom{\ell}{\ell} = \binom{\ell+1}{\ell+1} = 1,$$

ja

$$\binom{\ell}{m-1} + \binom{\ell}{m} = \binom{\ell+1}{m},$$

kun $m \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. $\square$

Lemma 8. Olkoon a reaaliluku, olkoon r positiivinen kokonaisluku, olkoon $R(x)$ reaalilukukertoiminen polynomi, ja tarkastellaan polynomia

$$Q(x) = (x-a)^r R(x).$$

Tällöin

$$Q(a) = Q'(a) = Q''(a) = \dots = Q^{(r-1)}(a) = 0$$

ja

$$Q^{(r)}(a) = r! R(a).$$

Todistus. On ilmeistä, että $Q(a) = 0$. Olkoon siis $\ell \in \{1, 2, \dots, r\}$, ja tarkastellaan lauseketta $Q^{(\ell)}(a)$. Lemman 7 mukaan

$$\begin{aligned} Q^{(\ell)}(x) &= \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} \left(\frac{d^m}{dx^m} (x-a)^r \right) R^{(\ell-m)}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} r(r-1) \cdots (r-m+1) \\ &\quad \cdot (x-a)^{r-m} R^{(\ell-m)}(x). \end{aligned}$$

Jos $\ell < r$, niin silloin jokaisessa termissä esiintyy ainakin yksi tekijä $x-a$, ja on oltava $Q^{(\ell)}(a) = 0$. Jos taas $\ell = r$, niin silloin tekijä $x-a$ esiintyy jokaisessa

termissä, jossa $m < \ell$, ja jäljelle jää vain se termi, jossa $m = \ell$, ja

$$Q^{(r)}(a) = r! R(a),$$

kuten pitikin. $\square$

Epäyhtälöitä

Tarvitsemme hieman työkaluja epäyhtälöistä. Ensimmäinen on kolmioepäyhtälö, johon törmää matemaatikassa varsin monissa tilanteissa varsin usein.

Lemma 9 (Kolmioepäyhtälö). Olkoon n positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ reaalityyppisiä lukuja. Tällöin on aina

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Todistus. Käytämme jälleen induktiota, nyt lukumäärän n suhteen. Tapauksessa $n = 1$ epäyhtälön molemmat puolet ovat yhtä kuin $|a_1|$, ja asia on selvä. Tapauksessa $n = 2$ väite seuraa siitä, että on oltava

$$2a_1a_2 \leq |2a_1a_2| = 2|a_1| \cdot |a_2|,$$

jolloin

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2|^2 &= (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \\ &\leq a_1^2 + a_2^2 + 2|a_1| \cdot |a_2| \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1| \cdot |a_2| \\ &= (|a_1| + |a_2|)^2. \end{aligned}$$

Muistaen, että luvut $|a_1 + a_2|$ ja $|a_1| + |a_2|$ ovat molemmat epänegatiivisia, voimme ottaa neliöjuuret puolittain, jolloin saadaan haluttu kolmioepäyhtälö

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|.$$

Lopuksi, jos n on positiivinen kokonaisluku, $n \geq 2$, ja $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ ovat reaalityyppisiä lukuja siten, että

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|,$$

niin soveltamalla tätä ja kahden muuttujan kolmioepäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}| \\ &\leq |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}|, \end{aligned}$$

ja olemme valmiita. $\square$

Itse asiassa käytämme kolmioepäyhtälöä myös erään äärettömään sarjaan:

Korollari 10 (Kolmioepäyhtälö sarjoille). Olkoon $a_1, a_2, \dots$ jono reaalityyppisiä lukuja, jolle ääretön sarja

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu}$$

suppenee. Tällöin

$$\left| \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \right| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{\mu}|.$$

Emme perustele tätä sen kummemmin tässä, mutta tulos seuraa suoraan äärettömien sarjojen määritelmistä osasummien raja-arvojen kautta.

Toinen epäyhtälötulos, jota tarvitsemme, on varsin erityislaatuinen polynomien derivaattoihin ja eksponenttifunktioon liittyvä arvio. Hermiten lauseen todistuksessa konstruoidavan luvun N määritelmässä esiintyvät korkeamman kertaluvun derivaatat ovat hyödyllisiä mm. siksi, että seuraavan lemmän todistuksessa rivillä (*) supistuu eksponenttifunktion Taylor-kehityksestä alku pois.

Lemma 11. Tarkastellaan reaalityyppisten $d \in \mathbb{Z}_+$ polynomia

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^d c_{\nu} x^{\nu},$$

ja olkoon z reaalityyppinen luku. Tällöin polynomille

$$P^*(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(d)}(x)$$

pätee

$$|P^*(z) - e^z P^*(0)| \leq |z| e^{|z|} \sum_{\nu=0}^d |c_{\nu}| \cdot |z|^{\nu}.$$

Todistus. Kirjoitamme polynomin kertoimet $P(x)$ hie-

man toisella tavalla asettamalla

$$c_{\nu} = \frac{\gamma_{\nu}}{\nu!}$$

jokaiselle $\nu \in \{0, 1, 2, \dots, d\}$, jolloin siis

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^d \frac{\gamma_{\nu} x^{\nu}}{\nu!}.$$

Tämän notaation taustalla on se ajatus, että kun $\nu \in \mathbb{Z}_+$, niin termin $x^{\nu}/\nu!$ derivaatta on yksinkertaisesti $x^{\nu-1}/(\nu-1)!$. Nyt voimme laskea, että

$$\begin{aligned} P^*(x) &= P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(d)}(x) \\ &= \sum_{\nu=0}^d \frac{\gamma_{\nu} x^{\nu}}{\nu!} + \sum_{\nu=1}^d \frac{\gamma_{\nu} x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \sum_{\nu=2}^d \frac{\gamma_{\nu} x^{\nu-2}}{(\nu-2)!} \\ &\quad + \dots + \sum_{\nu=d}^d \frac{\gamma_{\nu} x^{\nu-d}}{(\nu-d)!} \\ &= \sum_{\nu=0}^d \gamma_{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{x^{\mu}}{\mu!}. \end{aligned}$$

Erityisesti siis

$$P^*(0) = \sum_{\nu=0}^d \gamma_{\nu}.$$

Nyt voimme arvioida eksponenttifunktion Taylor-kehityksellä, että

$$\begin{aligned} |P^*(z) - P^*(0) e^z| &= \left| \sum_{\nu=0}^d \gamma_{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{z^{\mu}}{\mu!} - \sum_{\nu=0}^d \gamma_{\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^{\mu}}{\mu!} \right| \\ &= \left| - \sum_{\nu=0}^d \gamma_{\nu} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{z^{\mu}}{\mu!} \right| \quad (*) \\ &\leq \sum_{\nu=0}^d |\gamma_{\nu}| \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{|z|^{\mu}}{\mu!}, \end{aligned}$$

missä viimeisessä askeleessa käytettiin kolmioepäyhtälöä. Viimeistä sarjaa voimme lisäksi arvioida

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} \frac{|z|^{\mu}}{\mu!} &= \frac{|z|^{\nu+1}}{\nu!} \left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{|z|}{(\nu+1)(\nu+2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|z|^2}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|z|^{\nu+1}}{\nu!} \left(1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \frac{|z|^{\nu+1}}{\nu!} e^{|z|}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä aiempaan arvioomme saamme siis

$$\begin{aligned} |P^*(z) - P^*(0) e^z| &\leq \sum_{\nu=0}^d |\gamma_{\nu}| \frac{|z|^{\nu+1}}{\nu!} e^{|z|} \\ &= |z| e^{|z|} \sum_{\nu=0}^d |c_{\nu}| \cdot |z|^{\nu}. \end{aligned}$$

kuten pitikin. $\square$

Vietan kaavat ja eräs niiden seuraus

Ei ole hankala laskea, että millä tahansa reaaliluvuilla a, b, c ja d pätee

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab,$$

ja

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= x^3 - (a+b+c)x^2 \\ &\quad + (ab+bc+ca)x - abc, \end{aligned}$$

ja vielä

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 \\ &\quad + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\ &\quad - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd. \end{aligned}$$

Yleisessä tapauksessa näitä yhteyksiä polynomin nollakohtien ja sen kertoimien välillä kutsutaan *Vietan kaavoiksi*:

Lause 12 (Vietan kaavat). Olkoon d positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a, a_1, a_2, \dots, a_d, c_0, c_1, c_2, \dots, c_d$ reaalilukuja siten, että

$$\begin{aligned} a(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_d) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_dx^d. \end{aligned}$$

Tällöin jokaisella $\nu \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ pätee

$$c_{\nu} = a \cdot (-1)^{d-\nu} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, \\ \#I = d-\nu}} \prod_{i \in I} a_i,$$

missä siis viimeisessä summassa I käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \dots, d\}$ täsmälleen $d-\nu$ lukua sisältävät osajoukot ja $\prod$ -lausekkeessa otetaan yhtä sellaista joukkoa I vastaavien lukujen a_i tulo. Toisin sanoen, $\sum \prod$ -lausekkeessa otetaan luvuista $a_1, \dots, a_d$ kaikkien $d-\nu$ luvun osajoukkojen tulojen summa.

Vietan kaavat ovat tarpeen seuraavan lemmän vuoksi. Sovellettaessa kolmioepäyhtälöä vastaan tulee polynomi, joka on saatu eräästä toisesta polynomista ottamalla jokaisesta kertoimesta itseisarvot. On oleellista, että seuraavassa lemmassa nollakohdat $a_1, \dots, a_d$ ovat juuri epänegatiivisia reaalilukuja.

Lemma 13. Olkoon d positiivinen kokonaisluku, olkoon a nollasta poikkeava reaaliluku, olkoot $a_1, a_2, \dots, a_d$ epänegatiivisia reaalilukuja ja olkoot $c_0, c_1, \dots, c_d$ reaalilukuja niin, että

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{d-1}x^{d-1} + c_dx^d &= a(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_d). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |c_0| + |c_1|x + |c_2|x^2 + \dots + |c_d|x^d &= |a|(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_d). \end{aligned}$$

Todistus. Ensinnäkin $c_d = a$, ja Vietan kaavojen mukaan jokaisella $\nu \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ pätee

$$\frac{c_{\nu}}{a} = (-1)^{d-\nu} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, \\ \#I = d-\nu}} \prod_{i \in I} a_i.$$

Koska tässä summassa kaikki termit ovat epänegatiivisia, on siis oltava

$$\begin{aligned} |c_\nu| &= |a| \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,d\}, \\ \#I=d-\nu}} \prod_{i \in I} a_i \\ &= |a| (-1)^{d-\nu} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,d\}, \\ \#I=d-\nu}} \prod_{i \in I} (-a_i), \end{aligned}$$

missä hyödynnämme sitä tietoa, että jokaisessa $\prod$ -tulossa on täsmälleen $d - \nu$ tekijää. Mutta Vietan kaavojen mukaan siis

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^d |c_\nu| x^\nu \\ = |a| (x - (-a_1)) (x - (-a_2)) \cdots (x - (-a_d)), \end{aligned}$$

kuten pitikin. $\square$

Hermiten lauseen todistus

Alku ja strategia. Aloitamme tekemällä sen vastaaleluksen, että e on algebrallinen. Tällöin on olemassa positiivinen kokonaisluku n ja kokonaisluvut $a_0, a_1, \dots, a_n$ niin, että

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0,$$

ja $a_n \neq 0$. Voimme luonnollisesti olettaa, että n on pienin tällainen luku. Nyt $a_0 \neq 0$, sillä jos olisi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, jolle

$$a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0 \quad \text{ja} \quad a_{k+1} \neq 0,$$

niin voisimme jakaa luvun e toteuttaman yhtälön luvulla e^{k+1} saaden uuden yhtälön

$$a_{k+1} + a_{k+2} e + a_{k+3} e^2 + \dots + a_n e^{n-k-1} = 0,$$

minkä aste olisi pienempi kuin n .

Valitsemme alkuluvun p , jolle $p > n$ ja $p > |a_0|$. Tulomme aivan lopuksi vielä vaatimaan, että p on isompi kuin jokin $\Xi + 1$, missä Ξ tulee lemmasta 3.

Määrittelemme rationaalilukukertoimisen polynomin $P(x)$ asettamalla

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \cdots (x-n)^p.$$

Tämän polynomin aste on $d = (n+1)p - 1$.

Seuraavaksi määrittelemme luvuista p ja n riippuvan rationaaliluvun N asettamalla

$$N = \sum_{\ell=0}^d \sum_{k=0}^n a_k P^{(\ell)}(k).$$

Tavoitteemme on osoittaa ensin, että $N \neq 0$, ja sitten, että $N = 0$, kunhan vain p on riittävän iso. Tämä ristiriita osoittaa luvun e transkendenttisuuden.

Miksi $N \neq 0$? Osoittaaksemme, että $N \neq 0$, osoitamme, että itse asiassa N on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p . Tämä saavutetaan osoittamalla, että itse asiassa jokainen termi luvun N määrittelevässä summassa on kokonaisluku, ja että termiä $a_0 P^{(p-1)}(0)$ lukuun ottamatta ne kaikki ovat jaollisia luvulla p .

Lemman 8 nojalla

$$P(0) = P'(0) = \dots = P^{(p-2)}(0) = 0,$$

ja samoin

$$P(k) = P'(k) = \dots = P^{(p-1)}(k) = 0$$

jokaisella $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Saman lemmän mukaan

$$\begin{aligned} P^{(p-1)}(0) &= \frac{1}{(p-1)!} (p-1)! (-1)^p (-2)^p \cdots (-n)^p \\ &= (-1)^{pn} (n!)^p. \end{aligned}$$

Tiedämme siis, että $a_0 P^{(p-1)}(0)$ on kokonaisluku, ja koska $p > n$ ja $p > |a_0|$, sen on oltava alkuluvulla p jaoton kokonaisluku.

Meidän on vielä käsiteltävä termit $a_k P^{(\ell)}(k)$, missä $\ell \in \{p, p+1, \dots, d\}$ ja $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Kirjoitetaan tätä varten

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=p-1}^d c_\nu x^\nu,$$

missä luvut $c_{p-1}, c_p, \dots, c_d$ ovat kokonaislukuja. Voimme laskea, että

$$P^{(\ell)}(k) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=\ell}^d c_\nu \nu(\nu-1) \cdots (\nu-\ell+1) k^{\nu-\ell}.$$

Koska lemmän 2 nojalla tulo $\nu \cdots (\nu - \ell + 1)$ on $\ell > p-1$ peräkkäisen kokonaisluvun tulona jaollinen luvulla $(p-1)!$, on luvun $P^{(\ell)}(k)$ oltava kokonaisluku. Lisäksi, koska $\ell \geq p$, on tulossa vähintään p peräkkäistä tekijää, joten ainakin yksi tekijöistä on jaollinen luvulla p . Koska p on alkuluku, ei nimittäjä $(p-1)!$ ole jaollinen luvulla p . Täten luvun $P^{(\ell)}(k)$ on oltava jaollinen luvulla p .

Olemme siis todistaneet, että N on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p , joten on oltava $N \neq 0$.

Miksi $N = 0$? Yritetään seuraavaksi arvioida luvun N kokoa. Kirjoittamalla

$$P^*(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(d)}(x)$$

voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} N &= a_0 P^*(0) + a_1 P^*(1) + a_2 P^*(2) + \dots + a_n P^*(n) \\ &= a_0 P^*(0) + a_1 P^*(1) + \dots + a_n P^*(n) \\ &\quad - P^*(0) (a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n) \\ &= a_1 (P^*(1) - e P^*(0)) + a_2 (P^*(2) - e^2 P^*(0)) \\ &\quad + \dots + a_n (P^*(n) - e^n P^*(0)). \end{aligned}$$

Siten voimme arvioida kolmioepäyhtälöllä ja lemmän 11 nojalla, että

$$\begin{aligned} |N| &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |P^*(k) - e^k P^*(0)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| k e^k \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=p-1}^d |c_\nu| k^\nu. \end{aligned}$$

Lemman 13 nojalla voimme arvioida viimeistä summaa

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=p-1}^d |c_\nu| k^\nu &= k^{p-1} (k+1)^p (k+2)^p \dots (k+n)^p \\ &\leq ((2n)!)^p. \end{aligned}$$

Siten saamme arvion

$$|N| \leq n e^n \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{((2n)!)^p}{(p-1)!}.$$

Valitsemalla lemmassa 3

$$\varepsilon = 1, \quad A = n e^n \sum_{k=1}^n |a_k| (2n)! \quad \text{ja} \quad B = (2n)!$$

löytyy positiivinen kokonaisluku Ξ siten, että $|N| < 1$ kunhan vain alkuluvun p valinnassa pidetään huolta, että $p-1 > \Xi$. Koska N oli kokonaisluku, on epäyhtälö $|N| < 1$ mahdollinen vain silloin, kun $N = 0$, ja olemme valmiit.

Yleistystä seurauksineen

Itse asiassa yllä annettu Hermiten lauseen todistus on voimallisempi kuin voisi ajatella. Nimittäin, samassa hengessä pystyy todistamaan huomattavasti yleisempiä ja vahvempia tuloksia, vaikka emme olekaan tehneet tässä niin. Eräs oleellisesti vahvempi tulos, jonka voi todistaa varsin samanlaisilla työkaluilla, jos lisäksi käytettävissä on hieman symmetristen polynomien ominaisuuksia ja algebrallisten lukujen perusominaisuuksia, on tällainen:

Lause (Hermiten–Lindemannin lause). Jos α on algebrallinen luku ja $\alpha \neq 0$, niin e^α on transkendentiaalinen luku.

Vaikka emme todista tätä lausetta tässä, on kenties valaisevaa nähdä, mitä kaikkea siitä seuraa:

Korollaari. Luku e on transkendentiaalinen.

Todistus. Koska luku 1 on selvästi nolasta poikkeava ja algebrallinen, on luvun $e = e^1$ oltava transkendentiaalinen. $\square$

Korollaari. Luku π on transkendentiaalinen.

Todistus. Jos luku π olisi algebrallinen, olisi myös luku $i\pi$ kahden algebrallisen luvun tulona algebrallinen. Se on myös selvästi nolasta poikkeava. Siten luvun $e^{i\pi}$ pitäisi olla transkendentiaalinen. Mutta Eulerin kauniin kaavan nojalla $e^{i\pi} = -1$ ja -1 ei ole transkendentiaalinen luku. Siten π on transkendentiaalinen luku. $\square$

Korollaari. Jos α on algebrallinen luku, $\alpha \neq 0$ ja $\alpha \neq 1$, niin $\log \alpha$ on transkendentiaalinen.

Todistus. Jos olisi $\log \alpha = \beta$ jollakin algebrallisella luvulla β , niin olisi toisaalta $\beta \neq 0$, ja toisaalta luku $e^\beta = \alpha$ olisi algebrallinen vastoin Hermiten–Lindemannin lausetta. $\square$

Korollaari. Jos α on algebrallinen luku ja $\alpha \neq 0$, niin $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ ovat transkendentiaalisia lukuja.

Todistus. Koska tunnetusti

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

seuraa tästä, että jos toinen luvuista $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ on algebrallinen, niin toinen on ratkaisu sellaiselle polynomiyhtälölle, jonka kertoimet ovat algebrallisia lukuja, ja siten myös algebrallinen. Jos $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ ovat transkendenttisia, niin olemme valmiita. Oletetaan siis, että $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ ovat algebrallisia. Tällöin myös luku

$$i \sin \alpha + \cos \alpha$$

olisi algebrallinen. Mutta toisaalta

$$i \sin \alpha + \cos \alpha = i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = e^{i\alpha},$$

ja viimeksi mainitun luvun on oltava transkendenttinen. Tämä ristiriita osoittaa, että $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ eivät voi olla algebrallisia. $\square$

Korollaari. Jos α on algebrallinen luku ja $\alpha \neq 0$, niin $\tan \alpha$ on transkendentiaalinen luku.

Todistus. Huomautetaan, että $\cos \alpha \neq 0$, koska muutoin α olisi luvun π monikerran puolikkaana transkendenttinen. Samasta syystä on oltava $\sin \alpha \neq 0$. Oletetaan siis, että olisi $\tan \alpha = \beta$ jollakin algebrallisella luvulla $\beta \neq 0$. Tällöin olisi

$$\beta = \tan \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}},$$

ja edelleen

$$i\beta e^{i\alpha} + i\beta e^{-i\alpha} = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha},$$

ja vielä sieventämällä

$$(1 - i\beta)e^{i\alpha} = (1 + i\beta)e^{-i\alpha}.$$

Jos $1 - i\beta = 0$, niin $1 + i\beta = 0$, koska eksponenttifunktion kaikki arvot ovat nollasta poikkeavia, ja tällöin olisi

$$\beta = \frac{1 + i\beta}{2i} - \frac{1 - i\beta}{2i} = 0 - 0 = 0.$$

Siten on oltava $1 - i\beta \neq 0$, ja voimme sieventää vielä kerran saadaksemme

$$e^{2i\alpha} = \frac{1 + i\beta}{1 - i\beta}.$$

Tässä $2i\alpha$ on nollasta poikkeava algebrallinen luku, ja yhtälön oikea puoli on algebrallinen, ja siten olemme saavuttaneet ristiriidan. $\square$

Samanlaisia transkendenttaalisuustuloksia voisi esittää myös muille tutuille transkendenttaalisille funktioille, kuten $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, arsinh , arcosh ja artanh , mutta sivuutamme yksityiskohdat tässä.

Mainittakoon lopuksi vielä yksi vahvempi tulos, jonka voi todistaa varsin samassa hengessä ja samoin työkaluin kuin Hermiten–Lindemannin lauseen:

Lause (Lindemannin–Weierstrassin lause). Jos n on positiivinen kokonaisluku, jos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ovat algebrallisia lukuja, joista mitkään kaksi eivät ole yhtä suuria, ja jos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ovat nollasta poikkeavia algebrallisia lukuja, niin

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0.$$

Kirjallisuudesta

Hermiten lause todistetaan monissa eri teoksissa, kuten vaikkapa [1, 3, 5, 7]. Tällaisissa transkendenttiodistuksissa yleinen integraalien tai väliarvolauseen soveltaminen on korvattu eksponenttifunktion Taylor-kehityksen käytöllä kirjan [5] lukujen e ja π transkendenttisuuksien todistuksia seuraten.

Hermiten–Lindemannin ja Lindemannin–Weierstrassin lauseen todistuksia löytyy vaikkapa teoksista [1, 3, 7], joista löytyy myös algebrallisten lukujen perusteoriaa. Algebrallisista luvuista perustietoa löytyy

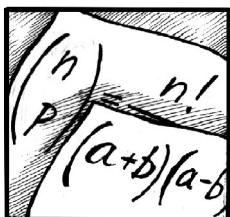
myös mainiosta kirjasta [6]. Vanha klassikkoteos [8] sisältää helposti lähestyttävässä muodossa materiaalia niin algebrallisista luvuista kuin sovellutuksista mm. yhtälöön $x^3 + y^3 = z^3$, yhtälöiden algebralliseen ratkeavuuteen ja harpilla ja viivaimella tehtäviin konstruktioihin.

Solmunkin sivuilla on aiemmin ilmestynyt aiheeseen liittyviä artikkeleita. Artikkelissa [2] irrationaalisista, algebrallisista ja transkendenttaalisista luvuista löytyy todistukset luvun e irrationaalisuudelle ja Liouvilien kauniille lauseelle, joka on yksinkertaisin tapa konstruoida konkreettisia transkendenttisia lukuja. Artikkelissa [4] on esitetty todistus lukujen π ja π^2 irrationaalisuudelle. Hermiten lauseen todistusta voi halutessaan verrata näihin lukujen e ja π irrationaalisuuksien todistuksiin.

Eksponenttifunktion perusteoriaa esitellään tämän numeron sivuilla 23–27 P. Alestalon artikkelissa *Eksponenttifunktio*.

Viitteet

- [1] BURGER, E. B., ja R. TUBBS: *Making Transcendence Transparent. An intuitive approach to classical transcendental number theory*, Springer, 2004.
- [2] ERNVALL-HYTÖNEN, A.-M.: *Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia*, Solmu, 3/2014, 12–15.
- [3] Гельфонд, А. О.: *Трансцендентные и алгебраические числа*, URSS, 2015.
- [4] LEHTINEN, M.: *Miksi π on irrationaalinen?*, Solmu, 2/2001, 6–8.
- [5] PERRON, O.: *Irrationalzahlen*, Göschens Lehrbücherei, Reine und angewandte Mathematik, 1, Walter de Gruyter & Co, 1960.
- [6] POLLARD, H., ja H. G. DIAMOND: *The Theory of Algebraic Numbers*, Dover Publications, 1998.
- [7] Шидловский, А. Б.: *Диофантовы приближения и трансцендентные числа*, Fizmatlit, 2007.
- [8] VÄISÄLÄ, K.: *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Tiedekirjasto, 17, Otava, 1961.



Eksponttifunktio

Pekka Alestalo

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto

Johdanto

Eksponttifunktio e^x on eräs tärkeimmistä matemaatiikassa ja varsinkin sen sovelluksissa esiintyvistä funktioista. Ainoa syy tähän on sen toteuttama differentiaaliyhtälö $De^x = e^x$, jota ilman (hieman liioitellen) kukaan ei olisi koskaan kuullutkaan Neperin luvusta e . Lukiokirjoissa eksponenttifunktiota käsitellään välillä hyvinkin huolettomasti, ja suppeimmasta päästä taitaa olla seuraava ”määritelmä”: Eksponttifunktion e^x arvo voidaan laskea laskimella jokaisella muuttujan x arvolla.

Syksyn 2017 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävässä 8 tutkittiin polynomeja

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

ja niiden yhteyttä eksponenttifunktioon e^x . Tehtävän b-kohdassa täytyi osoittaa, että $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla indekseillä $n = 2, 3, \dots$, joka muistuttaa eksponenttifunktion derivoimiskaavaa $De^x = e^x$. Laskun tärkein välivaihe on kaavan

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

keksiminen, mutta muuten siinä tarvitaan vain polynomien derivoimissääntöjä. Tämän kirjoituk-

sen tarkoituksena on selittää, kuinka polynomeista $P_n(x)$ päästään eksponenttifunktion täsmälliseen määritelmään, ja todistaa tarkasti kaikki sen ominaisuudet. Esitietona kannattaa tutustua kirjoitukseeni [1] Neperin luvusta, ja lisäksi tarvitaan joitakin perustietoja sarjojen käsittelystä; osa niistä kerrataan lyhyesti. Loppuosan ominaisuuksien perustelu noudattaa perinteistä tyyliä ja löytyy esimerkiksi viitteistä [7, luku VI], [4, Chapter 25] ja [5, Chapter 21]. Kaikissa näissä oletetaan kuitenkin aikaisemmin todistetut potenssisarjojen derivoimissäännöt, jotka tämän kirjoitelman yksinkertaisemmassa tilanteessa voidaan kiertää.¹

Määritelmä

Huolimattomasti päätellen yhtälöstä $P'_n(x) = P_{n-1}(x)$ voidaan ottaa raja-arvo, kun $n \rightarrow \infty$, jolloin päädytään funktioon $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, ja se toteuttaa vaaditun differentiaaliyhtälön $P'(x) = P(x)$. Raja-arvon olemassaolon lisäksi tähän liittyy kuitenkin vakavampi ongelma. Tarkasti ottaen raja-arvoa $n \rightarrow \infty$ sovelletaan yhtälöön

$$DP_n(x) = P_{n-1}(x).$$

Oikealla puolella

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}(x) = P(x)$$

¹Jos tästä kirjoituksesta jätetään kaikki ylimääräinen pois, niin varsinaiset todistukset tiivistyvät alle kahteen sivuun.

ilman suurempia ongelmia, mutta vasemmalla puolella tarvittaisiin ominaisuutta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} DP_n(x) = D \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = DP(x).$$

Toisaalta derivaatta D on (erotusosamäärän) raja-arvo, ja yleensä kahden raja-arvon järjestyksen vaihtaminen tuottaa hankaluksia.

Esimerkki 1. Lausekkeelle $\frac{k}{n+k}$ on voimassa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Kun näinkin yksinkertainen esimerkki osoittaa raja-arvojen vaihtamiseen liittyvän ongelman, niin on oikeastaan hyvin yllättävää, että derivaatan kohdalla operaatio on (yleensä) sallittu! Mutta tämä vaatii huolellista analysointia, johon seuraavaksi ryhdymme.

Määritelmä 2. Eksponenttifunktio $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ määritellään kaavalla

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 \dots,$$

kun $x \in \mathbf{R}$.

Siirtyminen polynomista sarjaan ei ole kuitenkaan aivan ongelmaton: Onko selvää, että sarja suppenee kaikilla muuttujan arvoilla $x \in \mathbf{R}$? Määritelmän perusteella ainoa helppo tapaus on $\exp(0) = 1$.

Vastauksen antaa tässä tapauksessa sarjoihin liittyvä suhdetesti.

Lause 3. (Suhdetesti) Jos sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ termeille on voimassa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

niin sarja suppenee.

Suhdetestin intuitiivinen perustelu on seuraava: Geometriselle sarjalle kahden peräkkäisen termin suhde $\frac{a_{k+1}}{a_k} = q$ on sarjan suhdeluku, josta sen suppeneminen määräytyy. Suhdetestin mukaan yleinen sarja suppenee, jos sen termit käyttäytyvät asympotoottisesti samalla tavalla kuin suppenevassa geometrisessa sarjassa.

Tarkemmin: Sarjan alkupää ei vaikuta sen suppenemiseen, joten voidaan olettaa, että $|a_{k+1}/a_k| \leq q < 1$ jollekin vakiolle q ja kaikille k . Tästä seuraa

$$|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq |a_{k-2}|q^2 \leq \dots \leq |a_0|q^k,$$

joten sarjalle saadaan suppeneva geometrinen majorantti. Näin ollen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppenee *Majoranttiperiaatteen*² nojalla.

Funktion $\exp$ tapauksessa $a_k = x^k/k!$, jolloin

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!} \right| = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$, joten sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Ensimmäinen yritys

Puutteellisia yrityksiä karttava lukija voi sivuuttaa tämän kappaleen kokonaan, katsoa apulauseen 4 ja siirtyä suoraan lauseeseen 6. Toisaalta tämä kappale antaa motiivointia myöhemmille laskuille.

Nyt kun sarjan suppeneminen on selvitetty, voidaan ryhtyä tutkimaan $\exp$ -funktion derivaattaa erotusosamäärän

$$\text{eom}(x, h) = \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

avulla. Yhdistämällä sarjat saadaan

$$\begin{aligned} \text{eom}(x, h) &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((x+h)^k - x^k) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ((x+h)^k - x^k), \end{aligned}$$

koska indeksin arvolla $k=0$ on $(x+h)^k - x^k = 0$. Sarjan sisällä olevaa erotusta voidaan käsitellä väliarvolauseen (viite [2])

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

avulla valitsemalla $f(x) = x^k$, $b = x+h$ ja $a = x$. Näin saadaan kaikilla $k \geq 1$

$$(x+h)^k - x^k = k c_k^{k-1} h,$$

jossa c_k on lukujen x ja $x+h$ välissä; tarkasti ottaen $c_k = c_k(x, h)$ riippuu myös muuttujista x ja h . Tämän perusteella

$$\begin{aligned} \text{eom}(x, h) &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot k c_k^{k-1} h \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} c_k^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{k+1}^k; \end{aligned}$$

viimeisessä vaiheessa on siirretty summausindeksiä $k-1 \mapsto k$, joka muuttaa myös alkukohdan $k=1 \mapsto k=0$.

Jos $x > 0$ ja $h > 0$, niin $x \leq c_{k+1} \leq x+h$ kaikilla k , joten erotusosamäärälle saadaan arviot

$$\exp(x) \leq \text{eom}(x, h) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+h)^k = \exp(x+h),$$

²Jos $|a_k| \leq p_k$ kaikilla k ja sarja $\sum_k p_k$ suppenee, niin sarja $\sum_k a_k$ suppenee.

sillä kaikki termit ovat positiivisia. Vastaavasti tapauksessa $x > 0$ ja $h < 0$ voidaan ensinnäkin olettaa, että $x + h > 0$, koska tutkimme raja-arvoa $h \rightarrow 0$. Tällöin $x + h \leq c_{k+1} \leq x$, ja saadaan

$$\exp(x+h) \leq \text{eom}(x,h) \leq \exp(x).$$

Jos osoitetaan, että $\exp$ -funktio on jatkuva, niin näistä kahdesta epäyhtälöstä seuraa (hienosti sanottuna *suppiloperaation*³ nojalla), että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{eom}(x,h) = \exp(x),$$

joka tarkoittaa samaa kuin $D \exp(x) = \exp(x)$.

Jatkuvuuden todistaminen ei ole erityisen vaikeaa, mutta sitä suurempi ongelma on alun oletus $x > 0$. Tapauksessa $x < 0$ yllä olevan laskun epäyhtälöt menevät sekaisin, eikä päättely enää suju. Koska tämä menetelmä ei näytä johtavan $\exp$ -funktion täydelliseen käsittelyyn, niin sivuutamme jatkuvuustodistuksen ja kokeilemme väliarvolauseen sijasta hieman tarkempaa approksimaatiota.

Aputulos

Funktion $\exp$ derivaatta täytyy laskea määritelmän eli erotusosamäärän avulla. Sitä helpottaa seuraava aputulos.

Apulause 4. Jos $x, h \in \mathbf{R}$ ja $k \in \mathbf{N}$, niin on olemassa sellainen $c_k \in [x, x+h]$, että

$$(x+h)^k = x^k + kx^{k-1}h + \frac{1}{2}k(k-1)c_k^{k-2}h^2. \quad (1)$$

Yllä oleva kaava saattaa näyttää omituiselta, mutta sen taustalla on yksinkertainen idea perustilanteessa $x, h > 0$. Oikean puolen kaksi ensimmäistä termiä ovat samat kuin binomikaavassa

$$(x+h)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} x^{k-m} h^m,$$

sillä $\binom{k}{0} = 1$ ja $\binom{k}{1} = k$. Koska $\binom{k}{2} = \frac{1}{2}k(k-1)$, niin kolmas termi muistuttaa binomikaavan kolmatta termiä $\binom{k}{2}x^{k-2}h^2$. Ja nyt vain yksi pointti: Korvaamalla tässä (jatkuvassa ja aidosti kasvavassa lausekkeessa) x sitä hieman suuremmalla luvulla c_k saadaan kaavaan (1) yhtäsuuruus ilman binomikaavan loppuosan termejä!

Apulauseen perustelu tapauksessa $x, h > 0$; muut tapaukset voidaan käsitellä samaan tyyliin, mutta tilanne muuttuu hankalammaksi. Sen vuoksi alla esitetään myös toinen todistus, jossa eri tapauksia ei tarvitse lainkaan erotella.

Edellä jo todettiin, miksi tällainen luku c_k on olemassa. Lisäksi $c_k \geq x$, sillä valinnalla $c_k = x$ oikea puoli sisältää vain binomikaavan kolme ensimmäistä termiä ja jää sen vuoksi liian pieneksi (paitsi tapauksessa $k=2$). Osoitetaan vielä, että arvolla $c_k = x+h$ oikean puolen lausekkeesta tulee liian suuri, joten $c_k \leq x+h$, ja väite seuraa. Sijoittamalla lausekkeeseen $\binom{k}{2}x^{k-2}h^2$ luvun x paikalle $x+h$ nähdään binomikaavan avulla, että termin $x^{k-m}h^m$ kertoimeksi tulee

$$\frac{1}{2}k(k-1)\binom{k-2}{m-2}.$$

Tämä on suurempi kuin vastaava kerroin kaavan (1) vasemmalla puolella, joka on binomikaavan mukaan $\binom{k}{m}$. Kaavan yhtäsuuruus pätee siis jollakin arvolla $x \leq c_k \leq x+h$.

Tehtävä 5. Perustele epäyhtälö

$$\frac{1}{2}k(k-1)\binom{k-2}{m-2} \geq \binom{k}{m}.$$

Apulauseen todistus: Apulause seuraa alla olevasta lauseesta 6 soveltamalla sitä funktioon $f(x) = x^k$. $\square$

Lause 6. Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kaksi kertaa derivoituva funktio; ts. $f''(x)$ on olemassa kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Jos $x, h \in \mathbf{R}$, niin on olemassa sellainen $c \in [x, x+h]$, että

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2. \quad (2)$$

Todistus⁴. Tarkastellaan apufunktiota

$$r(t) = f(t) - f(x) - f'(x)(t-x) - b(t-x)^2,$$

joka arvolla $t = x+h$ muistuttaa kaavan (2) vasemman ja oikean puolen erotusta; vakio b täytyy valita sopivalla tavalla myöhemmin, koska emme vielä tiedä luvun c merkitystä. Tällöin

$$\begin{aligned} r'(t) &= f'(t) - f'(x) - 2b(t-x) \text{ ja} \\ r''(t) &= f''(t) - 2b. \end{aligned}$$

Tavoitteena on löytää sellainen piste c , että $r''(c) = 0$. Derivaatan nollakohtia löytyy varsinaisen funktion nollakohtien välistä, joten valitaan vakio b niin, että $r(x+h) = 0$; tämä on mahdollista funktion $r(t)$ määritelmän perusteella. Tällöin $r(x) = r(x+h) = 0$, joten näiden lukujen välissä on derivaatan nollakohta c_1 , jolle siis $r'(c_1) = 0$. Toisaalta myös $r'(x) = 0$, joten lukujen x ja c_1 välissä on toisen derivaatan nollakohta c_2 : $r''(c_2) = 0$. Yhtälöstä $0 = r''(c_2) = f''(c) - 2b$ saadaan vakion b arvoksi

$$b = \frac{1}{2}f''(c).$$

Lauseen 6 kaava seuraa nyt yhtälöstä $r(x+h) = 0$ sijoittamalla siihen vakiolle b saatu lauseke ja valitsemalla $c = c_2$. $\square$

³Jos $u(h) \leq v(h) \leq w(h)$ jollakin välillä $h \in [h_0 - \delta, h_0 + \delta] \setminus \{h_0\}$ ja $\lim_{h \rightarrow h_0} u(h) = \lim_{h \rightarrow h_0} w(h) = L$, niin $\lim_{h \rightarrow h_0} v(h) = L$.

⁴Osa lukijoista tunnistaa tässä Taylorin kaavan helpoimman version todistuksen. Todistus on hieman lyhyempi osittaisintegroinnin tai ns. Cauchyn väliarvolauseen avulla, mutta tässä esitetty perustelu saattaa olla helpompi keksiä.

Ominaisuudet

Lause 7. Eksponenttifunktiolle on voimassa

$$D \exp(x) = \exp(x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Todistus. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $h \neq 0$. Tällöin Apulauseen perusteella⁵

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ((x+h)^k - x^k) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (kx^{k-1}h \\ &\quad + \frac{1}{2}k(k-1)c_k^{k-2}h^2), \end{aligned}$$

koska indeksin arvolla $k=0$ on $(x+h)^k - x^k = 0$. Sarja jakaantuu siis kahteen osaan, joista ensimmäinen sievenee muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} h &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \exp(x); \end{aligned}$$

välivaiheessa on siirretty summausindeksiä $k-1 \mapsto k$, joka muuttaa myös alkukohdan $k=1 \mapsto k=0$. Jälkimmäisen sarjan summaus voidaan kertoimen $k-1$ vuoksi aloittaa kohdasta $k=2$, joten se on muotoa

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} c_k^{k-2} h^2 = \frac{h}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} c_k^{k-2} \\ &= \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c_{k+2}^k \end{aligned}$$

kahden askeleen indeksinsiirrolla. Tässä $c_{k+2} = c_{k+2}(x, h)$ on lukujen x ja $x+h$ välissä, ja koska tutkimme raja-arvoa $h \rightarrow 0$, niin voidaan olettaa, että $|h| \leq |x|+1$; lisäys $+1$ tarvitaan erikoistapauksen $x=0$ vuoksi. Tällöin $|c_{k+2}| \leq |x| + |h| \leq 1 + 2|x|$, joten jälkimmäiselle sarjalle saadaan arvio

$$\begin{aligned} |E| &\leq \frac{|h|}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |c_{k+2}|^k \leq \frac{|h|}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1+2|x|)^k \\ &= \frac{|h|}{2} \exp(1+2|x|). \end{aligned}$$

Kiinteällä $x \in \mathbf{R}$ tämän ylärajan raja-arvo on nolla, kun $h \rightarrow 0$, joten exp-funktion erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x on $\exp(x)$. $\square$

Olemme nyt valmiit kokoamaan yhteen exp-funktion tärkeimmät ominaisuudet ja todistamaan ne. Viimeisessä kohdassa selviää myös exp-funktion yhteys lausekkeeseen e^x : ne ovat aivan samat!

Lause 8. Eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

- (i) $D \exp(x) = \exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
- (ii) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.
- (iv) $\exp: \mathbf{R} \rightarrow]0, \infty[$ on jatkuva ja aidosti kasvava bijektio.
- (v) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.
- (vi) $\exp(x) = e^x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, kun $e = \exp(1) \approx 2,71828\dots$ on Neperin luku.

Todistus. (i) Tämä todistettiin jo aikaisemmin, mutta mainitaan tärkeimpänä ominaisuutena vielä uudelleen.

(ii) Olkoon $f(x) = \exp(x)\exp(-x)$, kun $x \in \mathbf{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)D\exp(-x) \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0, \end{aligned}$$

joten f on vakiofunktio. Koska

$$f(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1 \cdot 1 = 1,$$

niin $f(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, josta ominaisuus (ii) seuraa.

(iii) Määritelmän perusteella

$$\exp(x) = 1 + x + \dots > 1 + x,$$

kun $x > 0$. Koska $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x) = \infty$, niin sama pätee sitä suuremmalle lausekkeelle $\exp(x)$. Raja-arvo tapauksessa $x \rightarrow -\infty$ seuraa tästä käyttämällä kohdan (ii) kaavaa.

(iv) Funktion derivoituvuudesta seuraa sen jatkuvuus. Määritelmän perusteella $\exp(x) \geq \exp(0) = 1$, kun $x \geq 0$, jolloin kohdan (ii) kaavasta seuraa $\exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Koska $D \exp(x) = \exp(x) > 0$, niin exp-funktio on aidosti kasvava. Arvojoukkoa ja bijektivisyyttä koskeva väite seuraa tämän jälkeen jatkuvuudesta ja kohdasta (iii).

(v) Olkoon $y \in \mathbf{R}$ jokin kiinnitetty luku. Tarkastellaan apufunktiota

$$g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)},$$

kun $x \in \mathbf{R}$. Kohdan (iv) perusteella lausekkeen nimittäjä ei ole nolla, joten g on hyvin määritelty. Osamäärän derivaattakaavan mukaan (lyhennetään tässä $e(x) = \exp(x)$ jne.)

$$g'(x) = \frac{e(x+y)e(x)e(y) - e(x+y)e(x)e(y)}{(e(x)e(y))^2} = 0,$$

⁵Apulauseen merkitys näkyy nyt hyvin, koska sarjan sisään jää vain kaksi termiä, eikä koko binomikaavaa.

joten g on vakiofunktio ja sen arvo on

$$g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)\exp(y)} = 1.$$

Koska $y \in \mathbf{R}$ voi olla mikä tahansa, niin kaava (v) seuraa tästä.

(vi) Tarkastellaan aluksi positiivista rationaalilukua $x = p/q$, kun $p, q \in \mathbf{N}$. Kaavan (v) perusteella

$$e = \exp(1) = \exp(\underbrace{1/q + \dots + 1/q}_{q \text{ kpl}}) = \exp(1/q)^q,$$

joten $\exp(1/q) = e^{1/q}$. Tämän avulla saadaan

$$\begin{aligned} \exp(p/q) &= \exp(\underbrace{1/q + \dots + 1/q}_{p \text{ kpl}}) = \exp(1/q)^p \\ &= (e^{1/q})^p = e^{p/q}. \end{aligned}$$

Vastaava tulos negatiivisille rationaaliluvuille p/q seuraa tämän jälkeen kaavasta (ii). Koska yhtälö $\exp(x) = e^x$ pätee kaikille rationaaliluvuille $x \in \mathbf{Q}$, niin exp-funktion jatkuvuuden nojalla se pätee⁶ myös kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Kaikki kohdat on nyt todistettu. $\square$

Pohdiskelua

Seuraavassa vielä kommentteja muista vaihtoehtoista exp-funktion määritelmäksi:

- Määritelmä rationaalisten eksponenttien e^r raja-arvona, kun $r \rightarrow x$: Periaatteessa luonnollista, mutta miksi tutkitaan jonkin kummallisen luvun e potensseja? Tämä lähestymistapa on selvitetty perusteellisesti viitteessä [3, kappaleet 6.1–2] tai [6, luku VI].
- Määritelmä raja-arvona

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Tässäkin on ideaa, mutta kallista aikaa kuluu kummallisten raja-arvojen pyörittelyyn. Sarjakehityksen käyttö sen sijaan johdattelee suoraan yleisempiin potenssisarjoihin ja niiden ominaisuuksiin.

- Määritellään ensin logaritmi funktion $f(t) = 1/t$ rajaamana pinta-alana välillä $1 \leq t \leq x$ ja eksponenttifunktio tämän käänteisfunktiona: Moninkertaista jälkiviisautta ja vaatii tarkasti ottaen integraalilaskentaa tai ainakin pinta-alan täsmällisen määritelmän.

Loppukaneetti

Tässä on vielä lopuksi hyvä tilaisuus korjata aikaisempaan Neperin lukua koskevaan kirjoitukseeni [1] jäänyt painovirhe: sivun 22 vasemman palstan kaavariviltä (4) puuttuu osa kertoimista. Kaavassa lukee

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right),$$

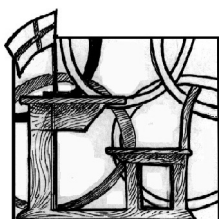
mutta oikea lauseke on muotoa

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Viitteet

- [1] Pekka Alestalo: Neperin luvun kahdet kasvot. Solmu 2/2015, 21–23.
- [2] Anne-Maria Ernvall-Hytönen: Väliarvolause: Mikä ihme ja miksi ihmeessä? Solmu 1/2018, 18–20.
- [3] P. Harjulehto, R. Klén, M. Koskenoja: Analyysiä reaali- ja kompleksiluvuilla. Unigrafia, Helsinki 2014.
- [4] Frank Morgan: Real Analysis. American Mathematical Society, 2005.
- [5] Frank Morgan: Real Analysis and Applications. American Mathematical Society, 2005.
- [6] Lauri Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1 korkeakouluja varten. Kirjayhtymä, Helsinki 1981.
- [7] Juhani Pitkäranta: Calculus Fennicus. Avoimet oppimateriaalit, 2015.
<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/calculus-fennicus/releases>

⁶Tässä oletetaan, että arvoilla $a > 0$ lauseke a^x on määritelty ja jatkuva muuttujan $x \in \mathbf{R}$ suhteen; vrt. esimerkiksi viite [3, kappale 6.1]. Toinen vaihtoehto on määritellä yleisesti $a^b = \exp(b \ln a)$, jolloin päädytään samaan tulokseen.



Bijektio kilpailijoiden ja tehtävien välillä: IMO 2018

Otte Heinävaara, Joonatan Honkamaa, Hermann Huhtamäki, Akseli Jussimäki, Olli Järvinen, Neea Palojarvi, Nerissa Shakespeare ja Selim Virtanen

Johdanto

Vuoden 2018 kansainväliset matematiikkaolympialaiset (IMO) järjestettiin heinäkuun alussa Cluj-Napocassa, Romaniassa. Suomea kilpailussa edustivat Joonatan Honkamaa, Hermann Huhtamäki, Akseli Jussimäki, Olli Järvinen, Nerissa Shakespeare ja Selim Virtanen. Joukkueenjohtajana toimi Neea Palojarvi ja varajohtajana Otte Heinävaara. Honkamaa ja Järvinen palkittiin pronssimitalein sekä Jussimäki ja Virtanen kunniamaininnoin. Mainiota menestystä täydensi vielä Suomen sijoittuminen sijalle 59, kun kilpailijamaita oli 107. Osallistuvien maiden määrään suhteutettuna tämä on paras tulos vuoden 2006 jälkeen!

Kilpailuun tietenkin valmistauduttiin ankaralla harjoittelulla. Joukkue leireili ennen kilpailua Åbo Akademissa, Turussa ja Sorøssa, Tanskassa. Lisäksi Järvinen vietti toisenkin viikon Tanskassa – tällä kertaa tosin itsenäisellä harjoitusleirillä. Tänä vuonna olympiajoukkueen matka Romaniaan herätti myös kiinnostusta Image-lehdessä. Lehden toimittaja vieraili matematiikkavalmennuksessa, matkasi kilpailijoiden kanssa Romaniaan ja kirjoitti tästä jutun Imageen. Kirjoituksen voi lukea lehden lokakuun numerosta.

Tämänkertaisissa tehtävien esittelyissä ratkaisuihin näkyy kilpailijoiden kynänjälki. Kuuden kilpailijan ja kuuden tehtävän välille voidaan nimittäin muodostaa bijektio. Yksi tällainen on muodostettu ja kukin

kilpailija esittääkin yhden ratkaisun yhteen kilpailutehtävään. Aktiivinen lukija voi vielä pohtia, mitä kaikkia muita bijektioita kilpailijoiden ja tehtävien välille voi muodostaa.

Kokouksia, keskustelua ja kulttuuria – IMO joukkueenjohtajan silmin

Toimin Suomen joukkueenjohtajana vuoden 2018 matematiikkaolympialaisissa Romaniassa. Minulle joukkueenjohtajuus kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa oli ensimmäinen laatuaan ja kuvailen tässä tekstissä kokemustani kolmella k-kirjaimella alkavalla sanalla. Nämä sanat ovat kokoukset, keskustelu ja kulttuuri.

Kokoukset. Joukkueenjohtajien ajasta valtaosa kuluu kokouksissa. Tavoitteena on valita kilpailuun tulevat tehtävät, muotoilla ne sopivaan muotoon kokeita ajatellen, kääntää ne kunkin maan kielelle, hyväksyä pisteytyskaaviot sekä päättää mitalien pisterajoista. Tavallisesti kokouksissa esiintyi paljon puheenvuoroja ja äänestyksiä. Pisteytyskaavioiden käsittelyä lukuun ottamatta kokoukset olivat varsin mielenkiintoisia niissä esiintyvien näkemystenvaihdon sekä vaikutusmahdollisuuksien takia. Tästä päästäänkin seuraavaan kohtaan eli keskusteluun.

Keskustelu. Kokouksissa joukkueenjohtajat esittivät paljon näkemyksiä eri asioista. Mieleenjäädävinä oli-

vat keskustelut kilpailutehtävistä. Suurin osa tästä keskustelusta pyöri tehtävien vaikeustason ympärillä, eikä eri tehtävien vaikeustasoista oltu lainkaan yksimielisiä. Esimerkiksi osa piti tehtävää 1 aivan liian helppona, kun taas toiset joukkueenjohtajat olivat sitä mieltä, ettei se ole lainkaan helppo, vaan jopa lähempänä keskivaikeaa tehtävää kuin helppoa. Tehtävän 3 osalta taas joukkueenjohtajien ja tehtävienvälikomitean välillä esiintyi mielenkiintoinen ristiriita tehtävän vaikeustason arvioinnissa: Tehtävienvälikomitean mielestä tehtävä 3 oli keskivaikea tehtävä, kun taas joukkueenjohtajat pitivät sitä erittäin vaikeana tehtävänä. Sanoisin joukkueenjohtajien olleen oikeammassa arviossaan, sillä alle kaksi prosenttia kilpailijoista ylsi jompaan kumpaan kahdesta korkeimmasta pistemäärästä tehtävässä 3 eli osasi mahdollisia minimaalisia virheitä lukuun ottamatta ratkaista tehtävän.

Tehtävien vaikeustason lisäksi myös tehtävien muotoilu nosti esiin keskustelua. Tehtävässä 4 piti alun perin pelata shakkilaudalla ratsuilla ja kuningattarilla eriväristen kiven sijasta. Tehtävänantoa kuitenkin muutettiin, sillä kaikissa maissa ei kuulemma harrasteta hirvittävästi shakinpeluuta ja shakkiviittauksen katsottiin antavan liikaa etua pelin pelaamista harrastaville.

Virallisten keskustelujen lisäksi joukkueenjohtajat keskustelivat toki myös kokousten ulkopuolella. Keskustelua syntyi niin kaikesta kilpailuihin liittyvästä kuin erilaisista vapaa-ajan aktiviteeteistakin. Käynnissä olevien jalkapallon MM-kisojen takia keskustelu pyöri ajoittain jalkapallon ympärillä. Osa joukkueenjohtajista osoittautui suuriksi jalkapallofaneiksi ja he järjestivät illalla kokousten jälkeen kokoushuoneeseen jalkapallokatsomon, vaikka jalkapalloa olisi voinut katsoa myös muutaman metrin päässä hotellin baarissa tai omissa huoneissa olevista televisioista. Itse laitoin nukkumisen ja kilpatehtävien parissa työskentelyn etusijalle, enkä osallistunut kisakatsomoihin.

Kulttuuri. Jalkapallon lisäksi kulttuurista pääsi nauttimaan järjestäjien järjestämän ohjelman avulla. Ensimmäisenä kokonaisena päivänä meidät vietiin koko päiväksi retkelle romanialaiselle maaseudulle syömään romanialaista ruokaa, seuraamaan kansantansseja ja ratkomaan kilpailun ehdokastehtäviä. Sää oli onneksi suotuista ja retki sujuikin leppoisissa merkeissä, joskin noin neljän tunnin edestä kansantanssiesitysten seuraamista oli hieman puuduttavaa.

Suurin kokemani herätys kulttuurin suhteen ei kuitenkaan tullut kansantanssiesityksistä, vaan siitä, kuinka suuressa arvossa kilpailua tunnuttiin Romaniasa pidettävän. Jotain osviittaa asiasta antaa ehkä se, että Romania on Bulgarian ohella ainoa maa, joka on osallistunut kaikkiin järjestettyihin 59 matematiikkaolympialaisiin, sekä kilpailut on pidetty jopa kuudesti Romaniassa. Jopa Romanian presidentti saa-

pui paikalle avajaisseremoniaan pitämään puheen. Varapääministeri taas kehotti kilpailijoita harkitsemaan politiikan uraa, sillä politiikkaan tarvitaan hänen mukaansa ihmisiä, jotka osaavat ajatella. Mielestäni tämä kertoo jotain siitä, että matematiikkaa osataan arvostaa myös ajattelun kehittäjänä, eikä sitä pidetä vain mekaanisten kaavojen toisteluna. Kilpailu oli ilmeisesti aika näkyvässä asemassa kaupungilla, sillä taksi-kuskitkin halusivat keskustella siitä ja ymmärtääkseni paikallinen televisiokanava näytti ainakin avajaiset ja päättäjäiset internetissä live-lähetyksenä.

Kaiken kaikkiaan joukkueenjohtajuus oli minusta hieno kokemus. Oli yleistä majoittua viiden tähden hotellissa mukavien joukkueenjohtajien kanssa sekä nauttia suomalaisten hyvistä vastauksista kilpatehtäviin. Positiivisen kokemuksen kruunasivat vielä hauska Suomen joukkue ja sen oikein hyvä menestys kilpailussa.

Neea Palojärvi

Matkakertomus – omatoiminen harjoitusleiri Tanskassa

Aloitin kolmen viikon pituisen matkani sunnuntai-
na 24.6. yksin Tampereen rautatieasemalta. Otin junan Helsingin lentoasemalle ja nousin koneeseen kohti Kööpenhaminaa. Laukkuni noutamisen jälkeen tapasinkin jo tanskalaisen Alexin, joka ajoi meidät Farumiin, noin puolen tunnin päähän Tanskan pääkaupungista. Farumissa olevalla koululla oli seuraavan viikon aikana luvassa vaatavien kilpailumatematiikan tehtävien ratkomista.

Ensimmäinen päivä meni suurilta osin asettumiseen, lepäämiseen ja ruuanlaittoon. Noin seitsemän hengen porukassa maittava ruoka saatiin kohtuullisella vaivalla lautaselle. Myöhemmin illalla pidimme vielä parin tunnin harjoittelusession, jonka jälkeen oli aika mennä nukkumaan. Yöpymistä varten käytössämme oli koulun liikuntasali, jonne sain patjakseni valtavan jumpapatjan varastosta.

Koulun sali oli varattu joka aamu kello kahdeksaksi kuoroharjoituksia varten, joten viikon aamurutiineihin kuului hampaidenpesun ja aamupalan syömisen lisäksi tavaroidemme raahaaminen salin läheiseen pukuhuoneeseen. Yllätyksekseni tanskalaisilla ei vielä ollut alkanut kesäloma: samalla viikolla tulisi olemaan koulun oppilaiden ”keväthuhlia”. Tämä ei kuitenkaan toimintaamme häirinnyt.

Maanantaina saimme leirin kunnolla käyntiin: harjoittelu jatkui ruokataukoja ja lepoa hetkiä lukuun ottamatta tauotta aamusta iltayhdeksään saakka. Matematiikasta hyvää irtaantumista antoi pöytäjalkapallo ja kävelylenkki.

Seuraavat päivät etenivät hyvinkin samanlaisella rutiinilla: aamujumppa tavaroiden siirtelyn parissa, hampaiden pesu, aamupala, matematiikkaa, ruokaa, matematiikkaa, ruokaa, kävelyä, matematiikkaa, pöytäjalkapalloa, nukkumaanmeno. Leirin edessä aloin itse kääntymään yhä enemmän kokkaamisen sijasta pakastepitsan puolelle taloudellisista ja ajankäytöllisistä syistä. Paikalla olleet kymmenisen matematiikan harrastajaa olivat suurilta osin tanskalaisia, ja osan ajasta olinkin ainoa ei-tanskalainen leirillä, mutta myös Norja ja Ruotsi olivat edustettuina.

Viikon aikana ratkaisemistani tehtävistä mieleenpainuvien oli seuraava:

USA:n harjoitteluleirin koe ELMO, 2018, T5

Olkoon m positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut b, c ja N , joilla

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^m \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{bn + c} \rfloor$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. Tässä $\lfloor x \rfloor$ kuvaa suurinta kokonaislukua, joka on enintään x .

Viikon aikana matematiikan lisäksi näin tanskalaista kulttuuria. Merkittävä huomio on koulujen loppuminen vasta kesäkuun lopussa. Pääsin näkemään koulun yläastelaisten kesälomalle siirtymistä, ja tämä oli varsinainen shokki: koulu oli järjestänyt juhlat, jossa oli runsas määrä alkoholia tarjolla. Juhlien valvojina olivat opettajat ja juhlijoiden vanhemmat. Kuulemma tämä on Tanskassa täysin normaali jokavuotinen tapahtuma. Tanskan lain mukaan kuka vain saa juoda alkoholia, mutta me emme tietenkään juhliin osallistuneet.

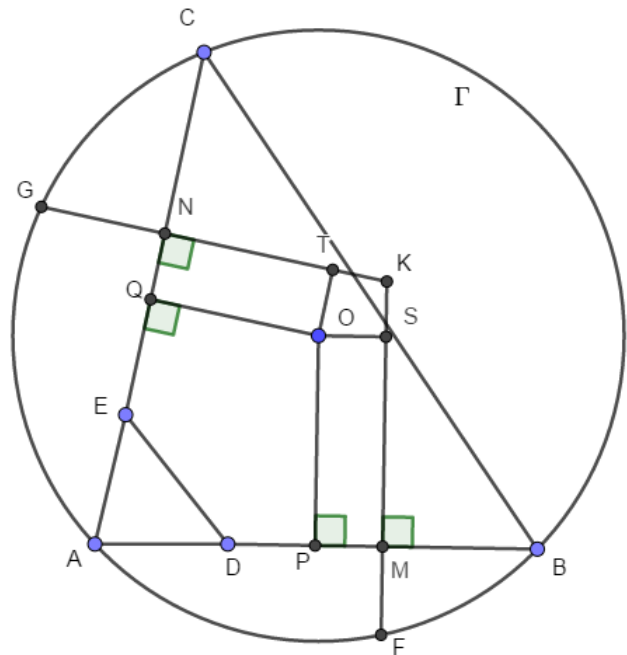
Viikon päätteeksi oli aika siirtyä Sørrossa sijaitsevalle pohjoismaiselle valmennusleirille. Matkustin junalla Suomen joukkuetta vastaan Kööpenhaminan lentokentälle, josta jatkoimme yhdessä leirille.

Olli Järvinen

Ensimmäisen koepäivän tehtävät ratkaisuneen

Tehtävä 1. Olkoon Γ teräväkulmaisen kolmion ABC ympäripiirretty ympyrä. Pisteet D ja E ovat vastaavasti sellaisia janojen AB ja AC pisteitä, että $AD = AE$. Janojen BD ja CE keskinormaalit leikkaavat ympyrän Γ lyhyemmät kaaret AB ja AC pisteissä F ja G vastaavasti. Osoita, että suorat DE ja FG ovat yhdensuuntaiset (tai ovat sama suora).

Ratkaisu. Olkoon kuvassa K annettujen keskinormaalien leikkauspiste. Piirtämällä pari mallikuvaa voidaan huomata, että kolmio KFG näyttää olevan tasakylkinen. Pienellä kulmanjahtauksella voidaan nähdä, että tällöin todistettava väite pätee, ja itse asiassa kolmion KFG tulee olla tasakylkinen, että väite pitäisi. Nyt siis yritämme osoittaa, että KFG on tasakylkinen. Itse huomasin tässä vaiheessa, että ympyrän Γ keskipiste O on kulman $\angle GKF$ puolittajalla, ja osoitin sitten, että $\triangle OKF \cong \triangle OKG$. Tässä esitetään nyt kuitenkin yksinkertaisempi ratkaisu, jonka idea on Joonatan Honkamaalta.



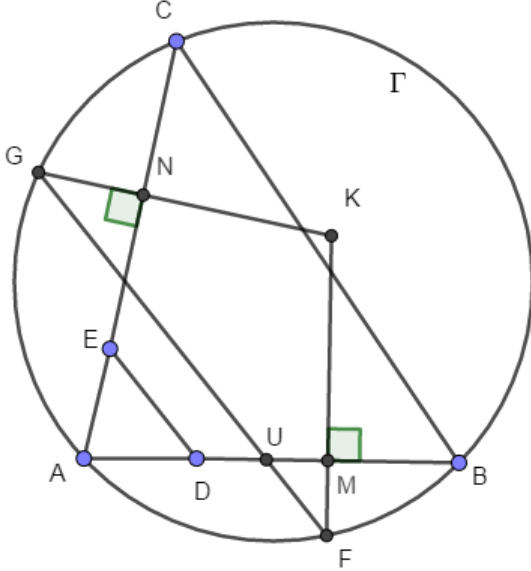
Koska $\angle OFG = \angle FGO$, niin riittää osoittaa, että $\angle KFO = \angle OGF$. Tämän todistamiseksi osoitetaan, että $\triangle OFS \cong \triangle OGT$, missä S on O :n kautta kulkevan, AB :n suuntaisen suoran ja janan KF leikkauspiste ja T vastaavasti O :n kautta kulkevan, janan AC suuntaisen suoran ja janan GK leikkauspiste. $OF = OG$ ja $\angle OSF = \angle GTO = 90^\circ$. Vielä halutaan osoittaa, että $SO = TO$. Tämä kohta todistetaan oman vastaukseni mukaan. Olkoot M KF :n ja AB :n leikkauspiste, P janan AB keskipiste, N KG :n ja AC :n leikkauspiste ja Q AC :n keskipiste. Tällöin PO on janan AB kohtisuora ja OQ janan AC kohtisuora, mistä seuraa, että $OS = PM$ ja $OT = QN$. Lasketaan nyt PM ja QN .

$$\begin{aligned} PM &= AM - AP = AD + DM - AP \\ &= AD + \frac{AB - AD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} QN &= AN - AQ = AE + EN - AQ \\ &= AE + \frac{AC - AE}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{AE}{2}. \end{aligned}$$

Mutta oletuksen nojalla $AD = AE$, eli $PM = QN$ ja $OS = OT$. Täten $\triangle OFS \cong \triangle OGT$ (ssk). Sivusuikulma on validi perustelu, koska kyseinen kulma on 90° , joten mahdollisia konfiguraatioita on vain yksi. Nyt siis $\angle SFO = \angle OGT$, eli $\angle KFG = \angle FGK$.



Olkoon U FG :n ja AB :n leikkauspiste. Haluamme nyt osoittaa, että $\angle EDA = \angle GUA$.

$$\begin{aligned}\angle GUA &= \angle FUM = 90^\circ - \angle MFU = 90^\circ - \angle KFG \\ &= 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle GKF}{2} = \frac{\angle GKF}{2} = \frac{\angle NKM}{2}.\end{aligned}$$

Koska $\angle ANK + \angle KMN = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, on nelikulmio $AMKN$ jännenelikulmio, joten $\angle NKM = 180^\circ - \angle MAN$. Siis

$$\angle GUA = \frac{180^\circ - \angle MAN}{2} = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2} = \angle EDA.$$

Siis $\angle GUA = \angle EDA$ ja $FG \parallel DE$.

Akseli Jussinmäki

Tehtävä 2. Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$, joita kohdi on olemassa sellaiset reaalityluvut $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$, että $a_{n+1} = a_1$ ja $a_{n+2} = a_2$ ja

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$.

Ratkaisu. Lukujonon kahta ensimmäistä jäsentä lukuun ottamatta kaikki jonon jäsenet määräytyvät kahden edellisen jäsenen perusteella. Lisäksi nähdään, että $a_1 = a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$ ja $a_2 = a_{n+2} = a_{n+1} a_n + 1$, joten luvut a_1 ja a_2 tavallaan määräytyvät lukujen a_{n-1} ja a_n sekä a_n ja a_1 avulla. Lukujono voidaankin ajatella lukuympyräksi, jossa on n kappaletta lukuja, ja jossa seuraava luku on aina kahden edellisen tulo lisätynä

yhdeksi. Tehtävämme on etsiä kaikki luvut $n \geq 3$, joilla tällainen lukuympyrä on olemassa.

Jaetaan nyt ratkaisu kahteen osaan:

Osa 1: Kaikilla kokonaisluvuilla n , joilla $3 \mid n$, haluttu lukuympyrä on olemassa.

Kun $n = 3$, valitaan $a_1 = 2$ ja $a_2 = -1$. Tällöin $a_3 = -1$, ja on helppo tarkistaa, että nämä luvut toimivat. Tämä konstruktio toimii myös yleisesti, kun $3 \mid n$, koska riittää, että lukuympyrä voidaan jakaa kolmen pituisiin pätkiin, joissa kaikissa on luvut $2, -1$ ja -1 keskenään samassa järjestyksessä. Tämä taas onnistuu, kun $3 \mid n$.

Huomautus. Edellä olevan konstruktion voi löytää esimerkiksi tutkimalla tapausta $n = 3$, ja ratkaisemalla tästä saatavan kolmen muuttujan yhtälöryhmän.

Osa 2: Millään kokonaisluvulla, jolla $3 \nmid n$, haluttua lukuympyrää ei ole olemassa.

Jaetaan todistus pienempiin osiin. Ideana on keksiä lukuympyrälle rajoittavia ehtoja.

Lemma 1. Missään kohtaa lukuympyrää ei voi olla kahta peräkkäistä positiivista lukua.

Todistus. Oletetaan, että jossakin lukuympyrän kohdassa on kaksi peräkkäistä positiivista lukua, olkoot ne a_i ja a_{i+1} . Nyt $a_{i+2} = 1 + a_i a_{i+1} > 1$, ja $a_{i+3} = 1 + a_{i+1} a_{i+2} > 1$, joten pätee $a_{i+4} = a_{i+3} a_{i+2} + 1 > a_{i+3}$. Induktiivisesti voidaan päätellä, että ympyrässä jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle $k > 3$ pätee $a_{i+k} > a_{i+k-1}$, eli lukujono on jostain pisteestään lähtien aidosti kasvava. Tällöin on selvästi mahdotonta, että lukuympyrässämme olisi vain äärellinen määrä lukuja. Päädyimme siis ristiriitaan vastaoletuksen kanssa, joten lemmän 1 täytyy päteä. $\square$

Lemma 2. Missään kohtaa lukuympyrää ei voi olla lukua 0.

Todistus. Oletetaan, että lukuympyrässä olisi luku 0. Nyt tätä nollaa seuraavat kaksi lukua olisivat ykkösiä, mikä johtaisi ristiriitaan lemmän 1 kanssa. Siis myös lemma 2 pätee. $\square$

Lemma 3. Jokaista ympyrän kahta peräkkäistä negatiivista lukua seuraa positiivinen luku.

Todistus. Olkoot jotkin ympyrän kaksi peräkkäistä negatiivista lukua a_i ja a_{i+1} . Nyt $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > a_i a_{i+1} > 0$ eli positiivinen. Siis lemma 3 pätee. $\square$

Lemma 4. Lukuympyrä ei voi olla sellainen, että joka toinen luku on negatiivinen ja joka toinen positiivinen.

Todistus. Oletetaan, että tällainen ympyrä on olemassa. Koska lukuympyrässä on vain äärellinen määrä positiivisia lukuja, täytyy jossakin kohtaa ympyrää olla

sellaiset kahden etäisyydellä toisistaan olevat positiiviset luvut a_i ja a_{i+2} , että $a_i \geq a_{i+2}$. Nyt a_{i+1} ja a_{i+3} ovat negatiivisia. Siispä $a_{i+2} > a_{i+3}$. Toisaalta $a_i a_{i+1} < a_{i+2} a_{i+1}$, joten $a_i a_{i+1} + 1 < a_{i+2} a_{i+1} + 1$, eli $a_{i+2} < a_{i+3}$. Päädyimme siis ristiriitaan, joten lemma 4 pätee. $\square$

Lemma 5. Lukuympeyrässä ei voi olla kahta positiivista lukua kahden etäisyydellä toisistaan.

Todistus. Oletetaan, että lukuympeyrässä on tällaiset luvut, olkoot vaikka a_i ja a_{i+2} . Lemmojen 1 ja 2 nojalla $a_{i-1} < 0$, $a_{i+1} < 0$ ja $a_{i+3} < 0$. Lisäksi voimme lemmän 4 nojalla olettaa, että lukuympeyrässä on sellainen kohta, jossa edellisten tietojen lisäksi $a_{i-2} < 0$. Jos tällaista kohtaa nimittäin ei olisi, niin lemmojen 1 ja 2 takia ainoa mahdollinen lukuympeyrän muoto olisi sellainen, jossa joka toinen luku olisi negatiivinen ja joka toinen positiivinen.

Nyt tiedämme, että $a_i = a_{i-1} a_{i-2} + 1 > 1$. Edelleen

$$\begin{aligned} a_{i+2} &> a_{i+3} \\ a_i a_{i+1} + 1 &> a_{i+1} a_{i+2} + 1 \\ a_i a_{i+1} &> a_{i+1} a_{i+2} \\ a_{i+2} &> a_i \\ a_{i+2} &> 1. \end{aligned}$$

Toisaalta $a_{i+1} a_i < 0$, joten $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 < 1$. Päädyimme siis ristiriitaan, joten lemmän 5 täytyy päteä. $\square$

Oletetaan sitten, että $3 \nmid n$. Nyt lemmojen 1, 2 ja 5 nojalla jokaista positiivista lukua tulee seurata kaksi negatiivista lukua, ja lemmän 3 nojalla jokaisen kahden negatiivisen luvun jälkeen tulee positiivinen luku. Siis lukuympeyrässä tasan joka kolmas luku on positiivinen. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, jos $3 \mid n$. Päädyimme siis ristiriitaan, joten ei ole olemassa lukuympeyrää, jonka lukujen määrä ei olisi kolmella jaollinen. Vastaus tehtävän kysymykseen on siis kaikki kokonaisluvut n , joilla $3 \mid n$.

Joonatan Honkamaa

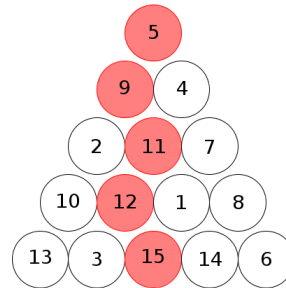
Tehtävä 3. *Anti-Pascal*in kolmio on tasasivuinen kolmion muotoinen taulukko lukuja, missä alimmaista riviä lukuun ottamatta jokainen numero on kahden välittömästi sen alla olevan luvun erotuksen itseisarvo. Esimerkiksi seuraava taulukko on anti-Pascalin kolmio, jossa on neljä riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ 5 & & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

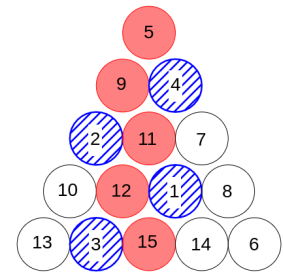
Onko olemassa sellainen anti-Pascalin kolmio, jossa on 2018 riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun $1 + 2 + \dots + 2018$?

Ratkaisu. Jokaiselle anti-Pascalin kolmiolle on mahdollista värittää *jono* seuraavalla tavalla (katso kuva 1):

- Jonon ensimmäinen jäsen on kolmion ylin luku (mallikuvassa luku 5).
- Jonon seuraavat jäsenet saadaan valitsemalla edellisen alapuolella olevista kahdesta luvusta suurempi.



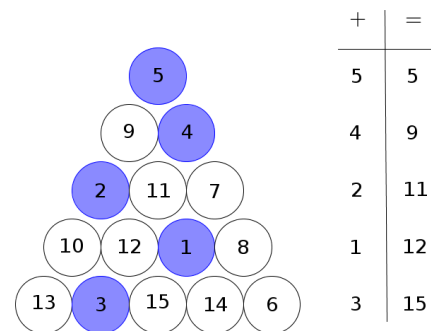
Kuva 1.



Kuva 2.

Merkitään jonon jäsenien lisäksi pienemmät luvut, jotka ovat välittömästi jonkin jonon jäsenen alapuolella (kuva 2).

Muodostetaan vielä kuva, johon merkataan kaikki edellä mainitut pienemmät luvut ja niiden lisäksi kolmion ylin luku (kuva 3).



Kuva 3.

Huomataan, että jonon ensimmäinen jäsen on kolmannen kuvan ensimmäinen luku, jonon toinen jäsen on kolmannen kuvan kahden ensimmäisen luvun summa ja jonon n :s jäsen on kolmannen kuvan n :n ensimmäisen luvun summa. Tämä voidaan todistaa induktiolla seuraavasti:

- Jonon ensimmäinen jäsen on määritelmän mukaan kolmion ylin luku eli myös kolmannen kuvan ylin luku.
- Jonon toinen jäsen voidaan ilmoittaa jonon ensimmäisen jäsenen ja kolmannen kuvan toisen jäsenen summana, koska anti-Pascalin kolmion määritelmän mukaan ylempi luku (merk. y) on kahden sen alapuolella olevan luvun erotuksen itseisarvo

(merk. a_1 ja a_2 , sovitaan $a_1 > a_2$). Todistus matemaattisin merkinnöin:

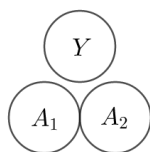
$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &= y \\ a_1 - a_2 &= y \\ a_1 &= y + a_2 \end{aligned}$$

Koska jonon ensimmäinen jäsen oli myös kolmannen kuvan ensimmäinen jäsen, voidaan jonon toinen jäsen ilmoittaa kahden kolmannen kuvan ensimmäisen luvun summana.

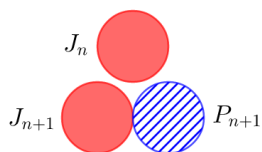
3. Vastaavalla tavalla voidaan todistaa että jonon $n + 1$:s jäsen on jonon n :nnen jäsenen ja kolmannen kuvan $n + 1$:nnen luvun summa. Ja induktio-oletuksen mukaan jonon n :s jäsen voitiin esittää kolmannen kuvan n :n ensimmäisen luvun summana, joten myös jonon $n + 1$:s jäsen on mahdollista esittää kolmannen kuvan $n + 1$:n ensimmäisen luvun summana.

Esimerkiksi mallikuvissa edellinen huomio havaitaan laskemalla, sillä jonon ensimmäinen jäsen on 5, joka on myös kolmannen kuvan ensimmäinen jäsen. Jonon toinen jäsen $9 = 5 + 4$, kolmas $11 = 5 + 4 + 2$, neljäs $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ja viides $15 = 5 + 4 + 2 + 1 + 3$.

$$\begin{aligned} Y &= |A_1 - A_2| \\ Y &= A_1 - A_2, \text{ jos } A_1 \geq A_2 \\ A_1 &= Y + A_2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} J_n &= |J_{n+1} - P_{n+1}| \\ J_n &= J_{n+1} - P_{n+1}, \text{ koska } J_{n+1} \geq P_{n+1} \\ J_{n+1} &= J_n + P_{n+1} \end{aligned}$$



Kuva 3,5.

Jonon viimeinen jäsen on siis kolmannen kuvan mukaisesti merkittyjen lukujen summa. Koska näitä lukuja on yhtä monta kuin anti-Pascalien kolmiossa rivejä, täytyy jonon viimeisen jäsenen suuruus olla vähintään $1 + 2 + \dots + n$, jossa n on rivien määrä. Koska tehtävänannon mukaan 2018-rivisen kolmion suurin sallittu luku on $1 + 2 + \dots + 2018$, mutta se on myös pienin mahdollinen jonon viimeinen luku, täytyy kolmannen kuvan mukaisten lukujen olla pienimmät mahdolliset. Tässä tapauksessa ne ovat siis $1, 2, \dots, 2018$.

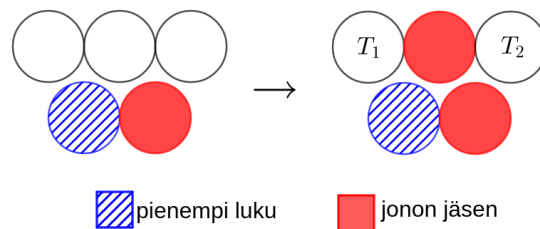
Palataan kuvaan 2, jossa oli merkattuina kaikki jonoon kuuluvat luvut ja myös jonon jäsenten alla olevat pienemmät luvut. Huomataan, että jokaisella rivillä ensimmäistä lukuun ottamatta on merkattuna tasan kaksi lukua, yksi jonon jäsen ja yksi pienempi luku sen vieressä. Lisäksi, koska jokainen jonon jäsen on edellisen alapuolella, kaartuu jono joka kohdassa tasan 60° kulmassa joko oikealle tai vasemmalle (vaakatasoon verrattuna).

Valitaan värittämättä jääneistä luvuista mahdollisimman suuri tasasivuinen kolmio, jonka yhden sivun muodostavat alareunan värittämättömät luvut siltä puolelta kahta merkittyä lukua, jolla niitä on enemmän.

Tällaisen kolmion sivun pituus on vähintään 1008 lukua, koska:

1. Alhaalla on 2018 lukua, joista kaksi on merkattu.
2. Nämä kaksi lukua sijaitsevat vierekkäin, jonka vuoksi jäljelle jäävät $2018 - 2 = 2016$ lukua sijaitsevat korkeintaan kahdessa eri ryhmässä.
3. Kun 2016 lukua jaetaan kahteen osaan, toisessa niistä on oltava vähintään 1008 lukua (laatikkoperiaate).

Mikään jonon jäsen ei voi sijaita tällaisen kolmion sisällä, koska tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60° , joka oli myös jonon suurin mahdollinen kulma. Lisäksi tulisi osoittaa, että myöskään pienemmät luvut eivät voi olla kolmion sisällä. Tämä on kuitenkin selvää, sillä alin pieni luku laitettiin kolmion ulkopuolelle, mistä seuraa, että jonon toiseksi viimeisen jäsenen molemmille puolille jää kaksi lukua, joista kumpikaan ei ole kolmion sisällä (Kuva 4; T_1 ja T_2). Tästä taas seuraa, että jokaisen ylemmän jonon jäsenen kummallekin puolelle jää myös tällaiset luvut, koska jonon kulma on korkeintaan 60° .



Kuva 4.

Nyt on siis todistettu, että on olemassa alkuperäistä kolmiota pienempi kolmio, joka ei sisällä mitään jonon jäsentä eikä mitään luvuista $1, 2, \dots, 2018$ ja jonka sivun pituus on vähintään 1008 lukua (Kuva 5).

Pieni kolmio on anti-Pascalien kolmio, koska se on osa isoa anti-Pascalien kolmiota. Sille voidaan siis muodostaa jono. Osoitetaan, että sen viimeiseksi luvuksi tulisi liian suuri, jotta tehtävänannon ehdot voisivat toteutua.

1. Pieni kolmio ei sisällä mitään luvuista $1, 2, \dots, 2018$, mutta siihen voidaan muodostaa kuitenkin vähintään $1008:n$ pituinen jono (kolmion rivimäärä).
2. Jonon viimeinen jäsen voidaan siis esittää vähintään 1008 erisuuren kononaisluvun summana, joista jokainen on suurempi kuin 2018.
3. Viimeisen jäsenen suuruudeksi tulee vähintään

$$\begin{aligned} &(2018 + 1) + (2018 + 2) + \dots + (2018 + 1008) \\ &= 1008 \cdot 2018 + (1 + 2 + \dots + 1008). \end{aligned}$$

4. Tämä on kuitenkin suurempi kuin tehtävänannossa mainittu luku $1 + 2 + \dots + 2018$.

Todistus.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 2018 &= (1 + 2 + \dots + 2016) + 2017 + 2018 \\ &= \frac{2016 \cdot 2017}{2} + 2017 + 2018 \\ &= 1008 \cdot 2017 + 2017 + 2018 \end{aligned}$$

Vähennetään tämä luku viimeisen jäsenen pienimmistä mahdollisesta suuruudesta:

$$\begin{aligned} 1008 \cdot 2018 + (1 + \dots + 1008) \\ - (1008 \cdot 2017 + 2017 + 2018) \end{aligned}$$

Vähennetään $1008 \cdot 2017$:

$$= 1008 + (1 + \dots + 1008) - 2017 - 2018$$

Vähennetään $1008 + 2 + 1008 = 2018$:

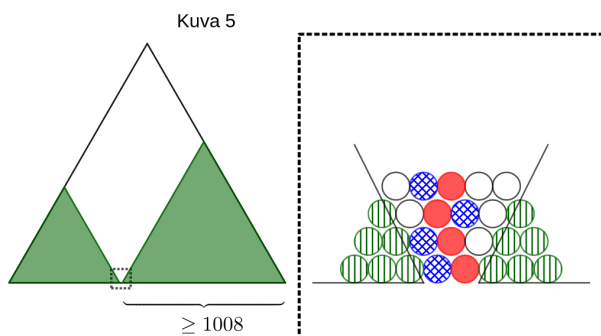
$$= 1 + (3 + 4 + \dots + 1007) - 2017$$

Vähennetään $4 + 1006 + 1007 = 2017$:

$$= 1 + 3 + (5 + 6 + \dots + 1005) > 0.$$

□

Koska pieneen kolmioon kuuluvasta luvusta tulisi välttämättä isompi kuin tehtävänannossa kerrottu suurin luku, ei ole mahdollista muodostaa 2018-rivistä anti-Pascalin kolmiota, joka täyttäisi tehtävänannon vaatimukset.



Hermanni Huhtamäki

Toisen koepäivän tehtävät ratkaisuihin

Tehtävä 4. *Tontti* on mikä tahansa tason piste (x, y) , missä x ja y ovat molemmat positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 20.

Aluksi kukin 400 tontista on vapaa. Amy ja Ben laittavat tonteilla vuorotellen kiviä ja Amy aloittaa. Omalla

vuorollaan Amy laittaa uuden punaisen kiven sellaiselle vapaalle tontille, jonka etäisyys mistä tahansa varatus-tontista, missä on punainen kivi, ei ole $\sqrt{5}$. Omalla vuorollaan Ben laittaa uuden sinisen kiven vapaalle tontille. (Tontti, jossa on sininen kivi, voi olla millä tahansa etäisyydellä mistä tahansa muusta tontista.) Peli loppuu, kun jompikumpi pelaajista ei voi enää lisätä kiveä.

Etsi suurin K , jolla Amy voi varmasti laittaa ainakin K punaista kiveä riippumatta siitä, miten Ben laittaa siniset kivensä.

Ratkaisu. Hankitaan ensin konstruktiolla alaraja $K \leq 100$, ja sen jälkeen todistetaan, että sama arvo on myös yläraja.

Tontteja voidaan tarkastella 20×20 -ruudukkona. Punaisesta kivistä X torjuttu ruutu O on $\sqrt{5}$ päässä Pythagoraan lauseen mukaisesti tasan silloin, kun etäisyys on yhteen suuntaan 1 ja toiseen 2. Toisin sanoen X torjuu samoin kuin shakin ratsu.

Väritetään ruudukko shakkilaudan tavoin, jolloin sekä mustia että valkoisia ruutuja on puolet eli 200. Jos X on mustalla ruudulla, ovat kaikki O :t valkoisia. Näin ollen jos Ben ei pelaisi, voisi jokaiseen mustaan ruutuun laittaa X :n. Benin on kuitenkin mahdollista torjua jokaista X kohden yksi musta ruutu. Näin ollen X :n saa puoleen mustista, joten vain mustiin pelaamalla Amy saa varmasti laudalle 100 kiveä. Siispä $K \geq 100$.

Todistetaan, että $K \leq 100$ osoittamalla, että Ben voi pelata siten, että Amy ei voi saada laudalle yli 100 kiveä. Jaetaan lauta pienempiin 4×4 -ruudukkoihin, joita on 25. Pelatkoon Ben vuoroparilla aina samaan ruudukkoon kuin Amy. Riittää osoittaa, että Ben voi pelata siten, että Amy ei saa yhteen ruudukkoon yli 4 kiveä, jolloin hän ei voi saada koko laudalle yli 100 kiveä.

Tähän vaiheeseen on olemassa sekä helppo, mutta aikaavievä, että fiksu tapa.

Itse tein kisassa helpolla tavalla: "brute forcella", eli käymällä läpi kaikki tapaukset. Sanotaan, että Ben voittaa, jos Amyllä on ruudukossa korkeintaan 4 kiveä, eikä hän voi laittaa yhtään lisää. Kokeilemalla huomataan, että Amyn edellisen siirron pelaaminen ruudukon keskikohdan kautta lienee Benille voittostrategia. Seuraavaksi käydään symmetriat huomioiden läpi kaikki mahdolliset tapaukset.

Ensimmäisellä vuoroparilla Amyllä on 3 symmetriat huomioiden uniikkia siirtoa, mutta naiivisti edetessä erilaisten tapausten määrä kasvaa seuraavalle kierrokselle jo 21:een. Jos kuitenkin tarkastellaan laudan tilaa sen suhteen, mihin ruutuihin Amyn on mahdollista vielä siirtää, tuottavat jotkut tapauksista samoja tiloja, joita voi todeta siirtojen järjestyksellisten ja

vaikutuksellisten symmetrioiden perusteella tai tarkastelemalla yksittäistapauksia, jolloin uniikkeja tiloja on toisen vuoroparin jälkeen 11. Toisaalta tilat, joissa on ainoastaan samoja vapaita ruutuja kuin toisessa vaikeammassa tilassa, voidaan sisällyttää vaikeampaan tilaan, sillä ylimääräiset varatut ruudut eivät edesauta Amyn voittoa, joten 11 tilaa supistuu kolmannelle vuoroparille kolmeksi tuottaen 10 mahdollista siirtoa. Samankaltaisella yhdistämisellä ja sisällyttämisellä saadaan neljättä vuoroparia varten 2 tilaa, jotka on helppo todeta Benin voittoasemiksi.

Tästä tavasta seuraa parin sivun mittainen epäselvien merkintöjen ja puutteellisten perustelujen viidakko, jota tarkastajien on mukava tulkata pisteistä taistellesaan. Kellon näyttäessä kahta jäljellä olevaa tuntia oli kova taktinen valinta sen välillä, yrittääkö brutea, jonka tietää aikaavieväksi, vai miettiikö ovelampaa tapaa jättäen yhä vähemmän aikaa brutelle, mikäli ei keksi. Itselläni aikaa kului tähän yli puolitoista tuntia, ja välillä meinasikin usko loppua kesken, mutta lopulta saatiin napattua täydet pisteet.

Fiksumpi tapa on 4×4 -ruudukkojen värittäminen 4 värillä seuraavasti:

Pelatessaan ruutuun Amy torjuu myös kaksi muuta samanväristä ruutua, jonka jälkeen Ben voi pelata viimeiseen samanväriseen ruutuun. Näin ollen jokaisella vuoroparilla Amyn on pelattava eriväriseen ruutuun, joten hän saa ruudukkoon korkeintaan 4 kiveä.

On siis osoitettu, että Amy voi saada 4×4 -ruudukkoon korkeintaan 4 kiveä eli 20×20 -ruudukkoon korkeintaan 100 kiveä, mutta toisaalta että hänellä on varma strategia vähintään 100 saamiseen. Siispä $100 \leq K \leq 100$ eli $K = 100$.

Vastaus: $K = 100$.

Selim Virtanen

Tehtävä 5. Olkoon $a_1, a_2, \dots$ päättymätön jono positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että on olemassa kokonaisluku $N > 1$, jolle jokaista $n \geq N$ kohti luku

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

on kokonaisluku. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku M , että $a_m = a_{m+1}$ kaikilla $m \geq M$.

Toinen kisapäivä kisaajan silmin

Lähdin kisapäivään melko huonolla mielialalla: olin aamiaspöydässä tajunnut ykköstehtävän ratkaisuni olevan virheellinen. Toiveeni hopeamitalista alkoivat hiipumaan, ja pyrin saamaan edes pronssimitalin. Tämä

kuitenkin vaatisi paremman suorituksen kuin ensimmäisenä päivänä.

Edellisenä päivänä olin kommentoinut, että huomisen koepaperi voi olla ”tupla tai kuitti”: oli tiedossa, että neljäs ja viides tehtävä tulisivat olemaan kombinatoriikkaa ja lukuteoriaa, koska ensimmäisen päivän ensimmäiset tehtävät olivat olleet geometriaa ja algebraa. Jos kombinatoriikka sattuisi olemaan neljäntenä ja lukuteoria viidentenä, olisi mahdollista, että saisin joko molemmat tai en kumpaakaan tehtyä. Tämän takia sykkeeni nousi hetkellisesti kilpailun alkaessa ja nähdessäni lukuteorian asettuneen viidennen tehtävän kohdalle.

Vaikka lukuteoria on selvästi vahvin osa-alueeni, päätin silti ensin yrittää helpoimmaksi rankattua kombinatoriikan tehtävää. Ajatukseni kuitenkin väistämättä alkoivat pomppia lukuteoriaan, ja 45 minuuttia nelostehtävään käytettyäni annoin periksi lukuteorian vetovoimalle.

Ensimmäinen ideani oli tutkia kahden vastaavan summan erotusta. Tämä tuntui selvältä heti tehtävän nähdessäni, mutta antoi pienellä jatkolla jo yhden pisteen. Sitten päästiin itse vaikeaan osuuteen tehtävästä, mikä kuitenkin ratkesi vastaavalla idealla kuin muutama harjoitustehtävä, johon olin törmännyt aiemmin. Noin puoli tuntia tehtävää mietittyäni minulla olikin jo karkea ratkaisu tehtävään. Aloitin ratkaisun kirjoittamisen puhtaaksi, ja kaikki tuntui sujuvan hyvin, kunnes jokin asia jäi tökkimään. Luulin joitakin minuutteja, että tarvitsisin uuden idean ratkaisun läpiviemiseksi, mutta korjattuani kirjoitusvirheen kolmannelta sivulta ratkaisuani sain todistukseni toimimaan.

Koko tehtävään kului alusta loppuun reilu tunti, ja hyvin pian ratkaisun kirjoitettuani sain myös neljännen tehtävän ratkaistua. Minulla oli tämän jälkeen pari tuntia aikaa kutostehtävän parissa, johon en kuitenkaan saanut juurikaan edistystä. Ykköstehtävää koskevasta virheestä viisastuneena tarkistin ratkaisuni neljänteen ja viidennen tehtävään useammin kuin mitä olisin jaksanut normaalioloissa, ja sainkin näistä täydet pisteet. Kutostehtävästäkin onnistuini keräämään yhden irtopisteen.

Ratkaisu. Todistetaan tehtävänannon väite vastaoletuksella. Oletetaan, että jono a_n ei ole vakio mistään pisteestä lähtien. Ratkaisun ajan muuttujalla p viitataan aina alkulukuun.

Olkoon

$$S(n) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}.$$

Sillä $S(n)$ on kokonaisluku kaikilla $n \geq N$, on myös erotus $S(n+1) - S(n)$ kokonaisluku suurilla n :n arvoilla. Erotuksen lauseke on seuraavanlainen:

$$\begin{aligned} S(n+1) - S(n) &= \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} \\ &= \frac{a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}}{a_1 a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Tiedämme siis, että $a_1 a_{n+1}$ jakaa lausekkeen $a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}$ kaikilla $n \geq N$. Määritellään helppolukuisuuden vuoksi $f(n) = a_1 a_{n+1}$ ja $g(n) = a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}$. Siispä $f(n) \mid g(n)$.

Olko p mielivaltainen alkuluku. Määritellään $v_p(k)$ olemaan se kokonaisluku m , jolla p^m jakaa luvun k , mutta p^{m+1} ei jaa. $v_p(k)$ on hyvin määritelty kaikille kokonaisluvuille k . Määrittelemme $v_p(0) = \infty$ kaikille p .

Lemma 1. On olemassa sellainen p , jolla $v_p(a_{n+1}) \neq v_p(a_n)$ äärettömän monella n .

Todistus. Osoitetaan ensin, että on vain äärellisen monta alkulukua, jotka jakavat jonkin jonon a_n termeistä. Tiedämme, että $f(n) \mid g(n)$. Koska $a_{n+1} \mid f(n)$, a_{n+1} jakaa luvun $g(n) = a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_n a_1$. Täten $a_{n+1} \mid a_n a_1$. Osoitetaan nyt, että jokaisen luvun a_n , missä $n > N$, alkutekijät esiintyvät joko luvun a_N tai a_1 alkutekijöissä. Todistetaan tämä vasta oletuksella: nyt on olemassa pienin luku $i > N$, jolla luvulla a_i on jokin alkutekijä p , joka ei jaa tuloa $a_N a_1$. Mutta $a_i \mid a_{i-1} a_1$, eli $p \mid a_{i-1} a_1$. Sillä p ei jaa lukua a_1 , sen tulee jakaa luku a_{i-1} . Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että i on pienin ehdon toteuttava indeksi. Sillä luvuilla $a_1, a_2, \dots, a_N$ on vain äärellisen monta alkutekijää, on olemassa vain äärellisen monta alkulukua, jotka jakavat jonkin jonon a_n termeistä.

Oletetaan nyt, että halutunlaista p ei ole olemassa. Valitaan nyt mielivaltainen q . Jos q ei jaa mitään termiä jonosta $a_1, a_2, \dots$, on tietysti $v_q(a_{n+1}) = v_q(a_n)$ kaikilla n . Tutkitaan nyt niitä q , jotka jakavat jonkin jonon termeistä. Näitä on edellisen nojalla vain äärellisen monta. Jokaista tällaista q kohden on olemassa jokin M_q , jolla $v_q(a_{n+1}) = v_q(a_n)$ kaikilla $n \geq M_q$. Voimme nyt valita maksimin luvuista M_q , ja tämä kelpaisi tehtävänannon kaltaiseksi luvuksi M . Tämä on ristiriidassa aiemmin tehdyn oletuksen kanssa, jonka mukaan jono a_n ei ole vakio mistään pisteestä lähtien. Siispä tällainen p on olemassa, ja lemmän väite on todistettu. $\square$

Olko nyt t jokin lemmän 1 mukainen alkuluku. Määritellään $b_n = v_t(a_n)$ kaikilla n . Tutkitaan nyt lukujonon b_n ominaisuuksia. Tiedämme, että $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella n . Muita ominaisuuksia varten todistamme ensin seuraavan lemmän.

Lemma 2. $v_p(a \pm b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$ kaikilla p, a, b . Lisäksi aito epäytälö vaatii $v_p(a) = v_p(b)$.

Todistus. Olkoon $c = \min(v_p(a), v_p(b))$. $p^c \mid a \pm b$, joten $v_p(a \pm b) \geq c$. Jos $v_p(a) \neq v_p(b)$, niin p^{c+1} jakaa täsmälleen toisen luvuista a ja b . Tällöin p^{c+1} ei jaa lukua $a \pm b$, joten $v_p(a \pm b) = c$. $\square$

Lemma 3. Jos $b_{n+1} > b_n$ ja $n \geq N$, niin $b_{n+1} = b_1$.

Todistus. Tiedämme, että $f(n) \mid g(n)$. Täten $v_t(f(n)) \leq v_t(g(n))$. Osoitetaan, että jos $b_{n+1} \neq b_1$, niin onkin $v_t(f(n)) > v_t(g(n))$, mikä todistaa väitteen. Jos $b_{n+1} > b_1$, niin $v_t(g(n)) = v_t(a_{n+1}^2 + a_n a_1 - a_{n+1} a_n)$. Laskemme jokaiselle summattavalle vastaavan t :n eksponentin: $v_t(a_{n+1}^2) = 2b_{n+1}$, $v_t(a_n a_1) = b_n + b_1$, ja $v_t(a_{n+1} a_n) = b_{n+1} + b_n$. Tehtyjen oletusten avulla saamme $2b_{n+1} > b_{n+1} + b_n > b_1 + b_n$. Lemmaa 2 käyttäen nyt on $v_t(g(n)) = b_n + b_1 < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$, ristiriita. Käsitlemme tapauksen $b_{n+1} < b_1$ vastaavasti. Tällöin $v_t(g(n)) = b_{n+1} + b_n < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$. Lemman tulos siis pätee. $\square$

Lemma 4. Jos $b_{n+1} < b_n$ ja $n \geq N$, niin $b_{n+1} \geq b_1$.

Todistus. Oletetaan, että $b_{n+1} < b_1$, tavoitteena saada ristiriita. Tällöin $v_t(g(n)) = 2b_{n+1}$, sillä $v_t(a_{n+1}^2) < v_t(a_n a_1)$ ja $v_t(a_{n+1}^2) < v_t(a_{n+1} a_n)$. Mutta $2b_{n+1} < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$, ristiriita. Lemman tulos siis pätee. $\square$

Lemma 5. On olemassa sellainen $n \geq N$, jolla $b_n = b_1$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, tavoitteena saada ristiriita. Nyt, jos $b_{n+1} > b_n$ jollain $n \geq N$, on lemmän 3 nojalla $b_{n+1} = b_1$, mikä ei käy. Siis $b_{n+1} \leq b_n$ kaikilla $n \geq N$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $b_n \geq 0$ kaikilla $n \geq N$, ja $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella n . Lemman tulos siis pätee. $\square$

Valitaan sellainen $k \geq N$, jolla $b_k = b_1$. Jos $b_{k+1} = b_k$, kasvatamme k :ta yhdellä, kunnes päädymme kohtaan, jossa $b_{k+1} \neq b_k = b_1$. Tämä tapahtuu äärellisessä määrässä askelia, sillä $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella n . Voimme siis olettaa $b_{k+1} \neq b_k$. Tutkitaan nyt luvun b_{k+1} mahdollisia arvoja.

Jos $b_{k+1} > b_k$, on lemmän 3 nojalla $b_1 = b_{k+1} > b_k = b_1$, ristiriita.

Jos $b_{k+1} < b_k$, on lemma 4 nojalla $b_1 \leq b_{k+1} < b_k = b_1$, ristiriita.

Olemme saaneet ristiriidan. Siis oletus siitä, että jono a_n ei ole vakio mistään pisteestä lähtien, on mahdoton, ja näin ollen tehtävänannon väite pätee.

Olli Järvinen

Tehtävä 6. Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on voimassa $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Nelikulmion $ABCD$ sisällä on sellainen piste X , että

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ja} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

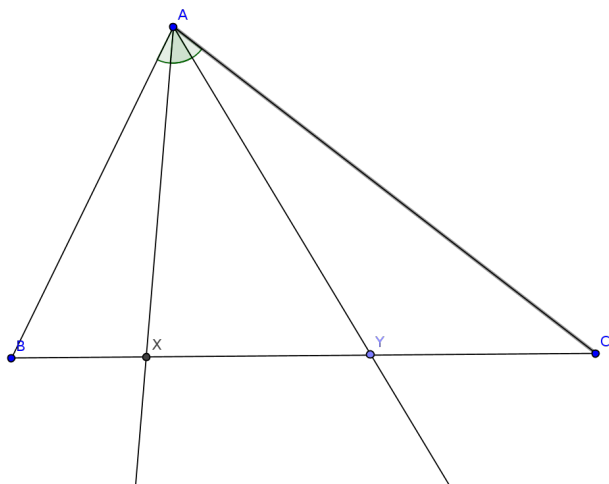
Osoita, että $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

Tähän tehtävään on olemassa monta ratkaisua ja tästä konfiguraatiosta voi saada mielenkiintoisia ominaisuuksia, jotka eivät auta tehtävän ratkaisuun. Esittelen tässä erään ratkaisun.

Ratkaisu. Määritellään piste K janalla BD siten, että $\angle CAB = \angle KAD$.

Lemma 1. Olkoon kolmion ABC sivulla BC pisteet X ja Y . Tällöin $\angle BAY = \angle CAX$, jos ja vain jos

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY}.$$



Todistus. Sinilauseen nojalla

$$\frac{\sin \angle BAX}{BX} = \frac{\sin \angle AXB}{AB}$$

$$\frac{\sin \angle AYC}{AC} = \frac{\sin \angle CYA}{CY}$$

$$\frac{\sin \angle AXC}{AC} = \frac{\sin \angle CAX}{CX}$$

$$\frac{\sin \angle BAY}{BY} = \frac{\sin \angle AYB}{AB}.$$

Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saamme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \sin \angle BAX \sin \angle AYC \sin \angle AXC \sin \angle BAY \\ &= \frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} \sin \angle AXB \sin \angle CAY \sin \angle CAX \sin \angle AYB. \end{aligned}$$

Nyt jos $\angle BAY = \angle CAX$, niin myös $\angle BAX = \angle CAY$, ja lisäksi $\sin(\angle AYC) = \sin(\angle AYB)$ ja $\sin(\angle AXC) = \sin(\angle AXB)$. Sinilausekkeet kumoavat siis pareittain toisensa ja täten

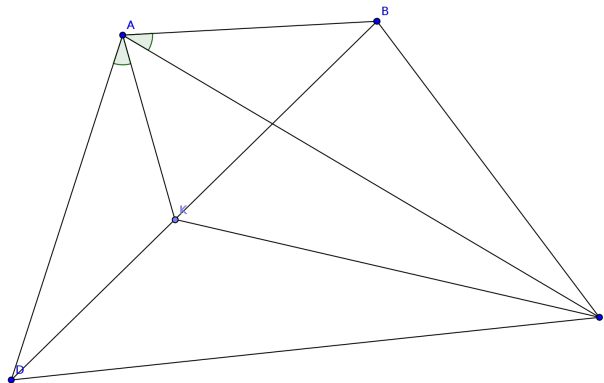
$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY}. \quad (1)$$

Toisaalta jos (1) pätee, niin aikaisempien sinilauseiden avulla saamme

$$\frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} \frac{\sin \angle CAY \sin \angle CAX}{\sin \angle BAX \sin \angle BAY}. \quad (2)$$

Mutta nyt on oltava, että $\angle CAY = \angle BAX$. Nimittäin jos esimerkiksi $\angle CAY > \angle BAX$, niin myös $\angle CAX > \angle BAY$, jolloin (2) ei voi päteä. $\square$

Lemma 2. Olkoon ABCD kuten tehtävänannossa ja K kuten määritelmässä. Tällöin $\angle AKB = \angle CKB$.



Todistus. Olkoon kulman $\angle DAB$ puolittajan kantapiste janalla DB I ja kulman $\angle BCD$ vastaavasti J . Koska nelikulmiossa pätee $AB \cdot CD = BC \cdot DA$, niin kulmanpuolittajalauseen nojalla

$$\frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} = \frac{BJ}{JD}.$$

Tästä seuraa, että

$$BI \cdot JD = BJ \cdot ID.$$

Jos I ja J ovat eri pisteet, niin voimme olettaa menettämättä yleistävyyttä, että $BI > ID$. Tästä seuraa myös $JD > BJ$. Tällöin $BI \cdot JD > BJ \cdot ID$, joka on ristiriita, joten $I = J$. Kulmanpuolittajat siis leikkaavat samassa pisteessä.

Olkoon L lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Kolmiolle ABC pätee lemma 1, jonka nojalla

$$\left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{BL \cdot BK}{LD \cdot KD}.$$

Koska $AB/DA = BC/CD$, on

$$\left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \frac{BL \cdot BK}{LD \cdot KD}.$$

Siispä $\angle BCA = \angle DCK$.

Sovelletaan sinilauseetta vielä kolmioihin ABL , BCL , AKD ja KCD :

$$\frac{\sin \angle ALB}{AB} = \frac{\sin \angle LAB}{BL}$$

$$\frac{\sin \angle BLC}{BC} = \frac{\sin \angle LCB}{BL}$$

$$\frac{\sin \angle DAK}{DK} = \frac{\sin \angle DKA}{DA}$$

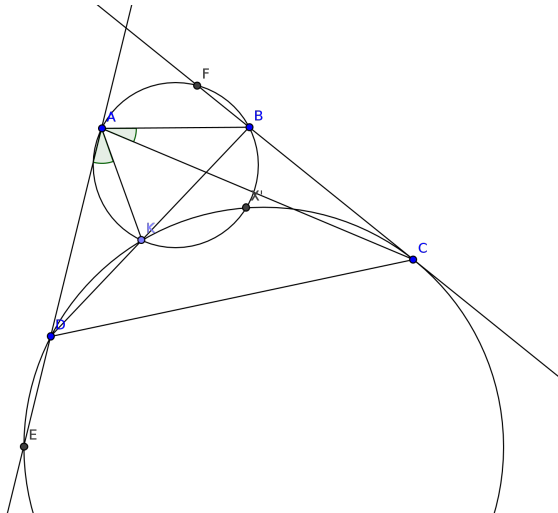
$$\frac{\sin \angle KCD}{KD} = \frac{\sin \angle DKC}{DC}.$$

Jakamalla ensin kaksi ensimmäistä yhtälöä puolittain, sieventämällä, ja sitten jakamalla kaksi viimeistä yhtälöä puolittain saamme

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \angle LAB}{\sin \angle BCL} = \frac{\sin \angle DAK}{\sin \angle DCK} = \frac{DC \sin \angle DKA}{AD \sin \angle DKC}.$$

Mutta koska $BC/AB = DC/AD$, on oltava $\angle DKA = \angle DKC$, jolloin myös $\angle AKB = \angle CKB$. $\square$

Todistetaan, että X on uniikki. Oletetaan, että on olemassa jokin piste X' , jolle pätee sama ehto kuin pisteelle X . Tutkitaan, millä alueilla X' voi esiintyä. Olkoon $\angle BAX = \alpha$. X' ei voi mennä alueelle, jossa $\angle BAX' > \alpha$ ja $\angle DCX' < \alpha$ tai päinvastoin. Jatketaan janoja AX , BX , CX ja DX nelikulmion $ABCD$ sivuille. Olkoot näiden kantapisteet A' , B' , C' ja D' vastaavasti. Nyt X' ei voi sijaita nelikulmioissa $BC'XA'$ tai $AXCD$, koska muuten kulmaehdot eivät toteutuisi. Eli X' sijaitsee joko kolmiossa $AC'X$ tai $CA'X$. Vastavasti saadaan, että X' sijaitsee joko kolmiossa $BD'X$ tai $B'DX$. Näiden kolmioiden leikkaus on X , joten $X'=X$.



Nyt päästään itse tehtävän ratkaisuun. Jahdataan kulmia aikaisempien huomioiden ja kehäkulmalauseen avulla. Olkoon piste X' ympyröiden (AKB) ja (DKC) toinen leikkauspiste. Haluamme todistaa, että $X'=X$.

Nyt

$$\angle X'AB = \angle X'KB = 180^\circ - \angle X'KD = \angle X'CD.$$

Olkoot E sivun AD ja ympyrän (DKC) , sekä F sivun BC ja ympyrän (AKB) toiset leikkauspisteet. Suunnatuilla kulmilla on mahdollista päästä eroon konfiguraatio-ongelmista, mutta käytämme perinteisiä kulmia tässä. Koska

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle CKB = \angle CEA,$$

on $AFCE$ on jännenelikulmio, ja tästä seuraa, että

$$\angle KFC = \angle KAB = \angle DAC = \angle EFC,$$

eli pisteet F , K ja E ovat samalla suoralla. Siispä

$$\begin{aligned} \angle X'BC &= 180^\circ - \angle X'BF \\ &= \angle FKX' \\ &= 180^\circ - \angle EKX' \\ &= 180^\circ - \angle EDX' \\ &= \angle X'DA. \end{aligned}$$

Nyt $\angle BX'A + \angle DX'C = \angle BKA + \angle DKC$. Lemman 2 nojalla $\angle BKA + \angle DKC = 180^\circ$. Eli X' on sama kuin tehtävänannon X , ja $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

Nerissa Shakespeare

Uutta Verkko-Solmussa

Oppimateriaalit-sivulla

<https://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html>

on ilmestynyt Jorma Merikosken, Ari Virtasen ja Pertti Koiviston kirja Johdatus diskreettiin matematiikkaan:

<https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/jdm-2017-12-19.pdf>

Solmu 3/2018

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, Associate Professor, Guangdong Technion - Israel Institute of Technology

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehrbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

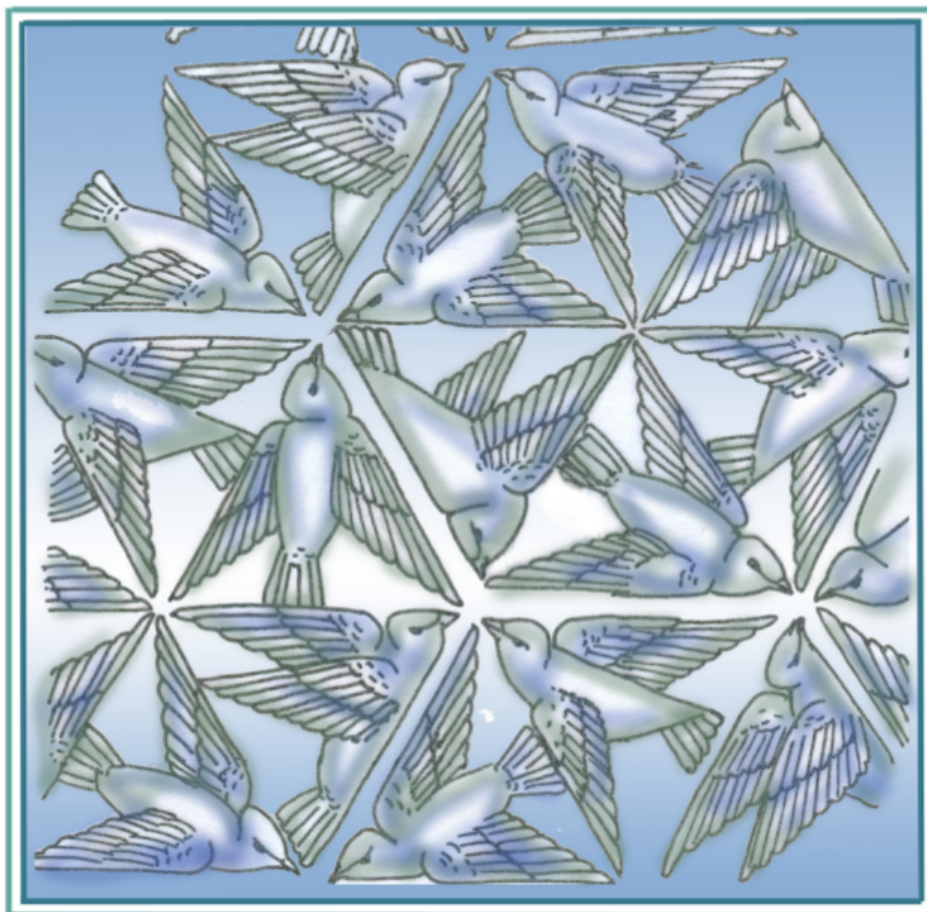
Petteri Harjulehto, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 1/2019 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 4.2.2019 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi