

Miten vaikeita tehtäviä ratkotaan?

Ville Tilvis

Maunulan yhteiskoulu ja Helsingin matematiikkalukio

Vaikka matematiikkaa olisi opiskellut peruskoulussa ja lukiossa hyvällä menestyksellä, kokemus vaikean tehtävän pitkästä työstämisestä on voinut jäädä kokematta. Miten ratkaista ongelma, jonka ratkaisu vaatii esimerkiksi 3 tuntia? Tällaisista ratkaisustrategioista ei oppikirjoissa juuri puhuta, eivätkä loogisesti etenevät malliratkaisut yleensä muistuta ongelman todellista, usein kaoottista ratkaisuprosessia.

Asiaa valottaakseni kerron tässä artikkelissa, kuinka ratkaisin erään ongelman.

Taikasaari

Kehittelin syksyllä 2013 tehtävää Kenguru-matematiikkakilpailun lukiosarjaan. Halusin hauskan teeman, jossa eläimet syövät toisiaan ja muuttuvat maagisesti uusiksi eläimiksi. Pian minulla oli tehtävä, mutta ei ratkaisua! Näin tehtävä (jälkeenpäin tehdyn hionnan jälkeen) kuului:

Taikasaaren metsissä vaeltelee kolmenlaisia eläimiä: vuohia, susia ja leijonia. Sudet voivat syödä vuohia ja leijonat sekä vuohia että susia.



Koska kyseessä on Taikasaari:

- Jos susi syö vuohen, susi muuttuu leijonaksi.
- Jos leijona syö vuohen, leijona muuttuu sudeksi.
- Jos leijona syö suden, leijona muuttuu vuoheksi.

Nyt saarella on 17 vuolta, 55 sutta ja 6 leijonaa. Kuinka monta eläintä saarella korkeintaan on jäljellä siinä vaiheessa, kun kukaan ei voi enää syödä ketään?

Jouduin ratkaisemaan oman tehtäväni selvittääkseni, kuinka vaikea ja mielenkiintoinen se on.

Tutustuminen

Aloitin kokeilemalla, miten satunnaiset syönnit vaikuttavat tilanteeseen. Onkohan lopputulos aina sama? Tein taulukon:

Vuohia	Susia	Leijonia	
17	55	6	susi syö vuohen → leijona
16	54	7	leijona syö suden → vuohti
17	53	6	leijona syö vuohen → susi
16	54	5	

Tässä näytti menevän aivan liian kauan, joten lopetin kesken. Eläinten määrä kyllä väheni joka kierroksella, joten johonkin tämä prosessi päättyisi.

Mietin seuraavaksi, millaiseen tilanteeseen syöminen voisi loppua. Voisiko jäljellä olla enemmän kuin yhtä tyyppiä eläimiä? Varmaankaan ei, sillä leijona voi syödä suden, ja vuohen voi syödä kumpi tahansa peto. Jäljelle jäävän eläimen tyyppikään ei ole selvillä, sillä mikä tahansa kolmesta syömistapahtumasta voi olla viimeinen. Hankalaa!

Eteenpäin pääsemiseksi täytyi kokeilla jotakin muuta.

Yksinkertaistus

Päätin tarkastella tilannetta, jossa eläimiä on jäljellä vain vähän. Pienin alkuperäistä tehtävänantoa muistuttava tilanne oli yksi vuohi, yksi leijona ja kaksi sutta. Kokeilin kahta eri tapaa:

V	S	L	
1	2	1	$S+V \rightarrow L$
0	1	2	$L+S \rightarrow V$
1	0	1	$L+V \rightarrow S$
0	1	0	

V	S	L	
1	2	1	$L+V \rightarrow S$
0	3	0	

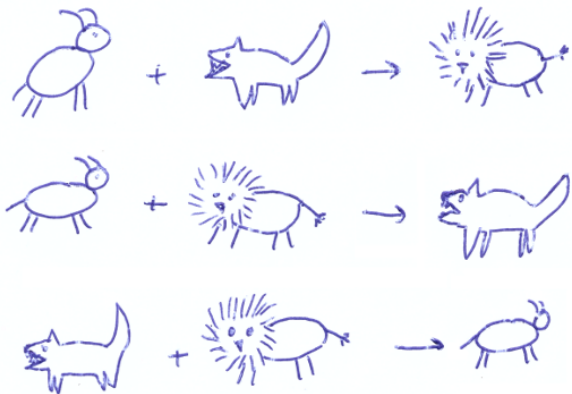
Lopputuloksista tuli erilaiset, joten ainakaan prosessi ei aina pääty samaan määrään eläimiä. Molemmissa kokeiluissa jäi jäljelle susia. Olikohan se sattumaa?

Hypoteesien testaus

Kokeilin vielä kolmatta tapaa selvittääkseni, jäisikö siinäkin jäljelle susia:

V	S	L	
1	2	1	$L+S \rightarrow V$
2	1	0	$S+V \rightarrow L$
1	0	1	$L+V \rightarrow S$
0	1	0	

Jäljelle jäi susia! Ehkä se ei ollut sattumaa? Palasin tutkimaan alkuperäisiä syömissääntöjä selvittääkseni, olisiko niissä jotakin susia suosivaa:



Nyt ei käynyt hyvin. Tarkemmin katsottuna syöminen on täysin symmetristä: kaksi erityyppistä eläintä katoaa (toinen syödään ja toisen tyyppi muuttuu), ja tilalle ilmestyy kolmatta tyyppiä oleva eläin. Susilla ei siis olekaan mitään erityisasemaa. Harmi!

Tässä kohtaa olin epävarma etenemissuunnista, sillä lupaava idea oli kuivunut kasaan.

Uusi lähestymistapa

Paremman puutteessa päätin kirjata syömisprosessin jollakin uudella, toivottavasti oivalluksen antavalla tavalla. Tarkastelin *muutoksia*, jotka syömisessä tapahtuvat:

V	S	L	
-1	-1	+1	$V+S \rightarrow L$
-1	+1	-1	$V+L \rightarrow S$
+1	-1	-1	$S+L \rightarrow V$

Joka syönnillä kahden eläinlajin määrä kulkee alaspäin, yhden ylöspäin. Jokaisen eläintyyppin lukumäärä muuttuu siis yhdellä. Ajatus: voisiko parillisuuden tarkastelusta olla iloa?

Jokaisessa syönnissä parilliset lukumäärät muuttuvat parittomiksi ja parittomat parillisiksi (eli *pariteetti* muuttuu). Alkuperäisessä tehtävänannossa (17 vuolta, 55 sutta, 6 leijonaa) susia ja vuohia on pariton määrä, leijonia parillinen. Ensimmäisen syönnin jälkeen susia ja vuohia on parillinen määrä ja leijonia pariton. Vuohien ja susien määrällä on siis aina keskenään sama pariteetti, ja leijonilla eri.

Mutta hetkinen! Lopussa kahden eläintyyppin lukumäärän tulee olla nolla. Näillä lukumäärillä on siis lopussa sama pariteetti, joten niillä pitää olla sama pariteetti koko prosessin ajan, myös alussa. Alkuperäisessä tehtävänannossa jäljelle pitäisi siis jäädä leijonia, koska leijonien ja jonkin toisen tyyppin lukumäärä ei voi yhtä aikaa olla nolla.

Tarkistin päättelyni vielä yksinkertaistetun esimerkin kanssa (1 vuohi, 2 sutta, 1 leijona). Siinä leijonilla ja vuohilla on sama pariteetti (alussa molemmat parittomia), joten vain ne voivat olla yhtä aikaa nolli. Jäljelle voi siis jäädä vain susia, kuten kokeilu oli osoittanut. Lupaavaa!

Viimeistely

Ratkaiseva oivallus tuntui löytyneen, joten kiirehdin viimeistelemään ratkaisun. Alkuperäisessä tehtävässä jäljelle voi jäädä vain leijonia, joten niiden määrä tulisi maksimoida. Leijonia syntyy lisää vain, kun sudet syövät vuohia. Vuohien määrä on susia pienempi, joten se on rajoittava tekijä.

Voisiko vuohia saada jostakin lisää? Vain silloin, kun leijona syö suden ja muuttuu vuoheksi. Tällöin menetetään yksi leijona. Vuohien ja leijonien yhteismäärä ei siis voi kasvaa mitenkään. Leijonien *maksimimäärä* lopussa on siis vuohien ja leijonien yhteismäärän $17 + 6 = 23$ suuruinen. Mutta voidaanko tämä saavuttaa? Kokeilin:

V	S	L	
17	55	6	$L+S \rightarrow V$
18	54	5	$S+V \rightarrow L$
17	53	6	
	⋮		
17	17	6	$(S+V \rightarrow L) \times 17$
	⋮		
0	0	23	

Kaikki toimi halutulla tavalla: susien määrää voi vähentää kaksi kerrallaan prosessin ”leijona syö suden, susi syö vuohen” kautta, ja kun päästään 17 suteen, ne syövät 17 vuolta. Ratkaisu on siis valmis: eläimiä voi jäädä jäljelle korkeintaan 23 kappaletta (ja ne ovat leijonia).

Joitakin huomioita

On tärkeää huomata, että ongelman ratkaissut parillisuusvoimallisuus ei ollut suoraa seurausta mistään sitä edeltävästä työstä. Aiempi ponnistelu oli kuitenkin syöttänyt aivoille riittävästi materiaalia, jotta intuitio saattoi toimia. Epäonnistuneet yritykset eivät siis menneet hukkaan.

Usein ratkaisun avain on se, ettei liikaa epäröi. Ongelmanratkaisu on jatkuvaa jumissa olemista ja pienten epäonnistumisten kestämistä. Sopiva mielenlaatu on rauhallinen ja vakaan keskittynyt. Fokus tulee olla ongelmassa, ei itsessä. Mieleen nousevat ajatukset kuten ”Minusta ei ole tähän!”, ”Olenko liian tyhmä?”, ”En ole varmasti yhtään oikeilla jäljillä!” ovat luonnollisia, mutta ne kannattaa sivuuttaa ja keskittyä seuraavaan lähestymistapaan.

Korostan vielä keskittymisen merkitystä. Parasta jälkeä tulee, kun sulkee netin, sulkee oven, sulkee musiikin¹, ja tekee vain yhtä asiaa. Ajattelu on työlästä puuhaa, ja mieli siirtyy kovin liukkaasti helpompiin toimiin, jos niitä on tarjolla. Puoli tuntia rauhallista, mutta voimallista keskittymistä saa aikaan enemmän kuin kaksi tuntia multitasking-työskentelyä. Tämä pätee lähes kaikkeen yksin tehtävään ajatustyöhön. Esimerkiksi tämä artikkeli on kirjoitettu varhain hiljaisena aamuna huoneessa, jossa ei ole kännykkää, tietokoneella, jolla ei ole internet-yhteyttä.

Tässä vielä ongelmanratkaisijan työskentelytaidot pähkinänkuoressa:

- Raivaa häiriötekijät pois ja keskity yhteen asiaan.
- Ajattele ongelmaa, älä itseäsi. Työnnä epävarmuuden tunteet pois tieltä.
- Työstä ongelmaa monesta suunnasta. Jokainen umpikuja antaa lisää kokemusta.
- Nauti kykyjesi täysimääräisestä käytöstä.

¹Tässä taidan olla vähemmistöissä. Musiikin kuuntelu auttaa monia keskittymään. Itselläni musiikki kyllä tekee työskentelystä miellyttävämpää, mutta vie parhaan terän keskittymisestä. Kuuntelen musiikkia rutiinitehtäviä siivittääkseeni, mutta en vaativissa töissä.