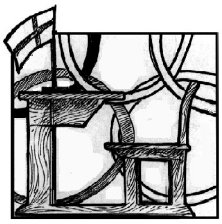


# Bijektio kilpailijoiden ja tehtävien välillä: IMO 2018

*Otte Heinävaara, Joonatan Honkamaa, Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järviniemi, Neea Palojärvi, Nerissa Shakespeare ja Selim Virtanen*

## Johdanto

Vuoden 2018 kansainväliset matematiikkaolympialaiset (IMO) järjestettiin heinäkuun alussa Cluj-Napocassa, Romaniassa. Suomea kilpailussa edustivat Joonatan Honkamaa, Hermanni Huhtamäki, Akseli Jussinmäki, Olli Järviniemi, Nerissa Shakespeare ja Selim Virtanen. Joukkueenjohtajana toimi Neea Palojärvi ja varajohtajana Otte Heinävaara. Honkamaa ja Järviniemi palkittiin pronssimitalein sekä Jussinmäki ja Virtanen kunniamaininnoin. Mainiota menestystä täydensi vielä Suomen sijoittuminen sijalle 59, kun kilpailijamaita oli 107. Osallistuvien maiden määrään suhteutettuna tämä on paras tulos vuoden 2006 jälkeen!

Kilpailuun tietenkin valmistauduttiin ankaralla harjoittelulla. Joukkue leireili ennen kilpailua Åbo Akademissa, Turussa ja Sorøssa, Tanskassa. Lisäksi Järviniemi vietti toisenkin viikon Tanskassa – tällä kertaa tosin itsenäisellä harjoitusleirillä. Tänä vuonna olympiajoukkueen matka Romaniaan herätti myös kiinnostusta Image-lehdessä. Lehden toimittaja vieraili matematiikkavalmennuksessa, matkasi kilpailijoiden kanssa Romaniaan ja kirjoitti tästä jutun Imageen. Kirjoituksen voi lukea lehden lokakuun numerosta.

Tämänkertaisissa tehtävien esittelyissä ratkaisuineen näkyy kilpailijoiden kynänjälki. Kuuden kilpailijan ja kuuden tehtävän välille voidaan nimittäin muodostaa bijektio. Yksi tällainen on muodostettu ja kukin kilpailija esittääkin yhden ratkaisun yhteen kilpailutehtävään. Aktiivinen lukija voi vielä pohtia, mitä kaikkia muita bijektioita kilpailijoiden ja tehtävien välille voi muodostaa.

## Kokouksia, keskustelua ja kulttuuria – IMO joukkueenjohtajan silmin

Toimin Suomen joukkueenjohtajana vuoden 2018 matematiikkaolympialaisissa Romaniassa. Minulle joukkueenjohtajuus kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa oli ensimmäinen laatuaan ja kuvailen tässä tekstissä kokemustani kolmella k-kirjaimella alkavalla sanalla. Nämä sanat ovat kokoukset, keskustelu ja kulttuuri.

**Kokoukset**. Joukkueenjohtajien ajasta valtaosa kuluu kokouksissa. Tavoitteena on valita kilpailuun tulevat tehtävät, muotoilla ne sopivaan muotoon kokeita ajatellen, kääntää ne kunkin maan kielelle, hyväksyä pisteytyskaaviot sekä päättää mitalien pisterajoista. Tavallisesti kokouksissa esiintyi paljon puheenvuoroja ja äänestyksiä. Pisteytyskaavioiden käsittelyä lukuun ottamatta kokoukset olivat varsin mielenkiintoisia niissä esiintyvien näkemystenvaihdon sekä vaikutusmahdollisuuksien takia. Tästä päästäänkin seuraavaan kohtaan eli keskusteluun.

**Keskustelu.** Kokouksissa joukkueenjohtajat esittivät paljon näkemyksiä eri asioista. Mieleenjäävimpinä olivat keskustelut kilpailutehtävistä. Suurin osa tästä keskustelusta pyöri tehtävien vaikeustason ympärillä, eikä eri tehtävien vaikeustasoista oltu lainkaan yksimielisiä. Esimerkiksi osa piti tehtävää 1 aivan liian helppona, kun taas toiset joukkueenjohtajat olivat sitä mieltä, ettei se ole lainkaan helppo, vaan jopa lähempänä keskivaikeaa tehtävää kuin helppoa. Tehtävän 3 osalta taas joukkueenjohtajien ja tehtävienvalintakomitean välillä esiintyi mielenkiintoinen ristiriita tehtävän vaikeustason arvioinnissa: Tehtävänvalintakomitean mielestä tehtävä 3 oli keskivaikea tehtävä, kun taas joukkueenjohtajat pitivät sitä erittäin vaikeana tehtävänä. Sanoisin joukkueenjohtajien olleen oikeammassa arviossaan, sillä alle kaksi prosenttia kilpailijoista ylsi jompaan kumpaan kahdesta korkeimmasta pistemäärästä tehtävässä 3 eli osasi mahdollisia minimaalisia virheitä lukuun ottamatta ratkaista tehtävän.

Tehtävien vaikeustason lisäksi myös tehtävien muotoilu nosti esiin keskustelua. Tehtävässä 4 piti alun perin pelata shakkilaudalla ratsuilla ja kuningattarilla eriväristen kivien sijasta. Tehtävänantoa kuitenkin muutettiin, sillä kaikissa maissa ei kuulemma harrasteta hirvittävästi shakinpeluuta ja shakkiviittauksen katsottiin antavan liikaa etua pelin pelaamista harrastaville.

Virallisten keskustelujen lisäksi joukkueenjohtajat keskustelivat toki myös kokousten ulkopuolella. Keskustelua syntyi niin kaikesta kilpailuihin liittyvästä kuin erilaisista vapaa-ajan aktiviteeteistakin. Käynnissä olevien jalkapallon MM-kisojen takia keskustelu pyöri ajoittain jalkapallon ympärillä. Osa joukkueenjohtajista osoittautui suuriksi jalkapallofaneiksi ja he järjestivät illalla kokousten jälkeen kokoushuoneeseen jalkapallokatsomon, vaikka jalkapalloa olisi voinut katsoa myös muutaman metrin päässä hotellin baarissa tai omissa huoneissa olevista televisioista. Itse laitoin nukkumisen ja kilpatehtävien parissa työskentelyn etusijalle, enkä osallistunut kisakatsomoihin.

**Kulttuuri.** Jalkapallon lisäksi kulttuurista pääsi nauttimaan järjestäjien järjestämän ohjelman avulla. Ensimmäisenä kokonaisena päivänä meidät vietiin koko päiväksi retkelle romanialaiselle maaseudulle syömään romanialaista ruokaa, seuraamaan kansantansseja ja ratkomaan kilpailun ehdokastehtäviä. Sää oli onneksi suotuisa ja retki sujuikin leppoisissa merkeissä, joskin noin neljän tunnin edestä kansantanssiesitysten seuraamista oli hieman puuduttavaa.

Suurin kokemani herätys kulttuurin suhteen ei kuitenkaan tullut kansantanssiesityksistä, vaan siitä, kuinka suuressa arvossa kilpailua tunnuttiin Romaniassa pidettävän. Jotain osviittaa asiasta antaa ehkä se, että Romania on Bulgarian ohella ainoa maa, joka on osallistunut kaikkiin järjestettyihin 59 matematiikkaolympialaisiin, sekä kilpailut on pidetty jopa kuudesti Romaniassa. Jopa Romanian presidentti saapui paikalle avajaisseremoniaan pitämään puheen. Varapääministeri taas kehotti kilpailijoita harkitsemaan poliitikon uraa, sillä politiikkaan tarvitaan hänen mukaansa ihmisiä, jotka osaavat ajatella. Mielestäni tämä kertoo jotain siitä, että matematiikkaa osataan arvostaa myös ajattelun kehittäjänä, eikä sitä pidetä vain mekaanisten kaavojen toisteluna. Kilpailu oli ilmeisesti aika näkyvässä asemassa kaupungilla, sillä taksikuskitkin halusivat keskustella siitä ja ymmärtääkseni paikallinen televisiokanava näytti ainakin avajaiset ja päättäjäiset internetissä live-lähetyksenä.

Kaiken kaikkiaan joukkueenjohtajuus oli minusta hieno kokemus. Oli ylellistä majoittua viiden tähden hotellissa mukavien joukkueenjohtajien kanssa sekä nauttia suomalaisten hyvistä vastauksista kilpatehtäviin. Positiivisen kokemuksen kruunasivat vielä hauska Suomen joukkue ja sen oikein hyvä menestys kilpailussa.

***Neea Palojärvi***

## Matkakertomus – omatoiminen harjoitusleiri Tanskassa

Aloitin kolmen viikon pituisen matkani sunnuntaina 24.6. yksin Tampereen rautatieasemalta. Otin junan Helsingin lentoasemalle ja nousin koneeseen kohti Kööpenhaminaa. Laukkuni noutamisen jälkeen tapasinkin jo tanskalaisen Alexin, joka ajoi meidät Farumiin, noin puolen tunnin päähän Tanskan pääkaupungista. Farumissa olevalla koululla oli seuraavan viikon aikana luvassa vaativien kilpailumatematiikan tehtävien ratkomista.

Ensimmäinen päivä meni suurilta osin asettumiseen, lepäämiseen ja ruuanlaittoon. Noin seitsemän hengen porukassa maittava ruoka saatiin kohtuullisella vaivalla lautaselle. Myöhemmin illalla pidimme vielä parin tunnin harjoittelusession, jonka jälkeen oli aika mennä nukkumaan. Yöpymistä varten käytössämme oli koulun liikuntasali, jonne sain patjakseni valtavan jumppapatjan varastosta.

Koulun sali oli varattu joka aamu kello kahdeksaksi kuoroharjoituksia varten, joten viikon aamurutiineihin kuului hampaidenpesun ja aamupalan syömisen lisäksi tavaroidemme raahaaminen salin läheiseen pukuhuoneeseen. Yllätyksekseni tanskalaisilla ei vielä ollut alkanut kesäloma: samalla viikolla tulisi olemaan koulun oppilaiden ”kevätjuhlia”. Tämä ei kuitenkaan toimintaamme häirinnyt.

Maanantaina saimme leirin kunnolla käyntiin: harjoittelu jatkui ruokataukoja ja lepohetkiä lukuun ottamatta tauotta aamusta iltayhdeksään saakka. Matematiikasta hyvää irtaantumista antoi pöytäjalkapallo ja kävelylenkki.

Seuraavat päivät etenivät hyvinkin samanlaisella rutiinilla: aamujumppa tavaroiden siirtelyn parissa, hampaiden pesu, aamupala, matematiikkaa, ruokaa, matematiikkaa, ruokaa, kävelyä, matematiikkaa, pöytäjalkapalloa, nukkumaanmeno. Leirin edetessä aloin itse kääntymään yhä enemmän kokkaamisen sijasta pakastepitsan puolelle taloudellisista ja ajankäytöllisistä syistä. Paikalla olleet kymmenisen matematiikan harrastajaa olivat suurilta osin tanskalaisia, ja osan ajasta olinkin ainoa ei-tanskalainen leirillä, mutta myös Norja ja Ruotsi olivat edustettuina.

Viikon aikana ratkaisemistani tehtävistä mieleenpainuvin oli seuraava:

**USA:n harjoitteluleirin koe ELMO, 2018, T5**

Olkoon $m$ positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa sellaiset positiiviset kokonaisluvut $b, c$ ja $N$, joilla

$$\Big\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n+a_i} \Big\rfloor = \lfloor \sqrt{bn+c} \rfloor$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq N$. Tässä $\lfloor x \rfloor$ kuvaa suurinta kokonaislukua, joka on enintään $x$.

Viikon aikana matematiikan lisäksi näin tanskalaista kulttuuria. Merkittävä huomio on koulujen loppuminen vasta kesäkuun lopussa. Pääsin näkemään koulun yläastelaisten kesälomalle siirtymistä, ja tämä oli varsinainen shokki: koulu oli järjestänyt juhlat, jossa oli runsas määrä alkoholia tarjolla. Juhlien valvojina olivat opettajat ja juhlijoiden vanhemmat. Kuulemma tämä on Tanskassa täysin normaali jokavuotinen tapahtuma. Tanskan lain mukaan kuka vain saa juoda alkoholia, mutta me emme tietenkään juhliin osallistuneet.

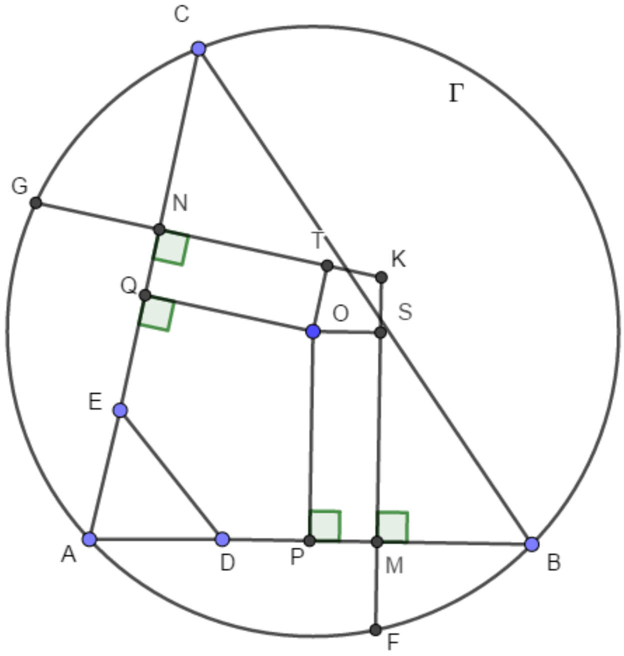
Viikon päätteeksi oli aika siirtyä Sørossa sijaitsevalle pohjoismaiselle valmennusleirille. Matkustin junalla Suomen joukkuetta vastaan Kööpenhaminan lentokentälle, josta jatkoimme yhdessä leirille.

***Olli Järviniemi***

## Ensimmäisen koepäivän tehtävät ratkaisuineen

**Tehtävä 1.** Olkoon $\Gamma$ teräväkulmaisen kolmion $ABC$ ympäripiirretty ympyrä. Pisteet $D$ ja $E$ ovat vastaavasti sellaisia janojen $AB$ ja $AC$ pisteitä, että $AD = AE$. Janojen $BD$ ja $CE$ keskinormaalit leikkaavat ympyrän $\Gamma$ lyhyemmät kaaret $AB$ ja $AC$ pisteissä $F$ ja $G$ vastaavasti. Osoita, että suorat $DE$ ja $FG$ ovat yhdensuuntaiset (tai ovat sama suora).

**Ratkaisu.** Olkoon kuvassa K annettujen keskinormaalien leikkauspiste. Piirtämällä pari mallikuvaa voidaan huomata, että kolmio KFG näyttää olevan tasakylkinen. Pienellä kulmanjahtauksella voidaan nähdä, että tällöin todistettava väite pätee, ja itse asiassa kolmion KFG tulee olla tasakylkinen, että väite pätisi. Nyt siis yritämme osoittaa, että KFG on tasakylkinen. Itse huomasin tässä vaiheessa, että ympyrän $\Gamma$ keskipiste O on kulman $\angle GKF$ puolittajalla, ja osoitin sitten, että $\triangle OKF \cong \triangle OKG$. Tässä esitetään nyt kuitenkin yksinkertaisempi ratkaisu, jonka idea on Joonatan Honkamaalta.



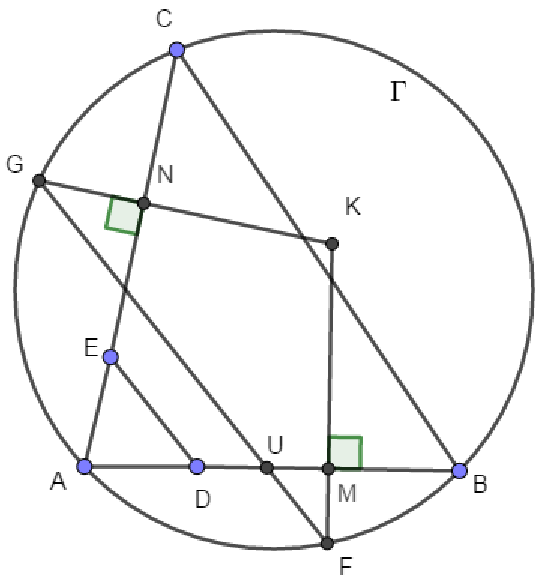

Koska $\angle OFG = \angle FGO$, niin riittää osoittaa, että $\angle KFO = \angle OGF$. Tämän todistamiseksi osoitetaan, että $\triangle OFS \cong \triangle OGT$, missä $S$ on $O$:n kautta kulkevan, $AB$:n suuntaisen suoran ja janan $KF$ leikkauspiste ja $T$ vastaavasti $O$:n kautta kulkevan, janan $AC$ suuntaisen suoran ja janan $GK$ leikkauspiste. $OF = OG$ ja $\angle OSF = \angle GTO = 90°$. Vielä halutaan osoittaa, että $SO = TO$. Tämä kohta todistetaan oman vastaukseni mukaan. Olkoot $M$ $KF$:n ja $AB$:n leikkauspiste, $P$ janan $AB$ keskipiste, $N$ $KG$:n ja $AC$:n leikkauspiste ja $Q$ $AC$:n keskipiste. Tällöin $PO$ on janan $AB$ kohtisuora ja $OQ$ janan $AC$ kohtisuora, mistä seuraa, että $OS = PM$ ja $OT = QN$. Lasketaan nyt $PM$ ja $QN$.

$$\begin{aligned} PM &= AM - AP = AD + DM - AP \\ &= AD + \frac{AB - AD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AD}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} QN &= AN - AQ = AE + EN - AQ \\ &= AE + \frac{AC - AE}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{AE}{2}. \end{aligned}$$

Mutta oletuksen nojalla $AD = AE$, eli $PM = QN$ ja $OS = OT$. Täten $\triangle OFS \cong \triangle OGT$ (ssk). Sivusivu-kulma on validi perustelu, koska kyseinen kulma on 90°, joten mahdollisia konfiguraatioita on vain yksi. Nyt siis $\angle SFO = \angle OGT$, eli $\angle KFG = \angle FGK$.




Olkoon $U$ $FG$:n ja $AB$:n leikkauspiste. Haluamme nyt osoittaa, että $\angle EDA = \angle GUA$.

$$\begin{aligned}\angle GUA &= \angle FUM = 90° - \angle MFU = 90° - \angle KFG \\ &= 90° - \frac{180° - \angle GKF}{2} = \frac{\angle GKF}{2} = \frac{\angle NKM}{2}.\end{aligned}$$

Koska $\angle ANK + \angle KMN = 2 \cdot 90° = 180°$, on nelikulmio $AMKN$ jännenelikulmio, joten $\angle NKM = 180° - \angle MAN$. Siis

$$\angle GUA = \frac{180° - \angle MAN}{2} = \frac{180° - \angle DAE}{2} = \angle EDA.$$

Siis $\angle GUA = \angle EDA$ ja $FG \parallel DE$.

***Akseli Jussinmäki***

**Tehtävä 2.** Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 3$, joita kohti on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, että $a_{n+1} = a_1$ ja $a_{n+2} = a_2$ ja

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Ratkaisu.** Lukujonon kahta ensimmäistä jäsentä lukuun ottamatta kaikki jonon jäsenet määräytyvät kahden edellisen jäsenen perusteella. Lisäksi nähdään, että $a_1 = a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 1$ ja $a_2 = a_{n+2} = a_{n+1} a_n + 1$, joten luvut $a_1$ ja $a_2$ tavallaan määräytyvät lukujen $a_{n-1}$ ja $a_n$ sekä $a_n$ ja $a_1$ avulla. Lukujono voidaankin ajatella lukuympyräksi, jossa on $n$ kappaletta lukuja, ja jossa seuraava luku on aina kahden edellisen tulo lisättynä yhdellä. Tehtävämme on etsiä kaikki luvut $n \geq 3$, joilla tällainen lukuympyrä on olemassa.

Jaetaan nyt ratkaisu kahteen osaan:

**Osa 1:** Kaikilla kokonaisluvuilla $n$, joilla $3 \mid n$, haluttu lukuympyrä on olemassa.

Kun $n = 3$, valitaan $a_1 = 2$ ja $a_2 = -1$. Tällöin $a_3 = -1$, ja on helppo tarkistaa, että nämä luvut toimivat. Tämä konstruktio toimii myös yleisesti, kun $3 \mid n$, koska riittää, että lukuympyrä voidaan jakaa kolmen pituisiin pätkiin, joissa kaikissa on luvut $2, -1$ ja $-1$ keskenään samassa järjestyksessä. Tämä taas onnistuu, kun $3 \mid n$.

*Huomautus.* Edellä olevan konstruktion voi löytää esimerkiksi tutkimalla tapausta $n = 3$, ja ratkaisemalla tästä saatavan kolmen muuttujan yhtälöryhmän.

**Osa 2:** Millään kokonaisluvulla, jolla $3 \nmid n$, haluttua lukuympyrää ei ole olemassa.

Jaetaan todistus pienempiin osiin. Ideana on keksiä lukuympyrälle rajoittavia ehtoja.

**Lemma 1.** *Missään kohtaa lukuympyrää ei voi olla kahta peräkkäistä positiivista lukua.*

*Todistus.* Oletetaan, että jossakin lukuympyrän kohdassa on kaksi peräkkäistä positiivista lukua, olkoot ne $a_i$ ja $a_{i+1}$. Nyt $a_{i+2} = 1 + a_i a_{i+1} > 1$, ja $a_{i+3} = 1 + a_{i+1} a_{i+2} > 1$, joten pätee $a_{i+4} = a_{i+3} a_{i+2} + 1 > a_{i+3}$. Induktiivisesti voidaan päätellä, että ympyrässä jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle $k > 3$ pätee $a_{i+k} > a_{i+k-1}$, eli lukujono on jostain pisteestään lähtien aidosti kasvava. Tällöin on selvästi mahdotonta, että lukuympyrässämme olisi vain äärellinen määrä lukuja. Päädymme siis ristiriitaan vastaoletuksen kanssa, joten lemman 1 täytyy päteä. □

**Lemma 2.** *Missään kohtaa lukuympyrää ei voi olla lukua* 0.

*Todistus.* Oletetaan, että lukuympyrässä olisi luku 0. Nyt tätä nollaa seuraavat kaksi lukua olisivat ykkösiä, mikä johtaisi ristiriitaan lemman 1 kanssa. Siis myös lemma 2 pätee. □

**Lemma 3.** *Jokaista ympyrän kahta peräkkäistä negatiivista lukua seuraa positiivinen luku.*

*Todistus.* Olkoot jotkin ympyrän kaksi peräkkäistä negatiivista lukua $a_i$ ja $a_{i+1}$. Nyt $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 > a_i a_{i+1} > 0$ eli positiivinen. Siis lemma 3 pätee. □

**Lemma 4.** *Lukuympyrä ei voi olla sellainen, että joka toinen luku on negatiivinen ja joka toinen positiivinen.*

*Todistus.* Oletetaan, että tällainen ympyrä on olemassa. Koska lukuympyrässä on vain äärellinen määrä positiivisia lukuja, täytyy jossakin kohtaa ympyrää olla sellaiset kahden etäisyydellä toisistaan olevat positiiviset luvut $a_i$ ja $a_{i+2}$, että $a_i \geq a_{i+2}$. Nyt $a_{i+1}$ ja $a_{i+3}$ ovat negatiivisia. Siispä $a_{i+2} > a_{i+3}$. Toisaalta $a_i a_{i+1} < a_{i+2} a_{i+1}$, joten $a_i a_{i+1} + 1 < a_{i+2} a_{i+1} + 1$, eli $a_{i+2} < a_{i+3}$. Päädyimme siis ristiriitaan, joten lemma 4 pätee. □

**Lemma 5.** *Lukuympyrässä ei voi olla kahta positiivista lukua kahden etäisyydellä toisistaan.*

*Todistus.* Oletetaan, että lukuympyrässä on tällaiset luvut, olkoot vaikka $a_i$ ja $a_{i+2}$. Lemmojen 1 ja 2 nojalla $a_{i-1} < 0$, $a_{i+1} < 0$ ja $a_{i+3} < 0$. Lisäksi voimme lemman 4 nojalla olettaa, että lukuympyrässä on sellainen kohta, jossa edellisten tietojen lisäksi $a_{i-2} < 0$. Jos tällaista kohtaa nimittäin ei olisi, niin lemmojen 1 ja 2 takia ainoa mahdollinen lukuympyrän muoto olisi sellainen, jossa joka toinen luku olisi negatiivinen ja joka toinen positiivinen.

Nyt tiedämme, että $a_i = a_{i-1}a_{i-2} + 1 > 1$. Edelleen

$$\begin{aligned} a_{i+2} &> a_{i+3} \\ a_i a_{i+1} + 1 &> a_{i+1}a_{i+2} + 1 \\ a_i a_{i+1} &> a_{i+1}a_{i+2} \\ a_{i+2} &> a_i \\ a_{i+2} &> 1. \end{aligned}$$

Toisaalta $a_{i+1}a_i < 0$, joten $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 < 1$. Päädymme siis ristiriitaan, joten lemman 5 täytyy päteä. □

Oletetaan sitten, että $3 \nmid n$. Nyt lemmojen 1, 2 ja 5 nojalla jokaista positiivista lukua tulee seurata kaksi negatiivista lukua, ja lemman 3 nojalla jokaisen kahden negatiivisen luvun jälkeen tulee positiivinen luku. Siis lukuympyrässä tasan joka kolmas luku on positiivinen. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, jos $3 \mid n$. Päädymme siis ristiriitaan, joten ei ole olemassa lukuympyrää, jonka lukujen määrä ei olisi kolmella jaollinen. Vastaus tehtävän kysymykseen on siis kaikki kokonaisluvut $n$, joilla $3 \mid n$.

***Joonatan Honkamaa***

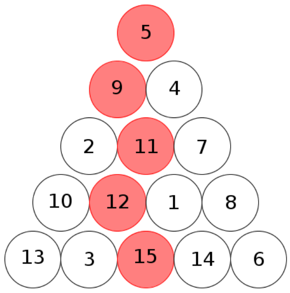
**Tehtävä 3.** *Anti-Pascalin kolmio* on tasasivuinen kolmion muotoinen taulukko lukuja, missä alimmaista riviä lukuun ottamatta jokainen numero on kahden välittömästi sen alla olevan luvun erotuksen itseisarvo. Esimerkiksi seuraava taulukko on anti-Pascalin kolmio, jossa on neljä riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

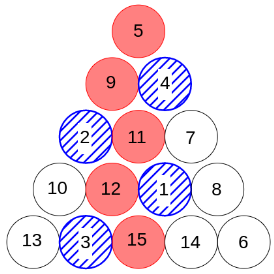
Onko olemassa sellainen anti-Pascalin kolmio, jossa on 2018 riviä ja joka sisältää jokaisen kokonaisluvun luvusta 1 lukuun $1 + 2 + \cdots + 2018$?

**Ratkaisu.** Jokaiselle anti-Pascalin kolmiolle on mahdollista värittää *jono* seuraavalla tavalla (katso kuva 1):

1. Jonon ensimmäinen jäsen on kolmion ylin luku (mallikuvassa luku 5).
2. Jonon seuraavat jäsenet saadaan valitsemalla edellisen alapuolella olevista kahdesta luvusta suurempi.



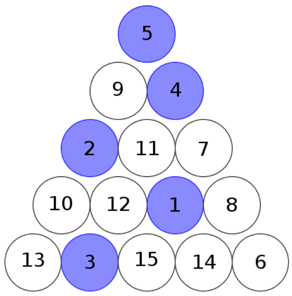

*Kuva 1.*




*Kuva 2.*

Merkitään jonon jäsenien lisäksi pienemmät luvut, jotka ovat välittömästi jonkin jonon jäsenen alapuolella (kuva 2).

Muodostetaan vielä kuva, johon merkataan kaikki edellä mainitut pienemmät luvut ja niiden lisäksi kolmion ylin luku (kuva 3).




| + | = |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 4 | 9 |
| 2 | 11 |
| 1 | 12 |
| 3 | 15 |

*Kuva 3.*

Huomataan, että jonon ensimmäinen jäsen on kolmannen kuvan ensimmäinen luku, jonon toinen jäsen on kolmannen kuvan kahden ensimmäisen luvun summa ja jonon $n$:s jäsen on kolmannen kuvan $n$:n ensimmäisen luvun summa. Tämä voidaan todistaa induktiolla seuraavasti:

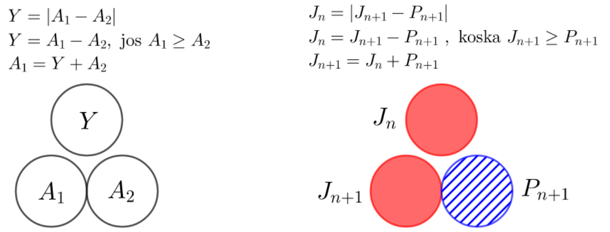
1. Jonon ensimmäinen jäsen on määritelmän mukaan kolmion ylin luku eli myös kolmannen kuvan ylin luku.
2. Jonon toinen jäsen voidaan ilmoittaa jonon ensimmäisen jäsenen ja kolmannen kuvan toisen jäsenen summana, koska anti-Pascalin kolmion määritelmän mukaan ylempi luku (merk. $y$) on kahden sen alapuolella olevan luvun erotuksen itseisarvo (merk. $a_1$ ja $a_2$, sovitaan $a_1 > a_2$). Todistus matemaattisin merkinnöin:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &= y \\ a_1 - a_2 &= y \\ a_1 &= y + a_2 \end{aligned}$$

Koska jonon ensimmäinen jäsen oli myös kolmannen kuvan ensimmäinen jäsen, voidaan jonon toinen jäsen ilmoittaa kahden kolmannen kuvan ensimmäisen luvun summana.

3. Vastaavalla tavalla voidaan todistaa että jonon $n+1$:s jäsen on jonon $n$:nnen jäsenen ja kolmannen kuvan $n+1$:nnen luvun summa. Ja induktio-oletuksen mukaan jonon $n$:s jäsen voitiin esittää kolmannen kuvan $n$:n ensimmäisen luvun summana, joten myös jonon $n+1$:s jäsen on mahdollista esittää kolmannen kuvan $n+1$:n ensimmäisen luvun summana.

Esimerkiksi mallikuvissa edellinen huomio havaitaan laskemalla, sillä jonon ensimmäinen jäsen on 5, joka on myös kolmannen kuvan ensimmäinen jäsen. Jonon toinen jäsen $9 = 5 + 4$, kolmas $11 = 5 + 4 + 2$, neljäs $12 = 5 + 4 + 2 + 1$ ja viides $15 = 5 + 4 + 2 + 1 + 3$.




*Kuva 3,5.*

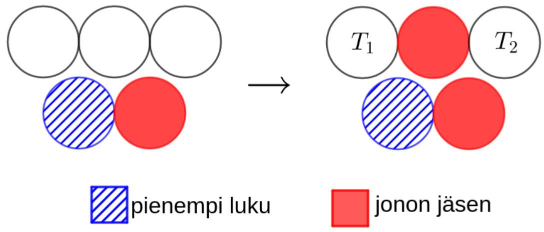
Jonon viimeinen jäsen on siis kolmannen kuvan mukaisesti merkittyjen lukujen summa. Koska näitä lukuja on yhtä monta kuin anti-Pascalin kolmiossa rivejä, täytyy jonon viimeisen jäsenen suuruus olla vähintään $1 + 2 + \cdots + n$, jossa $n$ on rivien määrä. Koska tehtävänannon mukaan 2018-rivisen kolmion suurin sallittu luku on $1 + 2 + \cdots + 2018$, mutta se on myös pienin mahdollinen jonon viimeinen luku, täytyy kolmannen kuvan mukaisten lukujen olla pienimmät mahdolliset. Tässä tapauksessa ne ovat siis $1, 2, \ldots, 2018$.

Palataan kuvaan 2, jossa oli merkattuina kaikki jonoon kuuluvat luvut ja myös jonon jäsenten alla olevat pienemmät luvut. Huomataan, että jokaisella rivillä ensimmäistä lukuun ottamatta on merkattuna tasan kaksi lukua, yksi jonon jäsen ja yksi pienempi luku sen vieressä. Lisäksi, koska jokainen jonon jäsen on edellisen alapuolella, kaartuu jono joka kohdassa tasan 60° kulmassa joko oikealle tai vasemmalle (vaakatasoon verrattuna).

Valitaan värittämättä jääneistä luvuista mahdollisimman suuri tasasivuinen kolmio, jonka yhden sivun muodostavat alareunan värittämättömät luvut siltä puolelta kahta merkittyä lukua, jolla niitä on enemmän. Tällaisen kolmion sivun pituus on vähintään 1008 lukua, koska:

1. Alhaalla on 2018 lukua, joista kaksi on merkattu.
2. Nämä kaksi lukua sijaitsevat vierekkäin, jonka vuoksi jäljelle jäävät $2018 - 2 = 2016$ lukua sijaitsevat korkeintaan kahdessa eri ryhmässä.
3. Kun 2016 lukua jaetaan kahteen osaan, toisessa niistä on oltava vähintään 1008 lukua (laatikkoperiaate).

Mikään jonon jäsen ei voi sijaita tällaisen kolmion sisällä, koska tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60°, joka oli myös jonon suurin mahdollinen kulma. Lisäksi tulisi osoittaa, että myöskään pienemmät luvut eivät voi olla kolmion sisällä. Tämä on kuitenkin selvää, sillä alin pieni luku laitettiin kolmion ulkopuolelle, mistä seuraa, että jonon toisiksi viimeisen jäsenen molemmille puolille jää kaksi lukua, joista kumpikaan ei ole kolmion sisällä (Kuva 4; $T_1$ ja $T_2$). Tästä taas seuraa, että jokaisen ylemmän jonon jäsenen kummallekin puolelle jää myös tällaiset luvut, koska jonon kulma on korkeintaan 60°.




*Kuva 4.*

Nyt on siis todistettu, että on olemassa alkuperäistä kolmiota pienempi kolmio, joka ei sisällä mitään jonon jäsentä eikä mitään luvuista $1, 2, \ldots 2018$ ja jonka sivun pituus on vähintään 1008 lukua (Kuva 5).

Pieni kolmio on anti-Pascalin kolmio, koska se on osa isoa anti-Pascalin kolmiota. Sille voidaan siis muodostaa jono. Osoitetaan, että sen viimeiseksi luvuksi tulisi liian suuri, jotta tehtävänannon ehdot voisivat toteutua.

1. Pieni kolmio ei sisällä mitään luvuista $1, 2, \ldots 2018$, mutta siihen voidaan muodostaa kuitenkin vähintään 1008:n pituinen jono (kolmion rivimäärä).
2. Jonon viimeinen jäsen voidaan siis esittää vähintään 1008 erisuuren kokonaisluvun summana, joista jokainen on suurempi kuin 2018.
3. Viimeisen jäsenen suuruudeksi tulee vähintään
$$\begin{aligned}&(2018+1)+(2018+2)+\cdots+(2018+1008)\\ &\quad= 1008\cdot 2018+(1+2+\cdots+1008).\end{aligned}$$
4. Tämä on kuitenkin suurempi kuin tehtävänannossa mainittu luku $1 + 2 + \cdots + 2018$.

*Todistus.*

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+2018\\ &\quad=(1+2+\cdots+2016)+2017+2018\\ &\quad=\frac{2016\cdot 2017}{2}+2017+2018\\ &\quad=1008\cdot 2017+2017+2018\end{aligned}$$

Vähennetään tämä luku viimeisen jäsenen pienimmästä mahdollisesta suuruudesta:

$$1008 \cdot 2018 + (1 + \cdots + 1008) - (1008 \cdot 2017 + 2017 + 2018)$$

Vähennetään $1008 \cdot 2017$:

$$= 1008 + (1 + \cdots + 1008) - 2017 - 2018$$

Vähennetään $1008 + 2 + 1008 = 2018$:

$$= 1 + (3 + 4 + \cdots + 1007) - 2017$$

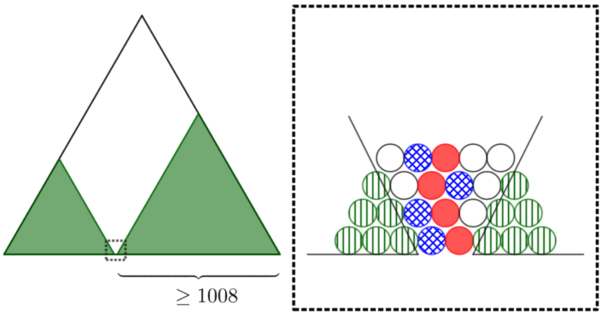
Vähennetään $4 + 1006 + 1007 = 2017$:

$$= 1 + 3 + (5 + 6 + \cdots + 1005) > 0.$$

□

Koska pieneen kolmioon kuuluvasta luvusta tulisi välttämättä isompi kuin tehtävänannossa kerrottu suurin luku, ei ole mahdollista muodostaa 2018-rivistä anti-Pascalin kolmiota, joka täyttäisi tehtävänannon vaatimukset.

Kuva 5




***Hermanni Huhtamäki***

## Toisen koepäivän tehtävät ratkaisuineen

**Tehtävä 4.** *Tontti* on mikä tahansa tason piste $(x, y)$, missä $x$ ja $y$ ovat molemmat positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin 20.

Aluksi kukin 400 tontista on vapaa. Amy ja Ben laittavat tonteilla vuorotellen kiviä ja Amy aloittaa. Omalla vuorollaan Amy laittaa uuden punaisen kiven sellaiselle vapaalle tontille, jonka etäisyys mistä tahansa varatusta tontista, missä on punainen kivi, ei ole $\sqrt{5}$. Omalla vuorollaan Ben laittaa uuden sinisen kiven vapaalle tontille. (Tontti, jossa on sininen kivi, voi olla millä tahansa etäisyydellä mistä tahansa muusta tontista.) Peli loppuu, kun jompikumpi pelaajista ei voi enää lisätä kiveä.

Etsi suurin $K$, jolla Amy voi varmasti laittaa ainakin $K$ punaista kiveä riippumatta siitä, miten Ben laittaa siniset kivensä.

**Ratkaisu.** Hankitaan ensin konstruktiolla alaraja $K \leq 100$, ja sen jälkeen todistetaan, että sama arvo on myös yläraja.

Tontteja voidaan tarkastella $20 \times 20$-ruudukkona. Punaisesta kivestä $X$ torjuttu ruutu $O$ on $\sqrt{5}$ päässä Pythagoraan lauseen mukaisesti tasan silloin, kun etäisyys on yhteen suuntaan 1 ja toiseen 2. Toisin sanoen $X$ torjuu samoin kuin shakin ratsu.

Väritetään ruudukko shakkilaudan tavoin, jolloin sekä mustia että valkoisia ruutuja on puolet eli 200. Jos $X$ on mustalla ruudulla, ovat kaikki $O$:t valkoisia. Näin ollen jos Ben ei pelaisi, voisi jokaiseen mustaan ruutuun laittaa $X$:n. Benin on kuitenkin mahdollista torjua jokaista $X$ kohden yksi musta ruutu. Näin ollen $X$:n saa puoleen mustista, joten vain mustiin pelaamalla Amy saa varmasti laudalle 100 kiveä. Siispä $K \geq 100$.

Todistetaan, että $K \leq 100$ osoittamalla, että Ben voi pelata siten, että Amy ei voi saada laudalle yli 100 kiveä. Jaetaan lauta pienempiin $4 \times 4$-ruudukkoihin, joita on 25. Pelatkoon Ben vuoroparilla aina samaan ruudukkoon kuin Amy. Riittää osoittaa, että Ben voi pelata siten, että Amy ei saa yhteen ruudukkoon yli 4 kiveä, jolloin hän ei voi saada koko laudalle yli 100 kiveä.

Tähän vaiheeseen on olemassa sekä helppo, mutta aikaavievä, että fiksu tapa.

Itse tein kisassa helpolla tavalla: "brute forcella", eli käymällä läpi kaikki tapaukset. Sanotaan, että Ben voittaa, jos Amylla on ruudukossa korkeintaan 4 kiveä, eikä hän voi laittaa yhtään lisää. Kokeilemalla huomataan, että Amyn edellisen siirron peilaaminen ruudukon keskikohdan kautta lienee Benille voittostrategia. Seuraavaksi käydään symmetriat huomioiden läpi kaikki mahdolliset tapaukset.

Ensimmäisellä vuoroparilla Amyllä on 3 symmetriat huomioiden uniikkia siirtoa, mutta naiivisti edetessä erilaisten tapausten määrä kasvaa seuraavalle kierrokselle jo 21:een. Jos kuitenkin tarkastellaan laudan tilaa sen suhteen, mihin ruutuihin Amyn on mahdollista vielä siirtää, tuottavat jotkut tapauksista samoja tiloja, joita voi todeta siirtojen järjestyksellisten ja vaikutuksellisten symmetrioiden perusteella tai tarkastelemalla yksittäistapauksia, jolloin uniikkeja tiloja on toisen vuoroparin jälkeen 11. Toisaalta tilat, joissa on ainoastaan samoja vapaita ruutuja kuin toisessa vaikeammassa tilassa, voidaan sisällyttää vaikeampaan tilaan, sillä ylimääräiset varatut ruudut eivät edesauta Amyn voittoa, joten 11 tilaa supistuu kolmannelle vuoroparille kolmeksi tuottaen 10 mahdollista siirtoa. Samankaltaisella yhdistämisellä ja sisällyttämisellä saadaan neljättä vuoroparia varten 2 tilaa, jotka on helppo todeta Benin voittoasemiksi.

Tästä tavasta seuraa parin sivun mittainen epäselvien merkintöjen ja puutteellisten perustelujen viidakko, jota tarkastajien on mukava tulkata pisteistä taistellessaan. Kellon näyttäessä kahta jäljellä olevaa tuntia oli kova taktinen valinta sen välillä, yrittääkö brutea, jonka tietää aikaavieväksi, vai miettiikö ovelampaa tapaa jättäen yhä vähemmän aikaa brutelle, mikäli ei keksi. Itselläni aikaa kului tähän yli puolitoista tuntia, ja välillä meinasikin usko loppua kesken, mutta lopulta saatiin napattua täydet pisteet.

Fiksumpi tapa on $4 \times 4$-ruudukkojen värittäminen 4 värillä seuraavasti:

Pelatessaan ruutuun Amy torjuu myös kaksi muuta samanväristä ruutua, jonka jälkeen Ben voi pelata viimeiseen samanväriseen ruutuun. Näin ollen jokaisella vuoroparilla Amyn on pelattava eriväriseen ruutuun, joten hän saa ruudukkoon korkeintaan 4 kiveä.

On siis osoitettu, että Amy voi saada $4\times 4$-ruudukkoon korkeintaan 4 kiveä eli $20\times 20$-ruudukkoon korkeintaan 100 kiveä, mutta toisaalta että hänellä on varma strategia vähintään 100 saamiseen. Siispä $100 \leq K \leq 100$ eli $K = 100$.

**Vastaus:** $K = 100$.

***Selim Virtanen***

**Tehtävä 5.** Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ päättymätön jono positiivisia kokonaislukuja. Oletetaan, että on olemassa kokonaisluku $N > 1$, jolle jokaista $n \geq N$ kohti luku

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

on kokonaisluku. Osoita, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $M$, että $a_m = a_{m+1}$ kaikilla $m \geq M$.

### Toinen kisapäivä kisaajan silmin

Lähdin kisapäivään melko huonolla mielialalla: olin aamiaspöydässä tajunnut ykköstehtävän ratkaisuni olevan virheellinen. Toiveeni hopeamitalista alkoivat hiipumaan, ja pyrin saamaan edes pronssimitalin. Tämä kuitenkin vaatisi paremman suorituksen kuin ensimmäisenä päivänä.

Edellisenä päivänä olin kommentoinut, että huomisen koepaperi voi olla "tupla tai kuitti": oli tiedossa, että neljäs ja viides tehtävä tulisivat olemaan kombinatoriikkaa ja lukuteoriaa, koska ensimmäisen päivän ensimmäiset tehtävät olivat olleet geometriaa ja algebraa. Jos kombinatoriikka sattuisi olemaan neljäntenä ja lukuteoria viidentenä, olisi mahdollista, että saisin joko molemmat tai en kumpaakaan tehtyä. Tämän takia sykkeeni nousi hetkellisesti kilpailun alkaessa ja nähdessäni lukuteorian asettuneen viidennen tehtävän kohdalle.

Vaikka lukuteoria on selvästi vahvin osa-alueeni, päätin silti ensin yrittää helpoimmaksi rankattua kombinatoriikan tehtävää. Ajatukseni kuitenkin väistämättä alkoivat pomppia lukuteoriaan, ja 45 minuuttia nelostehtävään käytettyäni annoin periksi lukuteorian vetovoimalle.

Ensimmäinen ideani oli tutkia kahden vastaavan summan erotusta. Tämä tuntui selvältä heti tehtävän nähdessäni, mutta antoi pienellä jatkolla jo yhden pisteen. Sitten päästiin itse vaikeaan osuuteen tehtävästä, mikä kuitenkin ratkesi vastaavalla idealla kuin muutama harjoitustehtävä, johon olin törmännyt aiemmin. Noin puoli tuntia tehtävää mietittyäni minulla olikin jo karkea ratkaisu tehtävään. Aloitin ratkaisun kirjoittamisen puhtaaksi, ja kaikki tuntui sujuvan hyvin, kunnes jokin asia jäi tökkimään. Luulin joitakin minuutteja, että tarvitsisin uuden idean ratkaisun läpiviemiseksi, mutta korjattuani kirjoitusvirheen kolmannelta sivulta ratkaisuani sain todistukseni toimimaan.

Koko tehtävään kului alusta loppuun reilu tunti, ja hyvin pian ratkaisun kirjoitettuani sain myös neljännen tehtävän ratkaistua. Minulla oli tämän jälkeen pari tuntia aikaa kutostehtävän parissa, johon en kuitenkaan saanut juurikaan edistystä. Ykköstehtävää koskevasta virheestä viisastuneena tarkistin ratkaisuni neljänteen ja viidenteen tehtävään useammin kuin mitä olisin jaksanut normaalioloissa, ja sainkin näistä täydet pisteet. Kutostehtävästäkin onnistuin keräämään yhden irtopisteen.

**Ratkaisu.** Todistetaan tehtävänannon väite vastaoletuksella. Oletetaan, että jono $a_n$ ei ole vakio mistään pisteestä lähtien. Ratkaisun ajan muuttujalla $p$ viitataan aina alkulukuun.

Olkoon
$$S(n) = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}.$$

Sillä $S(n)$ on kokonaisluku kaikilla $n \geq N$, on myös erotus $S(n+1) - S(n)$ kokonaisluku suurilla $n$:n arvoilla. Erotuksen lauseke on seuraavanlainen:

$$\begin{aligned} S(n+1) - S(n) =& \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} \\ =& \frac{a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}}{a_1 a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Tiedämme siis, että $a_1 a_{n+1}$ jakaa lausekkeen $a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}$ kaikilla $n \geq N$. Määritellään helppolukuisuuden vuoksi $f(n) = a_1 a_{n+1}$ ja $g(n) = a_n a_1 + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}$. Siispä $f(n) \mid g(n)$.

Olkoon $p$ mielivaltainen alkuluku. Määritellään $v_p(k)$ olemaan se kokonaisluku $m$, jolla $p^m$ jakaa luvun $k$, mutta $p^{m+1}$ ei jaa. $v_p(k)$ on hyvin määritelty kaikille kokonaisluvuille $k$. Määrittelemme $v_p(0) = \infty$ kaikille $p$.

**Lemma 1.** *On olemassa sellainen $p$, jolla $v_p(a_{n+1}) \neq v_p(a_n)$ äärettömän monella $n$.*

*Todistus.* Osoitetaan ensin, että on vain äärellisen monta alkulukua, jotka jakavat jonkin jonon $a_n$ termeistä. Tiedämme, että $f(n) \mid g(n)$. Koska $a_{n+1} \mid f(n)$, $a_{n+1}$ jakaa luvun $g(n) = a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_n a_1$. Täten $a_{n+1} \mid a_n a_1$. Osoitetaan nyt, että jokaisen luvun $a_n$, missä $n > N$, alkutekijät esiintyvät joko luvun $a_N$ tai $a_1$ alkutekijöissä. Todistetaan tämä vastaoletuksella: nyt on olemassa pienin luku $i > N$, jolla luvulla $a_i$ on jokin alkutekijä $p$, joka ei jaa tuloa $a_N a_1$. Mutta $a_i \mid a_{i-1}a_1$, eli $p \mid a_{i-1}a_1$. Sillä $p$ ei jaa lukua $a_1$, sen tulee jakaa luku $a_{i-1}$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $i$ on pienin ehdon toteuttava indeksi. Sillä luvuilla $a_1, a_2, \ldots, a_N$ on vain äärellisen monta alkutekijää, on olemassa vain äärellisen monta alkulukua, jotka jakavat jonkin jonon $a_n$ termeistä.

Oletetaan nyt, että halutunlaista $p$ ei ole olemassa. Valitaan nyt mielivaltainen $q$. Jos $q$ ei jaa mitään termiä jonosta $a_1, a_2, \ldots$, on tietysti $v_q(a_{n+1}) = v_q(a_n)$ kaikilla $n$. Tutkitaan nyt niitä $q$, jotka jakavat jonkin jonon termeistä. Näitä on edellisen nojalla vain äärellisen monta. Jokaista tällaista $q$ kohden on olemassa jokin $M_q$, jolla $v_q(a_{n+1}) = v_q(a_n)$ kaikilla $n \geq M_q$. Voimme nyt valita maksimin luvuista $M_q$, ja tämä kelpaisi tehtävänannon kaltaiseksi luvuksi $M$. Tämä on ristiriidassa aiemmin tehdyn oletuksen kanssa, jonka mukaan jono $a_n$ ei ole vakio mistään pisteestä lähtien. Siispä tällainen $p$ on olemassa, ja lemman väite on todistettu. $\square$

Olkoon nyt $t$ jokin lemman 1 mukainen alkuluku. Määritellään $b_n = v_t(a_n)$ kaikilla $n$. Tutkitaan nyt lukujonon $b_n$ ominaisuuksia. Tiedämme, että $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella $n$. Muita ominaisuuksia varten todistamme ensin seuraavan lemman.

**Lemma 2.** *$v_p(a \pm b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$ kaikilla $p, a, b$. Lisäksi aito epäyhtälö vaatii $v_p(a) = v_p(b)$.*

*Todistus.* Olkoon $c = \min(v_p(a), v_p(b))$. $p^c \mid a \pm b$, joten $v_p(a \pm b) \geq c$. Jos $v_p(a) \neq v_p(b)$, niin $p^{c+1}$ jakaa täsmälleen toisen luvuista $a$ ja $b$. Tällöin $p^{c+1}$ ei jaa lukua $a \pm b$, joten $v_p(a \pm b) = c$. $\square$

**Lemma 3.** *Jos $b_{n+1} > b_n$ ja $n \geq N$, niin $b_{n+1} = b_1$.*

*Todistus.* Tiedämme, että $f(n) \mid g(n)$. Täten $v_t(f(n)) \leq v_t(g(n))$. Osoitetaan, että jos $b_{n+1} \neq b_1$, niin onkin $v_t(f(n)) > v_t(g(n))$, mikä todistaa väitteen. Jos $b_{n+1} > b_1$, niin $v_t(g(n)) = v_t(a_{n+1}^2 + a_n a_1 - a_{n+1}a_n)$. Laskemme jokaiselle summattavalle vastaavan $t$:n eksponentin: $v_t(a_{n+1}^2) = 2b_{n+1}$, $v_t(a_n a_1) = b_n + b_1$, ja $v_t(a_{n+1}a_n) = b_{n+1} + b_n$. Tehtyjen oletuksien avulla saamme $2b_{n+1} > b_{n+1} + b_n > b_1 + b_n$. Lemmaa 2 käyttäen nyt on $v_t(g(n)) = b_n + b_1 < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$, ristiriita. Käsittelemme tapauksen $b_{n+1} < b_1$ vastaavasti. Tällöin $v_t(g(n)) = b_{n+1} + b_n < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$. Lemman tulos siis pätee. $\square$

**Lemma 4.** *Jos $b_{n+1} < b_n$ ja $n \geq N$, niin $b_{n+1} \geq b_1$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $b_{n+1} < b_1$, tavoitteena saada ristiriita. Tällöin $v_t(g(n)) = 2b_{n+1}$, sillä $v_t(a_{n+1}^2) < v_t(a_n a_1)$ ja $v_t(a_{n+1}^2) < v_t(a_{n+1}a_n)$. Mutta $2b_{n+1} < b_{n+1} + b_1 = v_t(f(n))$, ristiriita. Lemman tulos siis pätee. $\square$

**Lemma 5.** *On olemassa sellainen $n \geq N$, jolla $b_n = b_1$.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, tavoitteena saada ristiriita. Nyt, jos $b_{n+1} > b_n$ jollain $n \geq N$, on lemman 3 nojalla $b_{n+1} = b_1$, mikä ei käy. Siis $b_{n+1} \leq b_n$ kaikilla $n \geq N$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $b_n \geq 0$ kaikilla $n \geq N$, ja $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella $n$. Lemman tulos siis pätee. $\square$

Valitaan sellainen $k \geq N$, jolla $b_k = b_1$. Jos $b_{k+1} = b_k$, kasvatamme $k$:ta yhdellä, kunnes päädymme kohtaan, jossa $b_{k+1} \neq b_k = b_1$. Tämä tapahtuu äärellisessä määrässä askelia, sillä $b_{n+1} \neq b_n$ äärettömän monella $n$. Voimme siis olettaa $b_{k+1} \neq b_k$. Tutkitaan nyt luvun $b_{k+1}$ mahdollisia arvoja.

Jos $b_{k+1} > b_k$, on lemman 3 nojalla $b_1 = b_{k+1} > b_k = b_1$, ristiriita.

Jos $b_{k+1} < b_k$, on lemma 4 nojalla $b_1 \leq b_{k+1} < b_k = b_1$, ristiriita.

Olemme saaneet ristiriidan. Siis oletus siitä, että jono $a_n$ ei ole vakio mistään pisteestä lähtien, on mahdoton, ja näin ollen tehtävänannon väite pätee.

***Olli Järviniemi***

**Tehtävä 6.** Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on voimassa $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Nelikulmion $ABCD$ sisällä on sellainen piste $X$, että

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{ja} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

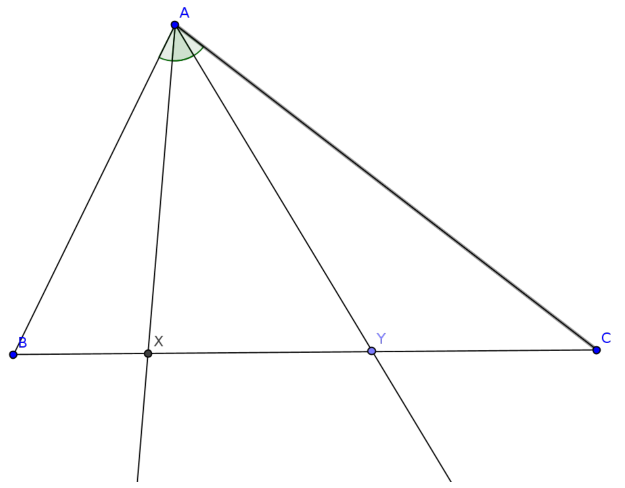
Osoita, että $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Tähän tehtävään on olemassa monta ratkaisua ja tästä konfiguraatiosta voi saada mielenkiintoisia ominaisuuksia, jotka eivät auta tehtävän ratkaisuun. Esittelen tässä erään ratkaisun.

**Ratkaisu.** Määritellään piste $K$ janalla $BD$ siten, että $\angle CAB = \angle KAD$.

**Lemma 1.** *Olkoon kolmion $ABC$ sivulla $BC$ pisteet $X$ ja $Y$. Tällöin $\angle BAY = \angle CAX$, jos ja vain jos*

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BX}{CX}\frac{BY}{CY}.$$




*Todistus.* Sinilauseen nojalla

$$\frac{\sin\angle BAX}{BX} = \frac{\sin\angle AXB}{AB}$$
$$\frac{\sin\angle AYC}{AC} = \frac{\sin\angle CAY}{CY}$$
$$\frac{\sin\angle AXC}{AC} = \frac{\sin\angle CAX}{CX}$$
$$\frac{\sin\angle BAY}{BY} = \frac{\sin\angle AYB}{AB}.$$

Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saamme

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \sin\angle BAX \sin\angle AYC \sin\angle AXC \sin\angle BAY$$
$$= \frac{BX}{CX}\frac{BY}{CY} \sin\angle AXB \sin\angle CAY \sin\angle CAX \sin\angle AYB.$$

Nyt jos $\angle BAY = \angle CAX$, niin myös $\angle BAX = \angle CAY$, ja lisäksi $\sin(\angle AYC) = \sin(\angle AYB)$ ja $\sin(\angle AXC) = \sin(\angle AXB)$. Sinilausekkeet kumoavat siis pareittain toisensa ja täten

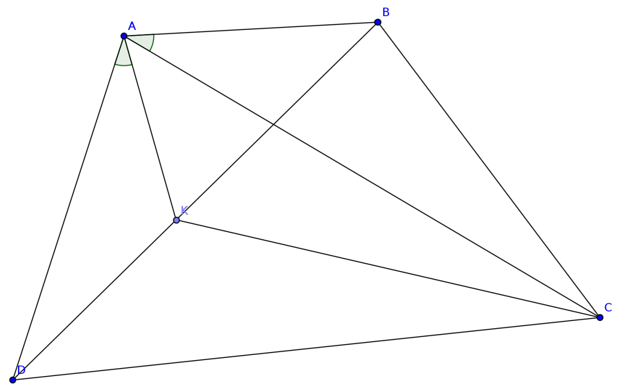
$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BX}{CX}\frac{BY}{CY}. \tag{1}$$

Toisaalta jos (1) pätee, niin aikaisempien sinilauseiden avulla saamme

$$\frac{BX}{CX}\frac{BY}{CY} = \frac{BX}{CX}\frac{BY}{CY}\frac{\sin\angle CAY}{\sin\angle BAX}\frac{\sin\angle CAX}{\sin\angle BAY}. \tag{2}$$

Mutta nyt on oltava, että $\angle CAY = \angle BAX$. Nimittäin jos esimerkiksi $\angle CAY > \angle BAX$, niin myös $\angle CAX > \angle BAY$, jolloin (2) ei voi päteä. □

**Lemma 2.** *Olkoon ABCD kuten tehtävänannossa ja K kuten määritelmässä. Tällöin* $\angle AKB = \angle CKB$.




*Todistus.* Olkoon kulman $\angle DAB$ puolittajan kantapiste janalla DB I ja kulman $\angle BCD$ vastaavasti J. Koska nelikulmiossa pätee $AB\cdot CD = BC\cdot DA$, niin kulmanpuolittajalauseen nojalla

$$\frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} = \frac{BJ}{JD}.$$

Tästä seuraa, että

$$BI\cdot JD = BJ\cdot ID.$$

Jos $I$ ja $J$ ovat eri pisteet, niin voimme olettaa menettämättä yleistävyyttä, että $BI > ID$. Tästä seuraa myös $JD > BJ$. Tällöin $BI\cdot JD > BJ\cdot ID$, joka on ristiriita, joten $I = J$. Kulmanpuolittajat siis leikkaavat samassa pisteessä.

Olkoon L lävistäjien AC ja BD leikkauspiste. Kolmiolle ABC pätee lemma 1, jonka nojalla

$$\left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{BL}{LD}\frac{BK}{KD}.$$

Koska $AB/DA = BC/CD$, on

$$\left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \frac{BL}{LD}\frac{BK}{KD}.$$

Siispä $\angle BCA = \angle DCK$.

Sovelletaan sinilausetta vielä kolmioihin ABL, BCL, AKD ja KCD:

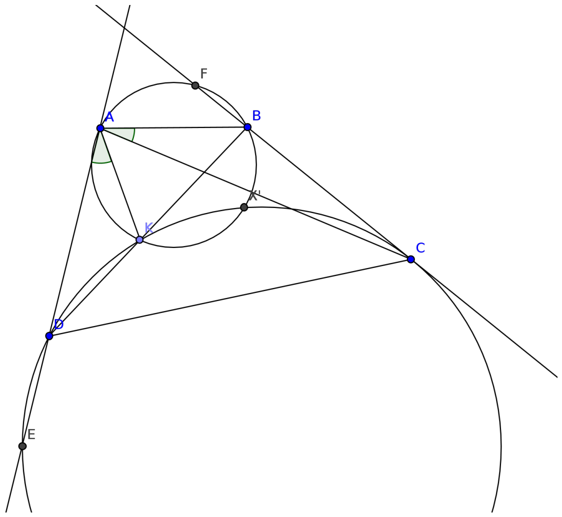
$$\frac{\sin\angle ALB}{AB} = \frac{\sin\angle LAB}{BL}$$
$$\frac{\sin\angle BLC}{BC} = \frac{\sin\angle LCB}{BL}$$
$$\frac{\sin\angle DAK}{DK} = \frac{\sin\angle DKA}{DA}$$
$$\frac{\sin\angle KCD}{KD} = \frac{\sin\angle DKC}{DC}.$$

Jakamalla ensin kaksi ensimmäistä yhtälöä puolittain, sieventämällä, ja sitten jakamalla kaksi viimeistä yhtälöä puolittain saamme

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin\angle LAB}{\sin\angle BCL} = \frac{\sin\angle DAK}{\sin\angle DCK} = \frac{DC}{AD}\frac{\sin\angle DKA}{\sin\angle DKC}.$$

Mutta koska $BC/AB = DC/AD$, on oltava $\angle DKA = \angle DKC$, jolloin myös $\angle AKB = \angle CKB$. □

Todistetaan, että $X$ on uniikki. Oletetaan, että on olemassa jokin piste X', jolle pätee sama ehto kuin pisteelle X. Tutkitaan, millä alueilla X' voi esiintyä. Olkoon $\angle BAX = \alpha$. X' ei voi mennä alueelle, jossa $\angle BAX' > \alpha$ ja $\angle DCX' < \alpha$ tai päinvastoin. Jatketaan janoja AX, BX, CX ja DX nelikulmion ABCD sivuille. Olkoot näiden kantapisteet A', B', C' ja D' vastaavasti. Nyt X' ei voi sijaita nelikulmioissa BC'XA' tai AXCD, koska muuten kulmaehdot eivät toteutuisi. Eli X' sijaitsee joko kolmiossa AC'X tai CA'X. Vastaavasti saadaan, että X' sijaitsee joko kolmiossa BD'X tai B'DX. Näiden kolmioiden leikkaus on X, joten X'=X.




Nyt päästään itse tehtävän ratkaisuun. Jahdataan kulmia aikaisempien huomioiden ja kehäkulmalauseen avulla. Olkoon piste X' ympyröiden (AKB) ja (DKC) toinen leikkauspiste. Haluamme todistaa, että X'=X.

Nyt

$$\angle X'AB = \angle X'KB = 180^\circ - \angle X'KD = \angle X'CD.$$

Olkoot E sivun AD ja ympyrän (DKC), sekä F sivun BC ja ympyrän (AKB) toiset leikkauspisteet. Suunnatuilla kulmilla on mahdollista päästä eroon konfiguraatio-ongelmista, mutta käytämme perinteisiä kulmia tässä. Koska

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle CKB = \angle CEA,$$

on AFCE on jännenelikulmio, ja tästä seuraa, että

$$\angle KFC = \angle KAB = \angle DAC = \angle EFC,$$

eli pisteet F, K ja E ovat samalla suoralla. Siispä

$$\begin{aligned}\angle X'BC &= 180^\circ - \angle X'BF \\ &= \angle FKX' \\ &= 180^\circ - \angle EKX' \\ &= 180^\circ - \angle EDX' \\ &= \angle X'DA.\end{aligned}$$

Nyt $\angle BX'A + \angle DX'C = \angle BKA + \angle DKC$. Lemman 2 nojalla $\angle BKA + \angle DKC = 180^\circ$. Eli X' on sama kuin tehtävänannon X, ja $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.

***Nerissa Shakespeare***

## Uutta Verkko-Solmussa

Oppimateriaalit-sivulla

`https://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html`

on ilmestynyt Jorma Merikosken, Ari Virtasen ja Pertti Koiviston kirja Johdatus diskreettiin matematiikkaan:

`https://matematiikkalehtisolmu.fi/2018/jdm-2017-12-19.pdf`