

S&LMU

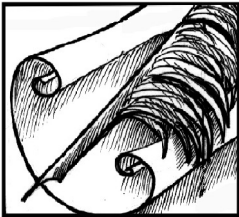
MATEMATIIKKALEHTI 2/18

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Palvella rakasta isänmaata parhaalla mahdollisella tavalla (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Solmu päivitti tietosuojaselosteensa (Jouni Seppänen)	5
Matematiikkadiplomit on otettu käyttöön laajalti (Marjatta Näätänen)	9
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävät (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	10
Italiasta ei löytynyt mafiaa – kiinnostavaa matematiikkaa kylläkin (Milja Krés, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Essi Vilhonen)	12
Suomi Iranin 4. Geometriaolympialaisissa (Lauri Hallila)	17
Kurkistus vektoriavaruuteen (Jukka Ilmonen)	20
Lebesguen mitta (Jukka Liukkonen)	24
Seikkailuja seisauksina ja tasauksina (Jouni Luukkainen)	30
Moniulotteisuuden ihmeitä: ongelmien ratkaisuita (Esa V. Vesalainen)	32
Solmun pulmapalsta	34
Kaksi pistettä määräävät suoran, kolme paraabelin – miten tämä selittää QR-koodin toiminnan (Jyrki Lahtonen)	35
Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, neljäs ja viides kurssi (Matti Lehtinen)	40
Juuso peruskoulussa (Markku Sointu)	43
Matematiikan arkisovellusten huippua (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	47



Palvella rakasta isänmaata parhaalla mahdollisella tavalla

Pääkirjoitus

Eräs jo eläkkeelle jäänyt vanha professori kertoi, kuinka hän nuorena tutkijana oli kuullut avoimesta virasta toisessa yliopistossa. Kyseinen virka oli parempi (ainakin arvostetumpi), vaativampi ja vastuullisempi kuin hänen silloinen virkansa. Hänen oman laitoksensa eräs vanha professori oli häneltä kysynyt, aikooko hän kyseistä virkaa hakea. Nuoren tutkijan vastaus oli ollut, että ei, koska hän viihtyi silloisessa työssään ja työpaikassaan. Tähän vanha kunnianarvoisa professori (yleensä rauhallinen herrasmies) oli vastannut iskemällä nyrkin pöytään ja ilmoittamalla ”kun rakas isänmaa on nuoren miehen kouluttanut, on nuoren miehen palveltava rakasta isänmaata parhaalla mahdollisella tavalla”. Nuori tutkija haki virkaa ja sai sen.

”Palvella rakasta isänmaata parhaalla mahdollisella tavalla” on fraasi, joka usein tulee mieleen mitä omituisimmissa yhteyksissä. Toisinaan isänmaa toki korvautuu vaikkapa sanalla olympiavalmennus (”kun rakas olympiavalmennus on nuoren naisen kouluttanut, on nuoren naisen palveltava rakasta olympiavalmennusta parhaalla mahdollisella tavalla”) tai jollain muulla tilanteeseen sopivalla. Näitä kaikkia tilanteita yhdistää sekä velvollisuudentunto että usko siihen, että tekee oikein. Oikein tekeminen voi tarkoittaa joko sitä, että auttaa jotain sellaista tahoja, jolta kokee saaneensa paljon, tai sitä, että uskoo toiminnan johtavan parempaan lopputulokseen.

Minulla on takana yli kaksikymmentä vuotta matematiikan olympiavalmennuksessa. Ensin kilpailijana, sitten valmentajana. Suurimman osan ajasta tämä on hauska harrastus. Joskus kilpailuissa kuitenkin hieman

joutuu ihmettelemään esimerkiksi jonkun muun maan joukkueenjohtajan järjenjuoksua, pahimmillaan koko juryn, mutta keskimäärin touhu on hyvin palkitsevaa.

Matematiikan opiskelua yliopistossa en ole hetkeäkään katunut. Sitä voisin suositella hyvin monelle. Matematiikka antaa loistavan pohjan. Sen sijaan suosittelen yleensä harkitsemaan hetken ennen kuin päättää yrittää tehdä uraa yliopistolla (jos siis mielipidettäni satuu kysymään). Kyse ei ole epäilyksestä taitoja kohtaan, vaan yksinkertaisesti siitä, että matemaattisen alan koulutuksella voi monessa muussa paikassa saada paremman palkan ja käytännössä myös inhimillisemmät työajat. Yliopistolle kannattaa jäädä, jos todella pitää siitä, mitä tekee, ja jos tutkimus on se, mitä haluaa tehdä. Jos nämä osuvat kohdalleen, on yliopisto ihan mahtava valinta.

Vaikka Åbo Akademi on loistava työpaikka ja minulla on hyvät työkaverit, mukavat ja fiksut oppilaat ja ehkä Suomen paras näköala työhuoneeni ikkunasta, ei tietenkään jokainen hetki ole sellainen, jolloin kaikki olisi mukavaa. Joskus vain kaatuu järjetön määrä töitä niskaan: yhden artikkelin proofit, yksi suuritöinen kurssi, toisen paperin kieliasun korjaaminen, artikkelihahmotelma luettavaksi, ja jos oikein huono tsägå käy, niin eletään jotain sellaista kuukautta, jolloin on luettavana ylioppilaskokeita tai vaikkapa kasa kilpailupapereita. Silloin asiat eivät oikein enää etene puhtaasta oikoluvun ja tarkistamisen riemusta. Silloin lähinnä ainoa ajatus on tehdä oikein kollaboraattoreita tai kurssilaisia tai kokelaita kohtaan. Nämä ovat myös niitä hetkiä,

jolloin uskon, että katuaisin tai miettin muuta uravaihtoehtoja, jos en todella pitäisi työstäni.

Velvollisuudentunnon varaan ei takuulla voi uraa rakentaa: jos kiinnostusta ei ole, niin kaikki menee vain puurtamiseksi. Ilman velvollisuudentuntoa taas mikään ei etene. Velvollisuudentunto tai hyödyn arvioiminen on se syy, miksi saan kokeet korjattua ja artikkelien kieltä hiottua, mutta miksi en osaa kuin muutaman hassun desimaalin piin kehitelmästä. Kaikki kunnia niille, jotka esimerkiksi hovin ja urheilun vuoksi ovat opetelleet piille sata desimaalia tai enemmän, mutta minun näkökulmastani tämä harjoitus kuuluu lähinnä pain, no gain -kategoriaan.

No pain, no gain oli tyypillinen fraasi KTH:lla (Kungliga Tekniska högskolan, Tukholma) työskennellessäni. Kaikki arvokas vaatii työtä, ja tätä tolkutettiin nuorten tutkijoiden päähän. Tästä ei tietenkään seuraa, että kivusta tai työstä suoraan seuraisi mitään hyvää, mutta ilman niitä ei ainakaan.

Loppukevennykseksi ja kesän kunniaksi todistetaan,

miksi suomalaisten tai Aristoteleen on pakko olla väärässä. Analysoidaan seuraavia sananlaskuja:

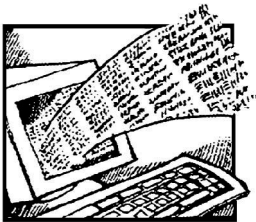
”Kuu kiurusta kesään, puoli kuuta peipposesta, västäräkistä vähäsen, pääskyselä ei päivääkään.” (Suomi)

”Ei yksi pääsky kesää tee.” (Aristoteles)

Suomalaisten mukaan siis pääskyselä ovat kesän merkki, Aristoteleen mukaan yksi pääsky ei tee kesää. Jos siis sekä suomalaiset että Aristoteles ovat oikeassa, on olemassa jokin lukumäärä pääskyjä, joka riittää kesän merkiksi. Olkoon $n > 1$ pienin tällainen lukumäärä. Tiedämme, että $n - 1$ pääskyä ei tee kesää. Koska n pääskyä saadaan $n - 1$ pääskyselä lisäämällä yksi pääsky, pitää tämän yhden lisätyn pääskyselän selvästi tehdä kesä. Aristoteleen mukaan tämä ei kuitenkaan ole totta. On siis osoitettu, että joku on väärässä, suomalaiset tai Aristoteles.

Hyvää kesää!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Solmu päivitti tietosuojaselosteensa

Jouni Seppänen

Toukokuun lopulla jokainen Internetiä yhtään pidempään käyttänyt on saanut suuren määrän viestejä, joissa vedotaan EU:n uuteen tietosuoja-asetus GDPR:ään ja joko todetaan, että jokin palvelu on päivittänyt käyttöehtonsa, tai sitten pyydetään lupaa jatkaa sähköpostien lähettämistä. Mistä on kyse ja liittyykö tämä jotenkin Solmuun? Onko ilmiöllä yhtymäkohtia matemaatiikkaan?

Kun Internetissä tarjotaan ilmaiseksi jotain, kuten sosiaalisen median palveluita, viihdyttäviä pelejä tai vaikka matematiikkalehtiä, on perusteltua kysyä, miten se on mahdollista, koska jostain näiden palveluiden ylläpitämiseen täytyy saada rahaa. Usein raha tulee mainoksista tai maksetusta tuotesijoittelusta, mutta näitä Solmussa ei ole. Monien sivustojen on väitetty myyvän käyttäjien henkilötietoja, joskaan sivustojen omistajat eivät mielellään kerro tällaisesta kaupankäynnistä, vaan se saattaa olla verhottu käyttäjäkokemuksen parantamiseen tai mainosten kohdentamiseen. Yleensä käyttäjältä saadut tai hänestä päätelty henkilötiedot kytkeytyvät mainoksiin siten, että mainosten näyttämisen kautta kerätään tietoja käyttäjistä, ja toisaalta mainokset kohdennetaan käyttäjille reaaliajassa käyttäen kaikkea saatavilla olevaa tietoa. Moni on varmaan huomannut, että kun jossain nettikaupassa katselee vaikka housuja, monella muullakin sivulla alkaa näkyä housumainoksia. Saattaa tuntua uskomattomalta, että mainosvaroin ja käyttäjätietoja kauppaamalla voitaisiin rahoittaa kovin merkittäviä sivustoja. Jos tilanetta vertaa vaikka paperisiin julkaisuihin, niin posti-

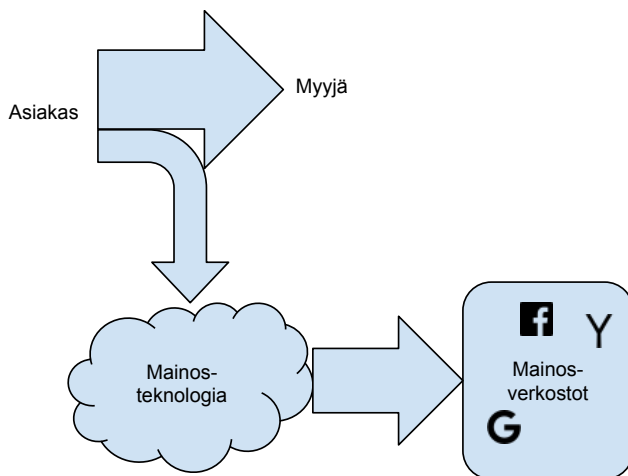
luukusta tulee ilmaiseksi lehdyköitä, joiden sisältö on melkein kokonaan mainoksia, ja hyvää journalismia lukeakseen täytyy maksaa oikean lehden tilausmaksu (oloonkin, että mainoksia pääsee lukemaan sittenkin).

Erään matemaattisen mallin tästä kaupasta esitti Maciej Ceglowski esitelmässään *The Website Obesity Crisis*¹, jonka varsinainen aihe oli se, miksi www-sivut latautuvat niin hitaasti. Osaselitykseksi hän tarjosi mainosteknologian yrityksiä, joiden määrä oli kasvanut niin suureksi ja joiden väliset kytkennät olivat tulleet niin monimutkaisiksi jo vuonna 2015, että kuluttajan oli tullut mahdottomaksi edes ymmärtää, ketkä kaikki kilpailevat hänen lukemistaan rahoittavien mainosdollarien maksamisesta.

Sankey-diagrammi A esittää yksinkertaistettuja rahavirtoja, kun kuluttaja ostaa jotain kauppiaalta. Suurin osa hinnasta menee kauppiaan taskuun. Osa siitä toki jatkaa matkaansa mm. verottajalle ja työntekijöille, mutta tässä tapauksessa olemme erotelleet rahavirrasta vain mainoksiin kuluvaan rahan. Diagrammissa nuolen paksuus esittää rahavirran suuruutta ja pilvi esittää salleräisiä mainosteknologian yrityksiä. Mainosteknologia tarkoittaa tässä sellaisia toimialoja kuin mainospaikkojen huutokauppaa, kuluttajakäyttäytymisen tilastollista mallinnusta ja käyttäytymistä kuvaavan datan kauppaamista. Näihin liittyy tietysti matemaattikoa houkuttelevia työpaikkoja mutta myös yksityisyysnäkökohtia. Housumainosten näkeminen ei ole kovin vakavaa, mutta kun ahkerat mallintajat tutkivat osto-

¹http://idlewords.com/talks/website_obesity.htm

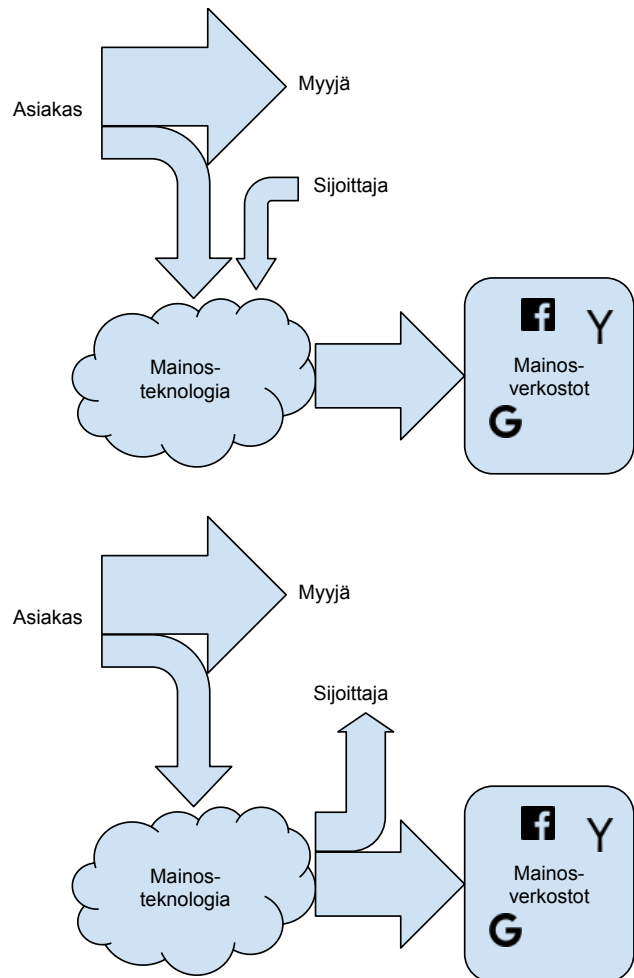
käyttäytymistämme, heitä kiinnostaa myös esimerkiksi asuinalueemme, poliittinen suuntautumisemme ja tiedot terveydentilastamme. On väitetty, että jossain tapauksessa mainostajat arvasivat perheen teinitytön olevan raskaana ja alkoivat lähettää elämäntilanteeseen sopivia mainoksia ennen kuin tyttö oli kertonut asiasta perheelleen². On myös väitetty, että ulkopuolinen taho olisi vaikuttanut Yhdysvaltain vaalien tuloksiin Internet-mainonnalla³.



Sankey-diagrammi A.

Palataan rahavirtamalliin. Emme varmastikaan edes tiedä, mitä kaikkea mainosteknologiapilvessä tapahtuu, mutta tässä mallissa tällä ei ole väliä: jokin määrä rahaa menee sisään ja jokin määrä tulee ulos. Tämän rahan kohde ovat kannattavia mainosverkostoja pyörittävät yritykset, joita ovat mm. Facebook ja Google. Näistä taas kulkee jonkin verran rahaa ns. sisällöntuottajille, kuten lehdille. Jos rahaa koskee jonkinlainen säilymislaki, niin sisään tulevan ja ulos poistuvan rahan määrä on sama, mutta tässä diagrammissa näin ei ole. Mainosteknologiapilvessä rahaa näyttää syntyvän tyhjästä. Jonkun mielestä mainosteknologia varmaan tuottaa lisäarvoa, mutta rahaa se ei sentään voi paimaa. Diagrammi B näyttää, mistä raha tulee: sijoittajat pumpaavat koneistoon rahaa.

Mainosteknologiaan sijoittaneet kapitalistit siis rahoittavat lehtiä. Jonain päivänä nämä sijoittajat kyllä haluavat siirtyä saamapuolelle ja saada jopa jotain tuottoa sijoitukselleen, mitä esittää diagrammi C. Se on vielä pahemmin epätasapainossa kuin diagrammi A, joten mitä silloin tapahtuu? Cegłowski mukaan mainosteknologiayritykset käyvät entistä kovempaan kilpailuun, joka uhkaa yksityisyyttämme vielä paljon pahemmin kuin tällä hetkellä. Cegłowski esitti, että mainosteknologiaa pitäisi säännellä tiukemmin, ja ehkä EU kuunteli.



Sankey-diagrammit B ja C.

Solmu ei kerää eikä kauppaa henkilötietoja, vaan lehteä rahoitetaan apurahoin ja lahjoituksin ja nämä rahat saadaan riittämään tiukalla kulukurilla. Pitkäaikainen lukija on saattanut huomata tämän esimerkiksi siitä, että lehden ulkoasu ei uudisteta ihan yhtä usein kuin kaupallisten tuotteiden. Solmu ei siis ainakaan mainosteknologian kautta ole osallistunut minkään maan vaalien horjuttamiseen.

Vaikka Solmua eivät varsinaiset henkilötiedot kiinnosta, tiukan laintulkinnan mukaan Solmulla kuitenkin on lukijoitaan koskeva henkilökisteri: Internetissä viestinnästä jää nimittäin aina jälkiä. Kun selain ottaa yhteyden mihin tahansa palvelimeen, tiedonsiirto tapahtuu lähettämällä viestejä edestakaisin. Jokaisessa viestissä täytyy olla paluuosoite, jotta vastapuoli pystyy lähettämään vastauksen. Näihin osoitteisiin liittyy joidakin matemaattisia tai ainakin numeerisia näkökohtia, jotka sopinevat Solmussa esitettäväksi.

Puheena olevat osoitteet tunnetaan IP-osoitteina (lyhennys tarkoittaa *Internet Protocol*), jotka ovat perinteisesti olleet 32-bittisiä lukuja. Ne kirjoitetaan yle-

²<https://www.nytimes.com/2012/02/19/magazine/shopping-habits.html>

³<https://reut.rs/2ppSGBk>

sesti neljänä pisteillä erotettuna oktetina eli kahdeksan bitin rykelmänä, jotka voidaan esittää desimaalijärjestelmän lukuina nollasta 255:een. Esimerkiksi osoite 110000001010100000000000001010 kirjoitetaan 192.168.0.10. Mahdollisia osoitteita on 2^{32} eli vähän yli neljä miljardia, mikä näytti aikanaan valtavasta määrästä, joten niitä jaettiin eri käyttäjille aluksi melko avokätisesti. Apple sai kaikki 2^{24} osoitetta, joiden ensimmäinen oktetti on 17, Stanfordin yliopisto ne, joiden ensimmäinen oktetti on 36, jne. Nykyään osoitteet alkavat olla lopussa, koska huomattava osa maailman väestöstä haluaa päästä Internetiin, ja monilla on jopa useampi erillinen laite, joille pitäisi saada osoitteet. Siksi näiden rinnalla on käytössä 128-bittisiä osoitteita. Nämä IPv6-osoitteet kirjoitetaan yleensä kahdeksana kaksoispisteillä erotettuna 16-järjestelmän lukuina, mutta peräkkäisten nollien jonot korvataan kahdella kaksoispisteellä. Esimerkiksi Facebookilla on osoite 2a03:2880:2110:df07:face:b00c::1, jonka numeroihin on piilotettu pieni sanaleikki. Osoitteiden määrä on niin valtava, että yleensä loppukäyttäjälle annetaan suurpiirteisesti 64-bittinen osoiteavaruus, jossa on 2^{64} osoitetta, yhtä paljon kuin vanhojen osoitteiden määrän neliö. Siinä mahtuu toteuttamaan vaikka numeerisia sanaleikkejä. Näitä avaruuksia on samoin 2^{64} , mistä riittää käyttäjille vielä aika pitkään. Kaikki laitteet eivät vielä näitä pidempiä osoitteita ymmärrä.

Kun siis selaat Solmun sivuja, selaimesi ottaa yhteyden Solmun palvelimeen, ja palvelimen on muistettava koneesi IP-osoite vastauksen lähettämistä varten. Kotikäyttäjien IP-osoitteet vaihtuvat usein, osin siksi, että näin saadaan neljä miljardia osoitetta riittämään. Siksi tänään käyttämäsi osoite voi olla huomenna jollakulla muulla. Osoitteita on käytännössä mahdoton yhdistää sinuun henkilöön, paitsi että oikeus voi velvoittaa teleoperaattorin luovuttamaan tiedon osoitteen tilaajasta, ja Facebookin kaltainen palvelu, jolla on lonkeronsa monella sivustolla ympäri maailmaa, voi yhdistää osoitetiedot omiin kirjautumistietoihinsa ja siten seurata, millä sivuilla kukin käyttäjä vierailee. Tämä tapahtuu niin, että sivuston ylläpitäjä haluaa olla osallisena mainoksiin liittyvissä verkostoissa ja sijoittaa sivuille Facebookin jakokuvakkeen. Selain hakee kuvakkeen Facebookin palvelimelta, joka kirjaa käyttäjän IP-osoitteen ja tiedon sivusta, jolle kuvake on upotettu. Ehkä tästä syystä on katsottu, että IP-osoite on laskettava henkilötiedoksi⁴, ja tässä mielessä jokainen www-sivusto muodostaa ainakin lyhytaikaisesti henkilökisterin.

Solmunkin joillakin sivuilla on mm. Facebookin jakokuvake, mutta se on toteutettu niin, että kuva haetaan Solmun palvelimelta. Siksi Facebook ei saa tietoja ennen kuin käyttäjä nimenomaisesti klikkaa kuvaketta.

Solmu käyttää oman palvelimensa edustalla Cloudflare-nimisen yrityksen cdn-palvelua (*content de-*

livery network, sisällönjakeluverkosto). Cloudflarella on ympäri maailmaa välityspalvelimia, joista sivut on nopeampi ladata ja jotka suodattavat automaattisesti useita tietoturvaohjeita. Solmun kannalta merkityksellistä on myös, että käyttäjän IP-osoitteet näkyvät vain Cloudflarelle, ja Solmun palvelin tietää vain Cloudflaren eikä loppukäyttäjän IP-osoitteen. Solmulla on Cloudflaren kanssa sopimus tietojen huolellisesta säilyttämisestä ja tarkoituksenmukaisesta käytöstä. Virhetilanteissa on kuitenkin mahdollista, että koneesi ottaa yhteyttä suoraan Solmun palvelimeen Cloudflaren ohi. Todennäköisemmin tällaisia yhteyksiä ottavat ovat kuitenkin hyökkääjiä tai koputtelijoita, jotka etsivät huonosti suojattuja palvelimia. Koputtelijoiden IP-osoitteet tallentuvat palvelimen lokiin vianmäärittäystä ja hyökkäysten analysointia varten, mutta harvinaisissa tilanteissa sinne voi tosiaan päätyä myös loppukäyttäjän osoite, joten lokia on ehkä pidettävä henkilökisterinä. Siksi loki kryptataan ns. julkisen avaimen salauksella, joka lienee 1900-luvun lukuteorian tunnetuin saavutus.

Perusidea on, että muodostetaan kaksi erillistä avainta, jotka toimivat parina. Salainen avain koostuu esimerkiksi kahdesta suuresta alkuluvusta p ja q , julkisen avain on näiden alkulukujen tulo pq . Koska suurten lukujen tekijöihinjako on matemaatikoiden parhaan tiedon mukaan vaikea tehtävä, julkisesta avaimesta ei osata päätellä salaista avainta. Palvelimella on julkinen avain ja vain Solmun ylläpitäjillä on salainen avain. Jos lokissa on viesti m , palvelin laskee luvun

$$m' \equiv m^e \pmod{pq},$$

missä e on sopiva eksponentti (usein erinäisistä syistä valitaan $e = 65537$). Ylläpitäjät osaavat ratkaista tästä luvun

$$m \equiv (m')^d \equiv m^{de} \pmod{pq},$$

missä d on yhtälön $de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ ratkaisu, mutta jos joku ulkopuolinen pääsee murtautumaan palvelimelle, tehtävä on hänelle hyvin vaikea, kun luvut p ja q eivät ole tiedossa.

Kaikkiaan Solmu on siis varautunut GDPR-aikaan niin, että se ei kerää henkilötietoja juuri ollenkaan, mutta koska sille välttämättä päättyy henkilötiedoiksi tiukan tulkinnan mukaan luettavia tietoja, se käyttää parasta tunnettua matematiikkaa näiden tietojen salaamiseen. Tilanne on hankalampi mainosteknologian yrityksille tai muille yrityksille, joiden toiminta perustuu henkilötietojen kauppaamiseen. Näiden pitäisi kertoa toiminnastaan avoimesti ja antaa kuluttajalle mahdollisuus tarkastaa tiedot ja kieltää niiden käyttö⁵. Muillekin yrityksille tilanne voi olla vaikea, koska ison yrityksen voi olla vaikea kartoittaa kaikki henkilötietojen käsittely. Siksi esimerkiksi suosittu Instapaper-palvelu lakkasi ainakin väliaikaisesti toimimasta EU:n

⁴http://ec.europa.eu/justice/article-29/documentation/opinion-recommendation/files/2007/wp136_fi.pdf#page=16

⁵<https://yle.fi/uutiset/3-10222442>

alueella, ja eräät Internetiin kytketyt sähkölamput ja tietokoneiden oheislaitteet lakkasivat toimimasta, ellei käyttäjä hyväksynyt tietojen keruuta. Ainakin jälkimmäiset tapaukset lienevät asetuksen vastaisia, ellei yrityksillä ole esittää perustelua sille, että henkilötietojen kerääminen on välttämätöntä tietokoneen hiiren toiminnalle. Ilmaiset EU:n ulkopuolella tuotetut Internet-palvelut saattavat kuitenkin päätyä siihen, että on helppompaa sulkea palvelu eurooppalaisilta kuin noudattaa asetusta. Siten sääntelyllä on hintansa, mutta ehkä sillä saavutetaan entistä läpinäkyvämpi yhteiskunta.

Suurempi ongelma on ehkä Solmun kaltaisilla, heikosti rahoitetuilla mutta ehkä vähän isomman mitakaavan kansalaisyhteiskunnan toimijoilla, kuten ur-

heiluseuroilla, taloyhtiöillä ja kulttuurintuottajilla. Niiden toiminnassa henkilökisterien syntyminen on ehkä väistämätöntä, eikä sitä voi helposti kutistaa ihan niin pieneksi kuin Solmun palvelimen salatut IP-osoitteet. GDPR-asetus on pitkä ja vaikeaselkoinen, joten toimijan pitää ehkä palkata lakimies hoitamaan asiaa, mikä voi lohkaista ison osan toimintaan tarkoitettusta budjetista. Facebookin ja Googlen kaltaisilla suuryrityksillä on lakiosastot valmiina, eikä niille varmasti ole minäkäänlainen ongelma tuottaa vaikeasti ymmärrettäviä sopimuksia käyttäjien hyväksyttäväksi ja selittää tietosuojaviranomaisille, miksi niiden toiminta pitäisi sallia. Toivoa sopii, että tämä kustannus ei käy kansalaisyhteiskunnalle liian kalliiksi ja aja loppuakin kansalais-toimintaa suurten sosiaalisten verkostojen huomaan.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

Sata lukion matematiikan tehtävää (Markku Halmetoja)

Suppeaa suhteellisuusteoriaa alusta alkaen (Lasse Pantsar)

Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelaat, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

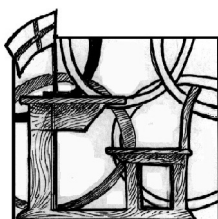
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Matematiikkadiplomit on otettu käyttöön laajalti

Marjatta Näätänen

Syyslukukaudella 2017 uusia vastauspyyntöjä tuli 89 paikkakunnalta, lisäksi yksi suomenkielisestä koulusta Ruotsista. Monilta paikkakunnilta haluttiin vastauksia usealle koululle, esimerkiksi Espoosta 28:lle, Helsingistä 23:lle, Vantaalta 8:lle, Tampereelta ja Oulusta 13:lle, Lahdesta 9:lle, Lohjalta 8:lle, Tuusulasta ja Rovaniemeltä 5:lle. Paikkakunnat olivat:

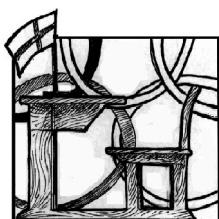
Espoo, Eura, Haapajärvi, Hausjärvi, Helsinki, Hollola, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Hamina, Iisalmi, Imatra, Janakkala, Joensuu, Jyväskylä, Järvenpää, Jääli, Kaarina, Kajaani, Kangasala, Karkkila, Kemi, Kempele, Kerava, Kirkkonummi, Kitee, Kittilä, Klaukкала, Kokkola, Konnevesi, Koski, Kotka, Kouvola, Kuhmo, Kurikka, Kuusamo, Kärkölä, Lahti, Laihia, Lappeenranta, Lemi, Lempäälä, Lohja, Loimaa, Luumäki, Mikkeli, Muhos, Mustasaari, Mäntsälä, Nilsia, Nivala, Nokia, Nukari, Nummela, Nurmijärvi, Oulainen, Oulu, Pieksämäki, Pori, Porvoo, Raahe, Raisio, Rantasalmi, Rauma, Riihimäki, Rovaniemi, Salo, Sastamala, Seinäjoki, Siikalatva, Siilinjärvi, Sipoo, Tampere, Toholampi, Toivakka, Turku, Tuusula, Tyrvävä, Urjala, Uusikaupunki, Vaala, Valkeakoski, Valkeala, Vantaa, Vesilahti, Vihti, Ylivieska, Ylöjärvi, Äänekoski.

Vastauspyyntöjen perusteella on mahdotonta arvioida, kuinka moni oppilas tekee nyt diplomitehtäviä, vaikka uskoisin, että jokseenkin kaikki diplomeja käyttävät opettajat pyytävät myös vastaukset. Tätä toimintaa on harjoitettu vuosia, eikä ole tiedossa, kuinka moni aikaisemmin vastaukset saanut jatkaa edelleen diplomien

käyttöä. Myös saman koulun opettajat voivat käyttää jonkun heistä pyytämiä vastauksia. Luokalla saattaa olla muutama, joka tarvitsee erityistä älyllistä haastetta diplomitehtävistä samaan aikaan, kun opettaja käy läpi kurssia muiden kanssa, tai koko luokka voi tehdä diplomitehtäviä, varsinkin alimmilla luokilla ennen tasoerojen kasvua. Yllä olevasta listasta näkyy joka tapauksessa, että matematiikkadiplomit ovat levinneet koko maahan oikein hyvin. Eräästä Pohjanmaan koulusta kerrottiin, että kahdesti vuodessa on diplomien juhlallinen jakotilaisuus.

Diplomisivulle myöhemmin lisätyt laaja-alaiset tehtäväpaketit sen sijaan eivät ole löytäneet paljoa käyttöä. Koulun projekti saattaa olla esim. jokin retki, otetaan kuvia, käsitellään niitä, ehkä tehdään ryhmässä video, tehdään haastattelukyselyitä, käydään vaikka jossain museossa. Matematiikan osaksi katsotaan sopivan vaikka liikenteen seuraamisesta tehty tukkimiehen kirjanpito. Tällaiseen käytäntöön eivät laaja-alaiset tehtäväpaketit sovellu. Ne on tarkoitettu matematiikan oppimiseen ja soveltamiseen eri tilanteissa.

Jotta laaja-alaisen opetuksen kautta voisi viedä eteenpäin matematiikan oppimista, tulisi huolehtia siitä, että ennen tietojen horisontaalista eheyttämistä, ts. eri oppiaineiden välisten raja-aitojen poistoa, on tehty vertikaalinen eheyttäminen, ts. oppiaineen sisäinen tarvittavan pohjan varmistus. Ennen matematiikan tietojen soveltamista olisi tarvittavat matematiikan työkalut hallittava.



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävät

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Firenzessä 9.–15.4.2018. Suomea edustivat Milja Krés, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare ja Essi Vilhonen. Varajohtajana oli Neea Palojärvi ja minä joukkueenjohtajana. Shakespeare ja Vilhonen saivat kunniamaininnat. Tehtävät olivat jälleen taattuun EGMO-tyyliin haastavia.

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jossa $CA = CB$ ja $\angle ACB = 120^\circ$, ja olkoon M janan AB keskipiste. Olkoon piste P kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon Q sellainen piste janalla CP , että $QP = 2QC$. Pisteen P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vasten, leikkaa suoran MQ yksikäsitteisessä pisteessä N .

Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste N on aina riippumatta pisteen P sijainnista.

Kommentti: Tämä on nätti klassisen geometrian tehtävä, ja tämän ratkaisemalla Shakespeare ja Vilhonen hankkivat kunniamainintansa.

Tehtävä 2. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

a) Osoita, että jokainen kokonaisluku $x \geq 2$ voidaan esittää joukon A yhden tai useamman alkion tulona, missä näiden alkioiden ei välttämättä tarvitse olla keskenään erisuuria.

b) Kun $x \geq 2$ kokonaisluku, olkoon $f(x)$ pienin sellainen kokonaisluku, että x voidaan kirjoittaa joukon A alkioiden tulona niin, että tulontekijöiden määrä on $f(x)$, ja tulontekijät eivät välttämättä ole keskenään erisuuria.

Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukuparia (x, y) , joilla $x \geq 2$, $y \geq 2$, ja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parit (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat erisuuria, jos ja vain jos $x_1 \neq x_2$ tai $y_1 \neq y_2$.)

Kommentti: Suomen kilpailijat todellakin lukivat tehtävät huolella: alkuperäiseen suomennokseeni tehtävästä oli yhteen paikkaan kokonaisluvun x paikalle eksynyt n . Sain tästä kysymyksen välittömästi kilpailun alettua. Tehtävän a)-kohta on todella helppo. Siitä oli jaossa yksi piste. Sen merkitys oli lähinnä toimia johdantona b)-kohtaan, joka ratkeaa siedettävällä tavalla konstruktion avulla, eli konstruoimalla sopivia lukuja (joskin silloinkin tarpeellisten asioiden todistaminen vaatii raakaa työtä). Yleisiä tuloksia funktion käytöksestä ei kannata yrittää todistaa kilpailutilanteessa, sillä tämä kyseinen funktio on harvinaisen inhottava ja yhteistyökyvytön.

Tehtävä 3. Olkoot $C_1, \dots, C_n$ EGMO:n n kilpailijaa. Kilpailun jälkeen kilpailijat jonottavat ravintolan edessä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Tuomaristo valitsee kilpailijoiden alkuperäisen järjestyksen.

- Kerran minuutissa tuomaristo valitsee kokonaisluvun i , joka toteuttaa ehdon $1 \leq i \leq n$.
 - Jos kilpailijan C_i edessä on vähintään i kilpailijaa, kilpailija C_i maksaa yhden euron tuomaristolle ja siirtyy jonossa eteenpäin i paikkaa.
 - Jos kilpailijan C_i edessä on vähemmän kuin i kilpailijaa, ravintola aukeaa ja prosessi loppuu.
- a) Osoita, että riippumatta siitä mitä päätöksiä tuomaristo tekee, on prosessin ennen pitkää loputtava.
- b) Määritä kaikilla luvun n arvoilla suurin mahdollinen määrä euroja, jonka tuomaristo voi kerätä valitsemalla ovelasti alkuperäisen järjestyksen ja siirrot.

Kommentti: Tämän tehtävän sanamuodosta keskusteltiin pitkään. Ehkä hieman yksinkertaistaen oli tilanne se, että johtajat niistä maista, joissa korruptiota on huomattavasti, vastustivat sanamuotoa vedoten siihen, että tehtävä antaa epäilyttävän käsityksen kilpailusta. Esimerkiksi minä taas en rehellisesti sanottuna pystynyt ymmärtämään, miten yhdestä kilpailutehtävästä vedettäisiin johtopäätöksiä kilpailun toiminnasta. Ajatus yleistyksistä tuntui absurdilta ja vielä absurdimmalta ajatus kilpailun tuomaristosta kartuttamassa kassaa jonotuttamalla kilpailijoita. Tehtävän sanamuodolla oli kuitenkin etunsa: sillä, että tehtävässä kerättiin rahaa, saatiin tehtävään selkeä ja yksikäsitteinen laskuri verrattuna siihen, että oltaisiin mitattu aikaa, jolloin joku kuitenkin olettaisi, että ensimmäinen kokonaisluku valittaisiin ajanhetkellä nolla, toisen mielestä ajanhetkellä yksi ja kolmas tulkitsisi tilanteen mahdollisesti ihan toisin.

Tehtävä 4. *Domino* on 1×2 - tai 2×1 -laatta.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Dominoita asetetaan $n \times n$ -laudalle siten, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin.

Rivin tai sarakkeen *arvo* on niiden dominoiden lukumäärä, jotka peittävät vähintään yhden kyseisen rivin tai sarakkeen ruuduista. Dominoiden asettelua kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos on olemassa $k \geq 1$ niin, että jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen arvo on k .

Osoita, että kaikilla $n \geq 3$ on olemassa tasapainoinen asettelu ja määritä pienin mahdollinen määrä dominoita, joka tarvitaan sellaiseen asetteluun.

Kommentti: Tästä tehtävästä olisi ollut siedettävällä vaivalla jaossa reilu kasa pisteitä, mutta se ehkä vaatii hieman tuuriakin. Kaksinkertaisella laskemisella saa selville ehdottomat minimi, ja sen jälkeen voi konstruktiolla osoittaa, että nämä todellakin saavutetaan. Oikeita konstruktiota ei kuitenkaan ole ihan yksinkertaista saada aikaiseksi.

Tehtävä 5. Olkoon Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä Ω sivuaa janaa AB ja lisäksi se sivuaa ympyrää Γ pisteessä, joka on janan AB samalla puolella kuin piste C . Kulman $\angle BCA$ puolittaja leikkaa ympyrän Ω kahdessa eri pisteessä P ja Q .

Osoita, että $\angle ABP = \angle QBC$.

Kommentti: Tämä on hankala. Kaikki malliratkaisut käyttivät jotain perusgeometriaa syvällisempää tulosta.

Tehtävä 6.

- a) Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla t , jotka toteuttavat ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$, on olemassa positiivinen kokonaisluku n , jolla on seuraava ominaisuus: kun S on mikä tahansa n positiivisen kokonaisluvun joukko, niin on olemassa kaksi keskenään eri suurta alkioita x ja y , jotka kuuluvat joukkoon S ja lisäksi on olemassa *epänegatiivinen* kokonaisluku m (eli $m \geq 0$), joilla

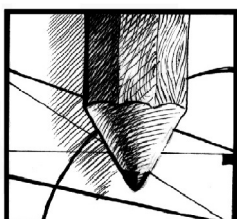
$$|x - my| \leq ty.$$

- b) Onko kaikilla ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$ toteuttavilla reaaliluvuilla t olemassa ääretön positiivisten kokonaislukujen joukko S , jolla ehto

$$|x - my| > ty$$

toteutuu kaikilla joukon S eri alkioista x ja y muodostuvilla pareilla ja kaikilla *positiivisilla* kokonaisluvuilla m (eli $m > 0$)?

Kommentti: Tämä oli hankala ja hankalaksi tarkoitettukin (kuten 6. tehtävät aina). Koordinointi meni todella vauhdikkaasti, kun tyypillisesti joukkueenjohdajat vain kävivät hakemassa koordinaattoreilta nollat paperiin ilman suurempaa keskustelua tai neuvottelua.



Italiasta ei löytynyt mafiaa – kiinnostavaa matematiikkaa kylläkin

Milja Krés, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Essi Vilhonen

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset, tuttavallisemmin EGMO, järjestettiin 9.–15.4. Italian Firenzessä. Kerromme aluksi hieman matkasta yleisesti, sitten erittelemme kilpailun herättämiä ajatuksia ja lopuksi tarkastelemme kunniainintojakin kerännyttä ensimmäistä tehtävää tarkemmin.

Matkamuistoja

Miltä lähteminen EGMO:on tuntui? Jännittikö?

Veera: Kilpailut jännittivät hieman, sillä minulla ei ollut ennen EGMO:a paljoa kokemusta matematiikkakilpailuista. Jännitys ei ollut kuitenkaan liiallista ja lähdin kilpailuihin innoissani.

Milja: Olo oli jokseenkin epätodellinen, enkä osannut edes arvata, mitä seuraava viikko toisi eteeni. Ehdottomasti jännitti. Vasta lentokoneessa kykenin jotenkin hengittämään rauhallisesti.

Nerissa: Kilpailut jännittivät aina. Kuitenkaan ei liikaa hermostuttanut, joten hyvillä mielin sinne meni.

Essi: Lähtöä edeltänyt valmennusviikonloppu teki hyvää taisteluhengelle :). Lähdin matkalle oikein mielelläni.

Millainen Firenze oli kaupunkina?

Veera: Firenze on kaupunkina ja historialtaan hieno. Kaupungin vanha keskusta on kaunis arkkitehtuuriltaan ja idyllinen.

Milja: Firenze tuntui alusta alkaen enemmän ihas-tuttavalta pikkukylältä kuin suositulta turistikohteelta, johtuen varmaan runsaasta kasvillisuudesta ja värikkäistä taloista. Tokihan siellä oli runsaasti väkeä ympäri viikon, jopa ruuhkaksi asti. Sateella vähän vähemmän.

Nerissa: Tuntui normaalilta sen aikaiselta kaupungilta.

Essi: Aika viihtyisä: pikkukujia, kaunista arkkitehtuuria, joki, mäkiä...

Mielenkiintoisimmat nähtävyydet

Veera: Pisan kalteva torni on turistiryynnistyksestä huolimatta vaikuttava. Myöskin Firenzen Ponte Vecchio on mieleenjäävän kaunis.

Milja: Rakastin kaikkia niitä hienoja ja ruhtinaallisen näköisiä kirkkoja, joita Italia on täynnä. Firenzessä niitä oli jopa kolme, joista tosin vain yhdessä pääsimme vierailemaan sisäänpääsymaksujen vuoksi. Luccan kirkko San Michele in Foro oli kuitenkin oma suosikkini

(vaikka hukkasimme siellä oppaamme...), ja suosittelun paikkaa lämpimästi kaikille.

Nerissa: Luccan keskiaikainen muuri oli hieno. Se oli suurimmaksi osaksi omaksuttu puistoksi.

Essi: Scuola Normale Superiore di Pisa. Harvoja Italian valtiollisia yliopistoja; jäätävän kovatasoinen. Kiinnostavinta oli kuitenkin paikan historia: ainakin jotkut Medicit taisivat tallustella siellä päin. Toisen kispäivän jälkeen kiipesimme Firenzen vieressä kohoavalle mäelle, jossa muiden muassa kaupungin hallitsijat olivat aikoinaan lomailleet. Maisemat olivat hienot.



Joukkue ekskursiolla aurinkoisessa Pisassa. (Kuva: Essi)

Tapahtumat

Veera: Aloituseremonia, samoin kuin lopetuseremonia, järjestettiin hienossa teatterissa, Teatro Verdisä. Teatteri on muuten rakennettu 1500-luvulta olevan vankilan paikalle. Aloituseremonia oli tunnelmaltaan sopivan arvokas, mutta rento. Aloituseremonia sisälsi monia vitsejä ja joukkueparaatin, jossa kaikkien maiden joukkueet esiteltiin ikäjärjestyksessä vanhimista nuorimpiin. Keski-ikältään nuorin joukkue oli Perun joukkue, joukkuelaisten keski-ikä oli ainoastaan 14 vuotta 10 kuukautta!

Milja: Viimeisenä päivänä järjestettiin luonnollisesti vuoden 2018 EGMO:n lopetuseremonia. Palkintojen jaon lisäksi illan viihteestä vastasi La Disturbanda -yhtye, joka esitti meille varsin erikoisen sekoituksen musiikkia ja lavakomiikkaa. Seremonian jälkeen kaikki henkilökuntaa myöten suuntasivat Palazzo Borgheseen syömään. Paikka oli uskomattoman kaunis, ja tuntui ihan kuninkaalliselta istua siellä, vaikkakin ruokana oli lähinnä leipää ja pastaa.

Nerissa: Joukkuekilpailussa kaksi joukkuetta yhdistettiin yhdeksi joukkueeksi ratkaisemaan 120 minuutin aikana matematiikan tehtäviä, joilla oli aina kokonaisluku vastauksena. Me olimme Norjan joukkueen kanssa. Kilpailu oli leikkihenkinen ja mukava, tosin ulkona oli liian hyvä sää sisällä olemiseen.

Essi: Aarrejahdissa vietimme ensimmäisen kokeen jälkeisen iltapäivän raikkaassa tihkusateessa kaupungilla. Erilaiset pienet tehtävät tutustuttivat meidät oppaamme johdolla Firenzeen, sen nähtävyyksiin ja historiaan. Esim. tunnistimme patsaista kuuluisia heppuja.

Huomioita paikallisesta ruokakulttuurista

Veera: Enimmäkseen hotellissa syömämme ruoka sisälsi perinteisiä italialaisia ruokia eri puolilta Italiaa. Jokaisella lounaalla ja päivällisellä oli tietenkin tarjolla pastaa ja välillä risottoa ja pitsaa, mutta yleensä myös juusto-kinkku-valikoimia, hedelmiä ja erilaisia perinteisiä italialaisia ruokia, mozzarella-tomaattiyhdistelmää unohtamatta. Ruoka oli ihanan puhtaan ja luonnollisen makuista. Aurinkoisina ja hieman sateisinakin päivinä italialainen jäätelö, gelato, oli todella herkullista. Gelatokauppoja oli todella paljon, käytännössä lähes jokaisella keskustan kadulla oli yksi sellainen.



Jäätelöä tietysti. Koska Italia. (Kuva: Milja)

Milja: Ruoka Italiassa näytti yhtä aikaa todella tutulta ja täysin tuntemattomalta, enkä vielääkään ole ihan varma, mitä kaikkea tulin suuhuni pistäneeksi. Pizzalla kävimme ainoastaan kerran, vaikka kadut tuntuivatkin hukkuvan erilaisiin pizzerioihin. Ja noh, mitäs siitä nyt

sanoisi. En ole aikaisemmin törmännyt kesäkurpitsoihin tai nakkipaloihin pizzaa syödessäni.

Nerissa: Siellä oli paljon hedelmiä ja pastaruokia. Maitoallergian kanssa epäilin jääväni ilman pitsaa, mutta pitseria onnistui yllättämään herkullisella vegaanipitsallaan.

Essi: Hotellista sai veriappelsiineja. Ja sitruunapaloja. Ja veriappelsiineja.

Millaista itse kilpailussa oli?

Veera: Vaikka itselläni kilpailut eivät niin hyvin menneetkään, olivat tehtävät todella hyvää ja mielenkiintoista pohdittavaa. Ne kannustivat myös harjoitteluun lisää.

Milja: Olihan kilpailu viihdyttävä ja palkitseva, vaikkei pisteitä juurikaan tullut. Hieman eri tasoa kuin ylioppilaskirjoituksissa, heh...

Nerissa: Kilpailu oli hyvin järjestetty ja tehtävät veivät mukaansa pohtimaan.

Essi: Eikö olisikin tylsää, jos tehtävät olisivat triviaaleja? Sai niistä ainakin mukavasti ajateltavaa koko yhdeksäksi tunniksi.

Sosialisoituminen

Veera: Vaikka EGMO olikin kilpailu, oli tärkeä osa sitä myös muihin kilpailijoihin tutustuminen, jota auttoi muun muassa joukkuekilpailu, monipuolista tekemistä sisältävä pelihuone sekä ekskursiot.

Milja: Ihmiset olivat ihanan avoimia, eivätkä pelänneet jutustelua. Minulle jäi erityisesti mieleen se, kun päätimme Essin kanssa jakaa ylijäämäkeksimme muiden maiden edustajille. Oli ihanaa nähdä viimeistä kertaa ihmiset hymyilemässä!

Nerissa: Erinäköisten aktiviteettien yhteydessä tuli puhuttua muiden kilpailijoiden kanssa. Yhteyksien luominen on merkittävä osa tällaista kilpailua.

Essi: Tapahtuma oli lämminhenkinen, ja oli mukava tutustua muihin kilpailijoihin esimerkiksi palapelien äärellä.

Mikä jäi erityisesti mieleen?

Veera: Kilpailut olivat todella hyvin järjestetyt. Oli si todella upeaa päästä, jos mahdollista, uudestaan. Myöskin EGMO-tavarat olivat hauskoja, en ennen ollut nähnyt joulupallon ja reppukoristeen sekoitusta, jonka sisällä on sadetakki.

Milja: Kaikkihan reissussa oli aivan mahtavaa, mutta ehdottomasti eniten jään kaipaamaan erinomaista Suomi-klikkiämme. En todellakaan kadu osallistumista, olisi varmaan pitänyt paeta vielä kun voi ja muuttaa asumaan jonkin Luccalaisen sillan alle. Unohtumaton viikko!

Nerissa: Mieleen jäi se, kun piti mahdollistaa kaikki saamamme EGMO-logoiset tavarat kassiin...

Essi: Meillähän oli ainakin tosi hyvä yhteishenki. Järjestäjät olivat tietysti nähneet tajuttomasti vaivaa esimerkiksi EGMO-kirjasen kokoamisessa; kaikki sujui ja hauskaa oli.



Firenzeläisiä maisemia. (Kuva: Essi)

Ajatuksia tehtävistä

Milja Krés

Kun meitä pyydettiin kirjoittamaan Solmuun artikkeli vuoden 2018 EGMO:sta, oli toiveena jonkin sortin syväanalyysi erityisesti tämän vuoden kilpailutehtäviä koskien. Kuudesta ongelmasta yhden Suomi onnistuikin ratkaisemaan, jopa kaksinkertaisesti.

Mutta entä sitten ne tehtävät, joista hikisen taistelun jälkeen jäi käteen vain pari vaivaista pistettä? En heikokosta kilpailumenestyksestämme huolimatta halunnut menettää mahdollisuutta matematiikasta jaaritteluun, vaan päädyin kertomaan asiamme hieman tavallisesta poikkeavasta näkökulmasta: epäonnistumisen näkökulmasta.

Okei, ehkei epäonnistuminen ole tähän tilanteeseen oikea termi. Vaikka kukaan meistä ei päihittänyt Ukrainaa eikä Venäjää, ei se suoranaisesti tee meistä epäonnistujia. Lähtökohdat huomioon ottaen onnistuimme kukin tavallamme. EGMO 2018 saattoi olla meille ylivoimainen, mutta myös hyvin opettavainen ja todellakin sen arvoinen. Kuten joukkueemme johtaja totesi,

tehtävistä erottui kivulias yrittäminen, ja omasta mielestäni se on tavallaan hyvä syy tuntea ylpeyttä tämän vuotista joukkuettamme kohtaan.

Toisaalta epäonnistumiseen voi aina varautua. Olen tämän vuoden tehtävien valossa tarkastellut muutamia tärkeitä asioita. Toivottavasti ne edes hieman avaavat, miten paljon matematiikasta itsestään poikkeavia seikkoja kilpailumatematiikkaan suuntautuneen on syytä muistaa ja ottaa huomioon.

Valinnat. Enkä tarkoita sitä, että valitsisi jotenkin väärin. Tietysti on sellaisia päätöstilanteita, joissa jokin valinta on täysin absurdi ja vältettävä parhaansa mukaan, mutta matkansa aikana kukin tulee kohtaamaan runsaita määriä täysin viattomalta vaikuttavia valintoja. Haluanko jäädä tekemään yksin palapelejä vai mennä pelaamaan lautapelejä? Keskitynkö tehtävään 1, 2 vai sittenkin 3? On vaikea tietoisesti välttää tekemästä huonoihin lopputuloksiin johtavia valintoja, joten en erikseen edes halua kehottaa ketään valitsemaan oikein. Enemminkin suurin virhe, jonka voi tehdä, on jättää valitsematta.

Koska valintoja oli tehtävä, teimme kukin omamme. Yksi meistä valitsi uhrata aikansa yhdeksänkymmentäprosenttisesti ainoastaan geometriatehtäviin, itse päätin jättää ne koskemattomiksi oman kiinnostukseni suuntautuessa tehtäviin 3 ja 6. Mietin muutaman keran viikon jälkeen, olisinko saanut pisteitä, jos olisinkin valinnut panostaa geometriaan? Totesin, että mahdollista. Mutta olisinko nauttinut koetilaisuudesta yhtä paljon?

Niinpä.

Kysymykset. Itselleni tuli yllätyksenä EGMO:ssa valitseva systeemi, jossa ensimmäisen puolen tunnin aikana johtajille saa lähettää kokeeseen liittyviä kysymyksiä esimerkiksi epäselvästä termistöstä tai mahdollisista painovirheistä. En itse käyttänyt mahdollisuutta hyödyksi, mutta olisi ehkä pitänyt. Tehtävän 6 suhteen minulla oli nimittäin varsin suuria ymmärrysvaikeuksia. Lopulta käytin peräti 3,5 h etsiessäni n :n arvon, joka pystyisi ratkaisemaan epäyhtälön kaikilla t :n arvoilla – eikä se ollut kuulemma tarkoitus. Vielä koepäivänä kuvittelin saavani älynväläyksestäni joitain pisteitä, joten lopputulos tuli hieman järkytyksenä.

Ainoastaan rohkeus kysyä ei tietenkään auta. 30 minuutin kysymysaika hävisi yllättävän nopeasti, enkä siinä ajassa edes ehtinyt harkita avun pyytämistä. Vasta parin tunnin kuluttua tajusin tarvitsevani apua, mutta oli jo liian myöhäistä, ja päätin jostain syystä vain luottaa itseeni. Tästä päästäänkin seuraavaan huomionarvoiseen kohtaan.

Itseluottamus. Ongelmien ratkaisussa itseensä luottaminen, kyky uskotella tekemisiensä olevan oikein, on todella tärkeää. Jotkut väittävät, ettei koskaan voi

luottaa itseensä liikaa, mutta tässä uskaltaisin olla eri mieltä. Ehdottomasti on tilanteita, joissa voi luottaa itseensä liikaa. Mistä muuten kaikki merkkivirheet syntyisivät kuin sokeasta uskosta omaan virheettömyyteensä?

On oleellista pysähtyä ajattelemaan, mitä tekee. Itse en ole ollut kilpailumatematiikassa mukana kovinkaan kauaa, mutta voin sanoa oppineeni tämän vasta lukion viimeisinä hetkinä, juuri ennen tämän vuoden ylioppilaskoetta. Siltikin tulee yhä tilanteita, joissa olen tehnyt jonkin laskuvirheen tehtävän alussa, mutten koskaan palaa tarkastamaan prosessia vaan uskon lopputulokseen.

Käytännön esimerkkinä voisin jälleen käyttää kokeen 6. tehtävää, jossa päätettyäni, mitä siinä kysytään, en kyseenalaistanut asiaa kertaakaan. En edes silloin, kun sain n :stä kokonaisluvun sijaan äärettömän (joka ei tietääkseni ole kokonaisluku). Erälle meistä kävi ensimmäisessä geometriatehtävässä niin, että hän käytti suuren osan ajastaan siihen ja tuli kokeesta ulos itsevarmana. Vasta myöhemmin hän tajusi tehneensä kaikki pisteet tappavan huolimattomuusvirheen jo alkuvaiheessa (hän ei ollut valmis kommentoimaan asiaa enempää, mutta voi näinä päivinä kuitenkin ihan hyvin, traumoistaan huolimatta).

Palautettavien paperien määrä. Ja sisältö. Meille kyllä jankattiin alusta alkaen, että mitä ikinä teettekin, palauttakaa kaikki paperit, joihin olette jotain kirjoittaneet. Sotkusta ei saa miinus pisteitä, mutta joistakin lähes järkevistä huomioista voi hyvällä tuurilla jopa kartuttaa tiliään. Ja niin me kyllä teimme. Toiset joukkueestamme saattoivat palauttaa jopa kymmenen paperia jotain tehtävää kohden, itselläni ennätys oli neljä sivua.

Määrä ei kuitenkaan koskaan korvaa hyvää sisältöä, näin on sanottu, ja sen kyllä huomasi viimeistään tulosten tullessa. Neljän sivun esseevastauksesta ei irronnut tiukalta tuomaristolta mitään, ei edes säälistä, ja saman kohtalon kokivat monien muiden pitkähköt vastaukset. Tietenkin aina on niitä tehtäviä, joissa pitkät esseevastaukset hyödyttävät. Ennen koetta deputymme kertoi, että ainakin helpoimmista geometriatehtävistä pisteitä voi saada pelkistä oivalluksistaikin. Lähimpänä sellaista tehtävää olikin tämän vuoden tehtävä numero 4. Yhden pisteen olisi saanut jo tarpeeksi monesta havainnollistavasta kuvasta, ja toisen eräs meistä tienasi todettuaan tehtävänannon toimivan aina silloin, kun $3 \mid n$.

Kunhan yritätte. Tämä on ehdottomasti tärkein kaikista neuvoista, ja siksi otan sen esille toistamiseen. Älä anna tyhjän paperin tai ensi silmäyksellä mahdollisten tehtävien lyödä sinua taistelukyvyttömäksi. 9 tuntia voi kuulostaa pitkältä ajalta, mutta haaveileminen tai muunlainen veltoilu on syytä jättää kilpailuja

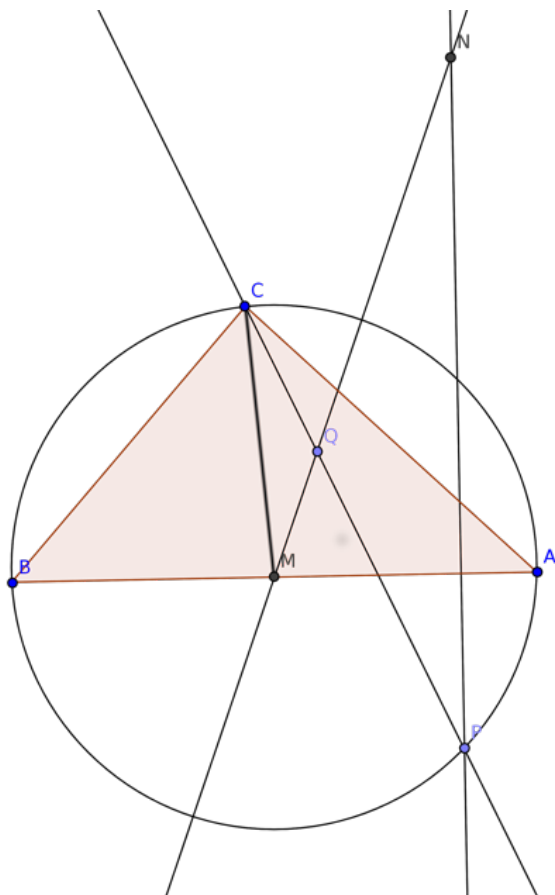
seuraavalle vapaa-ajalle, jos haluaa saada jotain aikaiseksi. On myös muistettava, ettei kilpailijoilta missään nimessä odoteta täydellistä suoritusta. Sitä ei siis kannata turhan paljoa jännittää, vaan lähestyä kilpailutilannetta erityislaatuisena haasteena.

Katsaus EGMO 2018 tehtävään 1

Nerissa Shakespeare, Essi Vilhonen

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jossa $CA = CB$ ja $\angle ACB = 120^\circ$, ja olkoon M janan AB keskipiste. Olkoon piste P kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon Q sellainen piste janalla CP että $QP = 2QC$. Piste P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vasten leikkaa suoran MQ yksikäsitteisessä pisteessä N . Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste N on aina riippumatta pisteen P sijainnista.

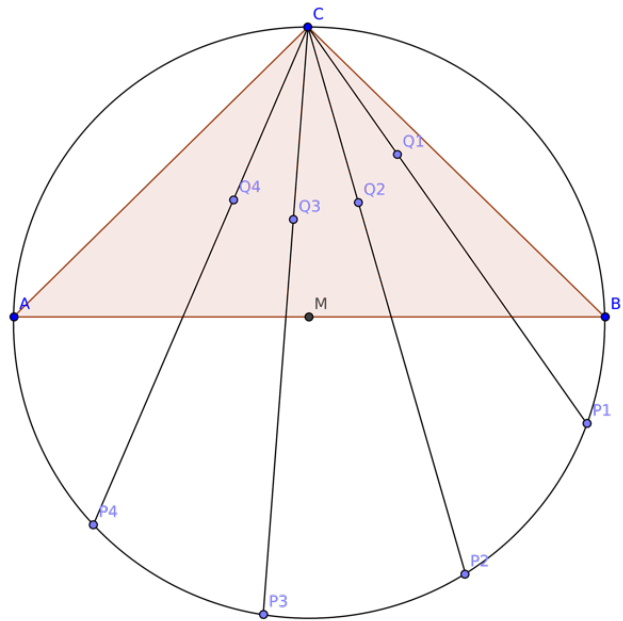
Todistus. Ensimmäinen tehtävä on geometriaa. Ensimmäisenä piirsin kuvan tehtävänannosta, koska kuvat ovat kivoja geometriassa.



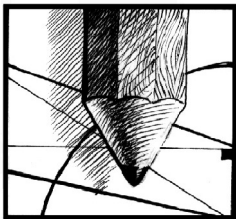
Koska kolmio ABC on tasakylkinen, jossa $CB = CA$, on CM kohtisuorassa suoraa AB vasten. Tällöin suora CM on yhdensuuntainen suoran NP kanssa. Kolmio CMQ näyttää yhdenmuotoiselta kolmion PQN kanssa, joten yritetään todistaa se. Tiedetään, että $2CQ = PQ$ ja $2MQ = NQ$ ja kolmioilla on yksi yhteinen ristikulma, joten saamme $\triangle CMQ \sim \triangle PNQ$ (SKS).

En löydä helposti mitään vakiona pysyvää kehäkulmaa, joten mietin muita mahdollisia tapoja todistaa ympyrän olemassaolo. Aloin miettiä: ”Miten pisteet Q ja N liikkuvat suhteessa pisteeseen P ?” Lyhyin etäisyys on 0, kun $C = P = Q$, ja pisin on CP :n ollessa halkaisija, jolloin CQ on kolmasosa halkaisijasta. Kaikki muut CQ :n arvot sijoittuvat näiden kahden arvon väliin. Päätin yrittää todistaa, että piste Q on aina samalla ympyrällä, koska sitten saisin saman todistettua pisteelle N .

Ympyröitä voi todistaa jännelikulmioiden avulla, joten piirsin pisteet P_1, P_2, P_3 ja P_4 ja niille vastaavat Q :t.



Tiedetään, että $P_1P_2P_3P_4$ on jännelikulmio, koska kaikki pisteet P_i sijaitsevat samalla ympyrällä pisteen määritelmällä. Myös tiedämme, että kaikkien $\frac{CQ_i}{CP_i}$ suhde on sama. Täten saamme yhdenmuotoisilla kolmioilla $\triangle P_iCP_j \sim \triangle Q_iCQ_j$ (SKS) todistettua, että $Q_1Q_2Q_3Q_4$ on jännelikulmio. Vastaavasti todistetaan pisteiden Q_i avulla, että $N_1N_2N_3N_4$ on jännelikulmio.



Suomi Iranin 4. Geometriaolympialaisissa

Lauri Hallila

Kilpailu

Iran on viime vuosina kutsunut Kansainvälisissä Matematiikkaolympialaisissa (IMO) muita maita järjestämiinsä geometriaolympialaisiin. Olin Suomen joukkueen johtajana vuoden 2017 olympialaisissa Brasiliassa, ja kun huomasin, että Virosta oli viime vuonna yksi oppilas osallistunut, päätin selvittää, mistä oikein on kysymys.

Kilpailu järjestetään kussakin osallistujamaassa etänä. Koska vielä valmennuksessa jatkavilla kilpailijoillamme oli kiinnostusta osallistua, päätimme ilmoittautua Iranin 4. geometriaolympialaisiin. Omana ajatuksenaani oli edistää oppilaiden geometrian osaamista ja auttaa saamaan nuorempia oppilaita mukaan kilpamatematiikkaan, sillä helpoin taso on suunnattu yläasteen kahdelle ensimmäiselle luokalle.

Kilpailussa on kolme eri tasoa: perustaso yläasteen 7.- ja 8.-luokkalaisille, keskitaso 9.-luokkalaisille ja lukion 1.-luokkalaisille ja vaativa taso lukion 2. ja 3. luokan oppilaille. Alustavien tietojen perusteella kuhunkin tasoon voisi osallistua 4 oppilasta. Lähetimme kutsun aiemmissa kilpailuissa pärjänneille oppilaille luvaten paikat ensimmäisinä ilmoittautuneille. Saimme kolme oppilasta keskitasolle ja neljä vaativalle tasolle.

Emme lyhyellä aikavälillä keksineet, keitä kutsuisimme osallistumaan perustason kilpailuun, mutta yksi oppilaistamme ilmoitti kaksi kilpailijaa mukaan perusarjaan. Kun saimme Iranista sääntöjen tarkennuksia, saimme tietää, että osallistujien lukumäärällä ei itse

asiassa ole ylärajaa, mutta he ovat lähinnä kiinnostuneita neljän parhaan tuloksista. Kilpailun ollessa melko nuori säännöt näköjään vielä kehittyvät.

Saimme luvan järjestää kilpailun varsinaista kilpapäivää seuraavana päivänä; näin pystyimme järjestämään kilpailut Päivölän Kansanopistossa perjantaina sopivasti juuri ennen kuin aloitimme syksyn ensimmäisen kilpamatematiikan viikonloppuvalmennuksen.

Valmistauduin kilpailun järjestämiseen hankkimalla Evan Chenin kirjan 'Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads' itselleni, kun geometria on aina ollut kilpamatematiikan hankalin osa-alue. Herra Chen oli kilpailijana Taiwanin edustajana muutama vuosi sitten, ja vuonna 2017 hän oli USA:n joukkueenjohtaja IMO:ssa. Hän kirjoitti kyseisen kirjan, koska ei kilpailijana löytänyt oppimateriaalia, josta olisi tykännyt; osa kirjoista oli hyviä teorian kannalta, mutta ei antanut sopivan tasoisia tehtäviä. Toisissa taas oli hyviä tehtäviä, mutta ei opastusta siihen, miten ratkaisuihin on päädytty. Voin suositella kyseistä kirjaa lämpimästi kaikille kilpamatematiikasta ja geometriasta kiinnostuneille.

Itse kilpailu toimi lähes samoin kuin muutkin vastaavat kilpailut; sain tehtävät etukäteen käännettäviksi, vähän sen jälkeen niiden ratkaisut ja myöhemmin pisteytyskeeman. Kilpailun jälkeen arvioin valmentajakollegoideni kanssa tulokset. Koska kilpailu toimii etänä, perinteistä koordinaatiota ei ole, joten jouduimme turvautumaan enimmäkseen pisteytyskeemaan. Lähetimme tulokset ja skannatut paperit Iraniin, josta saimme

myöhemmin viralliset tulokset ja todistukset oppilaillemme.

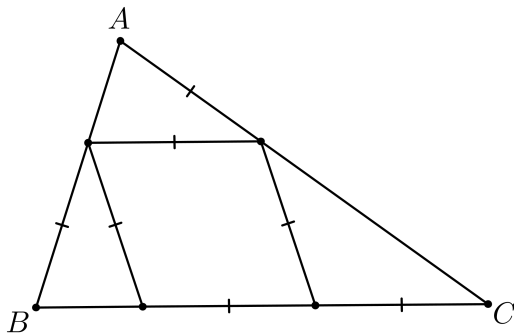
Näissä kilpailuissa kultaa saa paras kuudesosa, hopeaa tämän perässä oleva neljäsosa ja pronssia tämän perässä oleva neljäsosa, yhteensä noin puolet osallistujista. Kunniamaininnan saa, jos on saanut ainakin yhden tehtävän oikein. Perustasolla kilpailuun osallistui Into Almiala ja Valtteri Aurela. Into Almiala sai kunniamaininnan. Keskitason osallistujamme olivat Olli Järvinie-mi, Nerissa Shakespeare ja Hermann Huhtamäki. Olli Järvinie-mi voitti pronssimitalin ja Nerissa Shakespeare kunniamaininnan. Vaativan tason osallistujamme olivat Akseli Jussinmäki, Joonatan Honkamaa, Konsta Tiilikainen ja Leevi Laitonen. Heistä Akseli Jussinmäki sai kunniamaininnan.

Tehtäviä

Kaiken kaikkiaan kilpailu onnistui hyvin, ja tarkoituksena on osallistua siihen myös tulevina vuosina. Toivotavasti kilpailu auttaa geometrian taitojen kehityksessä; itse ainakin sain palautettua vanhoja asioita mieleen ja opittua myös uutta. Käyn tässä läpi tehtävät, jotka ainakin joku Suomen kilpailijoista sai ratkaistua.

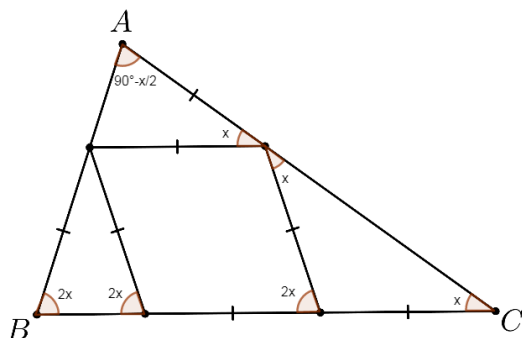
Perustason 2. tehtävä:

Määritä kolmion ABC kulmat.



Ratkaisu:

Olko $\angle ACB = x$. Nelikulmio, joka on kolmion sisällä ja jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, on suunnikas, joten sen vastakkaiset sivut ovat samansuuntaiset.



Kuvassa ylhäällä olevassa pienessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, joten kulma A ja sen vieressä oleva kulma ovat molemmat $(180^\circ - x)/2 = 90^\circ - x/2$. Koska kolmion ABC kulmien summa on 180° , niin

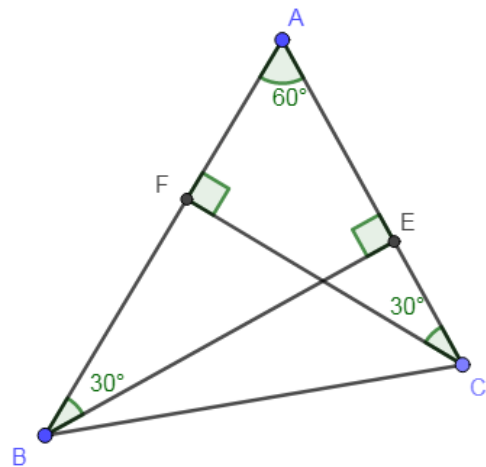
$$(90^\circ - \frac{x}{2}) + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 72^\circ, \angle B = 72^\circ, \angle C = 36^\circ.$$

Keskitason 1. tehtävä:

Olko ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $A = 60^\circ$. Olkoot E ja F kulmista B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kannat (samassa järjestyksessä). Osoita, että $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

Ratkaisu:



$$A = 60^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle ACF = 30^\circ$$

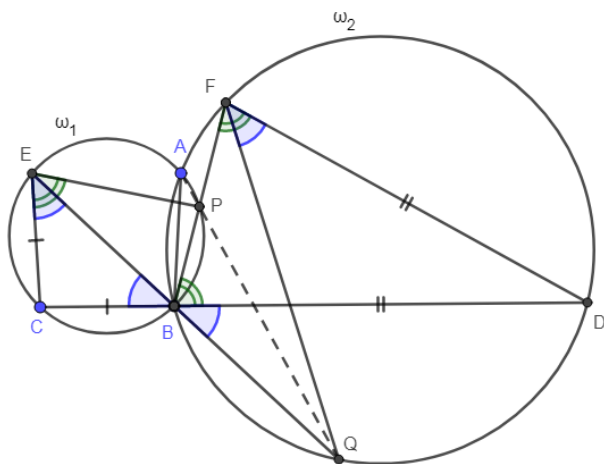
$$\Rightarrow AE = \frac{AB}{2}, AF = \frac{AC}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CE - BF &= (AC - AE) - (AB - AF) \\ &= (AC - AB) + (AF - AE) \\ &= \frac{3}{2}(AC - AB). \end{aligned}$$

Keskitason 2. tehtävä:

Kaksi ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B . Mielivaltainen pisteen B kautta piirretty suora leikkaa ympyrät ω_1 ja ω_2 pisteissä C ja D (samassa järjestyksessä). Pisteet E ja F valitaan ympyröiltä ω_1 ja ω_2 (samassa järjestyksessä) siten, että $CE = CB$ ja $BD = DF$. Oletetaan, että BF leikkaa ympyrän ω_1 pisteessä P ja BE leikkaa ympyrän ω_2 pisteessä Q . Osoita, että A , P ja Q ovat samalla suoralla.

Ratkaisu:



Tiedämme, että

$$\angle BFD = \angle DBF = 180^\circ - \angle CBP = \angle CEP,$$

sillä C, B, P ja E ovat samalla ympyrällä. Edelleen,

$$\begin{aligned} \angle CEB + \angle BEP &= \angle CEP \\ &= \angle BFD = \angle BFQ + \angle QFD, \end{aligned}$$

ja

$$\angle CEB = \angle CBE = \angle QBD = \angle QFD$$

kehäkulmalauseen perusteella. Tästä seuraa

$$\angle BEP = \angle BFQ,$$

josta saamme kehäkulmalausetta soveltamalla

$$\angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ.$$

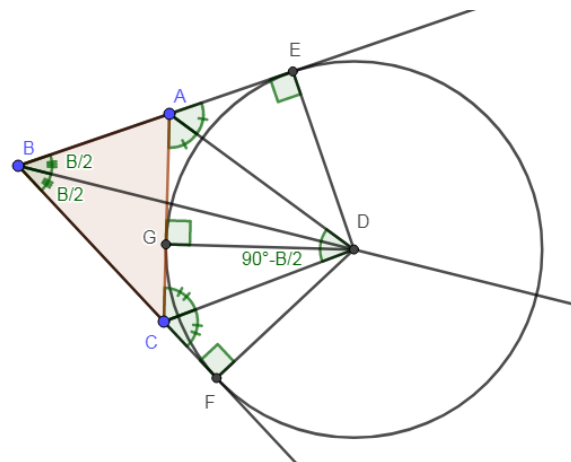
Vaativan tason 1. tehtävä:

Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, jonka keskipiste on I , sivuaa sivua BC pisteessä D . Suora DI leikkaa AC :n pisteessä X . Pisteestä X piirretty tangentti (eri kuin AC) kolmion sisään piirretylle ympyrälle leikkaa AB :n pisteessä Y . YI ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Z . Osoita, että $AB = BZ$.

Ratkaisu:

Aloitamme todistamalla seuraavan lemmän:

Lemma. Piirretään kolmion ABC sivun AC ulkopuolelle sivujen AB ja AC kulmanpuolittaja. Tämä leikkaa sivun AC ulkopuolelle piirretyyn sivujen BC ja AC kulmanpuolittajan pisteessä D . Tällöin D on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa sivua AC ja sivujen AB ja BC jatkeita. Lisäksi BD on puolittaa kulman B ja $\angle ADC = 90^\circ - B/2$.

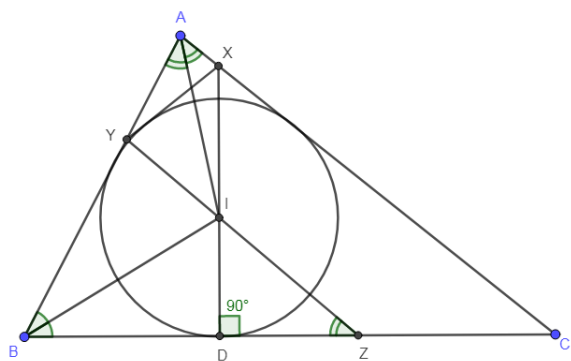


Lemman todistus: Piirretään pisteestä D kohtisuorat sivuille AB, BC ja AC . Olkoot kohtisuorien ja sivujen leikkauspisteet E, F ja G . Jokainen piste suoralla AD on yhtä kaukana suorista AB ja AC . Siten $DE = GD$. Samoin päätelemme, että $GD = DF$. Siten $DE = GD = DF$, joten D on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa janaa AC ja sivujen AB ja BC kautta piirrettyjä suoria.

Koska D on yhtä kaukana sivuista AB ja BC , niin BD puolittaa kulman B . Koska $\angle DAB = A + (180^\circ - A)/2 = 90^\circ + A/2$ ja $\angle BCD = C + (180^\circ - C)/2 = 90^\circ + C/2$, saadaan nelikulmiosta $BADC$

$$\begin{aligned} \angle ADC &= 360^\circ - B - (90^\circ + A/2) - (90^\circ + C/2) \\ &= 180^\circ - A/2 - B/2 - C/2 - B/2 \\ &= 90^\circ - B/2. \end{aligned}$$

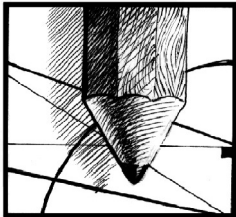
Palaamme nyt alkuperäisen tehtävän todistukseen.



Piste I on kolmion AXY ulkopuolelle (sivulle XY) piirretyyn ympyrän keskipiste. Näin ollen lemmän nojalla $\angle XIY = 90^\circ - \frac{A}{2}$. Tästä seuraa, että

$$\angle DIZ = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \angle IZB = \frac{A}{2} = \angle BAI,$$

sillä kolmion kärjistä kolmion sisälle piirretyyn ympyrän keskipisteen kautta kulkevat suorat ovat kolmion kulmanpuolittajia. Tiedämme myös, että $\angle IBZ = \angle IBA$ ja $BI = BI$, joten kolmiot ABI ja ZBI ovat yhtenevät. Siten $AB = BZ$.



Kurkistus vektoriavaruuteen

Jukka Ilmonen

jukka.ilmonen@hotmail.com

Genesis

Alussa Lukija loi ajatuksen ja avaruuden. Avaruus oli autio ja tyhjä. Lukija sanoi: tulkoon luvut! Ja luvut tulivat. Luvut täyttivät ajatuksen. Niitä oli rajaton määrä, ne olivat erilaisia toisiinsa nähden, ne sekä seurasivat toisiaan tiiviisti että olivat hyvin kaukana toisistaan. Lukija näki, että luvut olivat hyviä, ja hän nimitti jokaiselle luvulle suuruuden. Lukija loi Nollan lukujen keskikohdaksi ja Ykkösen lukujen suuruuden mittariksi. Nyt luvut saivat järjestyksen ja olivat toisiinsa kauniissa suhteessa – lukuja saattoi verrata Ykköseen ja toisiinsa. Lukuja oli pieniä ja suuria, Nollaa suurempia ja Nollaa pienempiä, Ykkösen monikertoja ja Ykkösen murto-osia. Lukuja saattoi löytää aina lisää: jokaisen luvun edestä, takaa ja kuinka läheltä tai kaukaa hyvänsä löytyi aina uusi luku.

Ajatus oli nyt järjestetty, mutta avaruus oli edelleen tyhjä. Lukija sanoi: täyttyköön avaruus vektoreilla. Ja niin tapahtui. Lukija nimitti jokaiselle vektorille pituuden ja suunnan. Vektorin pituus oli Nolla tai Nollaa suurempi luku. Pituus oli siis Ykkösen monikerta tai murto-osa. Avaruus oli laaja ja joka suuntaan ulottuva. Niinpä jokaiselle vektorille annettiin myös suunta avaruudessa. Näin jokainen vektori sai pituuden ja suunnan, joiden mukaan vektori yksilöityi ja voitiin nimitä. Avaruudessa oli muun muassa Viktoria- ja Vihtori-nimiset vektorit. Jos vektori-Viktorian pituus ja suunta ovat täsmälleen samat kuin vektori-Vihtorilla, niin Viktoria onkin sama vektori kuin Vihtori.

Ja Lukija katsoi kaikkea tekemäänsä, ja kaikki oli hyvää. Näin tulivat valmiiksi ajatus ja avaruus ja kaikki mitä niissä on. Tämä on kertomus siitä, mitä muuta vektoreista tiedetään.

Lisääntymisen lait: vaihdannaisuus ja liitännäisyys

Vektorien oli määrä täyttää avaruus. Vektorit voivat liikkua avaruudessa vapaasti. Tämän takia jokainen vektori voidaan löytää avaruuden mistä hyvänsä paikasta. Tästä huolimatta vektoreille annettiin kyky liisääntyä yhtymällä. Kun kaksi vektoria yhtyvät, syntyy uusi vektori. Uusi vektori on ainutlaatuinen sillä tavalla, että yhtyvien vektorien järjestys ei vaikuta syntyvään vektoriin. Kun vektori-Hektori yhtyy vektori-Veroniin, syntyy sama vektori, joka syntyisi vektori-Veronin yhtyessä vektori-Hektoriin. Vanhempien paikka avaruudessa tai yhtymäjärjestys eivät vaikuta jälkeläisvektoriin. Jälkeläisvektorin kaikki ominaisuudet, pituus ja suunta, määräytyvät sen vanhempien ominaisuuksien mukaan.

Koska sama vektori löytyy avaruuden jokaisesta paikasta, vektori voi helposti yhtyä myös itseensä. Vektori-Hektorilla on tietty suunta ja pituutena Ykkönen. Hektori yhtyy itsensä kanssa, jolloin syntyy vektori-Viktori. Viktorin suunta on sama kuin Hektorin suunta ja pituus kahden Ykkösen mittainen eli kaksinkertainen Hektorin pituuteen nähden. Toisaalta kun erisuun-

taiset vektorit yhtyvät, jälkeläisen suunta ei ole sama kummankaan vanhemman suunnan kanssa. Myös jälkeläisvektorin pituus määräytyy yhtyvien vektorien pituuksien yhteisvaikutuksesta.

Edellä kuvatun lisäksi vektorien lisääntymiseen liittyy toinenkin periajatus: samasta perimäaineksesta syntyy aina sama vektori riippumatta lisääntymisketjusta. Vektori-Hektori yhtyi vektori-Veroniin ja syntyi vektori-Rektor. Rektor yhtyi vektori-Tektoriin ja syntyi vektori-Traktor. Syntyisi sama vektori-Traktor, jos Veronin ja Tektorin jälkeläinen yhtyisi vektori-Hektoriin. Traktor saa ominaisuutensa kaikilta tekijöiltään, järjestyksestä riippumatta. Traktorin tekijät olivat Hektori, Veron ja Tektor.

Erikoisvektorit: tyhjä- ja antivektori

Vektorien joukossa on eräs kummajainen. Lukijan määräyksen mukaan on olemassa sellaisia vektoreita, joiden pituus on Nolla. Nollan pituinen vektori suuntautuu joka suuntaan yhtä aikaa eli sen suunta on kaikki suunnat. Toisaalta Lukija asetti vain yhden Nollan, joten Nollan pituisia vektoreitakin on olemassa vain yksi. Tämä vektori on tyhjävektori. Sillä ei ole pituutta eikä määrättyä suuntaa.

Tyhjävektori on vektoreista tylsin, se ei saa aikaan uutta lisääntymisessä. Kun vektori-Viktoria yhtyy tyhjävektoriin, miten päin hyvänsä, syntyvä jälkeläinen on vektori-Viktoria itse. Tyhjävektori ilmaantuu tyhjästä ja häviää tyhjiin.

Toisaalta tyhjävektori voi olla myös vektorien jälkeläinen. Kun vektori-Viktoria yhtyy erääseen vektoriin syntyy tyhjävektori. Edellä mainittu vektori on nimeltään Anti-Viktoria. Vektorin ja sen antivektorin pituudet ovat samat ja suunnat vastakkaissuuntaiset toisiinsa nähden. Jokaisella vektorilla on oma antivektoria. Tämä pätee myös antivektoreille. Selvästi Anti-Viktorian antivektori on vektori-Viktoria itse, koska Anti-Viktorian ja Viktorian yhtyessä syntyy tyhjävektori.

Vektori ja sen antivektori tuhoavat toisensa, sillä niiden yhtyessä syntyy tyhjiys. Toisaalta myös tyhjiys, tyhjävektori, voidaan hajottaa miksi hyvänsä vektoriksi ja tämän antivektoriksi.

Luvut ovat vektorien ravintoa: Ykkösen ja kertolaskun syönti

Ajatus ja avaruus ovat täydellisiä. Samoin vektorit ovat heti syntyessään täydellisiä ja valmiita ominaisuuksiltaan. Niiden ominaisuuksiin vaikuttavat vain yhtyvät vektorit, eivät paikka tai ympäristö. Avaruudessa ei ole aikaa. Tästä huolimatta vektorit voivat muuttua

tietyllä tavalla. Luvut luotiin ajatukseen, mutta ajatus kohtaa kaiken – myös vektorit. Kun vektori kohtaa luvun, vektori syö luvun. Syödessään luvun vektori muuttuu yleensä eri vektoriksi. Luku-ravinto nimittäin vaikuttaa vektorin pituuteen: syöminen joko venyttää tai kutistaa vektoria. Syömisessä vektorin suunta ei muutu. Kun vektori-Viktoria syö luvun kolme, sen pituus kolminkertaistuu ja syntyvää vektoria sanotaan Viktoriavenytykseksi. Viktoriavenytyksiä on tietenkin yhtä paljon kuin lukujakin.

Vektorin pituuden muuttumisen kuvaamiseen riittää kaksi periajatusta: Kun vektori syö Ykkösen, vektorin pituus säilyy samana. Kun vektori syö ensin tietyn luvun ja sitten muuttunut vektori syö toisen luvun, lopputulos on sama kuin alkuperäinen vektori söisi puheena olevien lukujen tulon. Nyt jos vektori-Viktoria syö luvun 30, saadaan sama Viktoriavenytys, joka saataisiin, kun Viktori söisi ensin luvun 3 ja syntynyt venytys söisi vielä luvun 10.

Näistä periajatuksista ja alempana esitetyistä ositteluista johtuu, että Ykköstä suuremman luvun syödessään vektori pitenee, Nollan ja Ykkösen välisen luvun syödessään vektori lyhenee sekä Nollan syödessään vektori muuttuu tyhjävektoriksi. Samoin voidaan päätellä, että kun vektori syö negatiivisen luvun, vektori muuttuu antivektorinsa suuntaiseksi eli vastakkaissuuntaiseksi. Tällöin venytysvektorin pituus riippuu negatiivisen luvun itseisarvosta samaan tapaan kuin positiivisen luvun syönnissä. Esimerkiksi kun vektori-Viktoria syö luvun -1, se muuttuu Anti-Viktoriaksi.

Osittelu syömisessä ja lisääntymisessä

Jos vektori-Veron ja ja vektori-Hektor söisivät molemmat ensin luvun viisi ja sen jälkeen yhtyisivät, jälkeläinen olisi sama, jos Veronin ja Hektorin jälkeläinen söisi luvun viisi. Näin on yhdentekevää, syödäänkö ennen vai jälkeen lisääntymisen, kunhan syödään samaa! Tätä periaatetta sanotaan lisääntymisen ositteluksi.

Jos vektori-Viktoria syö luvun seitsemän ja toisaalta luvun neljä ja näin saadut Viktoriavenytykset yhtyvät, saadaan sama vektori, joka saataisiin Viktorin syödessä ainoastaan luvun yksitoista (4+7). Tämän syömisestä osittelu-periaatteen mukaan lopputulos on aina sama riippumatta siitä, syödäänkö luku osissa (7 ja 4) vai kokonaisuutena (11) kerralla.

Tähän asti luetellut vektorien ominaisuudet määräävät vektoriavaruuksien. Vektoriavaruuksissa kaikki tapahtuu näihin periajatuksiin nojautuen.

Näin vektorit söivät, lisääntyivät ja täyttivät koko avaruuden.

Asemointi avaruuteen

Vektoriavaruuks oli täydellinen ja niin täynnä vektoreita, että Katsojan oli vaikea hahmottaa tapahtumia. Katsoja havainnoi avaruutta ja havaitsi siinä ulottuvuudet. Tarkempaa tutkimista varten hän valitsi avaruudesta paikan.

Katsoja kiinnitti vektori-Viktorian valitsemaansa avaruuden paikkaan ja syötti Viktorialle kaikki mahdolliset luvut. Saatiin ääretön parvi erilaisia Viktoria-venytyksiä. Nämä venytykset olivat eripituisia, mutta kaikki Viktorian suuntaisia tai vastakkaissuuntaisia. Ne kaikki pidettiin samassa paikassa, jossa Viktoria sijaitsi. Tämä venytysten parvi määräsi avaruuteen Viktoria-suoran. Suora kulki Katsojan määräämän paikan kautta ja se oli yhdensuuntainen Viktorian kanssa. Suora oli ihmeellinen: se oli loputon, aluton ja sen suunta muuttumaton. Sellaista ihmettä ei muualta löydykään kuin vektoriavaruudesta! Viktoria-suora määräsi ensimmäisen ulottuvuuden.

Ensimmäisessä ulottuvuudessa on vain yksi ominaisuus, pituus. Kun vektori-Viktorialle syötetään ainoastaan tietyn lukuvälin luvut, saadaan Viktoria-suorasta rajattua pala, jolla on alku- ja loppupiste. Äärellistä suoranpätkää sanotaan janaksi. Näin vektorin avulla pystytään saamaan aikaan kaiken pituiset janat. Janalla on vain pituus, eli sillä ei ole mitään muotoa – sehän on osa suoraa. Näin ollen Katsojan oli jatkettava tutkimusta, sillä avaruuteen tarvitaan myös muotoja.

Vektori-Hektori oli erisuuntainen kuin Viktoria. Se tarkoittaa, että Hektorin suunta ei ole Viktorian eikä Anti-Viktorian suunta. Sen takia Hektori ei ole mikään Viktoria-venytys ja siksi sen määräämä Hektori-suora on eri suora kuin Viktoria-suora. Katsoja asetti Hektorin samaan paikkaan avaruudessa, jossa Viktoria oli. Hektori-suora määräsi avaruudesta toisen ulottuvuuden. Ensimmäinen ja toinen ulottuvuus eivät ulotu toisiinsa, mutta yhdessä ne määräävät avaruudesta kaksiulotteisen osan, tason. Viktoria- ja Hektori-suorat määräävät avaruudesta osan, joka on Viktoria-Hektori-taso. Taso on kuin levy, joka lepää puheena olevien suorien päällä. Tietenkin avaruuden taso on täydellisempi kuin mikä hyvänsä kuviteltavissa oleva levy: taso on reunaton, rajaton ja täysin tasainen. Lisää ihmeitä on olemassa – sellainen on taso!

Ulottuvuusvektorit

Kun valitaan mitkä hyvänsä Viktoria- ja Hektori-venytykset, annetaan niiden yhtyä ja asetetaan jälkeläinen valittuun paikkaan, niin tämä jälkeläinen on välttämättä Viktoria-Hektori-tasossa. Sama tapahtuu myös toisin päin: kaikki Viktoria-Hektori-tason vektorit saadaan, kun kaikki luvut syötetään Viktorialle ja Hek-

torille ja kaikki näin saadut venytykset yhtyvät keskenään. Taso onkin siten ulottuvuusvektorien, Viktorian ja Hektorin, venytysten jälkeläisten parvi. Näin kaksiulotteisen avaruuden osan kuvaamiseen riittää vain kaksi vektoria. Tällaisia vektoreita kutsutaan ulottuvuusvektoreiksi.

Kaksiulotteisessa avaruudessa on kaksi suuntaa, ulottuvuusvektorien suunnat, ja siten uusi ominaisuus: erisuuntaiset pituudet. Kaksiulotteisessa avaruudessa, eli tasossa, saadaan aikaan mitä hyvänsä muotoja. Ne syntyvät juuri erisuuntaisten pituuksien avulla. Ulottuvuusvektorien määräämät janat ovat erisuuntaiset. Kun nämä janat asetetaan alkamaan samasta paikasta, syntyy kulma. Kulma on muodoista yksinkertaisin. Kulman kärki on se paikka, joka on yhteinen kulman muodostaville janoille. Kulman muodostavia janoja sanotaan kulman sivujanoiksi. Kun kulman sivujanahan siihen alkupäähän, joka ei ole kärki, asetetaan vielä uusi jana, saadaan murtoviiva. Näin saadussa murtoviivassa on kaksi kärkeä. Edellä kuvattu janat lisäys voidaan toistaa murtoviivalle. Näin saadaan murtoviivoja, joissa kärkiä on kuinka paljon hyvänsä. Murtoviiva on kuin monesta kohdasta katkeillut, muttei irtipoikki katkeillut, jana. Sikäli kun murtoviivan alku- ja loppupää yhdistyvät, eli ovat samassa paikassa, murtoviiva rajaa tasosta monikulmion. Yksinkertaisin monikulmio on kolmio.

Mikä hyvänsä murtoviiva, ja siten myös monikulmio, saadaan kahden ulottuvuusvektorin avulla sopivien lukuvälien syöttöjen ja yhtymisen lopputuloksena. Muotoja on myös monimutkaisempia.

Kun Viktorialle ja Hektorille syötetään molemmille sama Nollasta poikkeava luku ja nämä venytykset yhtyvät, saadaan Viktoria-Hektori-tason vektori. Kun edellä mainittu toistetaan kaikilla luvuilla ja syntyvät vektorit pidetään samassa paikassa, saadaan Viktoria-Hektori-tason suora. Edellä kuvattua kaikkien lukujen syöttöä kutsutaan seuraavassa sarjasyötöksi. Yleisemmin voidaan todeta, että kun molemmille ulottuvuusvektoreille sarjasyöttää saman luvun ja saadut venytykset yhtyvät, jälkeläiset muodostavat tason suoran.

Tason käyriä saadaan monimutkaisemmilla ulottuvuusvektorien sarjasyöttöprosesseilla. Seuraavassa sarjasyöttöprosessissa syntyy kauniisti kaartuva tason käyrä: Ensimmäiselle ulottuvuusvektorille syötetään tietty luku ja toiselle ulottuvuusvektorille syötetään aina edellä mainittu luku itsellään kerrottuna. Saadut venytykset yhtyvät ja saatu jälkeläinen pidetään paikallaan. Tämä toistetaan kaikilla luvulla. Nyt jälkeläisten parvi muodostaa loputtoman kaartuvan käyrän.

Vielä monimutkaisemmilla ulottuvuusvektorien sarjasyöttöprosesseilla voidaan tasoon saada esimerkiksi jälkeläisten parvi, joka määrää ympyrän!

Avaruus on rajaton

Katsoja jatkoi edelleen: Hän valitsi kolmannen ulottuvuusvektorin, Tektorin. Tektor ei ollut mikään Viktorian ja Hektorin jälkeläisistä eli sitä ei saada Viktorian ja Hektorin-venytysten jälkeläisenä. Tektor asetettiin valittuun paikkaan. Nyt valittu vektorikolmikko määrää kolme suoraa ja kolme tasoa: Viktoria-, Hektorin ja Tektorin suorat sekä Viktoria-Hektorin, Viktoria-Tektorin ja Hektorin-Tektorin tasot. Kun Viktoria, Hektorin ja Tektor yhtyvät, saadaan jotain uutta: jälkeläinen ei ole millään edellä mainituista suorista tai tasoista. Se on uudessa ulottuvuudessa, kolmiulotteisessa tilassa. Kolme ulottuvuusvektoria määräsivät kolmiulotteisen tilan, jonka jokainen vektori voidaan saada siten, että syötetään ensin tietyt luvut Viktorialle, Hektorille ja Tektorille ja annetaan sitten näiden kolmen venytyksen yhtyä. Tässä yhtymisjärjestyksellä ei ole merkitystä, kuten aiemmin todettiin.

Näin riittää, että Katsoja tarkastelee vain kolmea vektoria. Näiden avulla hän hallitsee äärettömän määrän

kolmiulotteisen tilan vektoreita. Nyt Katsojan havainnot olivat selkeitä ja hän hahmotti kolmiulotteisen tilan tapahtumat ja muodot.

Kuitenkin Katsoja voi vielä jatkaa tästäkin. Voidaan valita neljäs ulottuvuusvektori. Pitää kuitenkin varmistua siitä, ettei uusi ulottuvuusvektori ole Viktorian, Hektorin ja Tektorin jälkeläinen. Tällöin saatu neliulotteinen avaruus hallitaan täysin neljällä vektorilla. Kuinka paljon muotoja onkaan neliulotteisessa avaruudessa!

Ulottuvuusvektoreita voidaan valita kuinka monta hyvänsä. Aina pystytään täyttämään koko avaruus syötämällä ja lisäämällä keskenään ulottuvuuksien määrää vastaava vektorijoukko. Vektoriavaruudesta eivät ulottuvuudet lopu.

Lähteet

<https://fi.wikipedia.org/wiki/Vektoriavaruus>

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

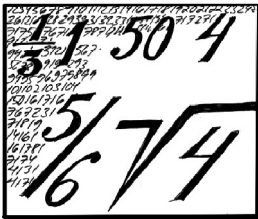
on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

- Maapallo
- Suomen historia
- Terveys ja ravinto
- Talous
- Todennäköisyys
- Matematiikka ja taide (2 tasoa)
- Mittaaminen (2 tasoa)
- Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen@yahoopiste.com



Lebesguen mitta

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Pituus, pinta-ala ja tilavuus ovat toistensa kaltaisia käsitteitä. Niillä on tiettyjä yhteisiä ominaisuuksia, minkä takia niille on keksitty yhteinen nimikin: *mitta*. Mittateoria juontaa juurensa 1800-luvun lopulle ja varsinkin vuoteen 1901, jolloin ranskalainen matemaatikko Henri Lebesgue (1875–1941) antoi tyydyttävän selityksen sille, mitä pituudella tarkoitetaan. Lebesgue kysyi itseltään, miten lukusuoran yksikkövälin osajoukon pituus tulisi määritellä. Pituuden määritelmä sisältyy Lebesguen vuonna 1902 julkaistuun väitöskirjaan [5], jonka nimi on suomeksi käännettynä *Integraali, pituus, pinta-ala*. Lebesguen mullistavat ideat järkyttivät erityisesti joidenkin vanhemman polven ranskalaismatemaatikoiden tunne-elämän seesteisyyttä. Tuliko Lebesguen mitta täyteen vai mikä lie syynä siihen, että hänen väitöskirjansa julkaistiin Italiassa, Milanossa. Nykyään tätä 130-sivuista työtä pidetään yhtenä parhaimmista matematiikan väitöskirjoista kautta historian. Merkittävät tieteelliset läpimurrot syntyvät tavallisesti monen tutkijan työn tuloksena, kun aika on kypsä. Ansio mitan ja siihen tiiviisti nivoutuvan integraalin käsitteiden synnyttämisestä ja kehittämisestä ei kuulu yksinomaan Lebesguelle; lisätietoa artikkelissa [3].

Mitta on abstrakti yleiskäsite. Tässä artikkelissa mitalla tarkoitetaan Lebesguen mitta- ja yksiulotteisella lukusuoralla, jolloin mitta vastaa pituutta. Useampiulotteiset Lebesgue-mitat saadaan yksiulotteisesta mitas-

ta muodostamalla niin sanottu tulomitta, jolle pitää lisäksi tehdä nollamittaisia joukkoja koskeva täydennysoperaatio. Yksiulotteisenkin Lebesguen mitan ominaisuuksien aukoton todistaminen vaatii sen verran epsilonistiikkaa,¹ että lyhyessä lehtiartikkelissa yksityiskohtaisia todistuksia ei ole järkevää esittää. Mitallisuuden ja mitan käsitteeseen kuljetaan hieman eri polkua kuin oppikirjoissa on yleensä tapana. Harmaisiin laatikoihin kirjoitetut aputulokset ja vihjaukset todistuksiin on tarkoitettu vain asioihin ennalta perehtyneille mitateorian harrastajille, jotka ovat kiinnostuneita tuloksiin johtavista päättelyketjuista. Tavallinen lukija voi huoletta sivuuttaa harmaat laatikot.

Kaukaa haettu esimerkki

Matematiikan vahvuus liittyy jollakin tavalla ilmiöön, jota kasvatusoppineet kutsuvat nimellä *siirtovaikutus*: yhdessä tilanteessa toimiviksi havaittuja menetelmiä voidaan hyvin usein käyttää menestyksellisesti toisessa, ensi katsomalta täysin erilaisessa tilanteessa. Seuraavan esimerkin ja artikkelin varsinaisen aiheen välisen yhteyden on tarkoitus paljastua vasta jälkikäteen.

Tarkastelun kohteena ovat päättymättömät reaali-lukujonot

$$\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

¹Jatkuvuuden määritelmä on hyvä esimerkki siitä, mitä epsilonistiikalla tarkoitetaan: funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista positiivista lukua ε kohti on olemassa positiivinen luku δ , jolle $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ aina, kun $|x - a| < \delta$. Kreikkalainen kirjain ε on nimeltään epsilon.

Jonoille $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ehto $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ tarkoittaa, että $a_n \leq b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jonojen $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ erotus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ on jono $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Lukujonon suppeneminen ja raja-arvo ovat tuttuja käsitteitä, mutta hetken aikaa kuvitellaan, että matematiikan historian tässä vaiheessa lukujonon suppenemista ei vielä ole määritelty. Intuitiivinen mielikuva suppenemisesta on, että jonon $\mathbf{a}$ luvut a_n pikkuhiljaa vakiintuvat tietyksi *raja-arvoksi* $\lim \mathbf{a}$. Sellaisille jonoille $\mathbf{u}$, joille $u_n = u$ on vakio jostakin indeksin n arvosta alkaen, raja-arvo on ilman muuta $\lim \mathbf{u} = u$. Näistä jonoista käytetään työnimeä *melkein vakio*, so. vakio äärellistä alkupätkää lukuun ottamatta. Kahden melkein vakion jonon erotus on melkein vakio. Yleistä jonoa $\mathbf{a}$ approksimoidaan eli lähestytään etsimällä ehdon $\mathbf{v} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{u}$ toteuttavat melkein vakiot jonot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ mahdollisimman läheltä toisiaan.

Jono $\mathbf{a}$ on **suppeneva**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa melkein vakiot jonot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$, joille $\mathbf{v} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{u}$ ja $\lim(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \varepsilon$.

Jos jono ei suppene, se *hajaantuu*. Suppenevan jonon $\mathbf{a}$ **raja-arvo** $\lim \mathbf{a}$ määritellään asettamalla

$$\lim \mathbf{a} = \inf\{\lim \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ on melkein vakio, } \mathbf{a} \leq \mathbf{u}\}.$$

Tässä $\inf$ tarkoittaa *infimumia* eli *suurinta alarajaa*. Osalle lukijoista se saattaa olla outo käsite, joten selitys on paikallaan. Reaalilukujoukko A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa kaikkia joukon A lukua pienempi reaaliluku r . Lukua r sanotaan joukon A *alarajaksi*. Myös kaikki lukua r pienemmät luvut ovat joukon A alarajoja. Infimum tarkoittaa alarajojen joukon suurinta alkioita:

$$\inf A = \max\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq a \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

Alhaalta rajoitetulla ei-tyhjällä reaalilukujoukolla on aina infimum. Tätä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ominaisuutta kutsutaan *täydellisyysdeksi*. Rationaalilukujen joukolla $\mathbb{Q}$ tätä ominaisuutta ei ole. Infimumia voidaan luonnehtia seuraavasti:

Luku r on reaalilukujoukon A suurin alaraja, jos ja vain jos

- (a) r on joukon A alaraja,
- (b) kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < r + \varepsilon$.

Oheistietoja infimumista ja sen isoveljestä supremumista on dokumenteissa [2] ja [7]. Ne sisältävät paljon muutakin tätä artikkelia sivuavaa materiaalia.²

Avoimen joukon pituus

Lukusuoran avoin a -keskinen r -säteinen väli $B(a, r)$ on niiden pisteiden x joukko, joiden etäisyys pisteestä a

on pienempi kuin r :

$$B(a, r) :=]a - r, a + r[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}.$$

Joukkoa U sanotaan **avoimeksi**, jos kaikilla $a \in U$ on olemassa $r > 0$, jolle $B(a, r) \subset U$. Erityisesti tyhjä joukko $\emptyset$ on avoin. Mutkattomalla joukko-opillisella päättelyllä osoitetaan, että

- avointen joukkojen yhdiste on avoin,
- äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.

Avointen joukkojen kokoelma

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ on avoin}\}$$

on nimeltään *topologia*. Avoimen joukon käsite yleistyy edellä mainittujen ominaisuuksien kautta mitä moninaisimpiin yhteyksiin. Topologiaksi kutsutaan avointen joukkojen kokoelman lisäksi avoimiin joukkoihin perustuvaa matematiikan osa-aluetta.

Lukusuoran topologiaa voidaan pitää myös yksiulotteisen mitan perustana, sillä avoimelle joukolle on helppoa määritellä pituus, ja määritelmä on yhtä kiistaton kuin melkein vakion lukujonon raja-arvo; lukusuoran avoimilla joukoilla on nimittäin seuraava ominaisuus:

- jokainen ei-tyhjä avoin joukko voidaan järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla esittää yhdisteenä numeroituvasta³ määrästä toisiaan leikkaamattomia ei-tyhjiä avoimia välejä.

Toisin sanoen: jos U on avoin ja ei-tyhjä, on olemassa yksikäsitteinen kokoelma $\{I_i \mid i \in \Gamma\}$ ei-tyhjiä avoimia välejä I_i , joille

$$U = \bigcup_{i \in \Gamma} I_i \quad \text{ja} \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad \text{aina, kun } i \neq j.$$

Koska jokainen ei-tyhjä avoin väli sisältää rationaaliluvun (itse asiassa äärettömän määrän rationaalilukua), ja rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön, kokoelma $\{I_i \mid i \in \Gamma\}$ on numeroituva, tai yhtäpitävästi indeksijoukko Γ on numeroituva. Välejä I_i kutsutaan avoimen joukon U **yhdenäisiksi komponenteiksi**. Esitys $U = \cup_i I_i$ on joukon U **komponenttiesitys**.

Komponenttiesitystä käyttäen avoimelle joukolle U määritellään **pituus**

$$L(U) := \sum_{i \in \Gamma} \ell(I_i), \quad \ell(I_i) := b_i - a_i, \quad I_i =]a_i, b_i[,$$

missä $\ell(I_i)$ on välin I_i pituus. Erikseen määritellään $L(\emptyset) = 0 = \ell(\emptyset)$. Positiivitermisen sarjan summa on

²Itse käytin oheislukemistona pääasiassa teosta [6], jonka kirjoittaja on eräs arvostetuimmista nykymatemaatikoista, Fields-mitalisti Terence Tao (1975–). Mittateorian osuus on vapaasti luettavissa netissä, mutta vaatii lukijalta muutaman opintopisteen verran yliopistotasoisia matematiikan opintoja, jotta useampiulotteinen euklidinen avaruus $\mathbb{R}^d$ olisi tullut tutuksi.

³Äärellisistä ja numeroituvasti äärettömistä joukoista käytetään yhteisnimitystä *numeroituva*. Muut joukot ovat *ylinnumeroituvia*.

tunnetusti riippumaton termien järjestyksestä, joten $L(U)$ on hyvin määritelty. Tapauksia $L(U) = \infty$ ja $\ell(I_i) = \infty$ ei voida sulkea pois. Siis kuvausten L ja ℓ arvojoukko on laajennettu väli $[0, \infty] := [0, \infty[\cup \{\infty\}$.

Kaikki avoimet joukot U pituuksineen voidaan esittää yhdenmukaisessa muodossa

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad L(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i),$$

kun sallitaan, että I_i voi olla tyhjä. Silloin

$$\bigcup_{i=1}^n I_i = I_1 \cup \dots \cup I_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

missä $I_i = \emptyset$ kaikilla $i > n$.

Pituuden ominaisuuksia

Pituusfunktioilla $L : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ on seuraavat ominaisuudet, kun U, V ja $U_k, k \in \mathbb{N}$, ovat avoimia joukkoja:

- (a) $L(\emptyset) = 0$,
- (b) $L(U) \leq L(V)$ aina, kun $U \subset V$,
- (c) $L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(U_k)$,
- (d) $L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L(U_k)$, kun $U_h \cap U_k = \emptyset$ indekseillä $h \neq k$.

Ominaisuutta (b) sanotaan **monotonisuudeksi**, ominaisuutta (c) **numeroituvaksi subadditiivisuudeksi** ja ominaisuutta (d) **numeroituvaksi additiivisuudeksi**. Pelottavannäköisillä hieroglyfeillä on sangen arkipäiväiset tulkinnat:

- (a) junamatka Helsingistä Helsinkiin on pituudeltaan nolla,
- (b) junamatka Riihimäeltä Tampereelle on pienempi kuin junamatka Hyvinkäältä Tampereelle,
- (c) junamatka Helsingistä Tampereelle on pienempi kuin junamatka Helsingistä Riihimäelle plus junamatka Hyvinkäältä Tampereelle,
- (d) junamatka Helsingistä Tampereelle on täsmälleen niin pitkä kuin junamatka Helsingistä Riihimäelle plus junamatka Riihimäeltä Tampereelle.

Intuiitiivisesti uskottavien ominaisuuksien (a)–(d) todistaminen komponenttiesitysten avulla on lähinnä kirjanpidollinen tehtävä, kun hyväksytään seuraavat kaksi itsestäänselvyyksiltä tuntuva aputulosta:

- Jos avoimeen väliin J sisältyvät avoimet välit I_i eivät leikkaa toisiaan, pituuksien $\ell(I_i)$ summa ei ylitä välin J pituutta.
- Avointen välien I_i pituuksien summa $\sum_i \ell(I_i)$ on vähintään välien yhdisteen pituuden $L(\cup_i I_i)$ suuruinen.

Myöhemmin määriteltävän mitallisten joukkojen koelman ominaisuuksien todistaminen helpottuu, jos käytettävissä on lisää aputuloksia. Seuraava lemma vaatii jo epsilonistiikkaa:

- ♣ Olkoot U ja V avoimia joukkoja, ja olkoon $L(U) < \infty$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko W , että $U \setminus V \subset W$ ja

$$L(W) < L(U) - L(U \cap V) + \varepsilon.$$

Sen avulla päästään käsiksi vielä enemmän epsilonistiikkaa vaativaan tulokseen, jota voidaan luonnehtia eräänlaiseksi pituusfunktion jatkuvuudeksi:

- Olkoon $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ aleneva jono avoimia joukkoja, ja olkoon V sellainen avoin joukko, että $\cap_k U_k \subset V$. Jos $L(U_k) < \infty$ eräällä $k \in \mathbb{N}$, on olemassa raja-arvo $\lim_k L(U_k)$, ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(U_k) \leq L(V).$$

Mitallinen joukko

Ihanteellisessa tapauksessa joukon mitta voitaisiin määritellä kaikille reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukoille. Todistettavasti näin ei voida tehdä, kun mitalle asetetaan tiettyjä vaatimuksia, joita intuitiivinen käsitys pituudesta noudattaa. Esimerkiksi välin $[0, 1]$ mitan tulee olla 1, ja mitta ei saa muuttua siirroissa: joukon A ja kuvajoukon $T_a A$ mittojen tulee olla samat, kun T_a on siirto $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + a$. Jälkimmäistä ominaisuutta kutsutaan mitan *translaatioinvarianssiksi*. Mitan käsite voidaan ulottaa vain *mitalliseksi* kutsuttuihin joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoihin. Muilla osajoukoilla ei ole mitta, ja niitä sanotaan *ei-mitalliseksi*. Samaan tapaan raja-arvon käsite voidaan laajentaa melkein vakioista jonoista vain suppeneville jonoille. Muilla jonoilla ei ole raja-arvoa. Hajaantuvat jonot vastaavat siis tässä mielessä ei-mitallisia joukkoja. Seuraavaa mitallisen joukon määritelmää sopii verrata aikaisemmin esitettyyn suppenevan jonon määritelmään:

Joukko A on **mitallinen**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoimet joukot U ja V , joille $A \subset U$, $\mathbb{R} \setminus A \subset V$ ja $L(U \cap V) \leq \varepsilon$.

Rajoittamattoman joukon mitallisuus voidaan selvittää tutkimalla rajoitettuja osajoukkoja:

- Joukko A on mitallinen, jos kaikki leikkaukset $B(0, k) \cap A$, $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia.

Tästä kokenut epsilon-isti päätelee helposti, että kaikki avoimet joukot ovat mitallisia.

- Avoin joukko U on mitallinen.

Seuraavat ominaisuudet varmistavat, että mitallisten joukkojen kokoelma

$$\mathcal{M} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ mitallinen}\}$$

on huomattavasti laajempi kuin avointen joukkojen kokoelma $\mathcal{T}$:

(a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

(b) $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$ aina, kun $A \in \mathcal{M}$,

(c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ aina, kun $A_k \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Ominaisuuksien (a) ja (b) verifioiminen ei ole vaikeata. Tyhjän joukon mitallisuus seuraa jo siitä, että tyhjä joukko on avoin, ja kaikki avoimet joukot ovat mitallisia. Mitallisuuden määritelmä on symmetrinen siinä mielessä, että joukoilla $A = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$ ja $\mathbb{R} \setminus A$ on yhdenvertainen asema. Väite (b) seuraa ilman sen kummempaa todistusta tästä symmetriasta. Ominaisuuden (c) näyttäminen toteen vaatii enemmän pääänvaivaimista.

Kuten edellä todettiin, rajoittamattoman joukon mitallisuus selviää tutkimalla rajoitettuja joukkoja. Täten riittää osoittaa väite (c) todeksi tapauksessa, jossa joukkojen A_k yhdiste $\bigcup_k A_k$ on rajoitettu. Siinä on suureksi avuksi aikaisemmin esillä ollut pituusfunktion jatkuvuusominaisuus. Tässä kuten muissakin epäilontodistuksissa käytetään hyväksi havaintoa, jonka mukaan suuruudeltaan $2^{-k}\varepsilon$ olevien poikkeamien aiheuttama kokonaispoikkeama on

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon,$$

mikä on suora seuraus geometrisen sarjan summan kaavasta. Kohdan (c) todistuksen yksityiskohtiin ei mennä tämän syvemmälle.

De Morganin kaavan $\bigcap_k A_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_k (\mathbb{R} \setminus A_k)$ ja kohtien (b) ja (c) perusteella mitallisten joukkojen leikkauskin on mitallinen:

(d) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ aina, kun $A_k \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Ehdot (a)–(c) toteuttavaa kokoelmaa $\mathcal{M}$ sanotaan *σ -algebraksi* (so. sigma-algebraksi), ja sellainen on lähtökohtana yleiselle mittateorialle, joka ei suinkaan ole rajoittunut lukusuoralle tai euklidiseen avaruuteen. Esimerkiksi todennäköisyyslaskenta on mittateoriaa. Mitallisia joukkoja kutsutaan tapahtumiksi, ne muodostavat σ -algebran, ja tapahtuman mitta on tapahtuman todennäköisyys.

Mitta

Mitallisen joukon A **Lebesguen mitta** $m(A)$ määritellään asettamalla

$$m(A) = \inf\{L(U) \mid U \text{ on avoin ja } A \subset U\}.$$

Muodollinen yhteys jonon raja-arvon määritelmään on ilmeinen. Mitta määrittelee kuvauksen

$$m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto m(A).$$

Pituuden L ominaisuuksista ja mitallisuuden määritelmästä voidaan johtaa mitan perusominaisuudet, kun A , B ja A_k , $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia joukkoja eli kokoelman $\mathcal{M}$ alkioita:

(a) $m(\emptyset) = 0$,

(b) $m(A) \leq m(B)$ aina, kun $A \subset B$,

(c) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$,

(d) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, kun $A_h \cap A_k = \emptyset$ indekseillä $h \neq k$.

Täten sekä pituusfunktio $L : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$ että mitta $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ovat monotonisia, numeroituvasi subadditiivisia ja numeroituvasti additiivisia. Jotta edes jotakin tulisi todistetuksi, esitetään todistus mitan numeroituvalle subadditiivisuudelle:

Olko A_k , $k \in \mathbb{N}$, mitallisia joukkoja. Väite on selvästi voimassa siinä erikoistapauksessa, että jokin mitoista $m(A_k)$ on ääretön. Olkoon $m(A_k)$ äärellinen kaikilla k , ja olkoon $\varepsilon > 0$. Mitan määritelmän perusteella on olemassa avoimet joukot U_k , joille $A_k \subset U_k$ ja $L(U_k) < m(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$. Koska $\bigcup_k A_k \subset \bigcup_k U_k$, ja $\bigcup_k U_k$ on avoin avointen joukkojen yhdisteenä, mitan määritelmän nojalla

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) \leq L\left(\bigcup_k U_k\right).$$

Pituusfunktion L subadditiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} L\left(\bigcup_k U_k\right) &\leq \sum_k L(U_k) < \sum_k (m(A_k) + 2^{-k}\varepsilon) \\ &= \sum_k m(A_k) + \sum_k 2^{-k}\varepsilon \\ &= \sum_k m(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten $m(\cup_k A_k) \leq \sum_k m(A_k) + \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Ei jää muuta vaihtoehtoa kuin $m(\cup_k A_k) \leq \sum_k m(A_k)$, ja subadditiivisuus on todistettu.

Mitan numeroituva additiivisuus on seuraus numeroituvasta subadditiivisuudesta ja äärellisestä additiivisuudesta

$$m\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n m(A_k), \quad A_h \cap A_k = \emptyset, \quad h \neq k,$$

joka seuraa induktiolla tapauksesta $n = 2$:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

Se puolestaan on mahdollista perustella kaavalla

$$L(U \cup V) = L(U) + L(V) - L(U \cap V), \quad U, V \in \mathcal{T},$$

kun $U \supset A$ ja $V \supset B$. Tämän intuitiivisesti varsin uskottavan kaavan todistamisessa voidaan käyttää hyväksi lemmaa ♣.

Esimerkkejä

Avoimen välin mitta

Olkoon $I =]a, b[$ avoin väli, $a < b$. Tällöin I on avoin joukko, siis mitallinen. Mitän määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} m(I) &= \inf\{L(U) \mid U \in \mathcal{U}\}, \\ \mathcal{U} &:= \{U \mid U \text{ on avoin ja } I \subset U\}. \end{aligned}$$

Koska $I \in \mathcal{U}$, pätee $m(I) \leq L(I)$. Pituuden L subadditiivisuuden perusteella $L(I) \leq L(U)$ kaikilla $U \in \mathcal{U}$. Silloin $L(I)$ on alaraja luvuille $L(U)$, joten $L(I)$ on korkeintaan niin suuri kuin suurin alaraja $m(I)$. Siis $L(I) \leq m(I)$. Täten $m(I) = L(I) = b - a$.

Numeroituvan joukon mitta

Olkoon $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Yksiö $\{a_k\}$ on mitallinen avoimen joukon $\mathbb{R} \setminus \{a_k\}$ komplementtina. Joukko A on mitallinen yhdisteenä numeroituvasta määrästä mitallisia joukkoja. Siis on olemassa $m(A)$. Joukko

$$U_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(a_k, 2^{-1-k}\varepsilon)$$

on avoin avointen joukkojen yhdisteenä, ja $A \subset U_\varepsilon$. Mi-

tan monotonisuuden ja subadditiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} m(A) &\leq m(U_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B(a_k, 2^{-1-k}\varepsilon)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-1-k}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten $m(A) \leq \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$, joten ainoa vaihtoehto on $m(A) = 0$.

Yksikkövälin rationaali- ja irrationaaliluvut

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on tunnetusti numeroituva, joten sen kaikki osajoukot ovat numeroituvia, siis mitallisia ja nollamittaisia. Täten yksikkövälin rationaalilukujen joukko $Q := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ on mitallinen, ja sen mitta on nolla. Myös yksikkövälin irrationaalilukujen joukko $P := [0, 1] \setminus Q = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1[$ on mitallinen, sillä se on pantu kokoon mitallisista joukoista operaatioilla, jotka eivät johda pois mitallisten joukkojen σ -algebrasta. Koska $P \cup Q = [0, 1] = \{0, 1\} \cup]0, 1[$, mitan additiivisuuden perusteella $m(P) + m(Q) = m(\{0, 1\}) + m(]0, 1[)$ eli $m(P) + 0 = 0 + 1$ eli $m(P) = 1$.

Rationaalinen tarkoittaa järkevää ja irrationaalinen järjetöntä. Edellisen perusteella järjettömät luvut voittavat järkevät luvut 1–0. Lukijan pohdittavaksi jää, onko tällä tosiasialla heijastusvaikutuksia nyky-yhteiskunnassa.

Tehtäviä

1. Mitallista joukkoa sanotaan *nollamittaiseksi* eli *nollajoukoksi*, jos sen mitta on 0. Todista, että nollajoukon osajoukot ovat mitallisia. Ovatko ne nollajoukkoja? Miksi?
2. Lue Wikipediasta [1] *Cantorin joukon* määritelmä ja ymmärrä, miksi joukko on nollamittainen ja yli-numeroituva.
3. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *mitallinen*, jos jokaisen avoimen joukon U alkukuva $f^{-1}U$ on mitallinen. Osoita, että jokainen jatkuva funktio on mitallinen.
4. Osoita, että Lebesguen mitta on translaatioinvariantti. Translaatiot ovat kuvauksia $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + a$. On osoitettava, että $T_a A$ on mitallinen aina, kun A on mitallinen, ja $m(T_a A) = m(A)$.
5. Lue Wikipediasta [8] *Vitalin joukon* määritelmä ja ymmärrä, miksi joukko ei ole mitallinen.
6. Olkoon A mikä tahansa reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ rajoitettu osajoukko; so. A sisältyy johonkin väliin $I = [a, b]$, missä $-\infty < a < b < \infty$. Joukon A *ulkomitta* $m^*(A)$ määritellään samaan tapaan kuin mitallisen joukon mitta asettamalla

$$m^*(A) = \inf\{L(U) \mid U \text{ on avoin ja } A \subset U\}.$$

Mitta on täten ulkomitan rajoittuma mitallisten joukkojen kokoelmaan $\mathcal{M}$. Joukon A sisämitta $m_*(A)$ määritellään yhtälöllä

$$m_*(A) = m^*(I) - m^*(I \setminus A),$$

kun $A \subset I$. Osoita, että

- (a) sisämitta ei riipu välin I valinnasta, kunhan $I \supset A$,
- (b) A on mitallinen, jos ja vain jos $m_*(A) = m^*(A)$.

7. Ylimääräinen työläs tehtävä: todista vaihe vaiheelta artikkelissa esitetyt tulokset tai osa niistä valintasi mukaan.

Viitteet

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set
- [2] Halmetoja, M. & Merikoski, J.: *Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi*.

- <https://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/lmam.pdf>
- [3] Hoare, G. T. Q. & Lord, N. J.: '*Intégrale, longueur, aire*' the Centenary of the Lebesgue Integral. The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 505 (2002), 3–27.
- [4] Huovinen, V.: *Matikanopettaja*. Otava, Helsinki, 1986.
- [5] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 3, Vol. 7 (1902), 231–359.
- [6] Tao, T.: *An Introduction to Measure Theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011. <https://bookstore.ams.org/gsm-126>
- [7] Trench, W. F.: *Introduction to Real Analysis*. Free Hyperlinked Edition 2.01, May 2012. https://matematiikkalehtisolmu.fi/2012/TRENCH_REAL_ANALYSIS.pdf
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set

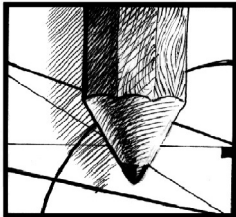
Oheislukemistoa Solmun diplomisivulla

Osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia
 Lukujärjestelmistä
 Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
 Murtolukujen laskutoimituksia
 Negatiivisista luvuista
 Hiukan osittelulaista
 Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
 Äärettömistä joukoista
 Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
 Funktiosta
 Gaussin jalanjäljissä
 K. Väisälä: Algebra
 Yläkoulun geometriaa
 Geometrisen todistamisen harjoitus
 K. Väisälä: Geometria
 Lukuteorian diplomitehtävät



Seikkailuja seisauksina ja tasauksina

Jouni Luukkainen

Helsingin yliopisto

Tiedotusvälineille päivänseisaukset ja päiväntasaukset merkitsevät yleensä vain tiettyjä vuodenväliä ja niitä koskevia päivänpituuksia. Kansoille myös näiden päivien auringonnousun ja -laskun suunnat ovat olleet merkitykselliset. Mutta tähtitieteessä päivänseisauksille ja -tasauksille ilmoitetaan tarkat kellonaikansa. Tiedolla niistä maapallon pisteistä, joissa Aurinko on näinä ajankohtina zenitissä eli kohtisuoraan yläpuolella, on oma merkityksensä sen ymmärtämisessä, mistä seisauksissa ja tasauksissa on varsinaisesti kyse.

Kyseisen pisteen määrittäminen kullakin kerralla yksinkertaista matematiikkaa ja karttakirjaa käyttäen tarjoaa myös kiinnostuneille tavan juhlistaa näitä tähtitieteellisiä merkkipäiviä. Seikkailu kartalla on oma hupinsa, ja aina voi jännittää, osuuko paikkaan, joka on maalla, ei merellä, ja helposti kuvailtavissa.

Aloitan teorialla. Sitten tarkastelen kahta esimerkkiä, jotka yhteensä kattavat eri ilmiöt: seisaus/tasaus, normaaliaika/kesäaika, läntinen pituus / itäinen pituus sekä myös maalla/merellä. Lopuksi kerron ajankohdat vuoden 2018 tapahtumille, joista yksi tai kaksikin jää vielä juhlittavaksi.

Vuodenaikoja tarkastelen pohjoisen pallonpuoliskon kannalta. Tapahtumien kellonajat ovat Suomen aikaa.

Seisaukset ja tasaukset

Seuraavassa Auringon suunta taivaalla kuvataan sen projektiona *taivaanpallolla*, jonka ajatellaan olevan

pallo, jonka keskipiste on Maan keskipiste ja säde hyvin suuri. Maan (pyörähdys)akselin jatkeen leikkauspisteet taivaanpallon kanssa ovat sen pohjois- ja etelänavat, ja Maan ekvaattorin taso leikkaa siitä ekvaattorin. Tätä kautta voidaan puhua Auringon paikasta pohjois-eteläsuunnassa.

Talvipäivänseisaus sattuu joulukuun 21. tai 22. päiväksi. Sen hetkellä Aurinko on taivaanpallolla eteläisimmillään. Aurinko on silloin kohtisuoraan eteläisen eli Kauriin kääntöpiirin jonkin pisteen yläpuolella. Kauriin kääntöpiiri on leveyspiiri 23,44 astetta eteläistä leveyttä. Tämän kulman verran Maan akseli on vinoissa Maan kiertoradan akselin suhteen. Talvipäivänseisauksena Maan akseli on kiertoradan akselin ja Auringon suunnan määräämässä tasossa, pohjoisnapa kallistuneena Auringosta pois päin.

Kevätpäiväntasaus sattuu maaliskuun 19., 20. tai 21. päiväksi. Sen hetkellä Aurinko siirtyy taivaanpallon eteläpuoliskolta sen pohjoispuoliskolle. Aurinko on silloin kohtisuoraan päiväntasaajan jonkin pisteen yläpuolella. Kevätpäiväntasauksena Maan akseli on kohtisuorassa Auringon suuntaa vastaan, pohjoisnapa kallistuneena tulosuuntaan päin. Kevätpäiväntasauksena kuten tietysti talvipäivänseisauksenakin Suomessa on talvi- eli normaaliaika.

Kesäpäivänseisaus sattuu kesäkuun 20., 21. tai 22. päiväksi. Sen hetkellä Aurinko on taivaanpallolla pohjoisimmillaan. Aurinko on silloin kohtisuoraan pohjoisen eli Kravun kääntöpiirin jonkin pisteen yläpuolella. Kravun kääntöpiiri on leveyspiiri 23,44 astetta poh-

joista leveyttä. Kesäpäivänseisauksena Maan akseli on kiertoradan akselin ja Auringon suunnan määräämässä tasossa, pohjoisnapa kallistuneena Aurinkoon päin.

Syyspäiväntasasattu syyskuun 22. tai 23. päiväksi. Sen hetkellä Aurinko siirtyy taivaanpallon pohjoispuoliskolta sen eteläpuoliskolle. Aurinko on silloin kohtisuoraan päiväntasaajan jonkin pisteen yläpuolella. Syyspäiväntasaauksena Maan akseli on kohtisuorassa Auringon suuntaa vastaan, pohjoisnapa kallistuneena menosuuntaan päin. Syyspäiväntasaauksena kuten tietysti kesäpäivänseisauksenakin Suomessa on kesäaika, joka on tunnin edellä normaaliaikaa.

Kaksi esimerkkiä

Talvipäivänseisaus vuonna 2017 tapahtui 21.12. klo 18.28. Kellonajan katsoin Tähtitieteellinen yhdistys Ursan *Tähdet 2017* -vuosikirjasta. Ilmaiseksi ajankohdan olisi saanut verkkosivulta www.ursa.fi/vuosikirja, nimittäin Aurinkoa eri vuodenvälinä kuvaavista vuosikirjan lisämateriaalin tiedoista. Mutta missä Kauriin kääntöpiirin pisteessä Aurinko oli tuolloin suoraan pään yläpuolella eli zeniitissä? Oliko siellä ihmisiä havaitsemassa tapahtumaa? Kyseisen pisteen löytää tietysti suoraan Internetistä, mutta entä pelkän kellonajan perusteella?

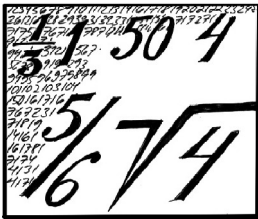
Suomen normaaliaika on kaksi tuntia universaaliaikaa edellä. Universaaliaika on Lontoon liepeillä sijaitsevan Greenwichin observatorion luonnollinen paikallisaika idealisoituna. Puoliympyrä, jonka päätepisteinä ovat navat ja joka kulkee Greenwichin observatorion kautta, on määritelty 0° pituuspiiriksi. Talvipäivänseisauksen hetkenä universaaliaika oli siis 16.28. Etsittävässä pisteessä oli taas keskipäivä, jolloin siellä luonnollinen kellonaika oli 12.00. Aikavyöhykkeet on tässä unohdettava. Nyt jo voimme nähdä, että kyseinen piste sijaitsi läntisellä pallonpuoliskolla.

Tarkemman paikan selvittämiseksi huomaamme, että maapallo pyörähtää 24 tunnissa 360° eli siis yhdessä tunnissa $360^\circ/24 = 15^\circ$. Kellonaikojen 16.28 ja 12.00 ero 4 h 28 min vastaa näin ollen $(4 + 28/60) \times 15 = 67$ astetta. Etsimämme piste on siis 67° läntistä pituutta. Nyt vain pitää katsoa karttakirjasta tai vaikka karttapallolta, missä 67° läntinen pituuspiiri leikkaa Kauriin kääntöpiirin. Itselläni on *The Times Atlas of the World*, jonka tietylle karttalehdelle on piirretty 66° ja 69° läntiset pituuspiirit. Katsoin, että nämä pituuspiirit erottivat kääntöpiiristä kartalla 6,0 cm pituisen janan. Koska $(67^\circ - 66^\circ)/(69^\circ - 66^\circ) = 1/3$, niin janaa piti edetä edelliseltä pituuspiiriltä $6,0/3 = 2,0$ cm. Näin interpoloimalla ja ottamalla sitten kartan mittakaava huomioon päädyin pisteeseen, joka sijaitsi Andeilla, 20 km päässä Argentiinan ja Chilen rajasta, Argentiinan puolella.

Syyspäiväntasas vuonna 2014 tapahtui 23.9. klo 5.29. Universaaliaika oli nyt kolme tuntia vähemmän, 2.29. Päiväntasaajan pisteessä, jossa Aurinko oli zeniitissä, oli keskipäivä ja siis luonnollinen kellonaika 12.00. Nyt jo voimme nähdä, että kyseinen piste oli itäisellä pallonpuoliskolla. Kellonaikojen 12.00 ja 2.29 ero 9 h 31 min vastasi $(9 + 31/60) \times 15 = 142,75$ astetta itäistä pituutta. Karttakirjani sopivimmalla kartalla oli pituuspiirit 142° ja 144° , jotka leikkasivat päiväntasaajasta kokonaisuudessaan avoimella Tyynellämerellä sijainneen patkan, joka kartalla oli 44 mm pitkä. Janalla piti edetä edellisestä pituuspiiristä 17 mm. Kartalla 1 cm vastasi 50 km. Näin saatoinkin nähdä, että kohde sijaitsi Papua-Uuden-Guinean rannikosta pohjoiseen. Lähimpänä maa-alueena oli 150 km kaakossa tähän valtion kuuluvan Ninigon saariryhmän Manun saari.

Harjoiteltavaksi ja juhlittavaksi

Vuonna 2018 päiväntasausten ja -seisausten ajankohdat ovat 20.3. klo 18.15, 21.6. klo 13.07, 23.9. klo 4.54 ja 22.12. klo 0.23.



Moniulotteisuuden ihmeitä: ongelmien ratkaisuita

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Edellisen numeron epäyhtälöartikkelissa¹ oli lopussa kahdeksan ongelmaa pohdittavaksi niille lukijoille, jotka sellaista kaipaavat. Tässä on niille esimerkkiratkaisuita.

Ongelma 1. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ratkaisu. Kahden muuttujan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \\ &\geq \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}. \end{aligned}$$

Ongelma 2. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Ratkaisu. Missä tahansa suuruusjärjestyksessä luvut a , b ja c ikinä ovatkaan, ovat luvut a^2 , b^2 ja c^2 ja toisaalta luvut a^3 , b^3 ja c^3 aina samassa suuruusjärjestyksessä, ja luvut bc , ca ja ab vastakkaisessa suuruusjärjestyksessä. Nyt voimme käyttää suuruusjärjestysepäyhtälöä

kahdesti arvioidaksemme

$$\begin{aligned} a^2bc + b^2ca + c^2ab &\leq a^2 \cdot ab + b^2 \cdot bc + c^2 \cdot ca \\ &= a^3b + b^3c + c^3a \\ &\leq a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c \\ &= a^4 + b^4 + c^4. \end{aligned}$$

Ongelma 3. Olkoot a , b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Ratkaisu. Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \cdot 2(a+b+c) &= \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \\ &\quad \cdot \left((b+c) + (c+a) + (a+b) \right) \\ &\geq (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa pienellä sievennyksellä.

Ongelma 4. Olkoot α , β ja γ kolmion kulmat radiaaneissa. Osoita, että

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

¹VESALAINEN, E. V.: Moniulotteisuuden ihmeitä: Shapiron syklinen epäyhtälö, Solmu, 1/2018, 26–34.

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto \tan x:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} &\geq 3 \tan \frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \\ &= 3 \tan \frac{\pi}{6} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ongelma 5. Olkoot α, β ja γ kolmion kulmat. Osoita, että

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto -\sin x:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto -\cos x:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} -\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma &\geq -3 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \\ &= -3 \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ongelma 6. Todista, että jos $p \in [1, \infty[$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat positiivisia reaali-lukuja, niin

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Ratkaisu. Funktio

$$x \mapsto x^p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

on konvekksi, sillä sen derivaatta

$$x \mapsto px^{p-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

on kasvava. Siten Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^p,$$

mistä väite seuraa ottamalla puolittain p . juuri.

Ongelma 7. Osoita potenssikeskiarvojen epäyhtälö: Jos r ja s ovat positiivisia reaali-lukuja, joille $r \geq s$, jos $n \in \mathbb{Z}_+$, ja jos $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat positiivisia reaali-lukuja, niin

$$\sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}} \geq \sqrt[s]{\frac{x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s}{n}}.$$

Ratkaisu. Valitaan $p = r/s$, jolloin edellisen ongelman mukaan

$$\begin{aligned} \frac{x_1^s + \dots + x_n^s}{n} &\leq \sqrt[p]{\frac{x_1^{ps} + \dots + x_n^{ps}}{n}} \\ &= \left(\sqrt[r]{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}} \right)^s, \end{aligned}$$

mistä väite seuraakin ottamalla puolittain s . juuri.

Ongelma 8. Olkoot a, b, c, d, e ja f positiivisia reaali-lukuja. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Ratkaisu. Aloitamme soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä niin, että ikävältä tuntuvat nimittäjät supistuvat pois:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \right) \\ &\quad \cdot \left(a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) \right. \\ &\quad \left. + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b) \right) \\ &\geq (a+b+c+d+e+f)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2ad + 2be + 2cf \\ &\quad + 2ab + 2ac + 2ae + 2af + 2bc + 2bd + 2bf \\ &\quad + 2cd + 2ce + 2de + 2df + 2ef. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \\ &\geq 2 + \frac{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}{a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b)}. \end{aligned}$$

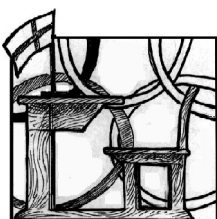
Riittää siten osoittaa, että

$$\begin{aligned} &(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ &\geq a(b+c) + b(c+d) + \dots + f(a+b). \end{aligned}$$

Mutta soveltamalla Cauchyn–Schwarzin epäyhtälöä näemme, että

$$\begin{aligned} &(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \\ &= \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2} \\ &\quad \cdot \sqrt{(b+e)^2 + (c+f)^2 + (a+d)^2} \\ &\geq (a+d)(b+e) + (b+e)(c+f) + (c+f)(a+d) \\ &= ab + ae + db + de + bc + bf \\ &\quad + ec + ef + ca + cd + fa + fd \\ &= a(b+c) + b(c+d) + c(d+e) \\ &\quad + d(e+f) + e(f+a) + f(a+b), \end{aligned}$$

ja olemme valmiit.



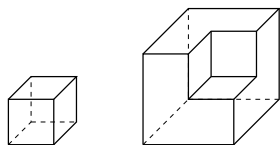
Solmun pulmapalsta

Tässä muutama ongelma kesän ratoksi. Ratkaisuja näihin ja jo aiemmin lehdessä olleisiin ongelmiin sekä uusia ongelmia voi lähettää elokuun loppuun mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Esa Vesalainen) Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 7, ja sen sisältä on valittu 13 pistettä. Osoita, että näistä pisteistä jotkin kaksi ovat enintään etäisyydellä 2 toisistaan.

Tehtävä 2. (Ehdottanut Esa Vesalainen) *Pieni palikka* on $1 \times 1 \times 1$ -kuution muotoinen, ja *iso palikka* on samanmuotoinen kuin $2 \times 2 \times 2$ -kuutio, jonka jostakin nurkasta on lohkaistu pois $1 \times 1 \times 1$ -kuution muotoinen pala:



Voiko yhden pienen palikan ja 585 isoa palikkaa pakata $16 \times 16 \times 16$ -kuution muotoiseen laatikkoon?

Tehtävä 3. Tämä tehtävä ei ole ihan normaali ongelmatehtävä vaan enemmänkin harjoitustehtävä, varsinkin kun lähdemateriaaliakin on tarjolla. Tehtävän c)-kohta on otettu eräästä Evan Chenin kilpailumatematiikan oppimateriaalista (Supersums of Square-Weights: A Dumbass's Perspective). Tässä esitetyt välivaiheet jäljittelevät materiaalissa esitettyä ratkaisua. Jos siis haluat pitää homman hankalana, et lue Chenin monistetta ennen tämän tehtävän ratkaisua ja hyppäät heti c)-kohtaan.

a) Todista

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0.$$

b) Todista

$$a^4 + b^4 + 4a^2 + b^2 \geq 3a^3b + 3ab^3.$$

c) Todista

$$\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^3(b + c) + b^3(c + a) + c^3(a + b).$$



Kaksi pistettä määräävät suoran, kolme paraabelin – miten tämä selittää QR-koodin toiminnan

Jyrki Lahtonen

Turun yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tarinani tavoite on selittää, miten yksinkertaisia polynomien ominaisuuksia voidaan soveltaa virheitä korjaaviin koodeihin. Kaksiulotteiset viivakoodit eli ns. QR-koodit [8] lienevät trendikkäin sovellus, jossa nämä ovat käytössä. Samanlaista menetelmää on käytetty myös antamaan CD-levyille niiden kyky toipua naarmuista sekä suojaamaan 1. sukupolven digitelevisiolähetyskäytännön kanavahäiriöiltä.

Polynomien algebrasta tarvitsemme seuraavaa kahta faktaa.

Lause 1. *Astetta n olevalla polynomilla on enintään n nollakohtaa.*

Lause 2. *Jos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ovat xy -tason n pistettä, joille $x_i \neq x_j$ aina, kun $i \neq j$, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen polynomi $f(x)$, jonka aste on $< n$ ja jonka kuvaaja kulkee kaikkien mainittujen pisteiden kautta, eli jolle $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

Jälkimmäinen tulos ei ole ehkä ihan ilmeinen, joten perustellaan sitä etenkin erikoistapauksissa. Jos tässä $n = 2$, vaadimme, että $f(x)$ on astetta ≤ 1 , jolloin sen kuvaaja on suora, tarkemmin sanottuna pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkeva suora. Kun $n = 3$, vaadimme, että polynomi on enintään astetta kaksi, jolloin sen kuvaaja on joko suora tai y -akselin suuntaan aukeava paraabeli. Haluttu polynomi löy-

detään ratkaisemalla kertoimet a, b, c yhtälöryhmästä $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, $i = 1, 2, 3$.

Korkeampiasteisissa tapauksissa etsitty polynomi löydetään käyttämällä ns. *Lagrange'n interpolaatiokaavaa* [6],[7].

Polynomien yksikäsitteisyys seuraa joka tapauksessa Lauseesta 1. Jos nimittäin $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ olisivat kaksi eri polynomia, kumpikin astetta $< n$, ja kummankin kuvaaja kulkisi valittujen n pisteen kautta, niin erotuspolynomi $f_1(x) - f_2(x)$ olisi sekin astetta $< n$ ja kaikki luvut x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, olisivat sen nollakohtia. Tämä on Lauseen 1 mukaan mahdotonta.

Tämänkertaiset polynomien sovellukset käsittelevät lähettäjän ja vastaanottajan välistä kommunikointia. Lähettäjä haluaa lähettää vastaanottajalle jonkin viestin. Oletamme, että he ovat etukäteen sopineet tavasta koodata viestit jonoksi lukuja $y_1, y_2, \dots, y_k$, missä k on jokin luonnollinen luku. Helppo tapa kommunikoida on tällöin tietenkin se, että lähettäjä yksinkertaisesti kirjoittaa viestin johonkin *tiedonsiirtokanavaan*, jota vastaanottaja voi sitten myöhemmin lukea. Kanava voi olla vaikka luokkahuoneesta kädessä käteen kulkeva paperinpala tai älypuhelimien näytöllä oleva QR-koodi. Se voi myös olla vaikka radiotaajuuskaista tai valokuitu – kanavan fyysinen luonne ei meitä nyt kiinnosta.

Jos kaikki menee hyvin, vastaanottaja saa viestin luettavakseen alkuperäisessä muodossaan. Mutta ehkä jo-

kin merkki vain luetaan väärin, tai ehkä kaverin hiki-nen peukalo tuhersi yhden luvuista viestin kulkiessa hänen kauttaan. Mitä tehdä? Perusidea on lisätä viestiin ylimääräisiä *tarkistuslukuja* (usein puhutaan tarkistussymboleista). Pidennämme k -lukuisen viestin luvun n -lukuiseksi, $n > k$, tavalla, joka antaa vastaanottajalle mahdollisuuden toipua muutamista hämminkiiä aiheuttavista tilanteista.

Yksi hyödyllinen tapa toimia on seuraava:

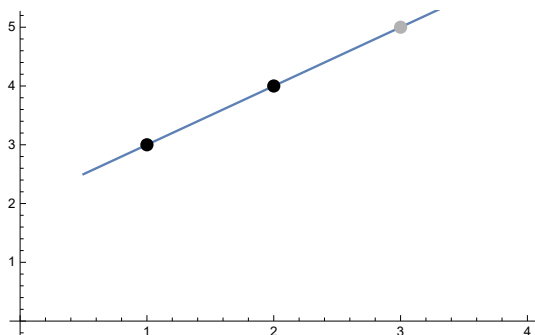
- Sovitaan etukäteen jono (erisuuria) x -koordinaatteja $x_1, \dots, x_n$.
- Viestiä $y_1, y_2, \dots, y_k$ ajatellaankin pisteiden

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_k = (x_k, y_k)$$

jonona.

- Määrätään alussa mainittu yksikäsitteinen polynomi $f(x)$ astetta $< k$, jonka kuvaaja kulkee kaikkien pisteiden P_i , $i = 1, 2, \dots, k$, kautta.
- Laajennetaan viesti sisältämään n lukua $y_1, y_2, \dots, y_n$ siten, että $y_i = f(x_i)$ kaikille $i = 1, 2, \dots, n$. Huomaa, että varsinainen viesti (= payload-luvut) muodostuu k :sta ensimmäisestä luvusta, loput $r = n - k$ ovat *tarkistuslukuja*, joita käytetään virhetilanteista toipumiseen.

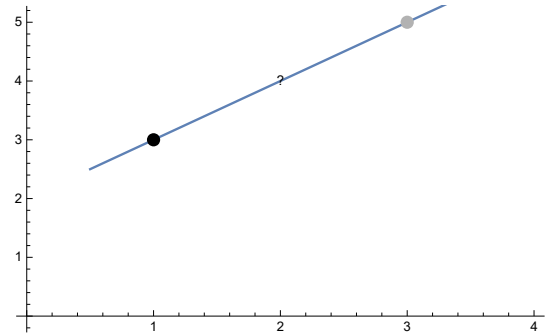
Alla olevissa kuvissa on yksinkertaisuuden vuoksi aina $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$. Tarkastellaan ensin leluiesimerkkinä tapausta $k = 2, n = 3$. Polynomimme ovat siis astetta ≤ 1 ja niiden kuvaajat ovat suoria. Valitaan lähetettäväksi viestiksi $(y_1, y_2) = (3, 4)$. Näemme heti, että tässä tapauksessa polynomi $f(x) = x + 2$, sillä $f(1) = 3 = y_1$ and $f(2) = 4 = y_2$. Koska $f(3) = 5$, laajennetuksi (= koodatuksi) viestiksi saadaan $(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 5)$. Kuvassa 1 payload-lukuja vastaavat pisteet ovat mustia ja tarkistuslukuja vastaavat pisteet harmaita. Hahmottamisen helpottamiseksi mukana on myös polynomin $f(x)$ kuvaaja.



Kuva 1: Kahdesta luvusta muodostuvaan viestiin lisätään kolmas (harmaa) tarkistusluku siten, että muodostuvat kolme pistettä ovat samalla suoralla.

Mitä hyötyä tästä yhdestä tarkistusluvusta meille on? Pohdiskellaanpa ensin tapausta, jossa keskimäinen

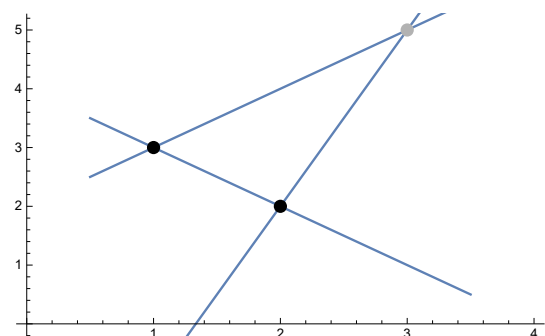
luvusta todellakin muuttui kanavassa lukukelvottomaksi. Tällöin vastaanottaja pystyy ainoastaan lukemaan jonon $(3, ?, 5)$. Systeemimme auttaa vastaanottajaa päättämään, että lukukelvottoman luvun on pakko olla juuri 4. Hän tietää pisteiden $(1, 3)$, $(2, ?)$ ja $(3, 5)$ kaikkien olevan samalla suoralla, ja voi näin ollen määrätä polynomin $f(x)$, ja edelleen tuhoutuneen luvun $y_2 = 4$. Kuva 2 yrittää havainnollistaa tätä.



Kuva 2: Kolmilukuisesti koodatun viestin keskimäinen luku on pyyhkiytynyt lukukelvottomaksi, mutta selvää, koska se on samalla suoralla.

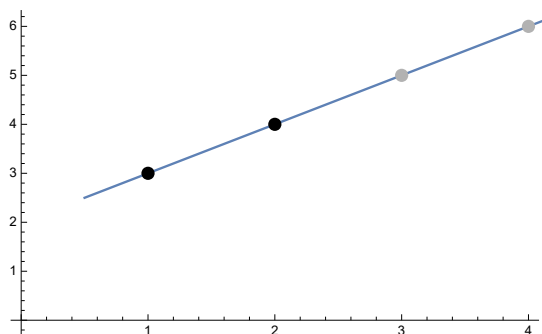
Huomaa, että on täysin merkityksetöntä, mikä kolmesta luvusta oli tuhoutunut. Kunhan vastaanottaja tuntee suoralta kaksi pistettä, hän pystyy sen avulla päättämään puuttuvan luvun, ja näin lukemaan viestin.

Minimalistinen koodimme ei kuitenkaan suojaa meitä toisenlaisilta virhetilanteilta. Oletetaan seuraavaksi, että vastaanottaja lukee yhden luvuista väärin (ehkä kyseessä oli lukuvirhe tai ehkä kyseinen luku oli kanavassa muuttunut toiseksi). Tällöin hän joutuu luovuttamaan. Vastaanottaja toki huomaa, etteivät hänen lukemansa kolme pistettä ole samalla suoralla. Hän siis tietää jonkin menneen pieleen. Hän ei kuitenkaan pysty päättämään, mikä luvuista on virheellinen. Minkä tahansa kahden pisteen kautta kulkee suora, eikä hänellä ole mitään keinoa valita kolmen vaihtoehdoisen suoran joukosta. Tilanne kuvassa 3.



Kuva 3: Kun vastaanottajan kolme pistettä eivät ole samalla suoralla, ei voida selvittää, mikä pisteistä on virheellinen.

Miten tällaista virhetilannetta vastaan voidaan suojautua? Osoittautuu, että tarkistuslukujen määrää kasvattamalla selviämme pulmasta! Kokeillaanpa kahden tarkistusluvun käyttöä: $k = 2$, $n = 4$, $r = 4 - 2 = 2$. Payload-viesti saa edelleen olla $(y_1, y_2) = (3, 4)$. Tällä kertaa lisäämme viestiin neljännen pisteen $(x_4, y_4) = (4, f(4)) = (4, 6)$, joten koodattu viesti onkin $(3, 4, 5, 6)$. Koodattu viesti on Kuvan 4 tapainen.



Kuva 4: Kun kahden luvun viestiin lisätään kaksi tarkistuslukua saadaan 4 pistettä samalta suoralta.

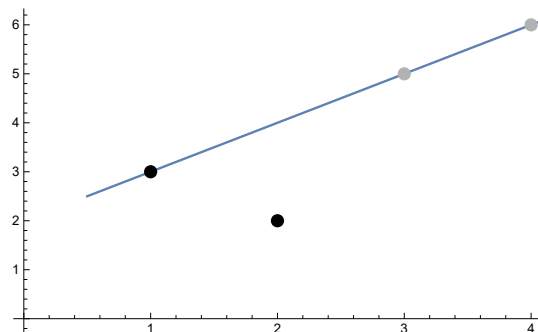
Jos nyt yksi luvuista luetaan väärin, niin vastaanottaja ei ole yhtä avuton. Muut kolme pistettä nimittäin ovat samalla suoralla!

Lause 3. Jos P_1, P_2, P_3, P_4 ovat tason eri pisteitä, niin enintään yksi suora kulkee ainakin kolmen pisteen kautta.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että voisi olla olemassa kaksi eri suoraa L_1 ja L_2 , jotka molemmat sisältävät ainakin kolme valituista pisteistä. Tällöin enintään yksi pisteistä P_1, P_2, P_3, P_4 ei ole suoralla L_1 . Sama koskee suoraa L_2 , joten suorilla L_1 ja L_2 on vähintään kaksi yhteistä pistettä. Mutta näiden kahden pisteen kautta kulkee vain yksi suora. Ristiriita! $\square$

Jos lulesimerkissämme kanava tai vastaanottaja jälleen tekee yhden virheen, ja lukee $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (3, 2, 5, 6)$, niin kuvaa 5 vilkaisemalla on helppo tehtävä tunnistaa, mikä pisteistä on virheellinen. Se olisi helppoa, vaikka en olisikaan lisännyt kuvaan polynomin $y = f(x)$ kuvaajaa.

Yleistetään lulesimerkkiä todenmukaisempiin tilanteisiin. Oletetaan, että olemme täydentäneet k kappaletta payload-lukuja sisältävän viestin kuvatulla tavalla n -lukuisiksi. Mitä ongelmatilanteita vastaan tämä koodi suojaa viestimme? Yllä törmäsimme kahdenlaisiin pulmiin. Jos vastaanottaja ei saa selvää jostakin luvusta, puhutaan *pyyhkiytyneestä* luvusta. Tällöin vastaanottaja kuitenkin tietää vaurioituneen pisteen etukäteen sovitun x -koordinaatin, vain y -koordinaatti puuttuu. Toinen virhetilanne oli *virhe*, väärin luettu luku. Lulesimerkkien perusteella jo arvaamme, että virhe on vakavampi kuin pyyhkiytyminen. Tarvitsimme kaksi tarkistuslukua virheen korjaamiseksi, kun taas pyyhkiytyneestä selvisimme yhdellä.



Kuva 5: Kahden tarkistusluvun avulla voimme korjata yhden virheen, koska löytyy vain yksi suora, joka kulkee kolmen viestiin kuuluvan pisteen kautta.

Oletetaan, että haluamme suojautua t :tä virhettä ja e :tä pyyhkiytymistä vastaan. Montako tarkistuslukua tällöin tarvitsemme? Kaiken kaikkiaan koodatussa viestissä on $n = k + r$ lukua. Pyyhkiytymisten jälkeen on kuvaajan pisteistä vielä tiedossa $n - e$ kappaletta. Näiden pitäisi sitten jotenkin määrätä yksikäsitteinen polynomi, jonka aste $< k$. Vastauksen antaa seuraava Lauseen 3 yleistys.

Lause 4. Jos tunnemme xy -tasolta $k + 2t$ pistettä, joiden x -koordinaatit eroavat, on olemassa enintään yksi astetta $< k$ oleva polynomi $f(x)$, jonka kuvaajalta puuttuu enintään t kappaletta annetuista pisteistä.

Todistus. Nyt ryhdyn ilkeäksi ja jätänkin tämän harjoitustehtäväksi. Käytä Lausetta 2, kuten käytin faktaa ”kahden pisteen kautta kulkee vain yksi suora” Lauseen 3 todistuksessa. $\square$

Seuraus 4.1. Kun lisäämme viestiin r kappaletta tarkistuslukuja, muodostuva virheenkorjauskoodi selviää tilanteesta, jossa on e kappaletta pyyhkiytyneitä ja t kappaletta virheellisesti luettuja lukuja aina, kun

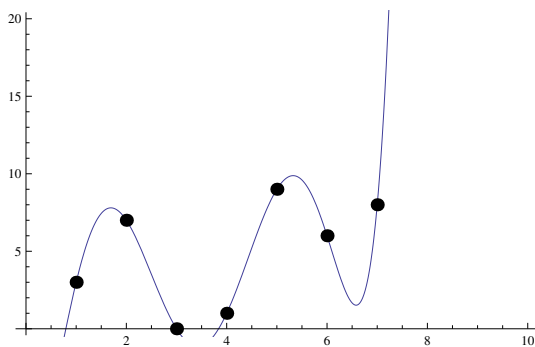
$$r \geq 2t + e.$$

Näemme siis, että tarkistussymboleja lisäämällä voimme suojata viestimme hyvinkin useita virheitä vastaan. On kuitenkin pidettävä mielessä, että tarkistusymbolien lisääminen ei ole ilmaista. Jokainen tarkistusluku nimittäin vaatii yhtä paljon tilaa kanavassa kuin payload-lukukin. Näin ollen virheenkorjauskoodia käyttävän järjestelmän suunnittelijan tulee arvioida yksittäisen pyyhkiytymisen ja/tai virheen todennäköisyys, ja sitten valita koodin parametrit siten, että Seurauksen 4.1 epäyhtälö on voimassa riittävän suurella todennäköisyydellä.

Lukukäsitteen aiheuttamia ongelmia

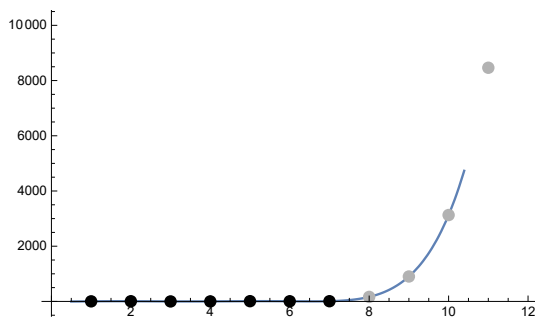
Kuvaamassani skeemassa on muutama vakava ongelma. Yllä puhuin vain *lukuista* spesifioimatta tarkemmin

millaisia lukuja tarkoitan. Kuvien perusteella voi muodostua mielikuva, että luvut voisivat olla mitä tahansa reaalilukuja. Valitettavasti tämä ei ole mahdollista. Perussy tähän on, että reaaliluvun arvon ilmaiseminen äärettömän tarkasti vaatii äärettömän monen bitin käyttämistä lukua kohti. QR-koodeissa ja CD-levyissä tieto on kuitenkin kirjoitettu *tavuin* eli 8 bitin yksiköinä. Jos harrastat tietokoneohjelmointia, tiedät varmaankin, että tavua voidaan ajatella kokonaislukuna b , joka on välillä $0 \leq b \leq 255 = 2^8 - 1$. Vaikka rajoitaisimmekin payload-luvut välille $[0, 255]$, meillä ei ole takeita siitä, että tarkistusluvut pysyisivät tällä välillä. Valitaanpa esimerkiksi $k = 7$, $r = 4$ ja payload-viestiksi $(y_1, \dots, y_7) = (3, 7, 0, 1, 9, 6, 8)$. Tämä viesti on kuvassa 6.



Kuva 6: 7-lukuista viestiä vastaa kuudennen asteen polynomin kuvaaja.

Missä ovat harmaat tarkistuspisteet? Kuvaajasta ehkä arvaatkin, että polynomi $f(x)$ kasvaa voimakkaasti viimeisen payload-luvun jälkeen. Määräämällä polynomin $f(x)$ voimme laskea tarkistusluvut $f(8) = 164$, $f(9) = 903$, $f(10) = 3129$ ja $f(11) = 8464$. Meillä on siis vakava ylivuoto-ongelma (overflow). Alivuoto (underflow) on sekin mahdollinen, sillä tarkistuslukuista voi hyvinkin tulla negatiivisia. Varmuuden vuoksi sama kuva 7 eri mittakaavassa.



Kuva 7: Sama kuvaaja niin, että tarkistusluvutkin näkyvät.

Tämä on vakava ongelma siksi, että emme halua käyttää tarkistusluvun kirjaamiseksi yhtään sen enempää bittieitä kuin payload-luvunkaan. Tämän ongelman ratkaisemiseksi tarvitaan hiukan yliopistotason algebraa.

Lukuteorian alkeita tuntevat voivat tässä vaiheessa tuntea kiusausta käsitellä 'tavua' kokonaislukujen jäännösluokkana modulo 256, ks. esim. [1], [3], eli jäännösluokkarenkana $R = \mathbb{Z}_{256}$ alkiona, jolloin polynomien arvot lasketaan käyttäen jakojäännösten algebraa eli modulaarista aritmetiikkaa [2]. Valitettavasti algebralliset oletuksemme eivät tällöin ole voimassa. Jo Lause 1 menee dramaattisesti pieleen. Ensimmäisen asteen polynomilla $f(x) = 16x$ on nimittäin peräti 16 nol-lakohtaa renkaassa R , sen arvot $f(0), f(16), f(32), \dots$ antavat kaikki jakojäännökseksi nollan luvulla 256 jaettaessa. Algebraa opiskelemalla huomaat, että tässä syltityhteana on se, ettei R ole niin sanottu *kunta*, eli siellä ei ole määritelty kaikkia peruslaskutoimituksia, erityisesti jakolasku ei aina ole mahdollista. Esimerkiksi Turun yliopiston 1. ja 2. vuoden algebran kursseilla opit, että on kuitenkin olemassa kunta $\mathbb{F}_{256}$, jossa on tarkalleen 256 alkioita. Ratkaisu näihin kaikkiin ongelmiin on siis, että 'luku' tarkoittaaakin kunnan $\mathbb{F}_{256}$ alkioita. Jätämme tällaisten *äärellisten kuntien* esittelyn toiseen kertaan. Leluesimerkkinä voit tutustua neljän alkion kuntaan vanhassa Solmu-artikkelissa [4] tai Wikipediassa [5].

Lopuksi

Koodausteoria on matematiikan ja tietoliikennetekniikan rajamaastossa oleva tutkimusala. Yksi sen perusongelmista on suunnitella kuvatus kaltaisia menetelmiä toipua kanavahäiriöiden aiheuttamista virheistä. Kuvailemani menetelmä tunnetaan Reedin–Solomonin koodina (tai lyhyesti RS-koodina) keksijöidensä Irving S. Reedin [9] ja Gustave Solomonin [10] kunniaksi. Heidän tapansa valita käytetyt x -koordinaatit mahdollistaa (harmaiden) tarkistuslukujen tehokkaan laskemisen. Voidaan mm. käyttää yksinkertaista polynomien kertolaskua laskennallisesti hankalammasta interpolatiopolynomin asemesta, tai käyttää tehtävään erityisesti soveltuvaa virtapiiriä (ns. lineaarinen siirtorekisteri). Esimerkiksi RS-koodia käsittelevä Wikipedia-artikkeli [11] esittelee koodien algebran tavalla, joka paremmin soveltuu tarkistuslukujen laskemiseen. Lopputulos on kuitenkin sama.

Käytännössä on tärkeää, että koodausteoria myös tarjoaa RS-koodatun viestin vastaanottajalle tehokkaan tavan paikantaa ja korjata virheet sekä täyttää pyyhkäistyt luvut. Neljän pisteen leluesimerkissämme tämä oli helppoa – riitti etsiä sellainen pistepari, jonka kautta kulkevalla suoralla oli myös jokin kolmas piste. Koska pistepareja oli vain $\binom{4}{2} = 6$, tämä oli nopeaa. Itse asiassa kaikkia pistepareja ei tarvitse edes käydä läpi. Mutta jos käytämmekin viisi virhettä korjaavaa RS-koodia, jossa on $k = 240$ payload-lukua ja $r = 10$ tarkistuslukua, niin vastaavalla alkeellisella logiikalla toimiva vastaanottaja joutuisi tarkistamaan $\binom{250}{10} = 219005316087032475$ interpolaatiopolynomia,

kukin astetta 239 yhtä lähetettyä viestiä kohti. Onneksi koodausteoreetikkojen työkalupakista löytyy paljon tehokkaampia menetelmiä.

A happy thought: algebran työkalut tuovat järjestystä tietoliikenteen kaaokseen.

Viitteet

- [1] T. Metsänkylä: ”Kongruenssi – lukuteorian kätevä apuväline”, Solmu 1/1998.
- [2] *Kongruenssi*, https://fi.wikipedia.org/wiki/Modulaarinen_aritmetiikka
- [3] V. Latvala, P. Smolander: ”Modulaarisista laskutaulukoista”, Solmu 2/2003.
- [4] K. Ranto, P. Rosendahl: ”Neljän alkion kunta, solitaire-peli ja taikaneliöt”, Solmu 2/2005.
- [5] *äärellinen kunta*, https://fi.wikipedia.org/wiki/äärellinen_kunta
- [6] H. Apiola: ”Polynomit, interpolaatio ja funktion approksimointi”, Solmu 3/2004.
- [7] *Lagrange Interpolaatiopolynomi*, https://fi.wikipedia.org/wiki/Lagrange_interpolaatiopolynomi
- [8] *QR-koodi*, <https://fi.wikipedia.org/wiki/QR-koodi>
- [9] Irving Reed, https://en.wikipedia.org/wiki/Irving_S._Reed
- [10] Gustave Solomon, https://en.wikipedia.org/wiki/Gustave_Solomon
- [11] *RS-koodit*, https://en.wikipedia.org/wiki/Reed-Solomon_error_correction

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen at yahoo.piste.com

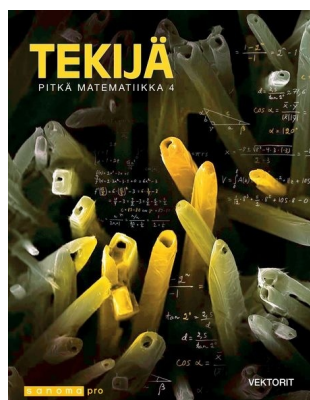
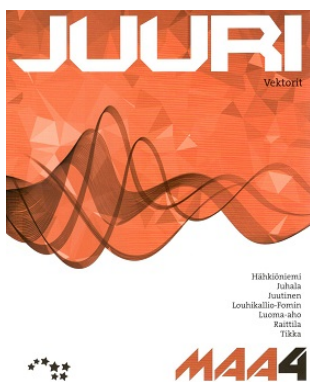


Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, neljäs ja viides kurssi

Matti Lehtinen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja Tommi Tikka : Juuri. Vektorit. 166 s. Otava 2016. Hinta joulukuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,20–22,00 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: Tekijä. Pitkä matematiikka 4.* 148 s. Sanoma Pro 2016. Hinta joulukuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,60–21,40 euroa.

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja Tommi Tikka : Juuri. Analyttinen geometria. 160 s. Otava 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 21,20–21,40 euroa. *Sami Alatupa, Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: Tekijä. Pitkä matematiikka 5.* 164 s. Sanoma Pro 2016. Hinta syyskuussa 2017 eri verkkokaupoissa 20,40–25,55 euroa.



Tämä kirjoitus jatkaa Solmussa 3/2017 alkanutta katsausta lukion pitkän matematiikan oppikirjoihin, matematiikan silmin katseltuina. En puutu kirjojen ja niiden oheisaineistojen didaktiseen arvoon – näiden arviointiin en (ainakaan) ole pätevä. Varmuuden vuoksi kertaan, että paikoin kriittisetkin mielipiteeni ovat vain omiani, eivät esimerkiksi Solmun toimituksen. Kritiikini kohdistuu monesti opetussuunnitelmaan. Mutta kirjailijoita moitin kovin tiukasta pitäytymisestä opetussuunnitelman kirjaimeen, matematiikan vahingoksi.

Vektorikurssi

Lukion pitkän matematiikan neljäs kurssi on omistettu vektoreille. Opetussuunnitelma listaa kurssin kohdalle kuusi tavoitetta ja viisi keskeistä sisältöä. Tavoitteiden joukossa on vektoreihin liittyvän geometrian lisäksi kohta, joka sanoo, että opiskelijan tulisi ymmärtää yhtälöryhmän ratkaisemisen periaate. Keskeisiin sisältöihin kuuluvat vektorien laskutoimitukset. Vektorituloa ei kuitenkaan mainita. Kurssin keskeistä sisältöä ovat myös suorat ja tasot avaruudessa. Opetussuunnitelma ei ota kantaa siihen, eittämättä yleissivistykseen kuuluvaa tietoon, että lineaarisilla malleilla, siis vektorivaruuksilla, kuvataan erittäin monenlaisia ilmiöitä eri tiedonaloilla. *Juuri* kertoo alun motivointiosiossa vektorigrafikasta, mutta kirjan luettuaan ei tästä teknikasta ole viisastunut.

Mikä on vektori? Se voi olla yleisen lineaarisen struktuurin alkio, mutta kun halutaan, että tällaisesta oliosta olisi suoraa käytännön hyötyä, on saatava kytkentä

havaintomaailmaan. Jos vektorikäsite pohjataan geometriaan, on jotenkin päästävä siihen, että vektoria määrittävät suunta ja koko. Tyydyttävä vektorin määritelmä on ”suuntajanojen ekvivalenssiluokka”. Jos tällaisten luokkien laskutoimitukset määritellään luokkien edustajien avulla, on varmistuttava siitä, että eri edustajan valinta ei vaikuta tulokseen.

Oppikirjat joutuvat oikaisemaan. *Juuren* mukaan ”vektori on jana, jolla on suunta”. *Juuri* jatkaa määritelmää kertomalla, että ”vektorin pituus on sitä vastaavan janan pituus”. Mutta jos vektori itse on jana, niin mikä on sitä vastaava jana? *Tekijä* ei määrittele käsitettä vektori ollenkaan, mutta kertoo, että ”Vektorilla on suunta ja pituus. Vektoria kuvaavan nuolen suunta osoittaa vektorin suunnan ja nuolen pituus ilmaisee vektorin pituuden.” *Juuren* mukaan kaksi vektoria ovat ”yhtä suuret, jos ne ovat yhtä pitkät ja samansuuntaiset”. *Tekijän* mukaan kaksi vektoria ovat sama vektori, jos ne ovat samansuuntaiset ja yhtä pitkät. *Tekijä* ottaa myös käyttöön käsitteen suuntajana ja kertoo jokaisen suuntajanan edustavan jotain vektoria. Vektori suuntajanojen ekvivalenssiluokkana on siis oikeastaan *Tekijän* tekijöiden mielessä. Olisiko asian voinut ääneenkin sanoa?

Kumpikin kirja esittää vektorin perusmerkinnäksi pienen kirjaimen, jonka päällä on viiva, $\bar{u}$, ja mainitsee ohimennen, että viivan sijasta voidaan käyttää nuolta, $\vec{u}$. Kun kompleksiluvut on poistettu lukion oppimääristä, ei sekaannusta kompleksiluvun liittoluvun merkinnän kanssa tule, ainakaan lukiossa. *Juuri* muistaa myös lisätietolaatikkossa mainita lihavoinnin käytön vektorin merkinä. Että näin tehtäisiin ”koneella kirjoitettaessa” niin kuin *Juuri* sanoo, on kyllä hiukan omituista. Mutta anglosaksisessa kirjallisuudessa lihavointi on sängen yleinen vektorin kirjoitusasu ja esimerkiksi fysiikan oppikirjoissa siihen väkisinikin törmää. – Merkinnoista vielä: *Tekijä* käyttää sekä vektorikurssin että analyttisen geometrian osuudessa mielestäni vähemmän onnistunutta merkintätapaa ” $P(a, b)$ ” tai ” $P(a, b, c)$ ” pisteelle, jonka nimi on P ja jonka koordinaatit ovat a ja b tai a, b ja c . Merkintä on ristiriidassa kautta matematiikan käytössä olevan funktiomerkin kanssa eikä sitä oikein mikään perustele. Jos pisteen (a, b) nimeksi otetaan P , niin $P = (a, b)$. *Juuri* onkin omaksunut tämän käytännön. Samat käytännöt jatkuvat sarjojen analyttiselle geometrialle omistetuissa osissa.

Molemmat kirjat määrittelevät vektorien skalaaritulon $\bar{a} \cdot \bar{b}$ koordinaattilausekkeena $(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) \cdot (b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Tätä varten tarvitaan ensin vektorille yksikäsitteinen koordinaattiesitys. Kirjat todistavatkin esityksen $\bar{a} = t\bar{u} + s\bar{v}$ yksikäsitteisyyden, kun $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat erisuuntaisia vektoreita ja $\bar{a}$ on samassa tasossa kuin $\bar{u}$ ja $\bar{v}$. Sen sijaan esityksen olemassaoloa ei oikeastaan missään perustella. Ja kolmiulotteinen tilanne otetaan vastaan vain ilmoitusasiana. Kumpikaan

kirja ei kysy, riippuuko määritely suure siitä, miten kantavektorit on valittu.

Skalaaritulon häviämisen yhteys vektorien kohtisuoruuteen perustellaan Pythagoraan lauseen kautta. Kun *Tekijä* on valinnut järjestyksen, jossa pistetulon osittelulaki perustellaan heti määritelmän jälkeen, se saa kohtisuoruusehdon perustelun näyttämään elegantimalta kuin koordinaattien pyörittelyyn (xy -tasossa vain) turvautuva *Juuri*. – Molemmat kirjat toki esittävät sitten lauseena skalaaritulon standardimääritelmän $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b})$ ja perustelevat sen kurssissa 3 esitetyn kosinilauseen avulla. – Valittu järjestys ei aivan tee oikeutta skalaaritulon olemukselle. Sehän nimenomaan tuo vektorien maailmaan mittakepin suuntien erolle, kulmalle. Kirjat eivät myöskään esitele skalaarituloa työkaluna, jota käytetään, kun määritetään vektorin komponentti toisen vektorin suunnassa.

Opetussuunnitelmassa kurssin keskeisiin sisältöihin listattu (lineaarisen) yhtälöryhmän ratkaiseminen tulee tarpeeseen esimerkiksi silloin, kun tunnettu vektori halutaan jakaa tunnettujen vektorien suuntaisiksi komponenteiksi. *Juuri* esittelee kahden ja kolmen tuntemattoman lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen tekniikkaa vektorien koordinaattiesitykseen johdattavan luvun jälkeen. Kirjassa joudutaan jo tätä ennen ratkaisemaan yhtälöryhmiä. *Tekijä* sen sijaan aloittaa kurssin yhtälöryhmistä. Determinanttien tarjoamaa algoritmia ryhmän ratkaisemiseen ei kumpikaan kirja edes mainitse. Toinen asia, jonka kohdalla kirjojen järjestykset eroavat toisistaan, on osio ”geometriaa vektoreilla”, jonka *Tekijä* sijoittaa koko esityksen loppuun ja *Juuri* ennen kolmiulotteisiin vektoreihin siirtymistä. Osiot ovat kuitenkin melko samanlaiset.

Opetussuunnitelman viides keskeinen sisältö on ”suorat ja tasot avaruudessa”. Suorasta kerrotaan sen vektorin ja parametrimuotoinen yhtälö. *Juuri* antaa nämä eksplisiittisesti myös xy -tasossa, muttei vihjaakaan, että esityksestä

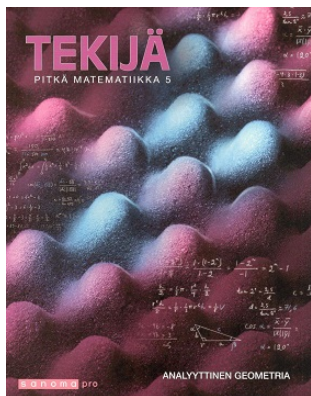
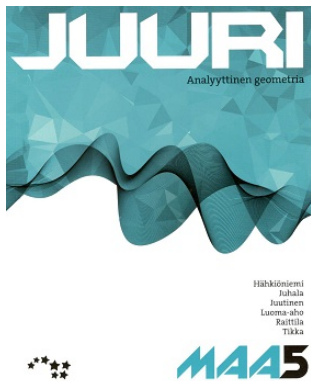
$$\begin{cases} x = x_0 + ts_x \\ y = y_0 + ts_y \end{cases}$$

saattaisi t :n eliminoimalla päästä suoran $y = ax + b$ -muotoiseen yhtälöön. Sen sijaan asian kolmiulotteinen vastine, tason yhtälö $ax + by + cz + d = 0$ kyllä esitetään.

Kun opetussuunnitelma ei mainitse vektorin vektorituloa, siitä ei kumpikaan kirja mitään mainitse. Vektoreiden soveltaminen niin suorien ja tasojen geometriaan kuin fysiikkaankin jää tästä syystä vähän raajarikkiseksi. Olisiko oppikirjailijoilla saattanut olla rohkeutta sisällyttää kokonaisuuteensa myös vektoritulo, tietysti varoituksin siitä, että hypätään opetussuunnitelman aitauksen yli?

Analyttinen geometria

Lukion pitkän matematiikan viidennen kurssin otsikko on Analyttinen geometria. Keskeisiksi sisällöiksi opetussuunnitelma listaa pistejoukon yhtälön, suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt ja pisteen etäisyyden suorasta. Analyttisen geometrian ulkopuolelta on vielä otettu sisällöksi itseisarvoyhtälön ja -epäyhtälön ratkaiseminen. Opetussuunnitelman geometria-alusta näyttää olevan taso, eivätkä oppikirjatkaan useamman ulottuvuuden asioihin puutu.



Perinteinen koulun analyttinen geometria on keskittynyt kartioleikkauksiin, toisen asteen käyriin. Opetussuunnitelma mainitsee näistä enää ympyrän ja paraabelin. *Juuri* esittää kuitenkin ilahduttavasti johdantisivullaan kuvasarjan kartiota eri asennoissa leikkaavista tasoista ja nimeää vastaavat käyrät. *Tekijäkin* mainitsee sanan kartioleikkaus – ainakin ehdottaessaan toisen asteen lausekkeen neliöksi täydentämisen työkaluksi laskulaitteen ”kartioleikkaussovellusta”.

Molempien kirjojen ensimmäinen asiakokonaisuus on itseisarvo. *Tekijä* kompastelee. Se määrittelee itseisarvon käsitteen toisen määrittelemättömän käsitteen avulla: ”luvun a itseisarvo on luvun a etäisyys luvusta 0”. Kaksi sivua myöhemmin tulee sitten uusi määritelmä: ”lukujen a ja b etäisyys on lukujen erotuksen itseisarvo $|a - b|$ ”. *Juuri* esittää konstailematta määritelmän

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jos } a \geq 0, \\ -a, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

Tyyppeä $|f(x)| < |g(x)|$ olevalle epäyhtälölle *Tekijä* antaa kategorisesti ratkaisuohjeeksi yhtäpitävän epäyhtälön $f(x)^2 < g(x)^2$ ratkaisemisen. Esimerkkinä käsitel-

ty epäyhtälö $|3x - 4| > |x|$ taitaa kyllä ratketa ainakin yhtä mukavasti suoraan itseisarvon määritelmään nojautumalla kuin toisen asteen yhtälön kautta kiertäen.

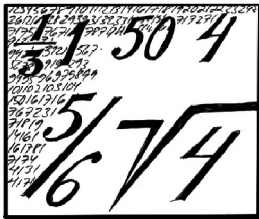
Opetussuunnitelman käyttämä ilmaus ”pistejoukon yhtälö” näyttää määrittäneen oppikirjoja. Näin molemmat tulevat esitelleeksi ”käyrän yhtälön”, mutta eivät puhu pistejoukoista, joiden määritelmät perustuvat epäyhtälöihin. Ei olisi paljon lisää tekstiä tarvittu ympyrän sisä- ja ulkopuolen tai suoran määrittämien puolitasojen analyttisten määrittelyjen esittelyille.

Molemmat kirjat kiinnittävät sivumäärällä mitaten eniten huomiota suoriin. Kun kurssissa 4 on jo esitelty suoran ominaisuuksia sen vektorimuotoisesta esityksestä lähtien, tuntuu hämmästyttävältä, että kumpikaan kirja ei tunnu sanallakaan tätä mainitsevan. Ei kumuloidu matemaattinen tieto.

Opetussuunnitelman tavoitteissa mainitaan ympyrä ja paraabeli. ”Perinteiseen” analyttisen geometrian oppimäärään kuuluvat muut toisen asteen käyrät *Tekijä* jättää maininnatta. *Juuri* sentään esittelee ellipsin ja hyperbelin harjoitustehtävissä ja käsittelee ”pistejoukon yhtälö” -luvussa esimerkkinä käyrää $x^2 + 2y^2 = 6$, sitä kuitenkin ellipsiksi kertomatta; käyrän piirtämiseksi ehdotetaan ”sopivan ohjelman” käyttöä. *Juuri* kertoo myös paraabelin määritelmän johtosuoran ja poltopisteen avulla ja näyttää jopa kuvan, jossa johtosuora ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen. Analyttisesti toki käsitellään vain paraabeleja, joiden akseli on x - tai y -akselin suuntainen.

Ympyrä-osioon molemmat kirjat sisällyttävät erilaisia tangentin annettulle ympyrälle piirtämisen tehtäviä. *Tekijä* tarjoaa tehtävien ratkaisuksi toisen asteen yhtälön diskriminantin häviämisen tutkimista vaativia ”yhden leikkauspisteen” menetelmiä, *Juuren* keino on pisteen etäisyyden suorasta kertova kaava. Oppilaan tai opettajan keksittäväksi jää säteen ja tangentin kohtisuoruuden soveltaminen, usein näppärä tangentin määrittäyskeino.

En ole oikein osannut asettaa tarkastelussa olevia kahta oppikirjasarjaa paremmuusjärjestykseen kursien MAB1 ja MAA2 – MAA4 kohdalla. Kurssin MAA5 oppimateriaaleista tuntuu *Juuri* onnistuneen hiukan paremmin, se kun näyttää pitävän edes raollaan ikkunoina opetussuunnitelman rajaaman alueen ulkopuolellekin.



Juuso peruskoulussa

Markku Sointu

Soppeenharjun koulu

Ensimmäinen oppitunti: lukujoukot ja laskutoimitukset

Tunnin aihe: lukujoukot, vastaluku, itseisarvo, yhteen- ja vähennyslasku negatiivisilla luvuilla.

Lehtori Laulunen oli pyytänyt Juuson sijaiseksi yläkouluun. Juuso tunsu itsensä norsuksi posliinikaupassa. Juuso ei ollut tavannut peruskoululaisia sen jälkeen kun oli itse sieltä lähtenyt ja silloinkin hän oli ollut vain valikoidun kaveriporukan kanssa. Silti hän ei epäröinyt suostua.

”Oppilaat ovat aina innoissaan, kun tapaavat nuoren opettajan. Käytä tätä innostusta,” valisti Laulunen.

Juuso oli astunut seiskaluokan eteen ja aloittanut: Tännään puhumme lukujoukoista.

”Mihin semmoisia tarvitaan?” kysyi nuorimies nimeltään Jere teinipojan römeällä äänellään.

”Kysymyksesi on erinomainen. Koulussa ei kannata tuhlaa aikaa hyödyttömän tiedon pänttäämiseen. Onneksi sellainen on jäänyt aikaa sitten. Voimme siis keskittyä vain oleelliseen.”

Ensimmäinen lukujoukko on luonnollisten lukujen joukko. Niitä merkitään $\mathbb{N}$:llä ja ne ovat luvut 0, 1, 2, 3, 4, ... Ja nyt Jere ja kumppanit, miksi nämä luvut ovat niin tärkeitä. Niitä tarvitsevat kaikkien ammattien harjoittajat. On todettu, että niitä on luonnonkansoillakin, siis ihmisillä, jotka elävät hyvin alkeellisissa

olosuhteissa.” Luokka oli vielä alkujännityksen vallassa, joten Juuso auttoi, mihin lampaita paimentamassa oleva tyttö tai poika tarvitsee luonnollisia lukuja.

”Voidakseen laskea, kuinka monta lammasta hänellä on,” tuli pienen miettimisen jälkeen monesta suusta.

”Oikein,” Juuso totesi. ”Miksi tämä tieto on tärkeä?”

”Paimenen täytyy tietää, häviääkö lampaita. Pedot voivat viedä niitä,” päätteli Henriikka.

”Taas oikein.”

”Lampaat voivat myös lisääntyä,” Jere puhkui.

”Juurikin näin. Siksi tarvitsemme merkit $<$, $>$ ja $=$. Luonnollisilla luvuilla ilmoitetaan määrä. Se voi olla suurempi, pienempi tai yhtä suuri kuin aikaisemmin laskettu.”

Seuraava lukujoukko on $\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Siinä ovat mukana kaikki luonnolliset luvut, mutta niiden lisäksi negatiivisia lukuja. ”Mihin niitä tarvitaan?” Juuso kysyi.

”Lämpötilan ilmaisemiseen,” vastasi luokka yhdestä suusta.

”Niitä käytetään lämpötiloihin. Se on totta. Mutta nyt kysyn, mihin niitä tarvitaan välttämättä. Miinusasteet Celsius-asteikolla ilmaisevat veden jäätymisen, mutta välttämätöntä tämä ei olisi. Lämpö on hiukkasten liikettä, eli jos lämpöliike on täysin pysähtynyt, ollaan

lämpötilassa, jota kylmempää ei voi olla. Mikä on sopiva luku ilmaisemaan asiaa, jota ei ole?”

”Nolla.”

”Eli miinuslukuista on hyötyä lämpötiloja ilmaistaessa, mutta välttämättömiä ne eivät ole. Miettikää siis asia, mitä ei voi ilmaista ilman negatiivisia lukuja.” Luokka hiljeni miettimään.

Juuson piti auttaa: ”Miettikää pankkitiliä.”

”Velka!” ”Pankkitili voi olla plussalla tai miinuksella,” Henriikka tiesi.

”Itse asiassa velka on juuri syy, miksi negatiiviset luvut keksittiin,” kertoi Juuso.

”Negatiiviset luvut ovat matematiikan historiassa varsin uusi keksintö. Seuraava lukujoukko on ollut käytössä paljon ennen negatiivisia lukuja. Minkähänlaisista luvuista on kysymys?”

”Murtoluvuista,” vastattiin monella suulla.

Niinpä taululle ilmestyi $\mathbb{Q}$. Murtoluvuilla on myös hienomp nimi rationaaliluvut. Nyt määritelty on siis joukot

$\mathbb{N}$ eli luvut, joilla ilmoitetaan lukumäärä
 $\mathbb{Z}$ luvut, jotka sisältävät negatiiviset luvut
 ja mahdollistavat velan ilmoittamisen
 $\mathbb{Q}$ murtoluvut.

”Mitä luvuilla tehdään?” Juuso kysyi ja sai vastauksen saman tien: lasketaan.

”Alakoulussa olette jo oppineet laskutoimitukset: yhteen- ja vähennyslasku, kerto- ja jakolasku. Lähdetään taas liikkeelle luonnollisista luvuista. Yhteen- ja kertolaskulla on ominaisuus, jota ei ole vähennys- ja jakolaskulla. Mistä ominaisuudesta on kysymys?”

”Yhteen- ja kertolaskussa vastaus kasvaa,” vastattiin aivan kuin Juuso arveli. Niinpä hän korjasi heti $2 + 0 = 2$ ja $2 \cdot 0 = 0$, eli luku ei kasva välttämättä, kun siihen lisätään tai se kerrotaan luonnollisella luvulla. ”Mutta mitä voidaan varmuudella sanoa yhteen- ja kertolaskusta kaikissa tapauksissa?”

Tämä kysymys sai oppilaat pohtimaan tovin pitempään, kunnes Henriikka keksi. Kerto- ja yhteenlaskun tulos oli aina luonnollinen luku. Mutta $3 - 4$ ei ollut eikä liioin $\frac{3}{4}$.

”Voidaksemme jatkaa meidän täytyy laajentaa maattista tietämystä,” Juuso jatkoi. ”Itseisarvolla tarkoitetaan luvun etäisyyttä nolasta. Luvun 7 itseisarvo on 7 ja luvun -3 itseisarvo on 3. Vastaluvulla puolestaan tarkoitetaan lukua, joka on yhtä kaukana luvusta

nolla kuin luku itse, mutta nollan toisella puolella. Luvun 7 vastaluku on näin -7 , ja luvun -3 vastaluku on 3.”

”Harjoitellaan seuraavaksi yhteen- ja vähennyslaskua, kun laskussa on mukana negatiivisia lukuja. Sitä varten tarvitsemme pistepotin, jonka arvoa lähdemme laskemaan. Saatte valita minkä tahansa luvuista -5 , -4 , -3 , -2 , -1 tai 1 , 2 , 3 , 4 , 5 . Kirjoitan niitä taululle sitä mukaa kun luettelette lukuja.”

Pian oli taululle ilmestynyt jono

$$3, -2, -4, 1, 5, 5, -3, -5, 2, -4,$$

ja Juuso keskeytti lukujen kirjoittamisen välilaskun ajaksi. Pistepotin arvo oli näin $(3 + 1 + 5 + 5 + 2) - (2 + 4 + 3 + 5 + 4)$. Kun pluspisteisiin lisättiin miinus pisteet, saatiin potin arvoksi -2 . Seuraava henkilö halusi lisätä pottiin luvun $+3$. Juuso kirjoitti $-2 + (+3) = -2 + 3 = 1$. Pistepotin arvo nousi, kun siihen lisättiin pluslukuja. Seuraava oppilas halusi lisätä miinus pisteitä eli luvun -4 . Nyt taululle kirjoitettiin $1 + (-4) = 1 - 4 = -3$. Pistepotin arvo laski tietenkin, kun siihen lisättiin miinuslukuja.

Juuson laatimien pelisääntöjen mukaan potista oli myös mahdollista poistaa sinne laitettuja lukuja. Kun alkuperäisen jonon ensimmäinen luku $+3$ poistettiin, saatiin $-3 - (+3) = -3 - 3 = -6$. Kun potista poistettiin positiivinen luku, potin arvo laski. Toisen luvun -2 poistaminen kirjoitettiin $-6 - (-2) = -6 + 2 = -4$. Negatiivisen luvun poistaminen nosti potin arvoa.

Juuson opetus oli, että laskutoimitukset $3 + (-4)$ ja $3 - (+4)$ antoivat saman vastauksen, mutta tarkoittivat eri asiaa. Toisessa lisättiin miinus pisteitä ja toisessa vähennettiin pluspisteitä.

Oli aika selvittää, mitä tarkoitettiin kertolaskulla.

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$3 \cdot (-4) = -4 + (-4) + (-4) = -12$$

Tulon ensimmäinen luku kertoi, kuinka monta kertaa toinen luku otettiin. Mitä siis tarkoitti $-3 \cdot 4$? Nyt miinusmerkki $-$ luvussa tarkoitti luvun $3 \cdot 4$ vastalukua

$$-3 \cdot 4 = -(4 + 4 + 4) = -12$$

ja vastaavasti luvun $3 \cdot (-4)$ vastaluku oli

$$-3 \cdot (-4) = -(-4 + (-4) + (-4)) = -(-12) = 12$$

Oppilaat olivat näin oppineet, mitä tarkoitettiin ja mihin tarvittiin

- luonnollisia lukuja,
- kokonaislukuja,
- rationaalilukuja.

Lisäksi heille oli kerrottu merkintöjen $<$, $>$ ja $=$ tarpeellisuudesta ja esitetty itseisarvon ja vastaluvun käsitteet.

Toinen oppitunti: alkuluvut

”Ota esimerkki, mikäli suinkin mahdollista, oppilaiden arjesta. Tehtävä saa sisältää kohtia, joita oppilaat eivät vielä osaa ratkaista. Näin päästään tilanteeseen, jossa on ongelma, joka selvästi vaatii lisätietoa. Näin menetellen välttään esittämästä asia teoreettisesti ilman käytännön ongelmaa. Oppilaiden tai kenen tahansa matematiikkaan tutustuvan tulisi mahdollisimman nopeasti tietää ainakin yksi käytännön ongelma, johon käsiteltävää asiaa voidaan soveltaa.” Nämä Laulusen sanat mieleessään Juuso asteli seiskaluokalle puhumaan alkuluvuista.

”Juoksitte tänään koulun pihassa olevaa pallokenttää ympäri. Kyseessä oli liikunnan opettajan mukaan Cooperin testi. En ole kuitenkaan nyt kiinnostunut, kuinka paljon kukin juoksi. Radan ympäri juoksemiseen liittyy mielenkiintoista matematiikkaa. Oletetaan, että juoksijat lähtevät kierrokselle samaan aikaan samasta paikasta samaan suuntaan. Tarkastellaan kahta juoksijaa A ja B. A juoksee kierroksen 60 sekunnissa ja B 90 sekunnissa. Milloin he kohtaavat uudestaan samassa paikassa samaan aikaan?”

Koska luvut oli tarkoituksella valittu helpoiksi, oli vastaus nopeimmilla laskijoilla pian selvillä. 180 sekunnin eli kolmen minuutin kuluttua oli nopeampi juossut tasan kolme ja hitaampi tasan kaksi kierrosta. Mutta miten kohtaamispaikka laskettaisiin, jos kierrosajat olivat olleet 51 sekuntia ja 85 sekuntia?

Tämän tehtävän ratkaiseminen edellytti valmisteluja. Piti selvittää käsitteet alkuluku ja pienin yhteinen jaettava eli p.y.j.

”Viime tunnilla tutustuimme luonnollisiin lukuihin. Ne ilmaisevat määrän. Mietitään nyt, mitkä luvut ovat välttämättömiä ja mitkä vain hyödyllisiä. Tehtävänä on ilmaista kaikki lukumäärät. Mikä luku siis tarvitaan, jos sovitaan, että lukumäärä ei ole 0?”

1, 2 ja 3 ilmoitettiin nopeasti ja Juuso kirjoitti ne taululle. ”Mikä on seuraava luku, joka tarvitaan?” kysyi Juuso ja sai kuin saikin vastaukseksi luvun 4. Näin hän pääsi sanomaan: ”Luku 4 on hyödyllinen, mutta ei välttämätön. Se voidaan ilmaista 2:lla kakkosella.”

”Pelataan nyt seuraavaa peliä. Teidän tulee laatia kortteja, joissa on välttämättömiä lukuja. Eli lukuja, joita ilman ei kaikkia lukumääriä pysty esittämään. Luvun saa esittää vain keskenään yhtä suurten ykköistä suurempien kokonaislukujen summana, paitsi luvun 1 voi tietysti esittää vain itsensä avulla. Rajataan luvut yhdestä 32:een. Kun kortit ovat valmiit, katsotaan kuka selviää lukujen 1–32 ilmaisemisesta vähimmällä määrällä kortteja. Kortteja tarvitsevat lukumäärät 1, 2, 3, 5 jne., mutta nyt tulee myös miettiä, kuinka monta kukaan välttämättöntä korttia tarvitaan.” Oppilaat ryh-

tyivät työhön. Tehtävä oli mielenkiintoinen. Välttämättömien lukujen päättely onnistui varsin helposti.

- 1 tarvitsee kortin
- 2 tarvitsee kortin
- 3 tarvitsee kortin
- 4 saadaan kahdella kakkosella, eli tehdään yksi kakkonen lisää
- 5 tarvitsee kortin
- $6 = 2 \cdot 3$ tai $3 \cdot 2$. Kannattiko nyt tehdä yksi kakkonen lisää vai yksi kolmonen lisää? Eri oppilasryhmät valitsivat toiset 3 kakkosta ja toiset kaksi kolmosta.
- 7 tarvitsee uuden kortin
- $8 = 4 \cdot 2$ eli yksi tai kaksi kakkosta lisää
- $9 = 3 \cdot 3$ eli yksi tai kaksi kolmosta lisää
- $10 = 2 \cdot 5$
- 11 tarvitsee oman kortin
- $12 = 6 \cdot 2$ eli tarvitaan lisää kakkosia

Nyt oli syytä pysähtyä pohtimaan. Tärkeä kysymys oli, kuinka monta kakkosta tarvittaisiin. Niiden määrä oli ratkaistava ensin. Minkälainen luku vaatisi paljon kakkosia?

Luokka hiljeni, mutta Henriikka tiesi (tietenkin): luku, joka sisälsi pelkkiä kakkosia eli 2 potenssiin viisi. Kakkosia tarvittiin siis 16. Seuraavaksi piti tietenkin miettiä, montako kolmosta tarvittaisiin. Sen määräsi luku 27. Siitä ei selviäisi ilman yhdeksää kolmosta. Seuraava kriittinen luku oli $25 = 5 \cdot 5$. Se kertoi, että viitosia tarvittiin viisi.

- 13 vaati oman kortin
- $14 = 7 \cdot 2$
- $15 = 5 \cdot 3$ tai $3 \cdot 5$, eli ei tarvita uusia kortteja
- $16 = 8 \cdot 2$
- 17 vaati oman kortin
- $18 = 9 \cdot 2$
- 19 vaatii oman kortin
- $20 = 10 \cdot 2$
- $21 = 7 \cdot 3$, tästä selvittää kolmosilla (niitä on 9 kappaletta)
- $22 = 11 \cdot 2$
- 23 tarvitsee oman kortin
- $24 = 12 \cdot 2$
- $25 = 5 \cdot 5$
- $26 = 13 \cdot 2$
- $27 = 9 \cdot 3$
- $28 = 14 \cdot 2$
- 29 tarvitsee oman kortin
- $30 = 15 \cdot 2$
- 31 tarvitsee oman kortin
- $32 = 16 \cdot 2$

Luvut, jotka tarvittiin, olivat siis

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Osalla oppilaista luvut olivat oikein, jonkun riviin oli pujahtanut luku, joka voitiin esittää ilman omaa korttia, ja joltain puuttui joku välttämättömistä luvuista.

Pohtiminen oli kuitenkin sujunut hienosti ja virheet oli helppo tunnistaa. Koska eri lukujen kohdalla saattoi tehdä erilaisia valintoja, esimerkiksi täytyi päättää, olisiko luku viisitoista $3 \cdot 5$ vai $5 \cdot 3$, oli eri oppilailla eri määrä kortteja. Niinpä Juuso laati yhteenvedon. Tarvittiin

16 kakkosta
9 kolmosta
5 viitosta
1 seiska
1 yksitoista
1 kolmetoista
1 seitsemäntoista
1 yhdeksäntoista
1 kaksikymmentäkolme
1 kaksikymmentäyhdeksän
1 kolmekymmentäyksi

Luvut, joita ilman ei voinut ilmaista kaikkia lukumääriä, olivat alkulukuja. Korttien määrä oli näin $16 + 9 + 5 +$ alkulukujen määrä alkaen luvusta 7 lukuun 31, mikä oli 8.

Lukuun 32 liittyi siis luku 38. Se kertoi, montako numerokorttia vähintään tarvittiin, jotta voitiin ilmaista kaikki lukumäärät väliltä 1–32. Vaikka alkuluvut riittivät kaikkien lukumäärien ilmaisemiseen, olivat evälvittämättömätkin luvut hyödyllisiä. Niiden avulla selvittiin 32:lla kortilla, joka oli vähemmän kuin 38.

Juuso huomasi samalla, että tutustuminen alkulukuihin oli poikunut mielenkiintoisen sivutuotteen. Aritmeettisen funktion $A(n)$. Se kertoi, kuinka monta korttia tarvittiin. Esimerkiksi $A(32) = 38$. Puhumatta aritmeettisista funktiosta (vaikka Henriikka olisi varmasti ymmärtänyt) Juuso antoi oppilaille tehtäväksi selvittää, montako korttia lisää tarvittiin, jos n olisi 50. Jos $n = 50$, on mukana $7 \cdot 7 = 49$ eli seiskoja tarvittiin kuusi lisää. Luku 33 vaati lisää kolmosia tai kortteja, joissa oli yksitoista, sillä $11 \cdot 3 = 33$ eli tarvittaisiin lisää kaksi kolmosta. Nyt piti pohtia, olisiko järkevämpää ottaa lisää kortteja, joissa oli yksitoista. Jälkimmäinen tuntui viisaammalta, koska $44 = 4 \cdot 11$. Lisäys oli näin kolme yhtätoista.

$34 = 17 \cdot 2$. Taas saattoi valita, ottaisiko lisää yhden kakkosen vai yhden seitsemäntoista.

$35 = 5 \cdot 7$ ei aiheuttaisi ongelmaa, koska seiskoja oli otettu jo 7, että saatiin luku 49.

41 tarvitsi uuden kortin

$$42 = 6 \cdot 7$$

43 tarvitsi uuden kortin

$$44 = 4 \cdot 11$$

$45 = 9 \cdot 5$, tarvittiin lisää viitosta 4 kappaletta.

$46 = 2 \cdot 23$, lisättiin siis yksi kaksikymmentäkolme.

47 vaati uuden kortin

$48 = 24 \cdot 2 = 16 \cdot 3$, joten tarvittiin lisää kakkosia tai kolmosia. Kakkosia oli nyt 16 tai 17, ja korttien lisäys oli 8 tai 7. Kolmosia oli tähän mennessä 9, koska $27 = 9 \cdot 3$. Ottamalla 7 kolmosta lisää saatiin $16 \cdot 3 = 48$. Lukuun 48 liittyi siis lisäys 7.

$$49 = 7 \cdot 7$$

$50 = 25 \cdot 2$, tästä selvittiin ottamalla kakkosia tai viitosta lisää.

Juuso päätti laskelmansa huolestuneena. Oliko tehtävä liian vaikea? Pelko osoittautui turhaksi. Lähes kaikki oppilaat saivat jonkinlaisen määrän kortteja, jolla tehtävästä selvittiin. Ongelmalliseksi tehtävä muuttui vasta, jos täytyisi löytää minimi ja osoittaa saatu luku minimiksi.

Oppilaathan kilpailivat siitä, kuka selviää vähimmällä määrällä kortteja. Se tarjosi tekemistä ja harjoitti kertolaskutaitoa. Juuso jäi kuitenkin pohtimaan, miten funktio $A(n)$ toimi. Hänet keskeytti kuitenkin laiskan, mutta terävän oloinen nuori mies Kasper nimeltään.

”Eikös tää oo vähän turhaa hommaa, jos alkulukuja käytettäessä lukumäärään 32 asti tarvitaan 38 korttia? Eiks olis järkevämpää käyttää lukuja 1–32? Silloinhan selvittäisiin 32 kortilla.”

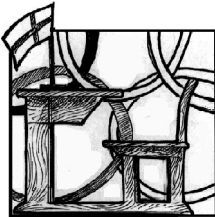
”Good point,” kuittasi Juuso nopeasti. ”Mutta alkuluvuista on hyötyä. Palataanpa juoksuratatehtävään.”

Jos haluamme selvittää, milloin nopeampi saavuttaa hitaamman lähtöpaikalla, meidän on löydettävä lukujen 51 ja 85 pienin yhteinen jaettava = p.y.j.

$$51 = 3 \cdot 17$$

$$85 = 5 \cdot 17,$$

joten p.y.j.(51, 85) = $3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$. Juoksijat kohtaavat nopeamman kierrettyä 5 ja hitaamman 3 kierrosta. P.y.j saadaan esittämällä tutkittavat luvut alkulukujen tulona ja ottamalla vastauksen kertovaan tuloon niin monta alkulukua kuin on sillä rivillä, missä niitä on eniten.



Matematiikan arkisovellusten huippua

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Toisinaan matematiikkaa näkee sovellettavan arkielämässä, harrastustoiminnassa tai jopa populaarikulttuurin tulkinnassa hyvin poikkeuksellisella tavalla. Tähän on kerätty parhaimmisto viime aikoina kuulemistani, näkemistäni tai mieleen palautuneista sovelluksista.

Mitä pokemonit oikeastaan ovat?

Pokemon go -pelissä on valaansukuinen vesipokemoni Wailmer, jonka olemus näyttää kovasti siltä kuin se vedessä uppeluksissa uiskentelisi. Kimmo Tykkälä kuitenkin havaitsi, että Wailmerin tiheys on tällaiselle otukselle hieman omituinen:

”Alkoi ihmetyttämään Wailmerin ruumiinrakenne. Tyypillä on korkeutta noin 2 metriä, eli se on käytännössä pallo, jonka säde on yksi metri ja sen tilavuus on siis noin 4 kuutiota. Poken paino on vain noin 150 kiloa joten sen tiheys on siis alle 40 grammaa/litra. Kahden metrin halkaisijalla oleva ja 150 kiloa painava pallo ui vedessä vain 23 sentin syvyydessä. Eli Wailmerin elinympäristö on enemmänkin ilma kuin vesi.” -Kimmo Tykkälä, Pokemon go seniorit -Facebook-ryhmä

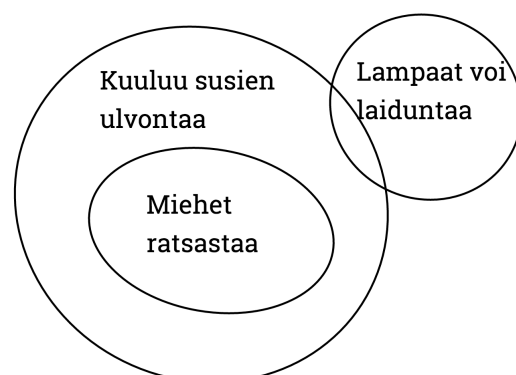
Kuinka pastan oletettavasti saa onnistumaan todennäköisyyslaskennalla

”Oli yllättävän hankalaa arvioida 250 g spagettia vain silmämääräisesti puolittamalla puolen kilon pakkaus.

Sitä meinasi välttämättä tulla liian vähän. Käytin lopulta vaakaa. Toinen vaihtoehto olisi tietysti ollut jakaa spagetti kahteen kasaan ja sitten arpoa nopalla kumpi kasa otetaan. Silloin ainakin spagetin määrän odotusarvo olisi ollut se 250 g.” -Tuomas Hytönen, matematiikan professori

Euroviisu Vennin diagrammiksi

Teräsbetonin kappale *Missä miehet ratsastaa* oli Suomen Euroviisu-kilpailukappale vuonna 2008. Kappaleessa on toki sanoja enemmänkin, mutta siitä ehkä erityisesti päähän jää loppu ja kertosäe. Nämä joku tuntemattomaksi jäänyt teekkari päätti muuttaa Vennin diagrammiksi:



Solmu 2/2018

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Petteri Harjulehto, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 3/2018 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 17.9.2018 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.