

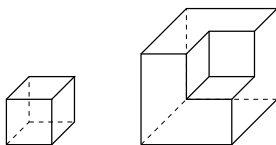
Solmun pulmapalsta

Tässä muutama ongelma kesän ratoksi. Ratkaisuja näihin ja jo aiemmin lehdessä olleisiin ongelmiin sekä uusia ongelmia voi lähettää elokuun loppuun mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Esa Vesalainen) Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 7, ja sen sisältä on valittu 13 pistettä. Osoita, että näistä pisteistä jotkin kaksi ovat enintään etäisyydellä 2 toisistaan.

Tehtävä 2. (Ehdottanut Esa Vesalainen) *Pieni palikka* on $1 \times 1 \times 1$ -kuution muotoinen, ja *iso palikka* on samanmuotoinen kuin $2 \times 2 \times 2$ -kuutio, jonka jostakin nurkasta on lohkaistu pois $1 \times 1 \times 1$ -kuution muotoinen pala:



Voiko yhden pienen palikan ja 585 isoa palikkaa pakata $16 \times 16 \times 16$ -kuution muotoiseen laatikkoon?

Tehtävä 3. Tämä tehtävä ei ole ihan normaali ongelmatehtävä vaan enemmänkin harjoitustehtävä, varsinkin kun lähdemateriaaliakin on tarjolla. Tehtävän c)-kohta on otettu eräästä Evan Chenin kilpailumatematiikan oppimateriaalista (Supersums of Square-Weights: A Dumbass's Perspective). Tässä esitetyt väliarheet jäljittelevät materiaalissa esitettyä ratkaisua. Jos siis haluat pitää homman hankalana, et lue Chenin monistetta ennen tämän tehtävän ratkaisua ja hyppäät heti c)-kohtaan.

a) Todista

$$a^2 - ab + b^2 \geq 0.$$

b) Todista

$$a^4 + b^4 + 4a^2 + b^2 \geq 3a^3b + 3ab^3.$$

c) Todista

$$\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b).$$