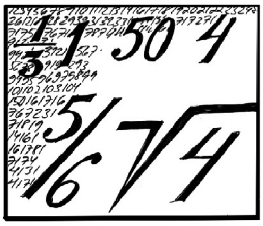

Lebesguen mitta

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Pituus, pinta-ala ja tilavuus ovat toistensa kaltaisia käsitteitä. Niillä on tiettyjä yhteisiä ominaisuuksia, minkä takia niille on keksitty yhteinen nimikin: *mitta*. Mittateoria juontaa juurensa 1800-luvun lopulle ja varsinkin vuoteen 1901, jolloin ranskalainen matematiikko Henri Lebesgue (1875–1941) antoi tyydyttävän selityksen sille, mitä pituudella tarkoitetaan. Lebesgue kysyi itseltään, miten lukusuoran yksikkövälin osajoukon pituus tulisi määritellä. Pituuden määritelmä sisältyy Lebesguen vuonna 1902 julkaistuun väitöskirjaan [5], jonka nimi on suomeksi käännettynä *Integraali, pituus, pinta-ala*. Lebesguen mullistavat ideat järkyttivät erityisesti joidenkin vanhemman polven ranskalaismatematiikoiden tunne-elämän seesteisyyttä. Tuliko Lebesguen mitta täyteen vai mikä lie syynä siihen, että hänen väitöskirjansa julkaistiin Italiassa, Milanossa. Nykyään tätä 130-sivuista työtä pidetään yhtenä parhaimmista matematiikan väitöskirjoista kautta historian. Merkittävät tieteelliset läpimurrot syntyvät tavallisesti monen tutkijan työn tuloksena, kun aika on kypsä. Ansio mitan ja siihen tiiviisti nivoutuvan integraalin käsitteiden synnyttämisestä ja kehittämisestä ei kuulu yksinomaan Lebesguelle; lisätietoa artikkelissa [3].

Mitta on abstrakti yleiskäsite. Tässä artikkelissa mitalla tarkoitetaan Lebesguen mittaa yksiulotteisella lukusuoralla, jolloin mitta vastaa pituutta. Useampiulotteiset Lebesgue-mitat saadaan yksiulotteisesta mittasta muodostamalla niin sanottu tulomitta, jolle pitää lisäksi tehdä nollamittaisia joukkoja koskeva täydennysoperaatio. Yksiulotteisenkin Lebesguen mitan ominaisuuksien aukoton todistaminen vaatii sen verran epsilonistiikkaa,[1] että lyhyessä lehtiartikkelissa yksityiskohtaisia todistuksia ei ole järkevää esittää. Mitallisuuden ja mitan käsitteeseen kuljetaan hieman eri polkua kuin oppikirjoissa on yleensä tapana. Harmaisiin laatikoihin kirjoitetut aputulokset ja vihjaukset todistuksiin on tarkoitettu vain asioihin ennalta perehtyneille mittateorian harrastajille, jotka ovat kiinnostuneita tuloksiin johtavista päättelyketjuista. Tavallinen lukija voi huoletta sivuuttaa harmaat laatikot.

Kaukaa haettu esimerkki

Matematiikan vahvuus liittyy jollakin tavalla ilmiöön, jota kasvatusoppineet kutsuvat nimellä *siirtovaikutus*: yhdessä tilanteessa toimiviksi havaittuja menetelmiä voidaan hyvin usein käyttää menestyksellisesti toisessa, ensi katsomalta täysin erilaisessa tilanteessa. Seuraavan esimerkin ja artikkelin varsinaisen aiheen välisen yhteyden on tarkoitus paljastua vasta jälkikäteen.

Tarkastelun kohteena ovat päättymättömät reaalilukujonot

$$\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

[1] Jatkuvuuden määritelmä on hyvä esimerkki siitä, mitä epsilonistiikalla tarkoitetaan: funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *jatkuva* pisteessä $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista positiivista lukua ε kohti on olemassa positiivinen luku δ, jolle $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ aina, kun $|x - a| < \delta$. Kreikkalainen kirjain ε on nimeltään epsilon.

Jonoille **a** ja **b** ehto $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ tarkoittaa, että $a_n \leq b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jonojen **a** ja **b** erotus $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ on jono $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Lukujonon suppeneminen ja raja-arvo ovat tuttuja käsitteitä, mutta hetken aikaa kuvitellaan, että matematiikan historian tässä vaiheessa lukujonon suppenemista ei vielä ole määritelty. Intuitiivinen mielikuva suppenemisesta on, että jonon **a** luvut a_n pikkuhiljaa vakiintuvat tietyksi *raja-arvoksi* $\lim \mathbf{a}$. Sellaisille jonoille $\mathbf{u}$, joille $u_n = u$ on vakio jostakin indeksin n arvosta alkaen, raja-arvo on ilman muuta $\lim \mathbf{u} = u$. Näistä jonoista käytetään työnimeä *melkein vakio*, so. vakio äärellistä alkupätkää lukuun ottamatta. Kahden melkein vakion jonon erotus on melkein vakio. Yleistä jonoa **a** approksimoidaan eli lähestytään etsimällä ehdon $\mathbf{v} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{u}$ toteuttavat melkein vakiot jonot **u** ja **v** mahdollisimman läheltä toisiaan.

Jono **a** on **suppeneva**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa melkein vakiot jonot **u** ja **v**, joille $\mathbf{v} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{u}$ ja $\lim(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \varepsilon$.

Jos jono ei suppene, se *hajaantuu*. Suppenevan jonon **a** **raja-arvo** $\lim \mathbf{a}$ määritellään asettamalla

$$\boxed{\lim \mathbf{a} = \inf\{\lim \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \text{ on melkein vakio, } \mathbf{a} \leq \mathbf{u}\}}\,.$$

Tässä inf tarkoittaa *infimumia* eli *suurinta alarajaa*. Osalle lukijoista se saattaa olla outo käsite, joten selitys on paikallaan. Reaalilukujoukko A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa kaikkia joukon A lukuja pienempi reaaliluku r. Lukua r sanotaan joukon A *alarajaksi*. Myös kaikki lukua r pienemmät luvut ovat joukon A alarajoja. Infimum tarkoittaa alarajojen joukon suurinta alkiota:

$$\inf A = \max\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq a \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

Alhaalta rajoitetulla ei-tyhjällä reaalilukujoukolla on aina infimum. Tätä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ominaisuutta kutsutaan *täydellisyydeksi*. Rationaalilukujen joukolla $\mathbb{Q}$ tätä ominaisuutta ei ole. Infimumia voidaan luonnehtia seuraavasti:

Luku r on reaalilukujoukon A suurin alaraja, jos ja vain jos

(a) r on joukon A alaraja,

(b) kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < r + \varepsilon$.

Oheistietoja infimumista ja sen isoveljestä supremumista on dokumenteissa [2] ja [7]. Ne sisältävät paljon muutakin tätä artikkelia sivuavaa materiaalia.[2]

Avoimen joukon pituus

Lukusuoran avoin a-keskinen r-säteinen väli $B(a, r)$ on niiden pisteiden x joukko, joiden etäisyys pisteestä a on pienempi kuin r:

$$B(a, r) :=]a - r, a + r[= \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - a| < r\big\}.$$

Joukkoa U sanotaan **avoimeksi**, jos kaikilla $a \in U$ on olemassa $r > 0$, jolle $B(a, r) \subset U$. Erityisesti tyhjä joukko $\emptyset$ on avoin. Mutkattomalla joukko-opillisella päättelyllä osoitetaan, että

- avointen joukkojen yhdiste on avoin,
- äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.

Avointen joukkojen kokoelma

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ on avoin}\}$$

on nimeltään *topologia*. Avoimen joukon käsite yleistyy edellä mainittujen ominaisuuksien kautta mitä moninaisimpiin yhteyksiin. Topologiaksi kutsutaan avointen joukkojen kokoelman lisäksi avoimiin joukkoihin perustuvaa matematiikan osa-aluetta.

Lukusuoran topologiaa voidaan pitää myös yksiulotteisen mitan perustana, sillä avoimelle joukolle on helppoa määritellä pituus, ja määritelmä on yhtä kiistaton kuin melkein vakion lukujonon raja-arvo; lukusuoran avoimilla joukoilla on nimittäin seuraava ominaisuus:

- jokainen ei-tyhjä avoin joukko voidaan järjestystä vaille yksikäsitteisellä tavalla esittää yhdisteenä numeroituvasta[3] määrästä toisiaan leikkaamattomia ei-tyhjiä avoimia välejä.

Toisin sanoen: jos U on avoin ja ei-tyhjä, on olemassa yksikäsitteinen kokoelma $\{I_i \mid i \in \Gamma\}$ ei-tyhjiä avoimia välejä I_i, joille

$$U = \bigcup_{i\in\Gamma} I_i \quad \text{ja} \quad I_i \cap I_j = \emptyset \text{ aina, kun } i \neq j.$$

Koska jokainen ei-tyhjä avoin väli sisältää rationaaliluvun (itse asiassa äärettömän määrän rationaalilukuja), ja rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön, kokoelma $\{I_i \mid i \in \Gamma\}$ on numeroituva, tai yhtäpitävästi indeksijoukko Γ on numeroituva. Välejä I_i kutsutaan avoimen joukon U **yhtenäisiksi komponenteiksi**. Esitys $U = \cup_i I_i$ on joukon U **komponenttiesitys**.

Komponenttiesitystä käyttäen avoimelle joukolle U määritellään **pituus**

$$L(U) := \sum_{i\in\Gamma} \ell(I_i)\,, \quad \ell(I_i) := b_i - a_i\,, \quad I_i =]a_i, b_i[\,,$$

missä $\ell(I_i)$ on välin I_i pituus. Erikseen määritellään $L(\emptyset) = 0 = \ell(\emptyset)$. Positiivitermisen sarjan summa on

[2] Itse käytin oheislukemistona pääasiassa teosta [6], jonka kirjoittaja on eräs arvostetuimmista nykymatemaatikoista, Fields-mitalisti Terence Tao (1975–). Mittateorian osuus on vapaasti luettavissa netissä, mutta vaatinee lukijalta muutaman opintopisteen verran yliopistotasoisia matematiikan opintoja, jotta useampiulotteinen euklidinen avaruus $\mathbb{R}^d$ olisi tullut tutuksi.

[3] Äärellisistä ja numeroituvasti äärettömistä joukoista käytetään yhteisnimitystä *numeroituva*. Muut joukot ovat *ylinumeroituvia*.

tunnetusti riippumaton termien järjestyksestä, joten $L(U)$ on hyvin määritelty. Tapauksia $L(U) = \infty$ ja $\ell(I_i) = \infty$ ei voida sulkea pois. Siis kuvausten L ja ℓ arvojoukko on laajennettu väli $[0,\infty] := [0,\infty[\cup \{\infty\}$.

Kaikki avoimet joukot U pituuksineen voidaan esittää yhdenmukaisessa muodossa

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\,, \quad L(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)\,,$$

kun sallitaan, että I_i voi olla tyhjä. Silloin

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = I_1 \cup \ldots \cup I_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\,,$$

missä $I_i = \emptyset$ kaikilla $i > n$.

Pituuden ominaisuuksia

Pituusfunktiolla $L : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ on seuraavat ominaisuudet, kun U, V ja U_k, $k \in \mathbb{N}$, ovat avoimia joukkoja:

(a) $L(\emptyset) = 0$,

(b) $L(U) \le L(V)$ aina, kun $U \subset V$,

(c) $L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} L(U_k)$,

(d) $L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} L(U_k)$, kun $U_h \cap U_k = \emptyset$ indekseillä $h \ne k$.

Ominaisuutta (b) sanotaan **monotonisuudeksi**, ominaisuutta (c) **numeroituvaksi subadditiivisuudeksi** ja ominaisuutta (d) **numeroituvaksi additiivisuudeksi**. Pelottavannäköisillä hieroglyfeillä on sangen arkipäiväiset tulkinnat:

(a) junamatka Helsingistä Helsinkiin on pituudeltaan nolla,

(b) junamatka Riihimäeltä Tampereelle on pienempi kuin junamatka Hyvinkäältä Tampereelle,

(c) junamatka Helsingistä Tampereelle on pienempi kuin junamatka Helsingistä Riihimäelle plus junamatka Hyvinkäältä Tampereelle,

(d) junamatka Helsingistä Tampereelle on täsmälleen niin pitkä kuin junamatka Helsingistä Riihimäelle plus junamatka Riihimäeltä Tampereelle.

Intuitiivisesti uskottavien ominaisuuksien (a)–(d) todistaminen komponenttiesitysten avulla on lähinnä kirjanpidollinen tehtävä, kun hyväksytään seuraavat kaksi itsestäänselvyyksiltä tuntuvaa aputulosta:

- Jos avoimeen väliin J sisältyvät avoimet välit I_i eivät leikkaa toisiaan, pituuksien $\ell(I_i)$ summa ei ylitä välin J pituutta.
- Avointen välien I_i pituuksien summa $\sum_i \ell(I_i)$ on vähintään välien yhdisteen pituuden $L(\cup_i I_i)$ suuruinen.

Myöhemmin määriteltävän mitallisten joukkojen kokoelman ominaisuuksien todistaminen helpottuu, jos käytettävissä on lisää aputuloksia. Seuraava lemma vaatii jo epsilonistiikkaa:

♣ Olkoot U ja V avoimia joukkoja, ja olkoon $L(U) < \infty$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko W, että $U \setminus V \subset W$ ja

$$L(W) < L(U) - L(U \cap V) + \varepsilon.$$

Sen avulla päästään käsiksi vielä enemmän epsilonistiikkaa vaativaan tulokseen, jota voidaan luonnehtia eräänlaiseksi pituusfunktion jatkuvuudeksi:

- Olkoon $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ aleneva jono avoimia joukkoja, ja olkoon V sellainen avoin joukko, että $\cap_k U_k \subset V$. Jos $L(U_k) < \infty$ eräällä $k \in \mathbb{N}$, on olemassa raja-arvo $\lim_k L(U_k)$, ja

$$\lim_{k\to\infty} L(U_k) \le L(V).$$

Mitallinen joukko

Ihanteellisessa tapauksessa joukon mitta voitaisiin määritellä kaikille reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukoille. Todistettavasti näin ei voida tehdä, kun mitalle asetetaan tiettyjä vaatimuksia, joita intuitiivinen käsitys pituudesta noudattaa. Esimerkiksi välin $[0,1]$ mitan tulee olla 1, ja mitta ei saa muuttua siirroissa: joukon A ja kuvajoukon $T_a A$ mittojen tulee olla samat, kun T_a on siirto $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + a$. Jälkimmäistä ominaisuutta kutsutaan mitan *translaatioinvarianssiksi*. Mitan käsite voidaan ulottaa vain *mitallisiksi* kutsuttuihin joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoihin. Muilla osajoukoilla ei ole mittaa, ja niitä sanotaan *ei-mitallisiksi*. Samaan tapaan raja-arvon käsite voidaan laajentaa melkein vakioista jonoista vain suppeneville jonoille. Muilla jonoilla ei ole raja-arvoa. Hajaantuvat jonot vastaavat siis tässä mielessä ei-mitallisia joukkoja. Seuraavaa mitallisen joukon määritelmää sopii verrata aikaisemmin esitettyyn suppenevan jonon määritelmään:

Joukko A on **mitallinen**, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa avoimet joukot U ja V, joille $A \subset U$, $\mathbb{R} \setminus A \subset V$ ja $L(U \cap V) \leq \varepsilon$.

Rajoittamattoman joukon mitallisuus voidaan selvittää tutkimalla rajoitettuja osajoukkoja:

- Joukko A on mitallinen, jos kaikki leikkaukset $B(0,k) \cap A$, $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia.

Tästä kokenut epsilonisti päättelee helposti, että kaikki avoimet joukot ovat mitallisia.

- Avoin joukko U on mitallinen.

Seuraavat ominaisuudet varmistavat, että mitallisten joukkojen kokoelma

$$\mathcal{M} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ mitallinen}\}$$

on huomattavasti laajempi kuin avointen joukkojen kokoelma $\mathcal{T}$:

(a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

(b) $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{M}$ aina, kun $A \in \mathcal{M}$,

(c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ aina, kun $A_k \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Ominaisuuksien (a) ja (b) verifioiminen ei ole vaikeata. Tyhjän joukon mitallisuus seuraa jo siitä, että tyhjä joukko on avoin, ja kaikki avoimet joukot ovat mitallisia. Mitallisuuden määritelmä on symmetrinen siinä mielessä, että joukoilla $A = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)$ ja $\mathbb{R} \setminus A$ on yhdenvertainen asema. Väite (b) seuraa ilman sen kummempaa todistusta tästä symmetriasta. Ominaisuuden (c) näyttäminen toteen vaatii enemmän päänvaivaamista.

Kuten edellä todettiin, rajoittamattoman joukon mitallisuus selviää tutkimalla rajoitettuja joukkoja. Täten riittää osoittaa väite (c) todeksi tapauksessa, jossa joukkojen A_k yhdiste $\cup_k A_k$ on rajoitettu. Siinä on suureksi avuksi aikaisemmin esillä ollut pituusfunktion jatkuvuusominaisuus. Tässä kuten muissakin epsilontodistuksissa käytetään hyväksi havaintoa, jonka mukaan suuruudeltaan $2^{-k}\varepsilon$ olevien poikkeamien aiheuttama kokonaispoikkeama on

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varepsilon = \varepsilon,$$

mikä on suora seuraus geometrisen sarjan summan kaavasta. Kohdan (c) todistuksen yksityiskohtiin ei mennä tämän syvemmälle.

De Morganin kaavan $\cap_k A_k = \mathbb{R} \setminus \cup_k (\mathbb{R} \setminus A_k)$ ja kohtien (b) ja (c) perusteella mitallisten joukkojen leikkauskin on mitallinen:

(d) $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ aina, kun $A_k \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Ehdot (a)–(c) toteuttavaa kokoelmaa $\mathcal{M}$ sanotaan *σ-algebraksi* (so. sigma-algebraksi), ja sellainen on lähtökohtana yleiselle mittateorialle, joka ei suinkaan ole rajoittunut lukusuoralle tai euklidiseen avaruuteen. Esimerkiksi todennäköisyyslaskenta on mittateoriaa. Mitallisia joukkoja kutsutaan tapahtumiksi, ne muodostavat σ-algebran, ja tapahtuman mitta on tapahtuman todennäköisyys.

Mitta

Mitallisen joukon A **Lebesguen mitta** $m(A)$ määritellään asettamalla

$$\boxed{m(A) = \inf\{L(U) \mid U \text{ on avoin ja } A \subset U\}}\,.$$

Muodollinen yhteys jonon raja-arvon määritelmään on ilmeinen. Mitta määrittelee kuvauksen

$$m : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad A \mapsto m(A).$$

Pituuden L ominaisuuksista ja mitallisuuden määritelmästä voidaan johtaa mitan perusominaisuudet, kun A, B ja A_k, $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia joukkoja eli kokoelman $\mathcal{M}$ alkioita:

(a) $m(\emptyset) = 0$,

(b) $m(A) \leq m(B)$ aina, kun $A \subset B$,

(c) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$,

(d) $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, kun $A_h \cap A_k = \emptyset$ indekseillä $h \neq k$.

Täten sekä pituusfunktio $L : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ että mitta $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ovat monotonisia, numeroituvasti subadditiivisia ja numeroituvasti additiivisia. Jotta edes jotakin tulisi todistetuksi, esitetään todistus mitan numeroituvalle subadditiivisuudelle:

Olkoot A_k, $k \in \mathbb{N}$, mitallisia joukkoja. Väite on selvästi voimassa siinä erikoistapauksessa, että jokin mitoista $m(A_k)$ on ääretön. Olkoon $m(A_k)$ äärellinen kaikilla k, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Mitan määritelmän perusteella on olemassa avoimet joukot U_k, joille $A_k \subset U_k$ ja $L(U_k) < m(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$. Koska $\cup_k A_k \subset \cup_k U_k$, ja $\cup_k U_k$ on avoin avointen joukkojen yhdisteenä, mitan määritelmän nojalla

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) \leq L\left(\bigcup_k U_k\right).$$

Pituusfunktion L subadditiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} L\Big(\bigcup\nolimits_k U_k\Big) &\le \sum\nolimits_k L(U_k) < \sum\nolimits_k \big(m(A_k)+2^{-k}\varepsilon\big) \\ &= \sum\nolimits_k m(A_k) + \sum\nolimits_k 2^{-k}\varepsilon \\ &= \sum\nolimits_k m(A_k) \ + \ \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten $m(\cup_k A_k) \le \sum_k m(A_k) + \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Ei jää muuta vaihtoehtoa kuin $m(\cup_k A_k) \le \sum_k m(A_k)$, ja subadditiivisuus on todistettu.

Mitan numeroituva additiivisuus on seuraus numeroituvasta subadditiivisuudesta ja äärellisestä additiivisuudesta

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k), \quad A_h \cap A_k = \emptyset,\ h \ne k,$$

joka seuraa induktiolla tapauksesta $n = 2$:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B), \quad A \cap B = \emptyset.$$

Se puolestaan on mahdollista perustella kaavalla

$$L(U \cup V) = L(U) + L(V) - L(U \cap V), \quad U, V \in \mathcal{T},$$

kun $U \supset A$ ja $V \supset B$. Tämän intuitiivisesti varsin uskottavan kaavan todistamisessa voidaan käyttää hyväksi lemmaa ♣.

Esimerkkejä

Avoimen välin mitta
Olkoon $I = \,]a, b[$ avoin väli, $a < b$. Tällöin I on avoin joukko, siis mitallinen. Mitan määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} m(I) &= \inf\{L(U) \mid U \in \mathcal{U}\}, \\ \mathcal{U} &:= \{U \mid U \text{ on avoin ja } I \subset U\}. \end{aligned}$$

Koska $I \in \mathcal{U}$, pätee $m(I) \le L(I)$. Pituuden L subadditiivisuuden perusteella $L(I) \le L(U)$ kaikilla $U \in \mathcal{U}$. Silloin $L(I)$ on alaraja luvuille $L(U)$, joten $L(I)$ on korkeintaan niin suuri kuin suurin alaraja $m(I)$. Siis $L(I) \le m(I)$. Täten $m(I) = L(I) = b - a$.

Numeroituvan joukon mitta
Olkoon $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Yksiö $\{a_k\}$ on mitallinen avoimen joukon $\mathbb{R} \setminus \{a_k\}$ komplementtina. Joukko A on mitallinen yhdisteenä numeroituvasta määrästä mitallisia joukkoja. Siis on olemassa $m(A)$. Joukko

$$U_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(a_k, 2^{-1-k}\varepsilon)$$

on avoin avointen joukkojen yhdisteenä, ja $A \subset U_\varepsilon$. Mitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden perusteella

$$\begin{aligned} m(A) \le m(U_\varepsilon) &\le \sum_{k=1}^{\infty} m\big(B(a_k, 2^{-1-k}\varepsilon)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-1-k}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Täten $m(A) \le \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$, joten ainoa vaihtoehto on $m(A) = 0$.

Yksikkövälin rationaali- ja irrationaaliluvut
Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on tunnetusti numeroituva, joten sen kaikki osajoukot ovat numeroituvia, siis mitallisia ja nollamittaisia. Täten yksikkövälin rationaalilukujen joukko $Q := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ on mitallinen, ja sen mitta on nolla. Myös yksikkövälin irrationaalilukujen joukko $P := [0, 1] \setminus Q = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1[$ on mitallinen, sillä se on pantu kokoon mitallisista joukoista operaatioilla, jotka eivät johda pois mitallisten joukkojen σ-algebrasta. Koska $P \cup Q = [0, 1] = \{0, 1\} \cup]0, 1[$, mitan additiivisuuden perusteella $m(P) + m(Q) = m\big(\{0, 1\}\big) + m\big(]0, 1[\big)$ eli $m(P) + 0 = 0 + 1$ eli $m(P) = 1$.

Rationaalinen tarkoittaa järkevää ja irrationaalinen järjetöntä. Edellisen perusteella järjettömät luvut voittavat järkevät luvut 1–0. Lukijan pohdittavaksi jää, onko tällä tosiasialla heijastusvaikutuksia nykyyhteiskunnassa.

Tehtäviä

1. Mitallista joukkoa sanotaan *nollamittaiseksi* eli *nollajoukoksi*, jos sen mitta on 0. Todista, että nollajoukon osajoukot ovat mitallisia. Ovatko ne nollajoukkoja? Miksi?

2. Lue Wikipediasta [1] *Cantorin joukon* määritelmä ja ymmärrä, miksi joukko on nollamittainen ja ylinumeroituva.

3. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *mitallinen*, jos jokaisen avoimen joukon U alkukuva $f^{-1}U$ on mitallinen. Osoita, että jokainen jatkuva funktio on mitallinen.

4. Osoita, että Lebesguen mitta on translaatioinvariantti. Translaatiot ovat kuvauksia $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + a$. On osoitettava, että $T_a A$ on mitallinen aina, kun A on mitallinen, ja $m(T_a A) = m(A)$.

5. Lue Wikipediasta [8] *Vitalin joukon* määritelmä ja ymmärrä, miksi joukko ei ole mitallinen.

6. Olkoon A mikä tahansa reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ rajoitettu osajoukko; so. A sisältyy johonkin väliin $I = [a, b]$, missä $-\infty < a < b < \infty$. Joukon A *ulkomitta* $m^*(A)$ määritellään samaan tapaan kuin mitallisen joukon mitta asettamalla

$$m^*(A) = \inf\{L(U) \mid U \text{ on avoin ja } A \subset U\}.$$

Mitta on täten ulkomitan rajoittuma mitallisten joukkojen kokoelmaan $\mathcal{M}$. Joukon A *sisämitta* $m_*(A)$ määritellään yhtälöllä

$$m_*(A) = m^*(I) - m^*\big(I \setminus A\big),$$

kun $A \subset I$. Osoita, että

(a) sisämitta ei riipu välin I valinnasta, kunhan $I \supset A$,

(b) A on mitallinen, jos ja vain jos $m_*(A) = m^*(A)$.

7. Ylimääräinen työläs tehtävä: todista vaihe vaiheelta artikkelissa esitetyt tulokset tai osa niistä valintasi mukaan.

Viitteet

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

[2] Halmetoja, M. & Merikoski, J.: *Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi.* https://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/lmam.pdf

[3] Hoare, G. T. Q. & Lord, N. J.: *'Intégrale, longueur, aire' the Centenary of the Lebesgue Integral.* The Mathematical Gazette, Vol. 86, No. 505 (2002), 3–27.

[4] Huovinen, V.: *Matikanopettaja.* Otava, Helsinki, 1986.

[5] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 3, Vol. 7 (1902), 231–359.

[6] Tao, T.: *An Introduction to Measure Theory.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011. https://bookstore.ams.org/gsm-126

[7] Trench, W. F.: *Introduction to Real Analysis.* Free Hyperlinked Edition 2.01, May 2012 https://matematiikkalehtisolmu.fi/2012/TRENCH_REAL_ANALYSIS.pdf

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set

Oheislukemistoa Solmun diplomisivulla

Osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät