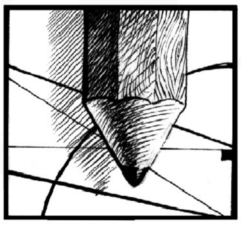

Kurkistus vektoriavaruuteen

Jukka Ilmonen
jukka.ilmonen@hotmail.com

Genesis

Alussa Lukija loi ajatuksen ja avaruuden. Avaruus oli autio ja tyhjä. Lukija sanoi: tulkoon luvut! Ja luvut tulivat. Luvut täyttivät ajatuksen. Niitä oli rajaton määrä, ne olivat erilaisia toisiinsa nähden, ne sekä seurasivat toisiaan tiiviisti että olivat hyvin kaukana toisistaan. Lukija näki, että luvut olivat hyviä, ja hän nimitti jokaiselle luvulle suuruuden. Lukija loi Nollan lukujen keskikohdaksi ja Ykkösen lukujen suuruuden mittariksi. Nyt luvut saivat järjestyksen ja olivat toisiinsa kauniissa suhteessa – lukuja saattoi verrata Ykköseen ja toisiinsa. Lukuja oli pieniä ja suuria, Nollaa suurempia ja Nollaa pienempiä, Ykkösen monikertoja ja Ykkösen murto-osia. Lukuja saattoi löytää aina lisää: jokaisen luvun edestä, takaa ja kuinka läheltä tai kaukaa hyvänsä löytyi aina uusi luku.

Ajatus oli nyt järjestetty, mutta avaruus oli edelleen tyhjä. Lukija sanoi: täyttyköön avaruus vektoreilla. Ja niin tapahtui. Lukija nimitti jokaiselle vektorille pituuden ja suunnan. Vektorin pituus oli Nolla tai Nollaa suurempi luku. Pituus oli siis Ykkösen monikerta tai murto-osa. Avaruus oli laaja ja joka suuntaan ulottuva. Niinpä jokaiselle vektorille annettiin myös suunta avaruudessa. Näin jokainen vektori sai pituuden ja suunnan, joiden mukaan vektori yksilöityi ja voitiin nimetä. Avaruudessa oli muun muassa Viktoria- ja Vihtori-nimiset vektorit. Jos vektori-Viktorian pituus ja suunta ovat täsmälleen samat kuin vektori-Vihtorilla, niin Viktoria onkin sama vektori kuin Vihtori.

Ja Lukija katsoi kaikkea tekemäänsä, ja kaikki oli hyvää. Näin tulivat valmiiksi ajatus ja avaruus ja kaikki mitä niissä on. Tämä on kertomus siitä, mitä muuta vektoreista tiedetään.

Lisääntymisen lait: vaihdannaisuus ja liitännäisyys

Vektorien oli määrä täyttää avaruus. Vektorit voivat liikkua avaruudessa vapaasti. Tämän takia jokainen vektori voidaan löytää avaruuden mistä hyvänsä paikasta. Tästä huolimatta vektoreille annettiin kyky lisääntyä yhtymällä. Kun kaksi vektoria yhtyvät, syntyy uusi vektori. Uusi vektori on ainutlaatuinen sillä tavalla, että yhtyvien vektorien järjestys ei vaikuta syntyvään vektoriin. Kun vektori-Hektori yhtyy vektori-Veroniin, syntyy sama vektori, joka syntyisi vektori-Veronin yhtyessä vektori-Hektoriin. Vanhempien paikka avaruudessa tai yhtymäjärjestys eivät vaikuta jälkeläisvektoriin. Jälkeläisvektorin kaikki ominaisuudet, pituus ja suunta, määräytyvät sen vanhempien ominaisuuksien mukaan.

Koska sama vektori lyötyy avaruuden jokaisesta paikasta, vektori voi helposti yhtyä myös itseensä. Vektori-Hektorilla on tietty suunta ja pituutena Ykkönen. Hektori yhtyy itsensä kanssa, jolloin syntyy vektori-Viktori. Viktorin suunta on sama kuin Hektorin suunta ja pituus kahden Ykkösen mittainen eli kaksinkertainen Hektorin pituuteen nähden. Toisaalta kun erisuuntaiset vektorit yhtyvät, jälkeläisen suunta ei ole sama kummankaan vanhemman suunnan kanssa. Myös jälkeläisvektorin pituus määräytyy yhtyvien vektorien pituuksien yhteisvaikutuksesta.

Edellä kuvatun lisäksi vektorien lisääntymiseen liittyy toinenkin periajatus: samasta perimäaineksesta syntyy aina sama vektori riippumatta lisääntymisketjusta. Vektori-Hektori yhtyi vektori-Veroniin ja syntyi vektori-Rektor. Rektor yhtyi vektori-Tektoriin ja syntyi vektori-Traktor. Syntyisi sama vektori-Traktor, jos Veronin ja Tektorin jälkeläinen yhtyisi vektori-Hektoriin. Traktor saa ominaisuutensa kaikilta tekijöiltään, järjestyksestä riippumatta. Traktorin tekijät olivat Hektori, Veron ja Tektor.

Erikoisvektorit: tyhjä- ja antivektori

Vektorien joukossa on eräs kummajainen. Lukijan määräyksen mukaan on olemassa sellaisia vektoreita, joiden pituus on Nolla. Nollan pituinen vektori suuntautuu joka suuntaan yhtä aikaa eli sen suunta on kaikki suunnat. Toisaalta Lukija asetti vain yhden Nollan, joten Nollan pituisia vektoreitakin on olemassa vain yksi. Tämä vektori on tyhjävektori. Sillä ei ole pituutta eikä määrättyä suuntaa.

Tyhjävektori on vektoreista tylsin, se ei saa aikaan uutta lisääntymisessä. Kun vektori-Viktori yhtyy tyhjävektoriin, miten päin hyvänsä, syntyvä jälkeläinen on vektori-Viktori itse. Tyhjävektori ilmaantuu tyhjästä ja häviää tyhjiin.

Toisaalta tyhjävektori voi olla myös vektorien jälkeläinen. Kun vektori-Viktoria yhtyy erääseen vektoriin syntyy tyhjävektori. Edellä mainittu vektori on nimeltään Anti-Viktoria. Vektorin ja sen antivektorin pituudet ovat samat ja suunnat vastakkaissuuntaiset toisiinsa nähden. Jokaisella vektorilla on oma antivektorinsa. Tämä pätee myös antivektoreille. Selvästi Anti-Viktorian antivektori on vektori-Viktoria itse, koska Anti-Viktorian ja Viktorian yhtyessä syntyy tyhjävektori.

Vektori ja sen antivektori tuhoavat toisensa, sillä niiden yhtyessä syntyy tyhjyys. Toisaalta myös tyhjyys, tyhjävektori, voidaan hajottaa miksi hyvänsä vektoriksi ja tämän antivektoriksi.

Luvut ovat vektorien ravintoa: Ykkösen ja kertolaskun syönti

Ajatus ja avaruus ovat täydellisiä. Samoin vektorit ovat heti syntyessään täydellisiä ja valmiita ominaisuuksiltaan. Niiden ominaisuuksiin vaikuttavat vain yhtyvät vektorit, eivät paikka tai ympäristö. Avaruudessa ei ole aikaa. Tästä huolimatta vektorit voivat muuttua tietyllä tavalla. Luvut luotiin ajatukseen, mutta ajatus kohtaa kaiken – myös vektorit. Kun vektori kohtaa luvun, vektori syö luvun. Syödessään luvun vektori muuttuu yleensä eri vektoriksi. Luku-ravinto nimittäin vaikuttaa vektorin pituuteen: syöminen joko venyttää tai kutistaa vektoria. Syömisessä vektorin suunta ei muutu. Kun vektori-Viktoria syö luvun kolme, sen pituus kolminkertaistuu ja syntyvää vektoria sanotaan Viktoria-venytykseksi. Viktoria-venytyksiä on tietenkin yhtä paljon kuin lukujakin.

Vektorin pituuden muuttumisen kuvaamiseen riittää kaksi periajatusta: Kun vektori syö Ykkösen, vektorin pituus säilyy samana. Kun vektori syö ensin tietyn luvun ja sitten muuttunut vektori syö toisen luvun, lopputulos on sama kuin alkuperäinen vektori söisi puheena olevien lukujen tulon. Nyt jos vektori-Viktoria syö luvun 30, saadaan sama Viktoria-venytys, joka saataisiin, kun Viktoria söisi ensin luvun 3 ja syntynyt venytys söisi vielä luvun 10.

Näistä periajatuksista ja alempana esitetyistä ositteluista johtuu, että Ykköstä suuremman luvun syödessään vektori pitenee, Nollan ja Ykkösen välisen luvun syödessään vektori lyhenee sekä Nollan syödessään vektori muuttuu tyhjävektoriksi. Samoin voidaan päätellä, että kun vektori syö negatiivisen luvun, vektori muuttuu antivektorinsa suuntaiseksi eli vastakkaissuuntaiseksi. Tällöin venytys-vektorin pituus riippuu negatiivisen luvun itseisarvosta samaan tapaan kuin positiivisen luvun syönnissä. Esimerkiksi kun vektori-Viktoria syö luvun -1, se muuttuu Anti-Viktoriaksi.

Osittelu syömisessä ja lisääntymisessä

Jos vektori-Veron ja ja vektori-Hektor söisivät molemmat ensin luvun viisi ja sen jälkeen yhtyisivät, jälkeläinen olisi sama, jos Veronin ja Hektorin jälkeläinen söisi luvun viisi. Näin on yhdentekevää, syödäänkö ennen vai jälkeen lisääntymisen, kunhan syödään samaa! Tätä periaatetta sanotaan lisääntymisen ositteluksi.

Jos vektori-Viktori syö luvun seitsemän ja toisaalta luvun neljä ja näin saadut Viktori-venytykset yhtyvät, saadaan sama vektori, joka saataisiin Viktorin syödessä ainoastaan luvun yksitoista (4+7). Tämän syömisen osittelu -periaatteen mukaan lopputulos on aina sama riippumatta siitä, syödäänkö luku osissa (7 ja 4) vai kokonaisena (11) kerralla.

Tähän asti luetellut vektorien ominaisuudet määräävät vektoriavaruuden. Vektoriavaruudessa kaikki tapahtuu näihin periajatuksiin nojautuen.

Näin vektorit söivät, lisääntyivät ja täyttivät koko avaruuden.

Asemointi avaruuteen

Vektoriavaruus oli täydellinen ja niin täynnä vektoreita, että Katsojan oli vaikea hahmottaa tapahtumia. Katsoja havainnoi avaruutta ja havaitsi siinä ulottuvuudet. Tarkempaa tutkimista varten hän valitsi avaruudesta paikan.

Katsoja kiinnitti vektori-Viktorian valitsemaansa avaruuden paikkaan ja syötti Viktorialle kaikki mahdolliset luvut. Saatiin ääretön parvi erilaisia Viktoria-venytyksiä. Nämä venytykset olivat eripituisia, mutta kaikki Viktorian suuntaisia tai vastakkaissuuntaisia. Ne kaikki pidettiin samassa paikassa, jossa Viktoria sijaitsi. Tämä venytysten parvi määräsi avaruuteen Viktoria-suoran. Suora kulki Katsojan määräämän paikan kautta ja se oli yhdensuuntainen Viktorian kanssa. Suora oli ihmeellinen: se oli loputon, aluton ja sen suunta muuttumaton. Sellaista ihmettä ei muualta löydykään kuin vektoriavaruudesta! Viktoria-suora määräsi ensimmäisen ulottuvuuden.

Ensimmäisessä ulottuvuudessa on vain yksi ominaisuus, pituus. Kun vektori-Viktorialle syötetään ainoastaan tietyn lukuvälin luvut, saadaan Viktoria-suorasta rajattua pala, jolla on alku- ja loppupiste. Äärellistä suoranpätkää sanotaan janaksi. Näin vektorin avulla pystytään saamaan aikaan kaiken pituiset janat. Janalla on vain pituus, eli sillä ei ole mitään muotoa – sehän on osa suoraa. Näin ollen Katsojan oli jatkettava tutkimusta, sillä avaruuteen tarvitaan myös muotoja.

Vektori-Hektori oli erisuuntainen kuin Viktoria. Se tarkoittaa, että Hektorin suunta ei ole Viktorian eikä Anti-Viktorian suunta. Sen takia Hektori ei ole mikään Viktoria-venytys ja siksi sen määräämä Hektori-suora on eri suora kuin Viktoria-suora. Katsoja asetti Hektorin samaan paikkaan avaruudessa, jossa Viktoria oli. Hektori-suora määräsi avaruudesta toisen ulottuvuuden. Ensimmäinen ja toinen ulottuvuus eivät ulotu toisiinsa, mutta yhdessä ne määräävät avaruudesta kaksiulotteisen osan, tason. Viktoria- ja Hektori-suorat määräävät avaruudesta osan, joka on Viktoria-Hektori-taso. Taso on kuin levy, joka lepää puheena olevien suorien päällä. Tietenkin avaruuden taso on täydellisempi kuin mikä hyvänsä kuviteltavissa oleva levy: taso on reunaton, rajaton ja täysin tasainen. Lisää ihmeitä on olemassa – sellainen on taso!

Ulottuvuusvektorit

Kun valitaan mitkä hyvänsä Viktoria- ja Hektori-venytykset, annetaan niiden yhtyä ja asetetaan jälkeläinen valittuun paikkaan, niin tämä jälkeläinen on välttämättä Viktoria-Hektori-tasossa. Sama tapahtuu myös toisin päin: kaikki Viktoria-Hektori-tason vektorit saadaan, kun kaikki luvut syötetään Viktorialle ja Hektorille ja kaikki näin saadut venytykset yhtyvät keskenään. Taso onkin siten ulottuvuusvektorien, Viktorian ja Hektorin, venytysten jälkeläisten parvi. Näin kaksiulotteisen avaruuden osan kuvaamiseen riittää vain kaksi vektoria. Tällaisia vektoreita kutsutaan ulottuvuusvektoreiksi.

Kaksiulotteisessa avaruudessa on kaksi suuntaa, ulottuvuusvektorien suunnat, ja siten uusi ominaisuus: erisuuntaiset pituudet. Kaksiulotteisessa avaruudessa, eli tasossa, saadaan aikaan mitä hyvänsä muotoja. Ne syntyvät juuri erisuuntaisten pituuksien avulla. Ulottuvuusvektorien määräämät janat ovat erisuuntaiset. Kun nämä janat asetetaan alkamaan samasta paikasta, syntyy kulma. Kulma on muodoista yksinkertaisin. Kulman kärki on se paikka, joka on yhteinen kulman muodostaville janoille. Kulman muodostavia janoja sanotaan kulman sivujanoiksi. Kun kulman sivujanan siihen alkupäähän, joka ei ole kärki, asetetaan vielä uusi jana, saadaan murtoviiva. Näin saadussa murtoviivassa on kaksi kärkeä. Edellä kuvattu janan lisäys voidaan toistaa murtoviivalle. Näin saadaan murtoviivoja, joissa kärkiä on kuinka paljon hyvänsä. Murtoviiva on kuin monesta kohdasta katkeillut, muttei irtipoikki katkeillut, jana. Sikäli kun murtoviivan alku- ja loppupää yhdistyvät, eli ovat samassa paikassa, murtoviiva rajaa tasosta monikulmion. Yksinkertaisin monikulmio on kolmio.

Mikä hyvänsä murtoviiva, ja siten myös monikulmio, saadaan kahden ulottuvuusvektorin avulla sopivien lukuvälien syöttöjen ja yhtymisen lopputuloksena. Muotoja on myös monimutkaisempia.

Kun Viktorialle ja Hektorille syötetään molemmille sama Nollasta poikkeava luku ja nämä venytykset yhtyvät, saadaan Viktoria-Hektori-tason vektori. Kun edellä mainittu toistetaan kaikilla luvuilla ja syntyvät vektorit pidetään samassa paikassa, saadaan Viktoria-Hektori-tason suora. Edellä kuvattua kaikkien lukujen syöttöä kutsutaan seuraavassa sarjasyötöksi. Yleisemmin voidaan todeta, että kun molemmille ulottuvuusvektoreille sarjasyöttää saman luvun ja saadut venytykset yhtyvät, jälkeläiset muodostavat tason suoran.

Tason käyriä saadaan monimutkaisemmilla ulottuvuusvektorien sarjasyöttöprosesseilla. Seuraavassa sarjasyöttöprosessissa syntyy kauniisti kaartuva tason käyrä: Ensimmäiselle ulottuvuusvektorille syötetään tietty luku ja toiselle ulottuvuusvektorille syötetään aina edellä mainittu luku itsellään kerrottuna. Saadut venytykset yhtyvät ja saatu jälkeläinen pidetään paikallaan. Tämä toistetaan kaikilla luvulla. Nyt jälkeläisten parvi muodostaa loputtoman kaartuvan käyrän.

Vielä monimutkaisemmilla ulottuvuusvektorien sarjasyöttöprosesseilla voidaan tasoon saada esimerkiksi jälkeläisten parvi, joka määrää ympyrän!

Avaruus on rajaton

Katsoja jatkoi edelleen: Hän valitsi kolmannen ulottuvuusvektorin, Tektorin. Tektor ei ollut mikään Viktorian ja Hektorin jälkeläisistä eli sitä ei saada Viktoria- ja Hektori-venytysten jälkeläisenä. Tektor asetettiin valittuun paikkaan. Nyt valittu vektorikolmikko määrää kolme suoraa ja kolme tasoa: Viktoria-, Hektori- ja Tektori-suorat sekä Viktoria-Hektori-, Viktoria-Tektor- ja Hektori-Tektor-tasot. Kun Viktoria, Hektori ja Tektor yhtyvät, saadaan jotain uutta: jälkeläinen ei ole millään edellä mainituista suorista tai tasoista. Se on uudessa ulottuvuudessa, kolmiulotteisessa tilassa. Kolme ulottuvuusvektoria määräsivät kolmiulotteisen tilan, jonka jokainen vektori voidaan saada siten, että syötetään ensin tietyt luvut Viktorialle, Hektorille ja Tektorille ja annetaan sitten näiden kolmen venytyksen yhtyä. Tässä yhtymisjärjestyksellä ei ole merkitystä, kuten aiemmin todettiin.

Näin riittää, että Katsoja tarkastelee vain kolmea vektoria. Näiden avulla hän hallitsee äärettömän määrän kolmiulotteisen tilan vektoreita. Nyt Katsojan havainnot olivat selkeitä ja hän hahmotti kolmiulotteisen tilan tapahtumat ja muodot.

Kuitenkin Katsoja voi vielä jatkaa tästäkin. Voidaan valita neljäs ulottuvuusvektori. Pitää kuitenkin varmistua siitä, ettei uusi ulottuvuusvektori ole Viktorian, Hektorin ja Tektorin jälkeläinen. Tällöin saatu neliulotteinen avaruus hallitaan täysin neljällä vektorilla. Kuinka paljon muotoja onkaan neliulotteisessa avaruudessa!

Ulottuvuusvektoreita voidaan valita kuinka monta hyvänsä. Aina pystytään täyttämään koko avaruus syöttämällä ja lisäännyttämällä keskenään ulottuvuuksien määrää vastaava vektorijoukko. Vektoriavaruudesta eivät ulottuvuudet lopu.

Lähteet

`https://fi.wikipedia.org/wiki/Vektoriavaruus`