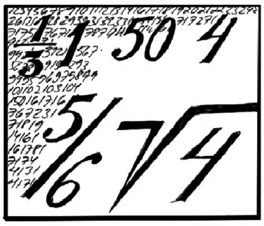

Juuso peruskoulussa

Markku Sointu
Soppeenharjun koulu

Ensimmäinen oppitunti: lukujoukot ja laskutoimitukset

Tunnin aihe: lukujoukot, vastaluku, itseisarvo, yhteen- ja vähennyslasku negatiivisilla luvuilla.

Lehtori Laulunen oli pyytänyt Juuson sijaiseksi yläkouluun. Juuso tunsi itsensä norsuksi posliinikaupassa. Juuso ei ollut tavannut peruskoululaisia sen jälkeen kun oli itse sieltä lähtenyt ja silloinkin hän oli ollut vain valikoidun kaveriporukan kanssa. Silti hän ei epäröinyt suostua.

”Oppilaat ovat aina innoissaan, kun tapaavat nuoren opettajan. Käytä tätä innostusta,” valisti Laulunen.

Juuso oli astunut seiskaluokan eteen ja aloittanut: Tänään puhumme lukujoukoista.

”Mihin semmoisia tarvitaan?” kysyi nuorimies nimeltään Jere teinipojan römeällä äänellään.

”Kysymyksesi on erinomainen. Koulussa ei kannata tuhlata aikaa hyödyttömän tiedon pänttäämiseen. Onneksi sellainen on jäänyt aikaa sitten. Voimme siis keskittyä vain oleelliseen.”

Ensimmäinen lukujoukko on luonnollisten lukujen joukko. Niitä merkitään $\mathbb{N}$:llä ja ne ovat luvut 0, 1, 2, 3, 4, … Ja nyt Jere ja kumppanit, miksi nämä luvut ovat niin tärkeitä. Niitä tarvitsevat kaikkien ammattien harjoittajat. On todettu, että niitä on luonnonkansoillakin, siis ihmisillä, jotka elävät hyvin alkeellisissa olosuhteissa.” Luokka oli vielä alkujännityksen vallassa, joten Juuso auttoi, mihin lampaita paimentamassa oleva tyttö tai poika tarvitsee luonnollisia lukuja.

”Voidakseen laskea, kuinka monta lammasta hänellä on,” tuli pienen miettimisen jälkeen monesta suusta.

”Oikein,” Juuso totesi. ”Miksi tämä tieto on tärkeä?”

”Paimenen täytyy tietää, häviääkö lampaita. Pedot voivat viedä niitä,” päätteli Henriikka.

”Taas oikein.”

”Lampaat voivat myös lisääntyä,” Jere puhkui.

”Juurikin näin. Siksi tarvitsemme merkit $<$, $>$ ja $=$. Luonnollisilla luvuilla ilmoitetaan määrä. Se voi olla suurempi, pienempi tai yhtä suuri kuin aikaisemmin laskettu.”

Seuraava lukujoukko on $\mathbb{Z} = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Siinä ovat mukana kaikki luonnolliset luvut, mutta niiden lisäksi negatiivisia lukuja. ”Mihin niitä tarvitaan?” Juuso kysyi.

”Lämpötilan ilmaisemiseen,” vastasi luokka yhdestä suusta.

”Niitä käytetään lämpötiloihin. Se on totta. Mutta nyt kysyn, mihin niitä tarvitaan välttämättä. Miinusasteet Celcius-asteikolla ilmaisevat veden jäätymisen, mutta välttämätöntä tämä ei olisi. Lämpö on hiukkasten liikettä, eli jos lämpöliike on täysin pysähtynyt, ollaan lämpötilassa, jota kylmempää ei voi olla. Mikä on sopiva luku ilmaisemaan asiaa, jota ei ole?”

”Nolla.”

”Eli miinusluvuista on hyötyä lämpötiloja ilmaistaessa, mutta välttämättömiä ne eivät ole. Miettikää siis asia, mitä ei voi ilmaista ilman negatiivisia lukuja.” Luokka hiljeni miettimään.

Juuson piti auttaa: ”Miettikää pankkitiliä.”

”Velka!” ”Pankkitili voi olla plussalla tai miinuksella,” Henriikka tiesi.

”Itse asiassa velka on juuri syy, miksi negatiiviset luvut keksittiin,” kertoi Juuso.

”Negatiiviset luvut ovat matematiikan historiassa varsin uusi keksintö. Seuraava lukujoukko on ollut käytössä paljon ennen negatiivisia lukuja. Minkähänlaisista luvuista on kysymys?”

”Murtoluvuista,” vastattiin monella suulla.

Niinpä taululle ilmestyi $\mathbb{Q}$. Murtoluvuilla on myös hienompi nimi rationaaliluvut. Nyt määritelty on siis joukot

$$\begin{aligned}&\mathbb{N} \text{ eli luvut, joilla ilmoitetaan lukumäärä}\\&\mathbb{Z} \text{ luvut, jotka sisältävät negatiiviset luvut}\\&\quad \text{ja mahdollistavat velan ilmoittamisen}\\&\mathbb{Q} \text{ murtoluvut.}\end{aligned}$$

”Mitä luvuilla tehdään?” Juuso kysyi ja sai vastauksen saman tien: lasketaan.

”Alakoulussa olette jo oppineet laskutoimitukset: yhteen- ja vähennyslasku, kerto- ja jakolasku. Lähdetään taas liikkeelle luonnollisista luvuista. Yhteen- ja kertolaskulla on ominaisuus, jota ei ole vähennys- ja jakolaskulla. Mistä ominaisuudesta on kysymys?”

”Yhteen- ja kertolaskussa vastaus kasvaa,” vastattiin aivan kuin Juuso arveli. Niinpä hän korjasi heti $2+0 = 2$ ja $2 \cdot 0 = 0$, eli luku ei kasva välttämättä, kun siihen lisätään tai se kerrotaan luonnollisella luvulla. ”Mutta mitä voidaan varmuudella sanoa yhteen-ja kertolaskusta kaikissa tapauksissa?”

Tämä kysymys sai oppilaat pohtimaan tovin pitempään, kunnes Henriikka keksi. Kerto- ja yhteenlaskun tulos oli aina luonnollinen luku. Mutta $3 - 4$ ei ollut eikä liioin $\frac{3}{4}$.

”Voidaksemme jatkaa meidän täytyy laajentaa matemaattista tietämystä,” Juuso jatkoi. ”Itseisarvolla tarkoitetaan luvun etäisyyttä nollasta. Luvun 7 itseisarvo on 7 ja luvun -3 itseisarvo on 3. Vastaluvulla puolestaan tarkoitetaan lukua, joka on yhtä kaukana luvusta nolla kuin luku itse, mutta nollan toisella puolella. Luvun 7 vastaluku on näin -7, ja luvun -3 vastaluku on 3.”

”Harjoitellaan seuraavaksi yhteen- ja vähennyslaskua, kun laskussa on mukana negatiivisia lukuja. Sitä varten tarvitsemme pistepotin, jonka arvoa lähdemme laskemaan. Saatte valita minkä tahansa luvuista -5, -4, -3, -2, -1 tai 1, 2, 3, 4, 5. Kirjoitan niitä taululle sitä mukaa kun luettelette lukuja.”

Pian oli taululle ilmestynyt jono

$$3, -2, -4, 1, 5, 5, -3, -5, 2, -4,$$

ja Juuso keskeytti lukujen kirjoittamisen välilaskun ajaksi. Pistepotin arvo oli näin $(3+1+5+5+2)-(2+4+3+5+4)$. Kun pluspisteisiin lisättiin miinuspisteet, saatiin potin arvoksi -2. Seuraava henkilö halusi lisätä pottiin luvun $+3$. Juuso kirjoitti $-2+(+3) = -2+3 = 1$. Pistepotin arvo nousi, kun siihen lisättiin pluslukuja. Seuraava oppilas halusi lisätä miinuspisteitä eli luvun -4. Nyt taululle kirjoitettiin $1 + (-4) = 1 - 4 = -3$. Pistepotin arvo laski tietenkin, kun siihen lisättiin miinuslukuja.

Juuson laatimien pelisääntöjen mukaan potista oli myös mahdollista poistaa sinne laitettuja lukuja. Kun alkuperäisen jonon ensimmäinen luku $+3$ poistettiin, saatiin $-3 - (+3) = -3 - 3 = -6$. Kun potista poistettiin positiivinen luku, potin arvo laski. Toisen luvun -2 poistaminen kirjoitettiin $-6-(-2) = -6+2 = -4$. Negatiivisen luvun poistaminen nosti potin arvoa.

Juuson opetus oli, että laskutoimitukset $3 + (-4)$ ja $3 - (+4)$ antoivat saman vastauksen, mutta tarkoittivat eri asiaa. Toisessa lisättiin miinuspisteitä ja toisessa vähennettiin pluspisteitä.

Oli aika selvittää, mitä tarkoitettiin kertolaskulla.

$$\begin{aligned}&3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12\\&3 \cdot (-4) = -4 + (-4) + (-4) = -12\end{aligned}$$

Tulon ensimmäinen luku kertoi, kuinka monta kertaa toinen luku otettiin. Mitä siis tarkoitti $-3 \cdot 4$? Nyt miinusmerkki $-$ luvussa tarkoitti luvun $3 \cdot 4$ vastalukua

$$-3 \cdot 4 = -(4 + 4 + 4) = -12$$

ja vastaavasti luvun $3 \cdot (-4)$ vastaluku oli

$$-3 \cdot (-4) = -(-4 + (-4) + (-4)) = -(-12) = 12$$

Oppilaat olivat näin oppineet, mitä tarkoitettiin ja mihin tarvittiin

- luonnollisia lukuja,
- kokonaislukuja,
- rationaalilukuja.

Lisäksi heille oli kerrottu merkintöjen $<$, $>$ ja $=$ tarpeellisuudesta ja esitetty itseisarvon ja vastaluvun käsitteet.

Toinen oppitunti: alkuluvut

”Ota esimerkki, mikäli suinkin mahdollista, oppilaiden arjesta. Tehtävä saa sisältää kohtia, joita oppilaat eivät vielä osaa ratkaista. Näin päästään tilanteeseen, jossa on ongelma, joka selvästi vaatii lisätietoa. Näin menetellen vältytään esittämästä asia teoreettisesti ilman käytännön ongelmaa. Oppilaiden tai kenen tahansa matematiikkaan tutustuvan tulisi mahdollisimman nopeasti tietää ainakin yksi käytännön ongelma, johon käsiteltävää asiaa voidaan soveltaa.” Nämä Laulusen sanat mielessään Juuso asteli seiskaluokalle puhumaan alkuluvuista.

”Juoksitte tänään koulun pihassa olevaa pallokenttää ympäri. Kyseessä oli liikunnan opettajan mukaan Cooperin testi. En ole kuitenkaan nyt kiinnostunut, kuinka paljon kukin juoksi. Radan ympäri juoksemiseen liittyy mielenkiintoista matematiikkaa. Oletetaan, että juoksijat lähtevät kierrokselle samaan aikaan samasta paikasta samaan suuntaan. Tarkastellaan kahta juoksijaa A ja B. A juoksee kierroksen 60 sekunnissa ja B 90 sekunnissa. Milloin he kohtaavat uudestaan samassa paikassa samaan aikaan?”

Koska luvut oli tarkoituksella valittu helpoiksi, oli vastaus nopeimmilla laskijoilla pian selvillä. 180 sekunnin eli kolmen minuutin kuluttua oli nopeampi juossut tasan kolme ja hitaampi tasan kaksi kierrosta. Mutta miten kohtaamispaikka laskettaisiin, jos kierrosajat olivat olleet 51 sekuntia ja 85 sekuntia?

Tämän tehtävän ratkaiseminen edellytti valmisteluja. Piti selvittää käsitteet alkuluku ja pienin yhteinen jaettava eli p.y.j.

”Viime tunnilla tutustuimme luonnollisiin lukuihin. Ne ilmaisevat määrän. Mietitään nyt, mitkä luvut ovat välttämättömiä ja mitkä vain hyödyllisiä. Tehtävänä on ilmaista kaikki lukumäärät. Mikä luku siis tarvitaan, jos sovitaan, että lukumäärä ei ole 0?”

1, 2 ja 3 ilmoitettiin nopeasti ja Juuso kirjoitti ne taululle. ”Mikä on seuraava luku, joka tarvitaan?” kysyi Juuso ja sai kuin saikin vastaukseksi luvun 4. Näin hän pääsi sanomaan: ”Luku 4 on hyödyllinen, mutta ei välttämätön. Se voidaan ilmaista 2:lla kakkosella.”

”Pelataan nyt seuraavaa peliä. Teidän tulee laatia kortteja, joissa on välttämättömiä lukuja. Eli lukuja, joita ilman ei kaikkia lukumääriä pysty esittämään. Luvun saa esittää vain keskenään yhtä suurten ykköstä suurempien kokonaislukujen summana, paitsi luvun 1 voi tietysti esittää vain itsensä avulla. Rajataan luvut yhdestä 32:een. Kun kortit ovat valmiit, katsotaan kuka selviää lukujen 1–32 ilmaisemisesta vähimmällä määrällä kortteja. Kortteja tarvitsevat lukumäärät 1, 2, 3, 5 jne., mutta nyt tulee myös miettiä, kuinka monta kutakin välttämätöntä korttia tarvitaan.” Oppilaat ryhtyivät työhön. Tehtävä oli mielenkiintoinen. Välttämättömien lukujen päättely onnistui varsin helposti.

1 tarvitsee kortin
2 tarvitsee kortin
3 tarvitsee kortin
4 saadaan kahdella kakkosella, eli tehdään yksi kakkonen lisää
5 tarvitsee kortin
$6 = 2 \cdot 3$ tai $3 \cdot 2$. Kannattiko nyt tehdä yksi kakkonen lisää vai yksi kolmonen lisää? Eri oppilasryhmät valitsivat toiset 3 kakkosta ja toiset kaksi kolmosta.
7 tarvitsee uuden kortin
$8 = 4 \cdot 2$ eli yksi tai kaksi kakkosta lisää
$9 = 3 \cdot 3$ eli yksi tai kaksi kolmosta lisää
$10 = 2 \cdot 5$
11 tarvitsee oman kortin
$12 = 6 \cdot 2$ eli tarvitaan lisää kakkosia

Nyt oli syytä pysähtyä pohtimaan. Tärkeä kysymys oli, kuinka monta kakkosta tarvittaisiin. Niiden määrä oli ratkaistava ensin. Minkälainen luku vaatisi paljon kakkosia?

Luokka hiljeni, mutta Henriikka tiesi (tietenkin): luku, joka sisälsi pelkkiä kakkosia eli 2 potenssiin viisi. Kakkosia tarvittiin siis 16. Seuraavaksi piti tietenkin miettiä, montako kolmosta tarvittaisiin. Sen määräsi luku 27. Siitä ei selviäisi ilman yhdeksää kolmosta. Seuraava kriittinen luku oli $25 = 5 \cdot 5$. Se kertoi, että viitosia tarvittiin viisi.

13 vaati oman kortin
$14 = 7 \cdot 2$
$15 = 5 \cdot 3$ tai $3 \cdot 5$, eli ei tarvita uusia kortteja
$16 = 8 \cdot 2$
17 vaati oman kortin
$18 = 9 \cdot 2$
19 vaatii oman kortin
$20 = 10 \cdot 2$
$21 = 7 \cdot 3$, tästä selvitään kolmosilla (niitä on 9 kappaletta)
$22 = 11 \cdot 2$
23 tarvitsee oman kortin
$24 = 12 \cdot 2$
$25 = 5 \cdot 5$
$26 = 13 \cdot 2$
$27 = 9 \cdot 3$
$28 = 14 \cdot 2$
29 tarvitsee oman kortin
$30 = 15 \cdot 2$
31 tarvitsee oman kortin
$32 = 16 \cdot 2$

Luvut, jotka tarvittiin, olivat siis

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.$$

Osalla oppilaista luvut olivat oikein, jonkun riviin oli pujahtanut luku, joka voitiin esittää ilman omaa korttia, ja joltain puuttui joku välttämättömistä luvuista.

Pohtiminen oli kuitenkin sujunut hienosti ja virheet oli helppo tunnistaa. Koska eri lukujen kohdalla saattoi tehdä erilaisia valintoja, esimerkiksi täytyi päättää, olisiko luku viisitoista $3 \cdot 5$ vai $5 \cdot 3$, oli eri oppilailla eri määrä kortteja. Niinpä Juuso laati yhteenvedon. Tarvittiin

16 kakkosta
9 kolmosta
5 viitosta
1 seiska
1 yksitoista
1 kolmetoista
1 seitsemäntoista
1 yhdeksäntoista
1 kaksikymmentäkolme
1 kaksikymmentäyhdeksän
1 kolmekymmentäyksi

Luvut, joita ilman ei voinut ilmaista kaikkia lukumääriä, olivat alkulukuja. Korttien määrä oli näin $16+9+5+$ alkulukujen määrä alkaen luvusta 7 lukuun 31, mikä oli 8.

Lukuun 32 liittyi siis luku 38. Se kertoi, montako numerokorttia vähintään tarvittiin, jotta voitiin ilmaista kaikki lukumäärät väliltä 1–32. Vaikka alkuluvut riittivät kaikkien lukumäärien ilmaisemiseen, olivat eivälttämättömätkin luvut hyödyllisiä. Niiden avulla selvittiin 32:lla kortilla, joka oli vähemmän kuin 38.

Juuso huomasi samalla, että tutustuminen alkulukuihin oli poikinut mielenkiintoisen sivutuotteen. Aritmeettisen funktion $A(n)$. Se kertoi, kuinka monta korttia tarvittiin. Esimerkiksi $A(32) = 38$. Puhumatta aritmeettisista funktiosta (vaikka Henriikka olisi varmasti ymmärtänyt) Juuso antoi oppilaille tehtäväksi selvittää, montako korttia lisää tarvittiin, jos n olisi 50. Jos $n = 50$, on mukana $7 \cdot 7 = 49$ eli seiskoja tarvittiin kuusi lisää. Luku 33 vaati lisää kolmosia tai kortteja, joissa oli yksitoista, sillä $11 \cdot 3 = 33$ eli tarvittaisiin lisää kaksi kolmosta. Nyt piti pohtia, olisiko järkevämpää ottaa lisää kortteja, joissa oli yksitoista. Jälkimmäinen tuntui viisaammalta, koska $44 = 4 \cdot 11$. Lisäys oli näin kolme yhtätoista.

$34 = 17 \cdot 2$. Taas saattoi valita, ottaisiko lisää yhden kakkosen vai yhden seitsemäntoista.
$35 = 5 \cdot 7$ ei aiheuttaisi ongelmaa, koska seiskoja oli otettu jo 7, että saatiin luku 49.
41 tarvitsi uuden kortin
$42 = 6 \cdot 7$
43 tarvitsi uuden kortin
$44 = 4 \cdot 11$
$45 = 9 \cdot 5$, tarvittiin lisää viitosia 4 kappaletta.
$46 = 2 \cdot 23$, lisättiin siis yksi kaksikymmentäkolme.
47 vaati uuden kortin
$48 = 24 \cdot 2 = 16 \cdot 3$, joten tarvittiin lisää kakkosia tai kolmosia. Kakkosia oli nyt 16 tai 17, ja korttien lisäys oli 8 tai 7. Kolmosia oli tähän mennessä 9, koska $27 = 9 \cdot 3$. Ottamalla 7 kolmosta lisää saatiin $16 \cdot 3 = 48$. Lukuun 48 liittyi siis lisäys 7.
$49 = 7 \cdot 7$
$50 = 25 \cdot 2$, tästä selvittiin ottamalla kakkosia tai viitosia lisää.

Juuso päätti laskelmansa huolestuneena. Oliko tehtävä liian vaikea? Pelko osoittautui turhaksi. Lähes kaikki oppilaat saivat jonkinlaisen määrän kortteja, jolla tehtävästä selvittiin. Ongelmalliseksi tehtävä muuttuisi vasta, jos täytyisi löytää minimi ja osoittaa saatu luku minimiksi.

Oppilaathan kilpailivat siitä, kuka selviää vähimmällä määrällä kortteja. Se tarjosi tekemistä ja harjoitti kertolaskutaitoa. Juuso jäi kuitenkin pohtimaan, miten funktio $A(n)$ toimi. Hänet keskeytti kuitenkin laiskan, mutta terävän oloinen nuori mies Kasper nimeltään.

”Eikös tää oo vähän turhaa hommaa, jos alkulukuja käytettäessä lukumäärään 32 asti tarvitaan 38 korttia? Eiks olis järkevämpää käyttää lukuja 1–32? Silloinhan selvittäisiin 32 kortilla.”

”Good point,” kuittasi Juuso nopeasti. ”Mutta alkuluvuista on hyötyä. Palataanpa juoksuratatehtävään.”

Jos haluamme selvittää, milloin nopeampi saavuttaa hitaamman lähtöpaikalla, meidän on löydettävä lukujen 51 ja 85 pienin yhteinen jaettava = p.y.j.

$$51 = 3 \cdot 17$$
$$85 = 5 \cdot 17,$$

joten $\text{p.y.j}(51, 85) = 3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$. Juoksijat kohtaavat nopeamman kierrettyä 5 ja hitaamman 3 kierrosta. P.y.j saadaan esittämällä tutkittavat luvut alkulukujen tulona ja ottamalla vastauksen kertovaan tuloon niin monta alkulukua kuin on sillä rivillä, missä niitä on eniten.