

## Italiasta ei löytynyt mafiaa – kiinnostavaa matematiikkaa kylläkin

*Milja Krés, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare, Essi Vilhonen*

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset, tuttavallisemmin EGMO, järjestettiin 9.–15.4. Italian Firenzessä. Kerromme aluksi hieman matkasta yleisesti, sitten erittelemme kilpailun herättämiä ajatuksia ja lopuksi tarkastelemme kunniamainintojakin kerännyttä ensimmäistä tehtävää tarkemmin.

### Matkamuistoja

#### Miltä lähteminen EGMO:on tuntui? Jännittikö?

**Veera:** Kilpailut jännittivät hieman, sillä minulla ei ollut ennen EGMO:a paljoa kokemusta matematiikkakilpailuista. Jännitys ei ollut kuitenkaan liiallista ja lähdin kilpailuihin innoissani.

**Milja:** Olo oli jokseenkin epätodellinen, enkä osannut edes arvata, mitä seuraava viikko toisi eteeni. Ehdottomasti jännitti. Vasta lentokoneessa kykenin jotenkin hengittämään rauhallisesti.

**Nerissa:** Kilpailut jännittävät aina. Kuitenkaan ei liikaa hermostuttanut, joten hyvillä mielin sinne meni.

**Essi:** Lähtöä edeltänyt valmennusviikonloppu teki hyvää taisteluhengelle :). Lähdin matkalle oikein mielelläni.

#### Millainen Firenze oli kaupunkina?

**Veera:** Firenze on kaupunkina ja historialtaan hieno. Kaupungin vanha keskusta on kaunis arkkitehtuuriltaan ja idyllinen.

**Milja:** Firenze tuntui alusta alkaen enemmän ihasuttavalta pikkukylältä kuin suositulta turistikohteelta, johtuen varmaan runsaasta kasvillisuudesta ja värikkäistä taloista. Tokihan siellä oli runsaasti väkeä ympäri viikon, jopa ruuhkaksi asti. Sateella vähän vähemmän.

**Nerissa:** Tuntui normaalilta sen aikaiselta kaupungilta.

**Essi:** Aika viihtyisä: pikkukujia, kaunista arkkitehtuuria, joki, mäkiä...

#### Mielenkiintoisimmat nähtävyydet

**Veera:** Pisan kalteva torni on turistiryynnistyksestä huolimatta vaikuttava. Myöskin Firenzen Ponte Vecchio on mieleenjäävän kaunis.

**Milja:** Rakastin kaikkia niitä hienoja ja ruhtinaallisen näköisiä kirkkoja, joita Italia on täynnä. Firenzessä niitä oli jopa kolme, joista tosin vain yhdessä pääsimme vierailemaan sisäänpääsymaksujen vuoksi. Luccan kirkko San Michele in Foro oli kuitenkin oma suosikkini

(vaikka hukkasimme siellä oppaamme...), ja suosittelun paikkaa lämpimästi kaikille.

**Nerissa:** Luccan keskiaikainen muuri oli hieno. Se oli suurimmaksi osaksi omaksuttu puistoksi.

**Essi:** Scuola Normale Superiore di Pisa. Harvoja Italian valtiollisia yliopistoja; jäätävän kovatasoinen. Kiinnostavinta oli kuitenkin paikan historia: ainakin jotkut Medicit taisivat tallustella siellä päin. Toisen kisapäivän jälkeen kiipesimme Firenzen vieressä kohoavalle mäelle, jossa muiden muassa kaupungin hallitsijat olivat aikoinaan lomailleet. Maisemat olivat hienot.



*Joukkue ekskursiolla aurinkoisessa Pisassa. (Kuva: Essi)*

## Tapahtumat

**Veera:** Aloituseremonia, samoin kuin lopetuseremonia, järjestettiin hienossa teatterissa, Teatro Verdissä. Teatteri on muuten rakennettu 1500-luvulta olevan vankilan paikalle. Aloituseremonia oli tunnelmaltaan sopivan arvokas, mutta rento. Aloituseremonia sisälsi monia vitsejä ja joukkueparaatin, jossa kaikkien maiden joukkueet esiteltiin ikäjärjestyksessä vanhimista nuorimpiin. Keski-ikältään nuorin joukkue oli Perun joukkue, joukkuelaisten keski-ikä oli ainoastaan 14 vuotta 10 kuukautta!

**Milja:** Viimeisenä päivänä järjestettiin luonnollisesti vuoden 2018 EGMO:n lopetuseremonia. Palkintojenjaon lisäksi illan viihteestä vastasi La Disturbanda -yhtye, joka esitti meille varsin erikoisen sekoituksen musiikkia ja lavakomiikkaa. Seremonian jälkeen kaikki henkilökuntaa myöten suuntasivat Palazzo Borgheseen syömään. Paikka oli uskomattoman kaunis, ja tuntui ihan kuninkaalliselta istua siellä, vaikkakin ruokana oli lähinnä leipää ja pastaa.

**Nerissa:** Joukkuekilpailussa kaksi joukkuetta yhdistettiin yhdeksi joukkueeksi ratkaisemaan 120 minuutin aikana matematiikan tehtäviä, joilla oli aina kokonaisluku vastauksena. Me olimme Norjan joukkueen kanssa. Kilpailu oli leikkihenkinen ja mukava, tosin ulkona oli liian hyvä sää sisällä olemiseen.

**Essi:** Aarrehajdissa vietimme ensimmäisen kokeen jälkeisen iltapäivän raikkaassa tihkusateessa kaupungilla. Erilaiset pienet tehtävät tutustuttivat meidät oppaamme johdolla Firenzeen, sen nähtävyyksiin ja historiaan. Esim. tunnistimme patsaista kuuluisia heppuja.

## Huomioita paikallisesta ruokakulttuurista

**Veera:** Enimmäkseen hotellissa syömämme ruoka sisälsi perinteisiä italialaisia ruokia eri puolilta Italiaa. Jokaisella lounaalla ja päivällisellä oli tietenkin tarjolla pastaa ja välillä risottoa ja pitsaa, mutta yleensä myös juusto-kinkku-valikoimia, hedelmiä ja erilaisia perinteisiä italialaisia ruokia, mozzarella-tomaattiyhdistelmää unohtamatta. Ruoka oli ihanan puhtaan ja luonnollisen makuista. Aurinkoisina ja hieman sateisenkin päivinä italialainen jäätelö, gelato, oli todella herkullista. Gelatokauppoja oli todella paljon, käytännössä lähes jokaisella keskustan kadulla oli yksi sellainen.



*Jäätelöä tietysti. Koska Italia. (Kuva: Milja)*

**Milja:** Ruoka Italiassa näytti yhtä aikaa todella tutulta ja täysin tuntemattomalta, enkä vieläkään ole ihan varma, mitä kaikkea tulin suuhuni pistäneeksi. Pizzalla kävimme ainoastaan kerran, vaikka kadut tuntuivatkin hukkuvan erilaisiin pizzerioihin. Ja noh, mitäs siitä nyt

sanoisi. En ole aikaisemmin törmännyt kesäkurpitsoihin tai nakkipaloihin pizzaa syödessäni.

**Nerissa:** Siellä oli paljon hedelmiä ja pastaruokia. Maitoallergian kanssa epäilin jääväni ilman pitsaa, mutta pitseria onnistui yllättämään herkullisella vegaanipitsallaan.

**Essi:** Hotellista sai veriappelsiineja. Ja sitruunapaloja. Ja veriappelsiineja.

### Millaista itse kilpailussa oli?

**Veera:** Vaikka itselläni kilpailut eivät niin hyvin menneetkään, olivat tehtävät todella hyvää ja mielenkiintoista pohdittavaa. Ne kannustivat myös harjoitteluun lisää.

**Milja:** Olihan kilpailu viihdyttävä ja palkitseva, vaikkei pisteitä juurikaan tullut. Hieman eri tasoa kuin ylioppilaskirjoituksissa, heh...

**Nerissa:** Kilpailu oli hyvin järjestetty ja tehtävät veivät mukaansa pohtimaan.

**Essi:** Eikö olisikin tylsää, jos tehtävät olisivat triviaaleja? Sai niistä ainakin mukavasti ajateltavaa koko yhdeksäksi tunniksi.

### Sosialisoituminen

**Veera:** Vaikka EGMO olikin kilpailu, oli tärkeä osa sitä myös muihin kilpailijoihin tutustuminen, jota auttoi muun muassa joukkuekilpailu, monipuolista tekemistä sisältävä pelihuone sekä ekskursiot.

**Milja:** Ihmiset olivat ihanan avoimia, eivätkä pelänneet jutustelua. Minulle jäi erityisesti mieleen se, kun päätimme Essin kanssa jakaa ylijäämäkeksimme muiden maiden edustajille. Oli ihanaa nähdä viimeistä kertaa ihmiset hymyilemässä!

**Nerissa:** Erinäköisten aktiviteettien yhteydessä tuli puhuttua muiden kilpailijoiden kanssa. Yhteyksien luominen on merkittävä osa tällaista kilpailua.

**Essi:** Tapahtuma oli lämminhenkinen, ja oli mukava tutustua muihin kilpailijoihin esimerkiksi palapelien äärellä.

### Mikä jäi erityisesti mieleen?

**Veera:** Kilpailut olivat todella hyvin järjestetyt. Olsi todella upeaa päästä, jos mahdollista, uudestaan. Myöskin EGMO-tavarat olivat hauskoja, en ennen ollut nähnyt joulupallon ja reppukoristeen sekoitusta, jonka sisällä on sadetakki.

**Milja:** Kaikkihan reissussa oli aivan mahtavaa, mutta ehdottomasti eniten jään kaipaamaan erinomaista Suomi-klikkiämme. En todellakaan kadu osallistumista, olisi varmaan pitänyt paeta vielä kun voi ja muuttaa asumaan jonkin Luccalaisen sillan alle. Unohtumaton viikko!

**Nerissa:** Mieleen jäi se, kun piti mahduttaa kaikki saamamme EGMO-logoiset tavarat kassiin...

**Essi:** Meillähän oli ainakin tosi hyvä yhteishenki. Järjestäjät olivat tietysti nähneet tajuttomasti vaivaa esimerkiksi EGMO-kirjaseen kokoamisessa; kaikki sujui ja hauskaa oli.



*Firenzelaisiä maisemia. (Kuva: Essi)*

### Ajatuksia tehtävistä

Milja Krés

Kun meitä pyydettiin kirjoittamaan Solmuun artikkeli vuoden 2018 EGMO:sta, oli toiveena jonkin syväanalyysi erityisesti tämän vuoden kilpailutehtäviä koskien. Kuudesta ongelmasta yhden Suomi onnistuikin ratkaisemaan, jopa kaksinkertaisesti.

Mutta entä sitten ne tehtävät, joista hikisen taistelun jälkeen jäi käteen vain pari vaivaista pistettä? En heikohkosta kilpailumenestyksestämme huolimatta halunnut menettää mahdollisuutta matematiikasta jaaritteleluun, vaan päädyin kertomaan asiamme hieman tavallisesta poikkeavasta näkökulmasta: epäonnistumisen näkökulmasta.

Okei, ehkei epäonnistuminen ole tähän tilanteeseen oikea termi. Vaikka kukaan meistä ei päihittänyt Ukrainaa eikä Venäjää, ei se suoranaisesti tee meistä epäonnistujia. Lähtökohdat huomioon ottaen onnistuimme kukin tavallamme. EGMO 2018 saattoi olla meille ylivoimainen, mutta myös hyvin opettavainen ja todellakin sen arvoinen. Kuten joukkueemme johtaja totesi,

tehtävistä erottui kivulias yrittäminen, ja omasta mielestäni se on tavallaan hyvä syy tuntea ylpeyttä tämän vuotista joukkuettamme kohtaan.

Toisaalta epäonnistumiseen voi aina varautua. Olen tämän vuoden tehtävien valossa tarkastellut muutamia tärkeitä asioita. Toivottavasti ne edes hieman avaavat, miten paljon matematiikasta itsestään poikkeavia seikkoja kilpailumatematiikkaan suuntautuneen on syytä muistaa ja ottaa huomioon.

**Valinnat.** Enkä tarkoita sitä, että valitsisi jotenkin väärin. Tietysti on sellaisia päätöstilanteita, joissa jokin valinta on täysin absurdi ja vältettävä parhaansa mukaan, mutta matkansa aikana kukin tulee kohtaamaan runsaita määriä täysin viattomalta vaikuttavia valintoja. Haluanko jäädä tekemään yksin palapelejä vai mennä pelaamaan lautapelejä? Keskitynkö tehtävään 1, 2 vai sittenkin 3? On vaikea tietoisesti välttää tekemästä huonoihin lopputuloksiin johtavia valintoja, joten en erikseen edes halua kehottaa ketään valitsemaan oikein. Enemminkin suurin virhe, jonka voi tehdä, on jättää valitsematta.

Koska valintoja oli tehtävä, teimme kukin omamme. Yksi meistä valitsi uhrata aikansa yhdeksänkymmentäprosenttisesti ainoastaan geometriatehtäviin, itse päätin jättää ne koskemattomiksi oman kiinnostukseni suuntautuessa tehtäviin 3 ja 6. Mietin muutaman keran viikon jälkeen, olisinko saanut pisteitä, jos olisinkin valinnut panostaa geometriaan? Totesin, että mahdollista. Mutta olisinko nauttinut koetilaisuudesta yhtä paljon?

Niinpä.

**Kysymykset.** Itselleni tuli yllätyksenä EGMO:ssa valitseva systeemi, jossa ensimmäisen puolen tunnin aikana johtajille saa lähettää kokeeseen liittyviä kysymyksiä esimerkiksi epäselvästä termistöstä tai mahdollisista painovirheistä. En itse käyttänyt mahdollisuutta hyödyksi, mutta olisi ehkä pitänyt. Tehtävän 6 suhteen minulla oli nimittäin varsin suuria ymmärrysvaikeuksia. Lopulta käytin peräti 3,5 h etsiessäni  $n:n$  arvon, joka pystyisi ratkaisemaan epäyhtälön kaikilla  $t:n$  arvoilla – eikä se ollut kuulemma tarkoitus. Vielä koepäivänä kuvittelin saavani älynväläyksestäni joitain pisteitä, joten lopputulos tuli hieman järkytyksenä.

Ainoastaan rohkeus kysyä ei tietenkään auta. 30 minuutin kysymysaika hävisi yllättävän nopeasti, enkä siinä ajassa edes ehtinyt harkita avun pyytämistä. Vasta parin tunnin kuluttua tajusin tarvitsevani apua, mutta oli jo liian myöhäistä, ja päätin jostain syystä vain luottaa itseeni. Tästä päästäänkin seuraavaan huomionarvoiseen kohtaan.

**Itseluottamus.** Ongelmien ratkaisussa itseensä luottaminen, kyky uskotella tekemisiensä olevan oikein, on todella tärkeää. Jotkut väittävät, ettei koskaan voi

luottaa itseensä liikaa, mutta tässä uskaltaisin olla eri mieltä. Ehdottomasti on tilanteita, joissa voi luottaa itseensä liikaa. Mistä muuten kaikki merkkivirheet syntyisivät kuin sokeasta uskosta omaan virheettömyyteensä?

On oleellista pysähtyä ajattelemaan, mitä tekee. Itse en ole ollut kilpailumatematiikassa mukana kovinkaan kauaa, mutta voin sanoa oppineeni tämän vasta lukion viimeisinä hetkinä, juuri ennen tämän vuoden ylioppilaskoetta. Siltikin tulee yhä tilanteita, joissa olen tehnyt jonkin laskuvirheen tehtävän alussa, mutten koskaan palaa tarkastamaan prosessia vaan uskon lopputulokseen.

Käytännön esimerkkinä voisin jälleen käyttää kokeen 6. tehtävää, jossa päätettyäni, mitä siinä kysytään, en kyseenalaistanut asiaa kertaakaan. En edes silloin, kun sain  $n$ :stä kokonaisluvun sijaan äärettömän (joka ei tietääkseni ole kokonaisluku). Eräälle meistä kävi ensimmäisessä geometriatehtävässä niin, että hän käytti suuren osan ajastaan siihen ja tuli kokeesta ulos itsevarmana. Vasta myöhemmin hän tajusi tehneensä kaikki pisteet tappavan huolimattomuusvirheen jo alkuvaiheessa (hän ei ollut valmis kommentoimaan asiaa enempää, mutta voi näinä päivinä kuitenkin ihan hyvin, traumoistaan huolimatta).

**Palautettavien paperien määrä. Ja sisältö.** Meille kyllä jankattiin alusta alkaen, että mitä ikinä teettekin, palauttakaa kaikki paperit, joihin olette jotain kirjoittaneet. Sotkusta ei saa miinus pisteitä, mutta joistakin lähes järkevistä huomioista voi hyvällä tuurilla jopa kartuttaa tiliään. Ja niin me kyllä teimme. Toiset joukkueestamme saattoivat palauttaa jopa kymmenen paperia jotain tehtävää kohden, itselläni ennätys oli neljä sivua.

Määrä ei kuitenkaan koskaan korvaa hyvää sisältöä, näin on sanottu, ja sen kyllä huomasi viimeistään tulosten tullessa. Neljän sivun esseevastauksesta ei irronnut tiukalta tuomaristolta mitään, ei edes säälistä, ja saman kohtalon kokivat monien muiden pitkähäköt vastaukset. Tietenkin aina on niitä tehtäviä, joissa pitkät esseevastaukset hyödyttävät. Ennen koetta deputymme kertoi, että ainakin helpoimmista geometriatehtävistä pisteitä voi saada pelkistä oivalluksistaakin. Lähimpänä sellaista tehtävää olikin tämän vuoden tehtävä numero 4. Yhden pisteen olisi saanut jo tarpeeksi monesta havainnollistavasta kuvasta, ja toisen eräs meistä tienasi todettuaan tehtävänannon toimivan aina silloin, kun  $3 \mid n$ .

**Kunhan yritätte.** Tämä on ehdottomasti tärkein kaikista neuvoista, ja siksi otan sen esille toistamiseen. Älä anna tyhjän paperin tai ensi silmäyksellä mahdollisten tehtävien lyödä sinua taistelukyvyttömäksi. 9 tuntia voi kuulostaa pitkältä ajalta, mutta haaveileminen tai muunlainen velttoilu on syytä jättää kilpailuja

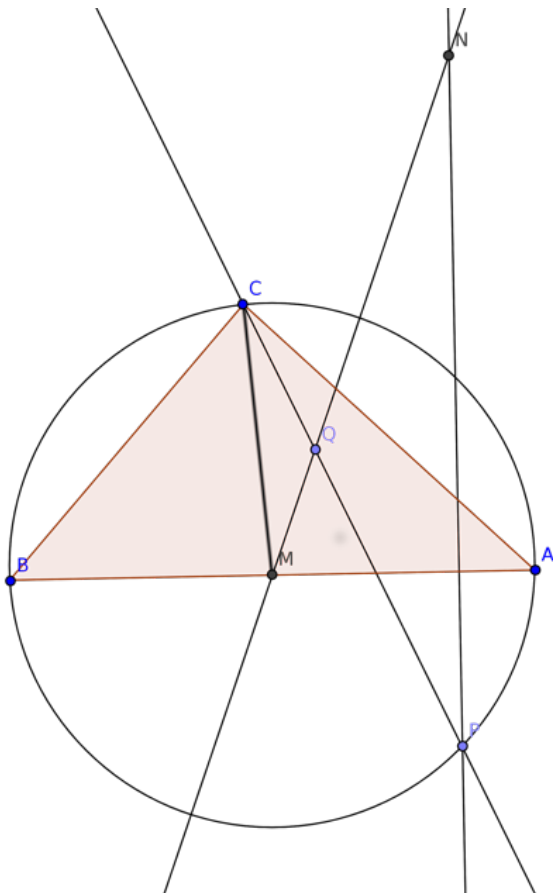
seuraavalle vapaa-ajalle, jos haluaa saada jotain aikaiseksi. On myös muistettava, ettei kilpailijoilta missään nimessä odoteta täydellistä suoritusta. Sitä ei siis kannata turhan paljoa jännittää, vaan lähestyä kilpailutiannetta erityislaatuisena haasteena.

## Katsaus EGMO 2018 tehtävään 1

Nerissa Shakespeare, Essi Vilhonen

**Tehtävä 1.** Olkoon  $ABC$  kolmio, jossa  $CA = CB$  ja  $\angle ACB = 120^\circ$ , ja olkoon  $M$  janan  $AB$  keskipiste. Olkoon piste  $P$  kolmion  $ABC$  ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon  $Q$  sellainen piste janalla  $CP$  että  $QP = 2QC$ . Piste  $P$  kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa  $AB$  vasten leikkaa suoran  $MQ$  yksikäsitteisessä pisteessä  $N$ . Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste  $N$  on aina riippumatta pisteen  $P$  sijainnista.

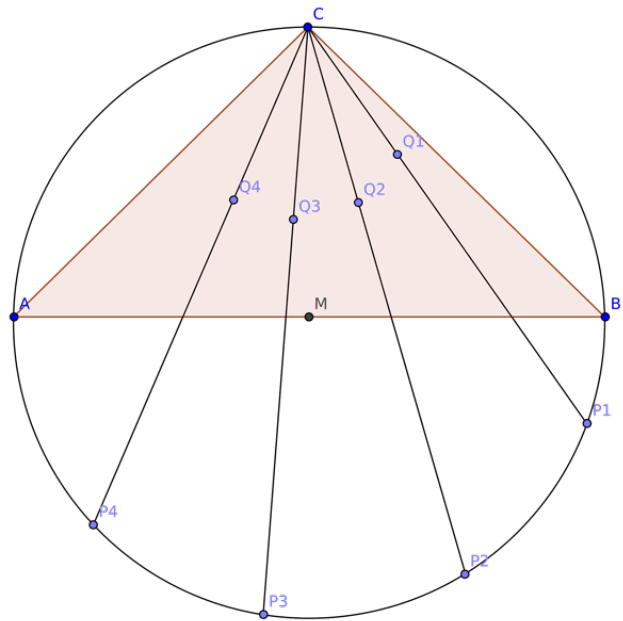
**Todistus.** Ensimmäinen tehtävä on geometriaa. Ensimmäisenä piirsin kuvan tehtävänannosta, koska kuvat ovat kivoja geometriassa.



Koska kolmio  $ABC$  on tasakylkinen, jossa  $CB = CA$ , on  $CM$  kohtisuorassa suoraa  $AB$  vasten. Tällöin suora  $CM$  on yhdensuuntainen suoran  $NP$  kanssa. Kolmio  $CMQ$  näyttää yhdenmuotoiselta kolmion  $PQN$  kanssa, joten yritetään todistaa se. Tiedetään, että  $2CQ = PQ$  ja  $2MQ = NQ$  ja kolmioilla on yksi yhteinen ristikulma, joten saamme  $\triangle CMQ \sim \triangle PNQ$  (SKS).

En löydä helposti mitään vakiona pysyvää kehäkulmaa, joten mietin muita mahdollisia tapoja todistaa ympyrän olemassaolo. Aloin miettiä: ”Miten pisteet  $Q$  ja  $N$  liikkuvat suhteessa pisteeseen  $P$ ?” Lyhyin etäisyys on 0, kun  $C = P = Q$ , ja pisin on  $CP$ :n ollessa halkaisija, jolloin  $CQ$  on kolmasosa halkaisijasta. Kaikki muut  $CQ$ :n arvot sijoittuvat näiden kahden arvon väliin. Päätin yrittää todistaa, että piste  $Q$  on aina samalla ympyrällä, koska sitten saisin saman todistettua pisteelle  $N$ .

Ympyröitä voi todistaa jännelikulmioiden avulla, joten piirsin pisteet  $P_1, P_2, P_3$  ja  $P_4$  ja niille vastaavat  $Q$ :t.



Tiedetään, että  $P_1P_2P_3P_4$  on jännelikulmio, koska kaikki pisteet  $P_i$  sijaitsevat samalla ympyrällä pisteen määritelmällä. Myös tiedämme, että kaikkien  $\frac{CQ_i}{CP_i}$  suhde on sama. Täten saamme yhdenmuotoisilla kolmioilla  $\triangle P_iCP_j \sim \triangle Q_iCQ_j$  (SKS) todistettua, että  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  on jännelikulmio. Vastaavasti todistetaan pisteiden  $Q_i$  avulla, että  $N_1N_2N_3N_4$  on jännelikulmio.