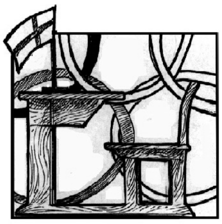

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävät

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin Firenzessä 9.–15.4.2018. Suomea edustivat Milja Krés, Veera Nurmela, Nerissa Shakespeare ja Essi Vilhonen. Varajohtajana oli Neea Palojärvi ja minä joukkueenjohtajana. Shakespeare ja Vilhonen saivat kunniamaininnat. Tehtävät olivat jälleen taattuun EGMO-tyyliin haastavia.

Tehtävä 1. Olkoon ABC kolmio, jossa $CA = CB$ ja $\angle ACB = 120°$, ja olkoon M janan AB keskipiste. Olkoon piste P kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä, ja olkoon Q sellainen piste janalla CP, että $QP = 2QC$. Pisteen P kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa AB vasten, leikkaa suoran MQ yksikäsitteisessä pisteessä N.

Osoita, että on olemassa sellainen ympyrä, jolla piste N on aina riippumatta pisteen P sijainnista.

Kommentti: Tämä on nätti klassisen geometrian tehtävä, ja tämän ratkaisemalla Shakespeare ja Vilhonen hankkivat kunniamainintansa.

Tehtävä 2. Tarkastellaan joukkoa

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

a) Osoita, että jokainen kokonaisluku $x \geq 2$ voidaan esittää joukon A yhden tai useamman alkion tulona, missä näiden alkioiden ei välttämättä tarvitse olla keskenään erisuuria.

b) Kun $x \geq 2$ kokonaisluku, olkoon $f(x)$ pienin sellainen kokonaisluku, että x voidaan kirjoittaa joukon A alkioiden tulona niin, että tulontekijöiden määrä on $f(x)$, ja tulontekijät eivät välttämättä ole keskenään erisuuria.

Osoita, että on olemassa äärettömän monta kokonaislukuparia (x, y), joilla $x \geq 2$, $y \geq 2$, ja

$$f(xy) < f(x) + f(y).$$

(Parit (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat erisuuria, jos ja vain jos $x_1 \neq x_2$ tai $y_1 \neq y_2$.)

Kommentti: Suomen kilpailijat todellakin lukivat tehtävät huolella: alkuperäiseen suomennokseeni tehtävästä oli yhteen paikkaan kokonaisluvun x paikalle eksynyt n. Sain tästä kysymyksen välittömästi kilpailun alettua. Tehtävän a)-kohta on todella helppo. Siitä oli jaossa yksi piste. Sen merkitys oli lähinnä toimia johdantona b)-kohtaan, joka ratkeaa siedettävällä vaivalla konstruktion avulla, eli konstruoimalla sopivia lukuja (joskin silloinkin tarpeellisten asioiden todistaminen vaatii raakaa työtä). Yleisiä tuloksia funktion käytöksestä ei kannata yrittää todistaa kilpailutilanteessa, sillä tämä kyseinen funktio on harvinaisen inhottava ja yhteistyökyvytön.

Tehtävä 3. Olkoot $C_1, \ldots, C_n$ EGMO:n n kilpailijaa. Kilpailun jälkeen kilpailijat jonottavat ravintolan edessä seuraavien sääntöjen mukaisesti.

- Tuomaristo valitsee kilpailijoiden alkuperäisen järjestyksen.

- Kerran minuutissa tuomaristo valitsee kokonaisluvun i, joka toteuttaa ehdon $1 \leq i \leq n$.
  - Jos kilpailijan C_i edessä on vähintään i kilpailijaa, kilpailija C_i maksaa yhden euron tuomaristolle ja siirtyy jonossa eteenpäin i paikkaa.
  - Jos kilpailijan C_i edessä on vähemmän kuin i kilpailijaa, ravintola aukeaa ja prosessi loppuu.

a) Osoita, että riippumatta siitä mitä päätöksiä tuomaristo tekee, on prosessin ennen pitkää loputtava.

b) Määritä kaikilla luvun n arvoilla suurin mahdollinen määrä euroja, jonka tuomaristo voi kerätä valitsemalla ovelasti alkuperäisen järjestyksen ja siirrot.

Kommentti: Tämän tehtävän sanamuodosta keskusteltiin pitkään. Ehkä hieman yksinkertaistaen oli tilanne se, että johtajat niistä maista, joissa korruptiota on huomattavasti, vastustivat sanamuotoa vedoten siihen, että tehtävä antaa epäilyttävän käsityksen kilpailusta. Esimerkiksi minä taas en rehellisesti sanottuna pystynyt ymmärtämään, miten yhdestä kilpailutehtävästä vedettäisiin johtopäätöksiä kilpailun toiminnasta. Ajatus yleistyksistä tuntui absurdilta ja vielä absurdimmalta ajatus kilpailun tuomaristosta kartuttamassa kassaa jonotuttamalla kilpailijoita. Tehtävän sanamuodolla oli kuitenkin etunsa: sillä, että tehtävässä kerättiin rahaa, saatiin tehtävään selkeä ja yksikäsitteinen laskuri verrattuna siihen, että oltaisiin mitattu aikaa, jolloin joku kuitenkin olettaisi, että ensimmäinen kokonaisluku valittaisiin ajanhetkellä nolla, toisen mielestä ajanhetkellä yksi ja kolmas tulkitsisi tilanteen mahdollisesti ihan toisin.

Tehtävä 4. *Domino* on 1×2- tai 2×1-laatta.

Olkoon $n \geq 3$ kokonaisluku. Dominoita asetetaan $n \times n$-laudalle siten, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin.

Rivin tai sarakkeen *arvo* on niiden dominoiden lukumäärä, jotka peittävät vähintään yhden kyseisen rivin tai sarakkeen ruuduista. Dominoiden asettelua kutsutaan *tasapainoiseksi*, jos on olemassa $k \geq 1$ niin, että jokaisen rivin ja jokaisen sarakkeen arvo on k.

Osoita, että kaikilla $n \geq 3$ on olemassa tasapainoinen asettelu ja määritä pienin mahdollinen määrä dominoita, joka tarvitaan sellaiseen asetteluun.

Kommentti: Tästä tehtävästä olisi ollut siedettävällä vaivalla jaossa reilu kasa pisteitä, mutta se ehkä vaatii hieman tuuriakin. Kaksinkertaisella laskemisella saa selville ehdottomat minimit, ja sen jälkeen voi konstruktioilla osoittaa, että nämä todellakin saavutetaan. Oikeita konstruktioita ei kuitenkaan ole ihan yksinkertaista saada aikaiseksi.

Tehtävä 5. Olkoon Γ kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä. Ympyrä Ω sivuaa janaa AB ja lisäksi se sivuaa ympyrää Γ pisteessä, joka on janan AB samalla puolella kuin piste C. Kulman $\angle BCA$ puolittaja leikkaa ympyrän Ω kahdessa eri pisteessä P ja Q.

Osoita, että $\angle ABP = \angle QBC$.

Kommentti: Tämä on hankala. Kaikki malliratkaisut käyttivät jotain perusgeometriaa syvällisempää tulosta.

Tehtävä 6.

a) Osoita, että kaikilla reaaliluvuilla t, jotka toteuttavat ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$, on olemassa positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus: kun S on mikä tahansa n positiivisen kokonaisluvun joukko, niin on olemassa kaksi keskenään eri suurta alkiota x ja y, jotka kuuluvat joukkoon S ja lisäksi on olemassa *epänegatiivinen* kokonaisluku m (eli $m \geq 0$), joilla
$$|x - my| \leq ty.$$

b) Onko kaikilla ehdon $0 < t < \frac{1}{2}$ toteuttavilla reaaliluvuilla t olemassa ääretön positiivisten kokonaislukujen joukko S, jolla ehto
$$|x - my| > ty$$
toteutuu kaikilla joukon S eri alkioista x ja y muodostuvilla pareilla ja kaikilla *positiivisilla* kokonaisluvuilla m (eli $m > 0$)?

Kommentti: Tämä oli hankala ja hankalaksi tarkoitettukin (kuten 6. tehtävät aina). Koordinointi meni todella vauhdikkaasti, kun tyypillisesti joukkueenjohtajat vain kävivät hakemassa koordinaattoreilta nollat paperiin ilman suurempaa keskustelua tai neuvottelua.