

## Suomi Iranin 4. Geometriaolympialaisissa

*Lauri Hallila*

### Kilpailu

Iran on viime vuosina kutsunut Kansainvälisissä Matematiikkaolympialaisissa (IMO) muita maita järjestämiinsä geometriaolympialaisiin. Olin Suomen joukkueen johtajana vuoden 2017 olympialaisissa Brasiliassa, ja kun huomasin, että Virosta oli viime vuonna yksi oppilas osallistunut, päätin selvittää, mistä oikein on kysymys.

Kilpailu järjestetään kussakin osallistujamaassa etänä. Koska vielä valmennuksessa jatkavilla kilpailijoillamme oli kiinnostusta osallistua, päätimme ilmoittautua Iranin 4. geometriaolympialaisiin. Omana ajatuksena oli edistää oppilaiden geometrian osaamista ja auttaa saamaan nuorempia oppilaita mukaan kilpamatematiikkaan, sillä helpoin taso on suunnattu yläasteen kahdelle ensimmäiselle luokalle.

Kilpailussa on kolme eri tasoa: perustaso yläasteen 7.- ja 8.-luokkalaisille, keskitaso 9.-luokkalaisille ja lukion 1.-luokkalaisille ja vaativa taso lukion 2. ja 3. luokan oppilaille. Alustavien tietojen perusteella kuhunkin tasoon voisi osallistua 4 oppilasta. Lähetimme kutsun aiemmissa kilpailuissa pärjänneille oppilaille luvatun paikan ensimmäisinä ilmoittautuneille. Saimme kolme oppilasta keskitasolle ja neljä vaativalle tasolle.

Emme lyhyellä aikavälillä keksineet, keitä kutsuisimme osallistumaan perustason kilpailuun, mutta yksi oppilaistamme ilmoitti kaksi kilpailijaa mukaan perusarjaan. Kun saimme Iranista sääntöjen tarkennuksia, saimme tietää, että osallistujien lukumäärällä ei itse

asiassa ole ylärajaa, mutta he ovat lähinnä kiinnostuneita neljän parhaan tuloksista. Kilpailun ollessa melko nuori säännöt näköjään vielä kehittyvät.

Saimme luvan järjestää kilpailun varsinaista kilpapäivää seuraavana päivänä; näin pystyimme järjestämään kilpailut Päivölän Kansanopistossa perjantaina sopivasti juuri ennen kuin aloitimme syksyn ensimmäisen kilpamatematiikan viikonloppuvalmennuksen.

Valmistauduin kilpailun järjestämiseen hankkimalla Evan Chenin kirjan 'Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads' itselleni, kun geometria on aina ollut kilpamatematiikan hankalin osa-alue. Herra Chen oli kilpailijana Taiwanin edustajana muutama vuosi sitten, ja vuonna 2017 hän oli USA:n joukkueenjohtaja IMO:ssa. Hän kirjoitti kyseisen kirjan, koska ei kilpailijana löytänyt oppimateriaalia, josta olisi tykännyt; osa kirjoista oli hyviä teorian kannalta, mutta ei antanut sopivan tasoisia tehtäviä. Toisissa taas oli hyviä tehtäviä, mutta ei opastusta siihen, miten ratkaisuihin on päädytty. Voin suositella kyseistä kirjaa lämpimästi kaikille kilpamatematiikasta ja geometriasta kiinnostuneille.

Itse kilpailu toimi lähes samoin kuin muutkin vastaavat kilpailut; sain tehtävät etukäteen käännettäviksi, vähän sen jälkeen niiden ratkaisut ja myöhemmin pisteytyskeeman. Kilpailun jälkeen arvioin valmentajakollegoideni kanssa tulokset. Koska kilpailu toimii etänä, perinteistä koordinaatiota ei ole, joten jouduimme turvautumaan enimmäkseen pisteytyskeemaan. Lähetimme tulokset ja skannatut paperit Iraniin, josta saimme

myöhemmin viralliset tulokset ja todistukset oppilaillemme.

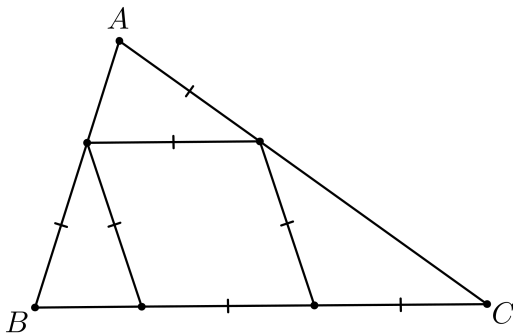
Näissä kilpailuissa kultaa saa paras kuudesosa, hopeaa tämän perässä oleva neljäsosa ja pronssia tämän perässä oleva neljäsosa, yhteensä noin puolet osallistujista. Kunniamaininnan saa, jos on saanut ainakin yhden tehtävän oikein. Perustasolla kilpailuun osallistui Into Almiala ja Valtteri Aurela. Into Almiala sai kunniamaininnan. Keskitason osallistujamme olivat Olli Järvinie mi, Nerissa Shakespeare ja Hermann Huhtamäki. Olli Järvinie mi voitti pronssimitalin ja Nerissa Shakespeare kunniamaininnan. Vaativan tason osallistujamme olivat Akseli Jussinmäki, Joonatan Honkamaa, Konsta Tiilikainen ja Leevi Laitonen. Heistä Akseli Jussinmäki sai kunniamaininnan.

## Tehtäviä

Kaiken kaikkiaan kilpailu onnistui hyvin, ja tarkoituksena on osallistua siihen myös tulevina vuosina. Toivotavasti kilpailu auttaa geometrian taitojen kehityksessä; itse ainakin sain palautettua vanhoja asioita mieleen ja opittua myös uutta. Käyn tässä läpi tehtävät, jotka ainakin joku Suomen kilpailijoista sai ratkaistua.

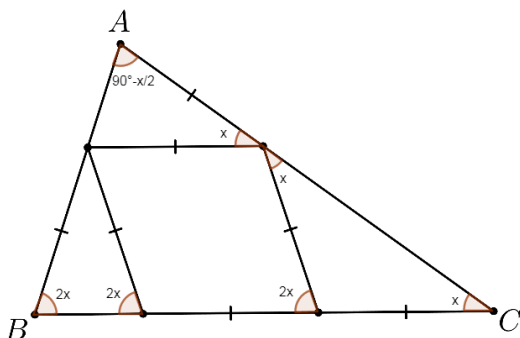
Perustason 2. tehtävä:

Määritä kolmion  $ABC$  kulmat.



Ratkaisu:

Olkoon  $\angle ACB = x$ . Nelikulmio, joka on kolmion sisällä ja jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, on suunnikas, joten sen vastakkaiset sivut ovat samansuuntaiset.



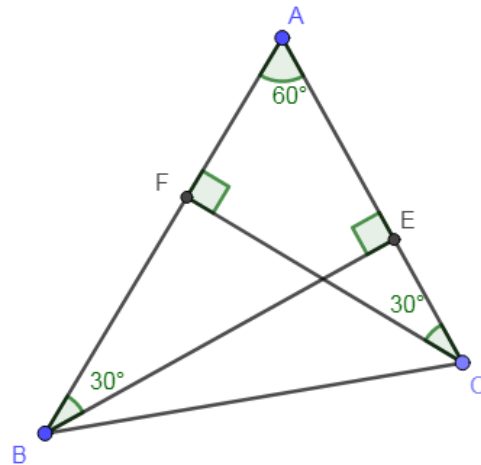
Kuvassa ylhäällä olevassa pienessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, joten kulma  $A$  ja sen vieressä oleva kulma ovat molemmat  $(180^\circ - x)/2 = 90^\circ - x/2$ . Koska kolmion  $ABC$  kulmien summa on  $180^\circ$ , niin

$$\begin{aligned} (90^\circ - \frac{x}{2}) + 2x + x &= 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ \\ \Rightarrow \angle A &= 72^\circ, \angle B = 72^\circ, \angle C = 36^\circ. \end{aligned}$$

Keskitason 1. tehtävä:

Olkoon  $ABC$  teräväkulmainen kolmio, jossa  $A = 60^\circ$ . Olkoot  $E$  ja  $F$  kulmista  $B$  ja  $C$  piirrettyjen korkeusjanojen kannat (samassa järjestyksessä). Osoita, että  $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$ .

Ratkaisu:



$$A = 60^\circ \Rightarrow \angle ABE = \angle ACF = 30^\circ$$

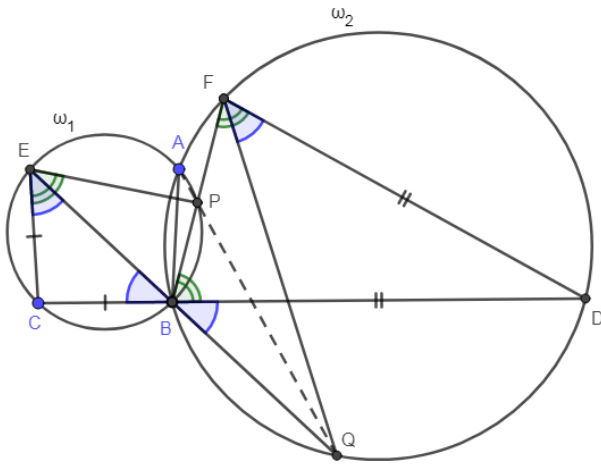
$$\Rightarrow AE = \frac{AB}{2}, AF = \frac{AC}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CE - BF &= (AC - AE) - (AB - AF) \\ &= (AC - AB) + (AF - AE) \\ &= \frac{3}{2}(AC - AB). \end{aligned}$$

Keskitason 2. tehtävä:

Kaksi ympyrää  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  leikkaavat pisteissä  $A$  ja  $B$ . Mielivaltainen pisteen  $B$  kautta piirretty suora leikkaa ympyrät  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  pisteissä  $C$  ja  $D$  (samassa järjestyksessä). Pisteet  $E$  ja  $F$  valitaan ympyröiltä  $\omega_1$  ja  $\omega_2$  (samassa järjestyksessä) siten, että  $CE = CB$  ja  $BD = DF$ . Oletetaan, että  $BF$  leikkaa ympyrän  $\omega_1$  pisteessä  $P$  ja  $BE$  leikkaa ympyrän  $\omega_2$  pisteessä  $Q$ . Osoita, että  $A$ ,  $P$  ja  $Q$  ovat samalla suoralla.

Ratkaisu:



Tiedämme, että

$$\angle BFD = \angle DBF = 180^\circ - \angle CBP = \angle CEP,$$

sillä  $C, B, P$  ja  $E$  ovat samalla ympyrällä. Edelleen,

$$\begin{aligned} \angle CEB + \angle BEP &= \angle CEP \\ &= \angle BFD = \angle BFQ + \angle QFD, \end{aligned}$$

ja

$$\angle CEB = \angle CBE = \angle QBD = \angle QFD$$

kehäkulmalauseen perusteella. Tästä seuraa

$$\angle BEP = \angle BFQ,$$

josta saamme kehäkulmalauseetta soveltamalla

$$\angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ.$$

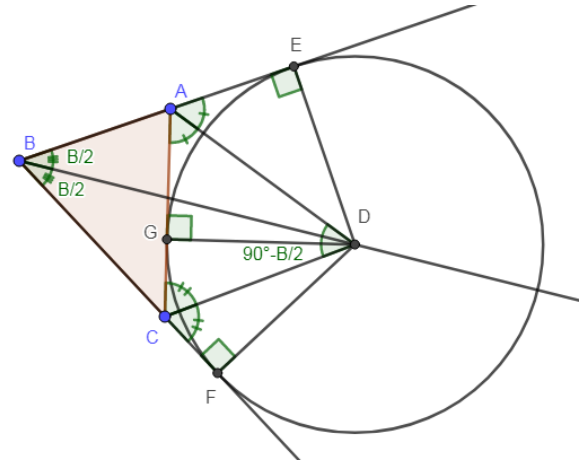
Vaativan tason 1. tehtävä:

Kolmion  $ABC$  sisään piirretty ympyrä, jonka keskipiste on  $I$ , sivuaa sivua  $BC$  pisteessä  $D$ . Suora  $DI$  leikkaa  $AC$ :n pisteessä  $X$ . Pisteestä  $X$  piirretty tangentti (eri kuin  $AC$ ) kolmion sisään piirretylle ympyrälle leikkaa  $AB$ :n pisteessä  $Y$ .  $YI$  ja  $BC$  leikkaavat toisensa pisteessä  $Z$ . Osoita, että  $AB = BZ$ .

Ratkaisu:

Aloitamme todistamalla seuraavan lemmän:

**Lemma.** Piirretään kolmion  $ABC$  sivun  $AC$  ulkopuolelle sivujen  $AB$  ja  $AC$  kulmanpuolittaja. Tämä leikkaa sivun  $AC$  ulkopuolelle piirretyn sivujen  $BC$  ja  $AC$  kulmanpuolittajan pisteessä  $D$ . Tällöin  $D$  on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa sivua  $AC$  ja sivujen  $AB$  ja  $BC$  jatkeita. Lisäksi  $BD$  on puolittaa kulman  $B$  ja  $\angle ADC = 90^\circ - B/2$ .

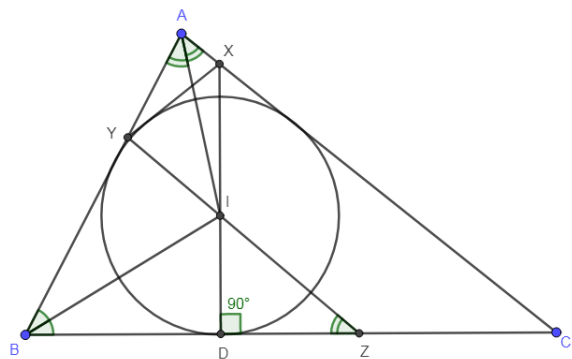


**Lemman todistus:** Piirretään pisteestä  $D$  kohtisuorat sivuille  $AB, BC$  ja  $AC$ . Olkoot kohtisuorien ja sivujen leikkauspisteet  $E, F$  ja  $G$ . Jokainen piste suoralla  $AD$  on yhtä kaukana suorista  $AB$  ja  $AC$ . Siten  $DE = GD = DF$ . Siten  $D$  on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa janaa  $AC$  ja sivujen  $AB$  ja  $BC$  kautta piirrettyjä suoria.

Koska  $D$  on yhtä kaukana sivuista  $AB$  ja  $BC$ , niin  $BD$  puolittaa kulman  $B$ . Koska  $\angle DAB = A + (180^\circ - A)/2 = 90^\circ + A/2$  ja  $\angle BCD = C + (180^\circ - C)/2 = 90^\circ + C/2$ , saadaan nelikulmiosta  $BADC$

$$\begin{aligned} \angle ADC &= 360^\circ - B - (90^\circ + A/2) - (90^\circ + C/2) \\ &= 180^\circ - A/2 - B/2 - C/2 - B/2 \\ &= 90^\circ - B/2. \end{aligned}$$

Palaamme nyt alkuperäisen tehtävän todistukseen.



Piste  $I$  on kolmion  $AXY$  ulkopuolelle (sivulle  $XY$ ) piirretyn ympyrän keskipiste. Näin ollen lemmän nojalla  $\angle XIY = 90^\circ - \frac{A}{2}$ . Tästä seuraa, että

$$\angle DIZ = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \angle IZB = \frac{A}{2} = \angle BAI,$$

sillä kolmion kärjistä kolmion sisälle piirretyn ympyrän keskipisteen kautta kulkevat suorat ovat kolmion kulmanpuolittajia. Tiedämme myös, että  $\angle IBZ = \angle IBA$  ja  $BI = BI$ , joten kolmiot  $ABI$  ja  $ZBI$  ovat yhtenevät. Siten  $AB = BZ$ .