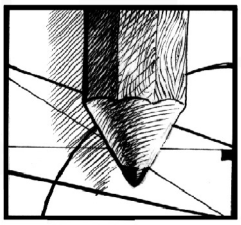


Suomi Iranin 4. Geometriaolympialaisissa

Lauri Hallila

Kilpailu

Iran on viime vuosina kutsunut Kansainvälisissä Matematiikkaolympialaisissa (IMO) muita maita järjestämiinsä geometriaolympialaisiin. Olin Suomen joukkueen johtajana vuoden 2017 olympialaisissa Brasiliassa, ja kun huomasin, että Virosta oli viime vuonna yksi oppilas osallistunut, päätin selvittää, mistä oikein on kysymys.

Kilpailu järjestetään kussakin osallistujamaassa etänä. Koska vielä valmennuksessa jatkavilla kilpailijoillamme oli kiinnostusta osallistua, päätimme ilmoittautua Iranin 4. geometriaolympialaisiin. Omana ajatuksenani oli edistää oppilaiden geometrian osaamista ja auttaa saamaan nuorempia oppilaita mukaan kilpamatematiikkaan, sillä helpoin taso on suunnattu yläasteen kahdelle ensimmäiselle luokalle.

Kilpailussa on kolme eri tasoa: perustaso yläasteen 7.- ja 8.-luokkalaisille, keskitaso 9.-luokkalaisille ja lukion 1.-luokkalaisille ja vaativa taso lukion 2. ja 3. luokan oppilaille. Alustavien tietojen perusteella kuhunkin tasoon voisi osallistua 4 oppilasta. Lähetimme kutsun aiemmissa kilpailuissa pärjänneille oppilaille luvaten paikat ensimmäisinä ilmoittautuneille. Saimme kolme oppilasta keskitasolle ja neljä vaativalle tasolle.

Emme lyhyellä aikavälillä keksineet, keitä kutsuisimme osallistumaan perustason kilpailuun, mutta yksi oppilaistamme ilmoitti kaksi kilpailijaa mukaan perussarjaan. Kun saimme Iranista sääntöjen tarkennuksia, saimme tietää, että osallistujien lukumäärällä ei itse asiassa ole ylärajaa, mutta he ovat lähinnä kiinnostuneita neljän parhaan tuloksista. Kilpailun ollessa melko nuori säännöt näköjään vielä kehittyvät.

Saimme luvan järjestää kilpailun varsinaista kilpapäivää seuraavana päivänä; näin pystyimme järjestämään kilpailut Päivölän Kansanopistossa perjantaina sopivasti juuri ennen kuin aloitimme syksyn ensimmäisen kilpamatematiikan viikonloppuvalmennuksen.

Valmistauduin kilpailun järjestämiseen hankkimalla Evan Chenin kirjan 'Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads' itselleni, kun geometria on aina ollut kilpamatematiikan hankalin osa-alue. Herra Chen oli kilpailijana Taiwanin edustajana muutama vuosi sitten, ja vuonna 2017 hän oli USA:n joukkueenjohtaja IMO:ssa. Hän kirjoitti kyseisen kirjan, koska ei kilpailijana löytänyt oppimateriaalia, josta olisi tykännyt; osa kirjoista oli hyviä teorian kannalta, mutta ei antanut sopivan tasoisia tehtäviä. Toisissa taas oli hyviä tehtäviä, mutta ei opastusta siihen, miten ratkaisuihin on päädytty. Voin suositella kyseistä kirjaa lämpimästi kaikille kilpamatematiikasta ja geometriasta kiinnostuneille.

Itse kilpailu toimi lähes samoin kuin muutkin vastaavat kilpailut; sain tehtävät etukäteen käännettäviksi, vähän sen jälkeen niiden ratkaisut ja myöhemmin pisteytysskeeman. Kilpailun jälkeen arvioin valmentajakollegoideni kanssa tulokset. Koska kilpailu toimii etänä, perinteistä koordinaatiota ei ole, joten jouduimme turvautumaan enimmäkseen pisteytysskeemaan. Lähetimme tulokset ja skannatut paperit Iraniin, josta saimme myöhemmin viralliset tulokset ja todistukset oppilaillemme.

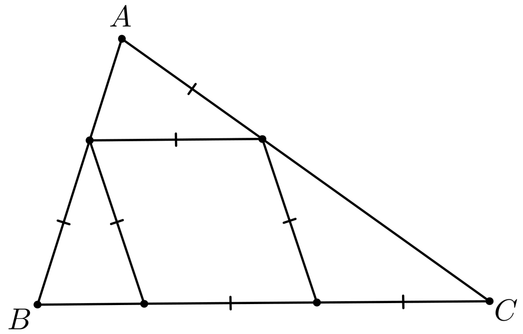
Näissä kilpailuissa kultaa saa paras kuudesosa, hopeaa tämän perässä oleva neljäsosa ja pronssia tämän perässä oleva neljäsosa, yhteensä noin puolet osallistujista. Kunniamaininnan saa, jos on saanut ainakin yhden tehtävän oikein. Perustasolla kilpailuun osallistui Into Almiala ja Valtteri Aurela. Into Almiala sai kunniamaininnan. Keskitason osallistujamme olivat Olli Järviniemi, Nerissa Shakespeare ja Hermanni Huhtamäki. Olli Järviniemi voitti pronssimitalin ja Nerissa Shakespeare kunniamaininnan. Vaativan tason osallistujamme olivat Akseli Jussinmäki, Joonatan Honkamaa, Konsta Tiilikainen ja Leevi Laitonen. Heistä Akseli Jussinmäki sai kunniamaininnan.

Tehtäviä

Kaiken kaikkiaan kilpailu onnistui hyvin, ja tarkoituksena on osallistua siihen myös tulevina vuosina. Toivottavasti kilpailu auttaa geometrian taitojen kehityksessä; itse ainakin sain palautettua vanhoja asioita mieleen ja opittua myös uutta. Käyn tässä läpi tehtävät, jotka ainakin joku Suomen kilpailijoista sai ratkaistua.

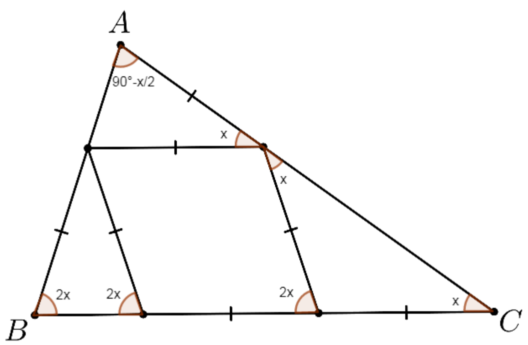
Perustason 2. tehtävä:

Määritä kolmion ABC kulmat.



Ratkaisu:

Olkoon $\angle ACB = x$. Nelikulmio, joka on kolmion sisällä ja jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, on suunnikas, joten sen vastakkaiset sivut ovat samansuuntaiset.



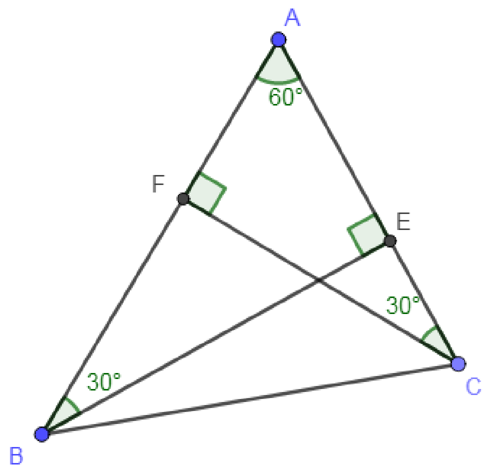
Kuvassa ylhäällä olevassa pienessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, joten kulma A ja sen vieressä oleva kulma ovat molemmat $(180° - x)/2 = 90° - x/2$. Koska kolmion ABC kulmien summa on $180°$, niin

$$(90° - \frac{x}{2}) + 2x + x = 180° \Rightarrow x = 36°$$
$$\Rightarrow \angle A = 72°, \angle B = 72°, \angle C = 36°.$$

Keskitason 1. tehtävä:

Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jossa $A = 60°$. Olkoot E ja F kulmista B ja C piirrettyjen korkeusjanojen kannat (samassa järjestyksessä). Osoita, että $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

Ratkaisu:

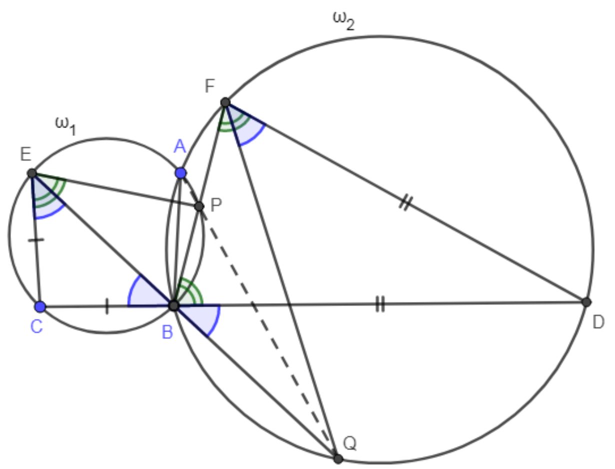


$$\begin{aligned} A = 60° &\Rightarrow \angle ABE = \angle ACF = 30° \\ &\Rightarrow AE = \frac{AB}{2}, AF = \frac{AC}{2} \\ &\Rightarrow CE - BF = (AC - AE) - (AB - AF) \\ &\qquad = (AC - AB) + (AF - AE) \\ &\qquad = \frac{3}{2}(AC - AB). \end{aligned}$$

Keskitason 2. tehtävä:

Kaksi ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Mielivaltainen pisteen B kautta piirretty suora leikkaa ympyrät ω_1 ja ω_2 pisteissä C ja D (samassa järjestyksessä). Pisteet E ja F valitaan ympyröiltä ω_1 ja ω_2 (samassa järjestyksessä) siten, että $CE = CB$ ja $BD = DF$. Oletetaan, että BF leikkaa ympyrän ω_1 pisteessä P ja BE leikkaa ympyrän ω_2 pisteessä Q. Osoita, että A, P ja Q ovat samalla suoralla.

Ratkaisu:



Tiedämme, että

$$\angle BFD = \angle DBF = 180° - \angle CBP = \angle CEP,$$

sillä C, B, P ja E ovat samalla ympyrällä. Edelleen,

$$\begin{aligned}\angle CEB + \angle BEP &= \angle CEP \\ &= \angle BFD = \angle BFQ + \angle QFD,\end{aligned}$$

ja

$$\angle CEB = \angle CBE = \angle QBD = \angle QFD$$

kehäkulmalauseen perusteella. Tästä seuraa

$$\angle BEP = \angle BFQ,$$

josta saamme kehäkulmalausetta soveltamalla

$$\angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ.$$

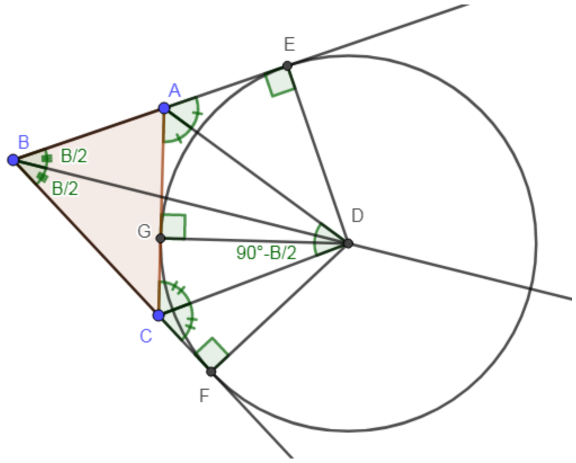
Vaativan tason 1. tehtävä:

Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä, jonka keskipiste on I, sivuaa sivua BC pisteessä D. Suora DI leikkaa AC:n pisteessä X. Pisteestä X piirretty tangentti (eri kuin AC) kolmion sisään piirretylle ympyrälle leikkaa AB:n pisteessä Y. YI ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Z. Osoita, että $AB = BZ$.

Ratkaisu:

Aloitamme todistamalla seuraavan lemman:

Lemma. Piirretään kolmion ABC sivun AC ulkopuolelle sivujen AB ja AC kulmanpuolittaja. Tämä leikkaa sivun AC ulkopuolelle piirretyn sivujen BC ja AC kulmanpuolittajan pisteessä D. Tällöin D on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa sivua AC ja sivujen AB ja BC jatkeita. Lisäksi BD on puolittaa kulman B ja $\angle ADC = 90° - B/2$.

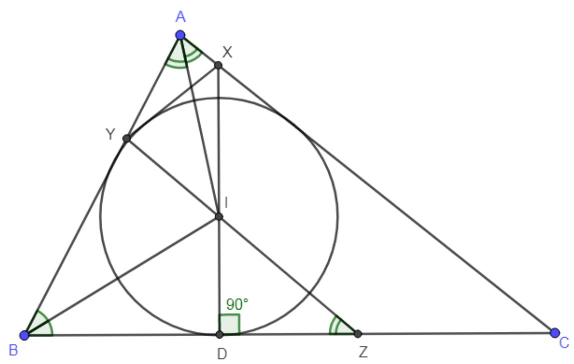


Lemman todistus: Piirretään pisteestä D kohtisuorat sivuille AB, BC ja AC. Olkoot kohtisuorien ja sivujen leikkauspisteet E, F ja G. Jokainen piste suoralla AD on yhtä kaukana suorista AB ja AC. Siten $DE = GD$. Samoin päättelemme, että $GD = DF$. Siten $DE = GD = DF$, joten D on sellaisen ympyrän keskipiste, joka sivuaa janaa AC ja sivujen AB ja BC kautta piirrettyjä suoria.

Koska D on yhtä kaukana sivuista AB ja BC, niin BD puolittaa kulman B. Koska $\angle DAB = A + (180° - A)/2 = 90° + A/2$ ja $\angle BCD = C + (180° - C)/2 = 90° + C/2$, saadaan nelikulmiosta $BADC$

$$\begin{aligned}\angle ADC &= 360° - B - (90° + A/2) - (90° + C/2) \\ &= 180° - A/2 - B/2 - C/2 - B/2 \\ &= 90° - B/2.\end{aligned}$$

Palaamme nyt alkuperäisen tehtävän todistukseen.



Piste I on kolmion AXY ulkopuolelle (sivulle XY) piirretyn ympyrän keskipiste. Näin ollen lemman nojalla $\angle XIY = 90° - \frac{A}{2}$. Tästä seuraa, että

$$\angle DIZ = 90° - \frac{A}{2} \Rightarrow \angle IZB = \frac{A}{2} = \angle BAI,$$

sillä kolmion kärjistä kolmion sisälle piirretyn ympyrän keskipisteen kautta kulkevat suorat ovat kolmion kulmanpuolittajia. Tiedämme myös, että $\angle IBZ = \angle IBA$ ja $BI = BI$, joten kolmiot ABI ja ZBI ovat yhtenevät. Siten $AB = BZ$.