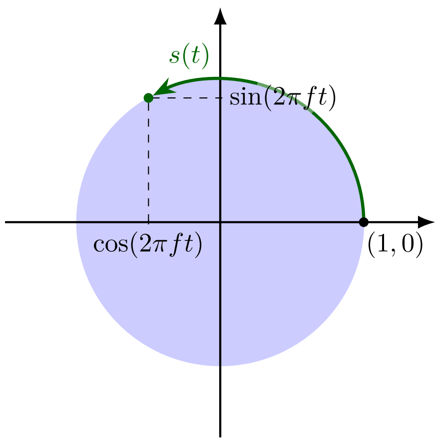
Varmuudesta – Über Gewißheit

Jukka Liukkonen
Mat. yo. evp.

Vaikka rakastan hiljaisuutta, eräänä aamuna ryhdyin tuottamaan ääntä. Sain aikaan yksiviivaisen a:n, 440 Hz. Ohjelmoin Pythonilla sinifunktion $a(t) = \sin(2\pi f t)$ taajuudella $f = 440$, tallensin sen wav-tiedostoon ja soitin tiedoston Windows Media Playerilla. Yksiviivainen a alkoi lopulta kuulostaa liian yksiviivaiselta, joten päätin elävöittää äänimaisemaa laatimalla siniäänen, jonka taajuus laskeutuu lineaarisesti tasolta 1000 Hz tasolle 200 Hz neljän sekunnin aikana. Helppo homma, ajattelin. Ei muuta kuin laitan ajan t juoksemaan nollasta neljään ja korvaan vakiotaajuuden f muuttuvalla taajuudella $f(t) = 1000 - 200t$. Ohjelmassa tuntui kuitenkin olevan jokin bugi: ääni kyllä alkuun madaltui mukavasti, mutta lopussa se ikään kuin tuli katumapäälle ja alkoi kohota jälleen. Tihrusin silmäni kipeiksi Python-koodia ja epäilin, etten ymmärrä Waveform Audio File -formaattia oikein, tai sitten Media Player on kelvoton mikkisoftatekele, josta ei ole työkaluksi korkeampiin matemaattisiin innovaatioprojekteihin. En uhrannut ajatustakaan sille mahdollisuudelle, että käyttämässäni kaavassa $\sin\bigl(2\pi f(t)t\bigr)$ tai taajuuden lausekkeessa $f(t) = 1000 - 200t$ olisi jotakin vialla. Ohjelman helpoin palikka, tottakai se oli kunnossa. Olin asiasta varma!

Askarreltuani jonkin aikaa Maslow'n tarvehierarkian alatasoilla, epä-älyllisten toimintojen parissa, epäilyksen siemen alkoi vaivihkaa itää vasemman korvani oikealla puolella. Onko kaava sittenkään oikein? Ymmärsin vihdoin kyseenalaistaa matemaattisen mallin, pakon edessä ymmärsin luopua itsestäänselvyydestä. Päässäni pyöri erilaisia pälkähdyksiä: taajuus vaatii aikaa toteutuakseen, derivoituva käyrä näyttää mikroskoopilla katsottuna suoralta viivalta, ja niin edelleen. Lopulta tartuin kynään ja johdin uuden mallin funktion $f(t)t$ differentiaalia käyttäen. Kuinka ollakaan, uusi kaava toimi. Varmasti! Näin sen, kuulin sen. Laskelmat näyttivät kuitenkin turhan monimutkaisilta. Päätin turvautua fysikaaliseen mielikuvaan ja nopeuden[1] käsitteeseen. Sinikäyrähän syntyy siten, että piste kiertää tasaisella vauhdilla ω yksikköympyrän kehää pitkin vastapäivään eli positiiviseen kiertosuuntaan. Kuljettua matkaa $s(t)$ mitataan hetkestä $t = 0$ lähtien, jolloin liikkuva piste on kiinteän pisteen $(1, 0)$ kohdalla. Katso kuvaa.



[1] Nopeus on vektorisuure. Nopeusvektorin itseisarvoa kutsutaan vauhdiksi.

Yksikköympyrällä kulman suuruus ja kaaren pituus ovat sama asia: $s(t) = 2\pi f t$. Vakiokerroin f on taajuus. Se ilmoittaa, kuinka monta kierrosta piste kulkee aikayksikössä. Negatiivinen taajuus tarkoittaa kiertoa myötäpäivään, negatiiviseen kiertosuuntaan. Pisteen tasaista vauhtia ja sen kulkemaa matkaa ympyrän kehällä sitovat toisiinsa yhtälöt

$$\omega = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 2\pi f, \qquad s(t) = \omega t.$$

Jos vakion f paikalla on ajan mukana muuttuva kerroin $f(t)$, pisteen kulkema matka on äskeistä vastaten $s(t) = 2\pi f(t)t$. Piste saattaa vaihtaa kulkusuuntaansa useampaankin kertaan. Siksi on paikallaan täsmentää, että kuljettu matka tarkoittaa “nettomatkaa”: jos piste on aikavälillä $[0, t]$ kulkenut ensin 5 yksikköä positiiviseen suuntaan, sen jälkeen 3 yksikköä negatiiviseen suuntaan ja lopuksi 0.5 yksikköä positiiviseen suuntaan, nettomatkalla $s(t)$ on arvo $5-3+0.5 = 2.5$. Myötäpäiväiset reissunpätkät “menevät huviverona valtiolle”.

Kovien kokemusten jälkeen voin jälkiviisaana todeta, että muuttuvan kertoimen $f(t)$ kutsuminen taajuudeksi on vähintään harhaanjohtavaa, ellei suorastaan virheellistä. Pisteen hetkellinen vauhti hetkellä t on nimittäin

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[2\pi f(t)t\big] = 2\pi\big(f'(t)t + f(t)\big).$$

Jos jokin toinen piste kulkisi tällä vakiovauhdilla koko ajan, sen paikka ajan τ funktiona olisi

$$s(\tau) = \omega(t)\tau = 2\pi\big(f'(t)t + f(t)\big)\tau = 2\pi\varphi(t)\tau.$$

Tässä tasaisessa kiertoliikkeessä taajuutena on $\varphi(t) = f'(t)t + f(t)$. Uusi aikamuuttuja τ otettiin käyttöön sen takia, että aika t ikään kuin pysäytettiin vakioksi. Kerrointa $\varphi(t)$ voidaan pitää kiertoliikkeen $s(t) = 2\pi f(t)t$ ja samalla siniaallon $x(t) = \sin\big(2\pi f(t)t\big)$ **hetkellisenä taajuutena** (engl. *instantaneous frequency*).

Taajuusfunktiota $\varphi(t)$ vastaava kerroinfunktio $f(t)$ löydetään integroimalla:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f(t)t\big] &= f'(t)t + f(t) = \varphi(t) && \Leftrightarrow \\ f(t)t &= \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C && \overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} \\ f(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{C}{t}. \end{aligned}$$

Alin yhtälö on turha siinä mielessä, että aallon $x(t)$ lausekkeessa $f(t)$ ei esiinny yksinään vaan tulon $f(t)t$ tekijänä. Integroimisvakio C vaikuttaa ainoastaan aallon vaiheeseen. Yksinkertaisuuden vuoksi f oletetaan rajoitetuksi funktioksi origon ympäristössä. Silloin integroimisvakion C arvon tulee olla nolla. Siis

$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \neq 0.$$

Kiteytys. Taajuusfunktio $\varphi(t)$ edustaa sävelkulkua, joka halutaan saada aikaan. Tavoite toteutuu kerroinfunktiolla $f(t)$. Ääniaalto $x(t) = \sin\big(2\pi f(t)t\big)$ soi korvissa juuri halutulla tavalla. ▲

Tarvittaessa ääni soinnutetaan moniääniseksi summaamalla siihen muita ääniaaltoja vaikkapa Pythagoraan intervalleja käyttäen. Vilkaise myös Heikki Apiolan artikkelia Solmussa 1/2007.

**Varmuus,
sehän on vain tunne,
kupla, joka puhkeaa
törmätessään totuuteen.**

Esimerkki 1. Taajuudelle $\varphi(t) = at + b$ on

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t}\int (at+b)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}at^2 + bt\right) \\ &= \frac{1}{2}at + b. \end{aligned}$$

Täten 1000 hertsin lineaarinen madaltaminen 200 hertsiin 4 sekunnissa pitää tehdä lausekkeen $f(t) = 1000 - 200t$ sijaan lausekkeella $f(t) = 1000 - 100t$. ▲

Esimerkki 2. Taajuudelle $\varphi(t) = u\cos(2\pi g t) + v$ on

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t \big(u\cos(2\pi g\tau) + v\big)\mathrm{d}\tau = \frac{u\sin(2\pi g t)}{2\pi g t} + v \\ &= u\,\mathrm{sinc}(2\pi g t) + v\,. \end{aligned}$$

Tietoliikenneinsinöörien hyvin tuntema sinc-funktio määritellään asettamalla

$$\mathrm{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \qquad \mathrm{sinc}(0) = 1.$$

Yhä harvemmin kuultua poliisiauton hälytysääntä muistuttava uikutus saadaan aikaan asettamalla $g = 1.1$, $u = 1000$ ja $v = 0$. ▲

Seuraavaan kuvaan on piirretty taajuusmoduloidun siniaallon $x(t) = \sin\big(2\pi f(t)t\big)$ kuvaajia. Ylinnä

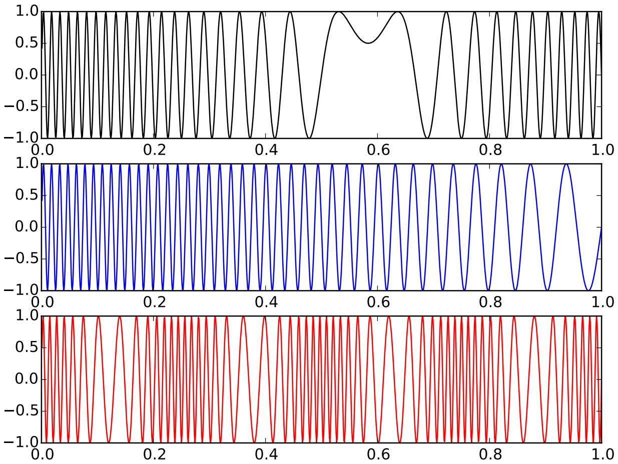
$$\begin{aligned} &f(t) = at + b, \quad \varphi(t) = 2at + b, \\ &\quad a = -60,\ b = 70, \end{aligned} \tag{1}$$

keskellä

$$\begin{aligned} &f(t) = \tfrac{1}{2}at + b, \quad \varphi(t) = at + b, \\ &\quad a = -60,\ b = 70, \end{aligned} \tag{2}$$

ja alinna

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(t) &= u\,\mathrm{sinc}(2\pi g t) + v, \\ \varphi(t) &= u\cos(2\pi g t) + v, \\ g = 4,&\ u = 30,\ v = 55. \end{aligned}$$



Ylin käyrä selittää sen, miksi madaltunut ääni ensimmäisessä yrityksessäni alkoi kohota uudelleen. Käytännön kokeiluissa on hyvä muistaa, että ihmisen kuuloalue on suunnilleen 20 Hz – 20 kHz. Esimerkeissä taajuudet on asetettu mataliksi kuvien selkeyden takia. Kuuntelutaajuudet ovat mieluusti korkeampia, ellei käytössä satu olemaan kunnollisia subwoofereita, kerrostalonaapurien riemastuttajia. Volyymin tulee olla tarpeeksi suuri. Se saadaan aikaan kertomalla aalto $x(t) = \sin\big(2\pi f(t)t\big)$ sopivalla luvulla. Itse käytin kertoimena Pythonin 16-bittisen kokonaisluvun maksimiarvoa 32767, siis $32767 \cdot \sin\big(2\pi f(t)t\big)$. Wave-moduli (komento `import wave`) tarjoaa rajapinnan, jolla voidaan lukea ja kirjoittaa wav-tiedostoja. Halutessasi toteuttaa äänen tuottamisen fiksummin lyö hakukoneeseen `PythonInMusic`. Alle on listattu edelliset käyrät piirtävä Python-koodi.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a, b = -60, 70
u, v, g = 30, 55, 4
n = 1000
T = []
A0, A1, A2 = [], [], []
for i in range(1,n+1):
    t = float(i)/n  # Aikaväli ]0,1]
    T.append(t)
    f0 = a*t+b
    f1 = a*t/2+b
    f2 = u*np.sin(2*np.pi*g*t)/(2*np.pi*g*t)+v
    A0.append(np.sin(2*np.pi*f0*t))
    A1.append(np.sin(2*np.pi*f1*t))
    A2.append(np.sin(2*np.pi*f2*t))

fig, (ax0, ax1, ax2) = plt.subplots(3, 1)
ax0.plot(T,A0,'k')
ax1.plot(T,A1,'b')
ax2.plot(T,A2,'r')
plt.show()

fig.savefig("aalto.pdf")
```

Antti Rasilan artikkelit Solmun numeroissa 1/2004 ja 2/2004 johdattelevat lukijan mutkattomasti Pythonin kiemuroihin.

Harjoitustehtäviä

1. Näytä derivoimalla, että kohdissa (1)–(3) pätee

$$f'(t)t + f(t) = \varphi(t).$$

2. Jos sallitaan sellaisetkin funktiot f, jotka eivät ole rajoitettuja origon ympäristössä, artikkelissa kuvatulla tavalla on mahdollista tuottaa esimerkiksi kosiniaalto $x(t) = \cos(2\pi t)$. Määritä sopivat $\varphi(t)$ ja $f(t)$ tälle kosiniaallolle.

3. Halutaan tuottaa ääniaalto, jonka taajuus on aluksi 440 Hz, ja joka laskeutuu pehmeästi kohti oktaavia alempaa rajataajuutta 220 Hz. Muokkaa taajuusfunktion $\varphi(t)$ lauseke kaavasta $1/(1+t^2)$ laittamalla siihen sopivat numeeriset parametrit sopiviin kohtiin. Määritä $f(t)$.

4. Ohjelmoi kanttiaalto taajuudeltaan 5 Hz.

5. Ohjelmoi sahanteräaalto, jonka taajuus nousee sekunnin aikana 5 Hz:stä 50 Hz:iin.