Väliarvolause: Mikä ihme ja miksi ihmeessä?

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Väliarvolauseelle on useita erilaisia muotoilutapoja. Oletetaan, että funktio $f(x)$ on derivoituva ja että sekä funktio itse että sen derivaatta ovat jatkuvia välillä $[a, b]$, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja $a < b$. Tällöin

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

jollain $\xi \in \,]a, b[$, eli $a < \xi < b$.

Tämä herättää luonnollisestikin ainakin kaksi kysymystä:

1. Onko tämä muka oikeasti tosi?
2. Jos oletetaan, että lause on tosi, niin onko tämä muka oikeasti hyödyllinen tulos?

Nähtyäni lauseen ensimmäistä kertaa uskoin melko nopeasti ensimmäisen kysymyksen vastauksen olevan myönteinen, mutta toisen kysymyksen vastauksen myönteiseksi uskominen vei huomattavan paljon kauemmin. Tavoitteena on nyt ensin perustella, miksi lauseeseen on järkevä uskoa, ja sitten antaa esimerkkejä, jotka toivottavasti valottavat sen käyttöä. Analyysin kurssillani syksyllä 2016 markkinoin lauseen todella hyödyllisenä työkaluna, jota itse käytän useita kertoja viikossa. Jokin syy tähän on oltava.

Lauseen perustelu

En kutsu tätä todistukseksi, koska tämä perustelu sisältää hieman enemmän käsien heiluttelua kuin kunnollisen todistuksen olisi syytä sisältää, ja matemaattista täsmällisyyttä tämä ei ole nähnytkään, mutta tällä menettelytavalla toivottavasti saavutetaan tietty luettavuus ja intuitiivisuus.

Funktio f on jatkuvasti derivoituva. Voidaan siis kirjoittaa

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt,$$

koska funktio $f(t)$ on funktion $f'(t)$ integraalifunktio. Integraalia taas on järkevä arvioida

$$(b - a) \min_{a \le t \le b} f'(t) \le \int_a^b f'(t)dt \le (b - a) \max_{a \le t \le b} f'(t),$$

eli integroitavan funktion arvo on jokin luku väliltä $[\min_{a \le t \le b} f'(t), \max_{a \le t \le b} f'(t)]$. Funktion derivaatta, eli $f'(t)$ on jatkuva, joten tarvittavan arvon on oltava jokin derivaatan arvo jossakin pisteessä $\xi \in [a, b]$. Tästä voidaan itse asiassa sulkea päätepisteet pois, eli $x \in \,]a, b[$. Tätä arvoa voidaan merkitä $f'(\xi)$.

Usein tarvitaan vain ylärajoja ja alarajoja, joita yllä olevassa perustelussakin käytettiin.

Neliöjuurten erotus

Toisinaan on hyödyllistä arvioida mitä on esimerkiksi

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{x},$$

kun $x \geq 1$. Tämän voi tehdä useammallakin tavalla, ensinnäkin ihan karkeasti laventamalla:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}},$$

ja tätä viimeistä muotoa voidaan arvioida

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tässä kuitenkin hyödynnettiin sitä, että neliöjuuri laventuu nätisti. Väliarvolauseen kanssa ei tästä tarvitse välittää, vaan lausekkeen voi käsitellä helposti laventamatta

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \int_x^{x+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}}.$$

Integraalia voi jälleen arvioida ylös- ja alaspäin, sillä integrointivälin pituus on 1:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \int_x^{x+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Jos lausekkeelle haluaa karkean arvion, voi jatkaa arviointia esimerkiksi näin:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2x}},$$

kun $x \geq 1$, jolloin epäyhtälön molemmille puolille saa termin, joka on muotoa "vakio kertaa $\frac{1}{\sqrt{x}}$". Näin ollen voi arvioida

$$\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{2x}} \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tämän avulla pystyy myös esimerkiksi lausekkeelle $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ johtamaan melko tarkan arvion.

Yleiset neliöjuurierotukset

Luonnollisestikin voidaan myös tarkastella erotusta $\sqrt{x+y}-\sqrt{x}$, missä $0 < y \leq x$:

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x} = \int_x^{x+y} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{y}{2\sqrt{\xi}},$$

missä ξ on jokin piste välillä $]x, x+y[$. Koska $x+y \leq 2x$, voidaan jälleen arvioida

$$\frac{y}{2\sqrt{2x}} \leq \sqrt{x+y}-\sqrt{x} \leq \frac{y}{2\sqrt{x}},$$

eli lokaalisti pisteen x ympäristössä neliöjuuri kasvaa suurin piirtein lineaarisesti, kertoimenaan karkeasti ottaen $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, sillä kun y on pieni, on termi $\frac{y}{2\sqrt{x+y}}$ hyvin lähellä lukua $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Tässä esimerkissä ei voitettu mitään siihen verrattuna, että olisi vain lavennettu. Kaikki lausekkeet eivät kuitenkaan toimi yhtä nätisti. Tarkastellaan nyt paria muuta esimerkkiä.

Hankalampien juurilausekkeiden erotus

Tarkastellaan erotusta $(x+1)^{5/4} - x^{5/4}$, missä x on ykköstä suurempi:

$$(x+1)^{5/4} - x^{5/4} = \int_x^{x+1} \frac{5}{4}t^{1/4}dt,$$

joten

$$\frac{5}{4}x^{1/4} \leq (x+1)^{5/4} - x^{5/4} \leq \frac{5}{4}(x+1)^{1/4}.$$

Tämän lausekkeen käsittely laventamalla olisi työlästä:

$$\begin{aligned}(x+1)^{5/4}-x^{5/4} &= \frac{(x+1)^{5/2}-x^{5/2}}{(x+1)^{5/4}+x^{5/4}} \\ &= \frac{(x+1)^5-x^5}{((x+1)^{5/4}+x^{5/4})(x^{5/2}+(x+1)^{5/2})} \\ &= \frac{5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}{((x+1)^{5/4}+x^{5/4})(x^{5/2}+(x+1)^{5/2})}.\end{aligned}$$

Nimittäjän voisi käsitellä helposti ylös- ja alaspäin arvioiden kuten edelläkin. Osoittaja puolestaan ei näytä niin yhteistyöhaluiselta. Senkin kyllä voi arvioida:

$$5x^4 \leq 5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 \leq 5(x+1)^4,$$

eli lauseke on käsiteltävissä, mutta huomattavasti työläämmin kuin edellä. Epätoivoiseksi homma menisi, jos jotenkin järkevästi lavennettavissa olevien termien sijaan päivää ilahduttaisikin vaikkapa lausekkeen

$$(x+1)^\pi - x^\pi$$

arviointi.

Logaritmi

Tarkastellaan erotusta

$$\ln(x+1) - \ln(x),$$

kun $x \geq 1$. Tätä voisi tarkastella kehittämällä erotuksen

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ns. *Taylorin sarjaksi* tai *Taylorin polynomiksi* ja arvioimalla sitä. Toinen tapa on väliarvolauseen avulla:

$$\ln(x+1) - \ln(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{t},$$

joten

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Lauseen käytöstä

Väliarvolause on differentiaali- ja integraalilaskennan välttämättömiä perustuloksia, joka tarvitaan teorian rakentamiseen. Lisäksi sillä on paljon sovelluksia muihin matematiikan osa-alueisiin. Yllä olevat esimerkit voi tietenkin luokitella vain söpöiksi esimerkeiksi, mutta käytännössä tällaiset arviot ovat tärkeitä useissa todistuksissa esimerkiksi lukuteoriassa. Vaikkapa todistettaessa Liouvillen lukua $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ transkendenttiseksi koostuu todistus kahdesta osasta: siitä, että todistetaan, että tätä lukua voi approksimoida todella hyvin rationaaliluvuilla, ja toisaalta siitä, että todistetaan, että algebrallisia lukuja ei voi approksimoida kovin hyvin rationaaliluvuilla (sopivasti mitattuna). Tämän jälkimmäisen asian todistamisessa käytetään väliarvolausetta (todistuksen yksityiskohtia voi ihmetellä esimerkiksi Solmussa 2014 (3) olleesta kirjoituksestani[1]).

Tehtäviä

1. Osoita, että

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha) \leq \beta$$

(kulmat ajatellaan radiaaneissa eikä asteissa, eli täysi ympyrä vastaa kulmaa 2π, suora kulma on $\pi/2$ ja niin edelleen).

2. Arvioi erotusta

$$\ln(x + y) - \ln x,$$

kun $0 < y \leq x$.

3. Olkoon $f(x)$ reaaliluvuilla määritelty reaalilukuarvoja saava jatkuvasti derivoituva funktio. Onko mahdollista, että $f(x)$ on kokonaisluku, kun x on kokonaisluku, ja $f'(x)$ ei ole kokonaisluku koskaan, kun x ei ole kokonaisluku?

[1] *Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia*, `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/irrationaalisuus_pohjassa.pdf`