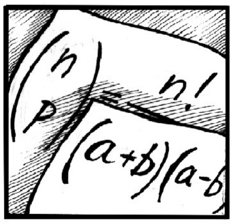

Banachin tulitikkuongelma

Markku Halmetoja

Ylen Teema-kanava esitti hiljattain puolalaisen Akson Studion valmistaman 13-osaisen draamadokumentin kuuluisan näyttelijän ja filmituottajan Eugeniusz Bodon (1899–1943) elämästä. Vähintään yhtä mielenkiintoisen elokuvan AS voisi tehdä matemaatikko Stefan Banachin (1892–1945) työstä ja elämänvaiheista. Sekä Bodon että Banachin tuotteliain kausi ajoittui maailmansotien välisille vuosille, molemmat olivat poikkeuksellisia persoonallisuuksia ja kummankin elämän loppuvaiheet olivat varsin traagisia. Bodon lyhyt elämäkerta löytyy osoitteesta [1]. Seuraavassa enemmän Banachista viitteisiin [2]–[6] perustuen.

Banach syntyi Krakowassa vuonna 1892 köyhään perheeseen ja joutui jo nuorena huolehtimaan elannostaan ja koulutuksestaan. Hän aloitti akateemiset opintonsa Krakowan teknillisessä korkeakoulussa, mutta tutustuttuaan hauskan sattuman kautta matematiikan professori Hugo Steinhausiin (1887–1972) hän siirtyi Krakowan yliopistoon opiskelemaan matematiikkaa. Steinhaus oli nimittäin iltakävelyllään kuullut kahden nuorukaisen keskustelevan Lebesguen mitasta, minkä on täytynyt tuntua professorista perin merkilliseltä. Lebesguen mitta- ja integraaliteoria oli tuohon aikaan, ehkä vieläkin, tutkijatasoista matematiikkaa, mistä nuorilla miehillä ei olisi luullut olevan hajuakaan. Steinhaus oli liittynyt nuorukaisten, Banachin ja Otto Nikodymin (1887–1974) keskusteluun, mikä johti Banachin matemaattisen uran alkamiseen. Steinhausin ohjaamana hän julkaisi väitöskirjansa vuonna 1922. Samana vuonna hänestä tuli Lwówin yliopiston ylimääräinen matematiikan professori.

Banachin väitöskirja on tieteellisesti erittäin merkittävä. Hän loi siinä abstrakteja vektoriavaruuksia koskevan teorian, johon jokainen yliopistossa matematiikan syventäviä opintoja harrastava saa nykyisin tutustua. Tietynlaisia vektoriavaruuksia kutsutaan hänen mukaansa Banachin avaruuksiksi. Väitöskirjan tekemistä pidetään yleensä tutkijan henkilökohtaisen tieteellisen uran alkuna, mutta Banachin väitöskirjan on katsottu olleen kokonaan uuden matematiikan alan, funktionaalianalyysin, alku.

Banachin työskentelytavat olivat poikkeukselliset. Sen sijaan, että hän olisi istunut yliopistolla työhuoneessaan pohdiskelemassa, hän vietti aikaa kahviloissa, joiden hälyssä hän pystyi täysin keskittymään tieteelliseen työhönsä, ohjaamaan opiskelijoitaan ja käymään matemaattisia väittelyjä muiden matemaatikoiden kanssa. Lwówin Skottilaisesta Kahvilasta (puolaksi Kawiarnia Szkocka; nimi ei viittaa Skotlantiin) tuli Banachin ansiosta matemaatikoiden kantapaikka. Ensin alkuun Banach piirteli teoreemoitaan pöytäliinoihin ja huonekaluihin, mutta kun kahvilan henkilökunta lopulta kyllästyi tähän, hankittiin iso vihko, joka tuotiin pöytään heti, kun Banach tai muita matemaatikoita ilmaantui paikalle. Vihko, Skottilainen Kirja, täyttyi vähitellen matemaattisista tehtävistä, joita toisinaan julistettiin kilpatehtäviksi. Ratkaisuista jaettiin palkintoja, jotka vaihtelivat kysymyksen vaativuuden mukaan kupillisesta kahvia brandypulloon. Eräät probleemat olivat niin syvällisiä, että niitä on selvitetty vasta vuosikymmeniä niiden kirjaamisen jälkeen. Vuonna 1935 Stanisłav Mazur (1905–1981) muotoili kirjaan tehtävän n:o 153 ja lupasi sen ratkaisijalle palkinnoksi elävän hanhen. Kyseessä oli erittäin vaikea ongelma ja ratkaisusta luvattu palkintokin oli tavanomaista mittavampi. Kysymys ratkesi vasta vuonna 1972. Mazur oli itse tilaisuudessa luovuttamaan ratkaisijalle, ruotsalaiselle Per Enflolle (1944–), palkinnoksi lupaamansa linnun. Tapahtuma televisioitiin Puolassa. Enflolla ei ollut mahdollisuutta kuljettaa hanhiparkaa elävänä Ruotsiin, joten se katsottiin parhaaksi syödä luovutusta seuranneessa iltajuhlassa.

Skottilainen kirja säilyi yli sota-ajan. Se sisältää kaikkiaan 193 matemaattista ongelmaa. Viimeinen niistä on Hugo Steinhausin hieman ennen Puolan itäosan saksalaismiehitystä muotoilema, lukiolaisellekin ymmärrettävä todennäköisyyslaskennan tehtävä. Aiheen siihen antoi Banachin taukoamaton tupakointi ja tehtävää kutsutaankin *Banachin tulitikkuongelmaksi.* Alkuperäinen sanamuoto on kirjoittajalle tuntematon, mutta eri lähteiden perusteella tuntuisi järkevältä muotoilla se seuraavasti:

Taskussasi on kaksi tikkuaskia, joissa kummassakin on n tikkua. Tulta tarvitessasi otat sattumanvaraisesti toisen askeista, käytät tikun ja palautat askin taskuun. Kuinka monta tikkua todennäköisesti on jäljellä, kun käytät toisesta askista viimeisen tikun?

Todennäköinen määrä on kätevintä ajatella jäljellä olevien tikkujen lukumäärän odotusarvoksi. Olkoon siis satunnaismuuttuja X = *jäljellä olevien tikkujen lukumäärä, kun toisen askin viimeinen tikku tulee käytetyksi.* Aluksi on muodostettava X:n todennäköisyysjakauma eli määritettävä $\mathrm{P}(\{X=k\})$, missä $k=1,2,\ldots,n$, ja laskettava sitten summa

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot \mathrm{P}(\{X=k\}) = \mu_n.$$

Nimetään askit A:ksi ja B:ksi. Tapaus, jossa A-askissa on jäljellä k tikkua ja B-askissa yksi tikku, voi toteutua monella tavalla. Eräs mahdollinen valinnoista muodostuva jono näyttää seuraavalta:

$$\underbrace{A,B,B,A,B,B,\ldots,B,A,B,B,A}_{2n-k-1\,\mathrm{kpl}}.$$

Jonossa on siis $n-k$ kappaletta A-valintaa ja $n-1$ kappaletta B-valintaa, yhteensä $2n-k-1$ valintaa. Näitä jonoja on

$$\binom{2n-k-1}{n-1}$$

kappaletta ja tällaisen jonon todennäköisyys

$$\binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}.$$

Tapahtuman $\{X=k\}$ kannalta on samantekevää kumpi askeista tyhjenee, joten

$$\mathrm{P}(\{X=k\}) = 2\cdot\binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}\cdot\frac{1}{2} = \binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1},$$

missä $k=1,2,\ldots,n$.

Odotusarvon

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}$$

laskeminen onnistunee parhaiten hieman epähavainnollista aputulosta käyttäen. Merkitään

$$u(n,k) = \mathrm{P}(\{X=k\}) = \binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1},$$

kun $k=1,2,\ldots,n$ ja $u(n,n+1)=0$. Jakauman todennäköisyyksien summa on 1, joten

$$\sum_{k=1}^{n} u(n,k) = 1 \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} u(n,k+1) = 1-u(n,1).$$

Lasketaan aluksi

$$\begin{aligned}
&(n-k)u(n,k)\\
&= (n-k)\binom{2n-k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}\\
&= (n-k)\frac{(2n-k-1)!}{(n-k)!(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1}\\
&= \frac{(2n-k-1)}{2}\,\frac{\big(2n-(k+1)-1\big)!}{\big(n-(k+1)\big)!(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(k+1)-1}\\
&= \left(n-\frac{k+1}{2}\right)\binom{2n-(k+1)-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(k+1)-1}\\
&= n\cdot u(n,k+1) - \tfrac{1}{2}(k+1)\cdot u(n,k+1).
\end{aligned}$$

Siis kaikilla $k=1,2,\ldots,n$

$$n\cdot u(n,k) - k\cdot u(n,k) = n\cdot u(n,k+1) - \tfrac{1}{2}(k+1)\cdot u(n,k+1).$$

Laskemalla yhteen nämä yhtälöt saadaan

$$n-\mu_n = n(1-u(n,1)) - \tfrac{1}{2}(\mu_n - u(n,1)),$$

mistä seuraa

$$\mu_n = (2n-1)u(n,1) = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}.$$

Aktiivinen lukija halunnee pohtia aiheeseen liittyen muutamaa kysymystä. Ehkäpä joku innostuu selvittämään niitä tulevissa Solmuissa.

i) WolframAlphalla ([7]) lasketut

$$\mu_{10} = 3,52, \quad \mu_{20} = 5{,}01, \quad \mu_{50} = 7{,}96, \quad \mu_{100} = 11{,}27$$

viittaavat siihen, että jono (μ_n) on aidosti kasvava. Osoita, että näin todella on.

j) Tuntuu selvältä, että $\mu_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tutki oletusta Stirlingin kaavan

$$n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

avulla.

k) Jakauman todennäköisyyksien summa on 1:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1} = 1. \tag{1}$$

Tämä summa tulisi voida näyttää toteen myös todennäköisyyksiin viittaamatta. Alkuun pääsemiseksi osoita, että (1) voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa muotoon

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m+p}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{p} = 2^m. \tag{2}$$

Summa (2) on huomattavasti mukavampi pyöriteltävä kuin summa (1). Osoita siis, että (2) pätee.

Lopuksi vielä hieman historiaa. Toisen maailmansodan alkajaisiksi Puola jaettiin kahteen osaan. Neuvostoliitto miehitti maan itäosan, johon myös Lwów kuului, ja Natsi-Saksa miehitti maan länsiosan. Vuonna 1939 alkaneesta venäläismiehityksestä huolimatta Banachin kahvilatyöskentely jatkui kesään 1941 asti, jolloin Saksan armeija valtasi Lwówin. Kolme päivää valtauksen jälkeen natsit teloittivat yliopiston juutalaissyntyiset opettajat. Yliopiston toiminta halvaantui suurelta osin. Kuitenkin professori Stefan Weiglin (1883–1957) johtama mikrobiologian laitos sai jatkaa toimintaansa, sillä Weigl pyrki kehittämään seerumia vaatetäiden levittämää pilkkukuumetta vastaan. Täit ja niiden levittämät taudit olivat suuri riesa rintamajoukoille. Banach ja monet muutkin professorit ja älymystön edustajat pelastuivat Weiglin ansiosta, sillä hän värväsi heidät täiden kasvatusalustoiksi. Nettisivulla [6] kerrotaan yksityiskohtaisesti, minkälaisella järjestelyllä täit saatiin imemään ruokkijoidensa verta. Siellä on muutakin tietoa miehitysjaksojen aikaisista hirveyksistä. Kun Neuvostoliiton joukot työnsivät saksalaiset pois Lwówista vuonna 1944, Banach palasi yliopistoon käynnistämään matematiikan laitosta, mutta kuoli vuotta myöhemmin keuhkosyöpään. Alussa mainittu Bodo puolestaan kuoli nälkään venäläisellä vankileirillä vuonna 1943. Lwówin venäläismiehitys jatkui Neuvostoliiton hajoamiseen asti. Nykyisin kaupunki kuuluu Ukrainan läntiseen osaan ja sen ukrainankielinen nimi on Lviv. Skottilainen Kahvila on restauroitu ja sen nähtävyytenä on kopio Skottilaisesta Kirjasta.

Viitteet

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Eugeniusz_Bodo`

[2] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Banach.html`

[3] Klaus Vala, Pisteen neliöimisestä, Art House 1990.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Scottish_Book`

[5] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Scottish_Book.html#s5`

[6] `http://www.lwow.home.pl/Weigl/in-memoriam.html`

[7] `http://www.wolframalpha.com/`