



Aarrearkkujen jakoa

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Eräs tarina kertoo testamentista, jossa oli jätetty perinnöksi aarrearkkuja melko erikoisella tavalla. Tarina kuuluu seuraavasti:

Vanha merimies kuoli ja jätti kolmelle lapselleen perinnöksi 17 aarrearkkua. Testamentissa hän määräsi, että vanhimman on saatava $\frac{1}{3}$, keskimmäisen $\frac{1}{2}$ ja nuorimman $\frac{1}{9}$ aarrearkkuista. Aarrearkkuja tai niiden sisällä olevia aarteita ei saanut jakaa osittaisina, eikä aarrearkkuja saanut myydä ja näin jakaa niistä saatavaa tuottoa. Aikansa jakoa pähkällytyään merimiehen lapset päättivät käydä kysymässä isänsä vanhalta merimiesystävältä apua ongelman ratkaisuun. Ystävä kaivoi esiin oman aarrearkkunsaa ja käski lisätä sen jakoon mukaan. Pian lapset saivat aarrearkut jaettua – ja palauttivat isänsä ystävälle aarrearkun takaisin.

Mitä jaossa oikein tapahtui? Tarkastellaan tapahtumia aivan alusta lähtien. Merimiehen jättämän testamentin mukaan hänen lapsiensa olisi pitänyt saada

$$\frac{1}{2} \cdot 17 = 8,5, \quad \frac{1}{3} \cdot 17 \approx 5,7 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{9} \cdot 17 \approx 1,9$$

aarrearkkua. Toisaalta tällainen jako ei ole testamentin ehtojen mukaan mahdollinen, koska vain kokonaisia aarrearkkuja sai jakaa. Kun kuolleen merimiehen ystävä antoi jakoon mukaan yhden arkun lisää, meni jako tasan. Lapset nimittäin saivat

$$\frac{1}{2} \cdot 18 = 9, \quad \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{9} \cdot 18 = 2$$

aarrearkkua. Koska $9+6+2=17$, niin lapset pystyivät palauttamaan isänsä ystävälle aarrearkun takaisin.

Merimiehen testamentissa oli useampiakin kummallisuuksia. Sen lisäksi, ettei hän jättänyt samankokoista perintöä jokaiselle lapselleen, hän jätti perinnön, jota ei voinut jakaa täysin sääntöjen mukaan. Lisäksi testamentti on osan aarrearkkujen suhteen hyvin salaperäinen, eikä kerro, mitä niille olisi tehtävä. Nimittäin

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} < 1$$

eli kaikkia aarrearkkuja ei jaeta lainkaan – ainakaan merimiehen lapsille.

Milloin testamentin määräämä jako olisi ollut mahdollinen?

Mietitäänpä, millä aarrearkkujen määrällä testamentin määräämä jako olisi ollut mahdollinen. Selvästi, jos aarrearkkuja olisi alun perin ollut nolla, olisi jako voinut tehdä – kukin merimiehen lapsista olisi saanut nolla aarrearkkua. Kun aarrearkkujen määrä taas on positiivinen, on sen oltava jaollinen kullakin luvuista 2, 3 ja 9. Tarkastelemalla positiivisia kokonaislukuja havaitaan, että pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen näillä kolmella luvulla, on 18. Täten myös kaikki luvut $18n$, missä $n = 0, 1, 2, \dots$, ovat jaollisia luvuilla 2, 3 ja 9. Toisaalta mikään kokonaisluku, joka on lukujen $18n$ ja $18(n+1)$ välissä, ei voi olla jaollinen kaikilla luvuista 2, 3 ja 9, koska silloin pienin positiivinen kokonaisluku, joka olisi näillä kolmella jaollinen, olisi pienempi kuin

18. Täten testamentin määräämä jako on mahdollinen täsmälleen silloin, kun aarrearkkuja on $18n$ kappaletta, missä $n = 0, 1, 2, \dots$

Miten aarrearkut sitten jaetaan näissä tilanteissa? Testamentin ehtojen mukaan lapset saavat

$$\frac{1}{2} \cdot 18n = 9n, \quad \frac{1}{3} \cdot 18n = 6n \quad \text{ja} \quad \frac{1}{9} \cdot 18n = 2n$$

aarrearkkua. Jakamatta jää

$$18n - 9n - 6n - 2n = n$$

aarrearkkua.

Merimiehen ystävä voi antaa useamman aarrearkun

Oletetaan, että merimiehen ystävällä olisi ollut mieltävaltaisen monta aarrearkkua, jotka hän olisi voinut antaa jakoon mukaan, jos hän olisi tiennyt saavansa ne takaisin. Olkoon ystävän antamien aarrearkkujen lukumäärä k . Edellisen luvun perusteella aarrearkut saadaan jaettua testamentin ehtojen mukaan täsmälleen silloin, kun niitä on $18n$, missä $n = 0, 1, 2, \dots$. Siis ennen kuin merimiehen ystävä antaa aarrearkkunsaa mukaan jakoon, on aarrearkkuja $18n - k$. Tehtävässä jaosta jää edellisen luvun perusteella n aarrearkkua jakamatta. Koska merimiehen ystävä haluaa saada aarrearkkunsaa takaisin, on jakamatta jääviä aarrearkkuja oltava vähintään niin paljon kuin hänen antamiaan. Siis on oltava $n \geq k$.

Mietitään nyt, mitä ehto $n \geq k$ tarkoittaa alkuperäisen arkkujen määrän kannalta pienillä luvun n arvoilla. Kun $n = 0$, niin luku k on myös nolla. Kun $n = 1$, niin $k \leq 1$ eli $k = 0$ tai 1 . Siis tällöin aarrearkkuja on 17 tai 18 kappaletta alunperin. Voidaan kirjoittaa kaikki mahdolliset aarrearkkujen alkuperäiset määrät, kun $n \leq 4$:

$$0, 17, 18, 34, 35, 36, 51, 52, 53, 54, 68, 69, 70, 71, 72.$$

Vastaavalla tavalla voidaan kirjoittaa kaikki mahdolliset arkkujen määrät, kun $n \leq 16$. Tämän tarkempi pohdinta jätetään lukijalle.

Entäpä, mitä tapahtuu, kun $n \geq 17$? Tällöin merimiehen ystävä voi antaa

$$0, 1, 2, \dots, 16 \text{ tai } 17$$

aarrearkkua ja saada ne kaikki takaisin. Siis arkkujen lukumäärät

$$18n - 17, 18n - 16, 18n - 15, \dots, 18n - 1 \text{ ja } 18n$$

ovat mahdollisia, kun $n \geq 17$. Toisaalta selvästi myös $18n - 18 = 18(n - 1)$ on mahdollinen. Täten kaikki aarrearkkujen määrät $18n$, missä $n \geq 16$, ovat mahdollisia. Siis kaikki aarrearkkujen määrät, jotka ovat vähintään $18 \cdot 16 = 288$ toteuttavat halutut ehdot.

Millaisilla osuuksilla jako olisi onnistunut?

Millaiset jako-osuudet merimiehen olisi pitänyt kirjata testamenttiin, jotta hänen lapsensa olisivat saaneet kokonaisia aarrearkkuja perinnöksi? Aarrearkkuja oli 17 ja luku 17 ei ole jaollinen millään muilla positiivisilla kokonaisluvulla kuin luvuilla 1 ja 17. Täten kunkin lapsen saama osuus aarrearkuista olisi pitänyt olla $\frac{n}{17}$, missä $n = 0, 1, \dots, 17$. Lisäksi kaikki aarrearkut olisivat tulleet jaetuiksi, jos lapsien saamien osuuksien summa on 1. Tällaisia jakoja ovat esimerkiksi

$$\frac{0}{17}, \quad \frac{1}{17}, \quad \frac{16}{17},$$

$$\frac{10}{17}, \quad \frac{2}{17}, \quad \frac{5}{17}$$

ja

$$\frac{6}{17}, \quad \frac{7}{17}, \quad \frac{4}{17},$$

missä jako-osuudet ovat vanhimmasta nuorimpaan. Lukijan pohdittavaksi jätetään selvittää kaikki mahdolliset jako-osuudet.