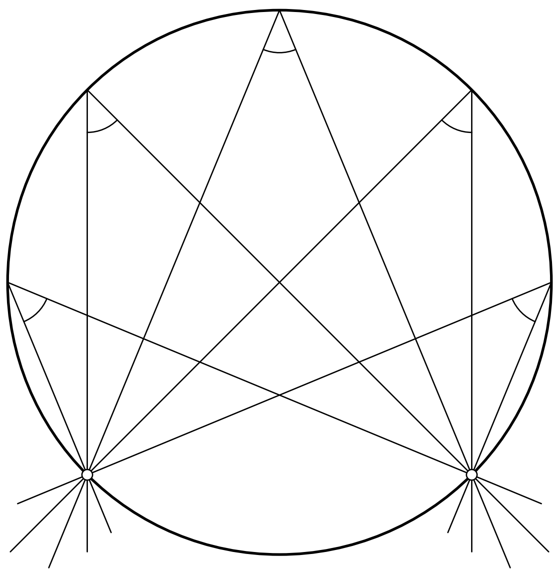
Sata lukion matematiikan tehtävää



$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

Markku Halmetoja

Sisältö

Saatteeksi

Tämä kokoelma sisältää tehtäviä ylioppilaskokeista, matematiikkakilpailuista sekä vanhoista harjoitus- ja oppikirjoista. Merkintä [vvvv] viittaa ylioppilastehtävään, [VMK] (vuosiluvulla tai ilman) valtakunnalliseen matematiikkakilpailuun ja [Kappa] ruotsalaiseen opettajille tarkoitettuun matematiikkakilpailuun. Uusien tehtävien lisäksi mukana on Mäntän lukiolaisille laatimiani koe- ja harjoitustehtäviä. Muutamia niistä julkaistiin *Matematiikan taito*-sarjan viimeisessä versiossa.

Tehtävien valinnan kantavana periaatteena on ollut välineistä riippumattoman matematiikan esilläpito. Laskinta tarvitaan enintään viidesosassa tehtävistä ja tavallinen funktiolaskin on riittävä. Mielestäni symbolisen laskennan salliminen ylioppilaskokeessa ja uusimman opetussuunnitelman rakentaminen sen varaan on vakava virhe, mikä yhä selvemmin tulee näkymään päättelyharjoituksen surkastumisen takia yleisen ymmärrystason heikkenemisenä. Toivon tämän tehtäväkokoelman osaltaan antavan virikkeitä laskimen käyttöä monipuolisempaan matemaattiseen pohdintaan.

Tehtävien vaikeustaso vaihtelee helpohkoista vaativiin. Vaativuus on kuitenkin suhteellinen käsite. Opettajan näkökulmasta yksi matematiikan kiehtovimmista piirteistä on, että vaikka tehtävä on omasta mielestä ollut vaikea, saattaa luokassa istua oppilas, joka oivaltaa sen hetkessä.

Vaikka tehtäväryhmät on otsikoitu suunnilleen lukion kursseja vastaaviksi, tarvitaan monessa kysymyksessä tietoja usean kurssin alueelta. Lukion oppimäärä on hallittava kokonaisuutena. Eräät todistustehtävät ratkeavat parhaiten induktiolla, joka tosin ei kuulu nykyiseen opetussuunnitelmaan. Täten kokoelma sopiikin parhaiten matematiikkaa harrastavalle, jo lähes koko lukion oppimäärän opiskelleelle lukiolaiselle syventäväksi kertausmateriaaliksi.

Kokoelmaan sisältyy myös vastauksia ja opastuksia sisältävä luku. Todistustehtäviin annetaan enintään vihjeitä, sillä niistä voi suoriutua monella eri tavalla. Yksinkertaiseenkin tehtävään voi löytyä useita ratkaisuja, joten yksikäsitteistä ”malliratkaisua” ei aina ole olemassa.

Vaativan tehtävän ratkaiseminen edellyttää sinnikkyyttä. Turhienkin yritysten yhteydessä ongelma useimmiten sisäistyy ja ratkaisu tai siihen johtava ajatus voi putkahtaa mieleen odottamattomassa tilanteessa. Aivot toimivat sillä tavalla. Toivotan kokoelman tehtäviin tarttuvalle sitkeyttä ja onnistumisen elämyksiä!

Tampereella toukokuussa 2017 ***Markku Halmetoja***.

1 Lukuja ja lausekkeita

1. Osoita, että $3^n \equiv 3 \pmod 6$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

2. Osoita, että $2(2n+1)$ ei ole minkään kokonaisluvun neliö.

3. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad \neq bc$ ja $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$x \notin \mathbb{Q} \implies \frac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}.$$

4. Osoita, että jos kokonaisluku n on kahden kokonaisluvun neliöiden summa, niin myös $2n$ on kahden kokonaisluvun neliöiden summa.

5. Olkoon $p\,(>3)$ alkuluku. Osoita, että $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 24.

6. Todista, että

$$z^n - x^n = (z-x) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} x^k$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

7. Osoita, että jos $a\,(>1)$ ja $n\,(>1)$ ovat kokonaislukuja ja $a^n - 1$ on alkuluku, niin $a = 2$ ja n on alkuluku.

8. Eräässä virastossa on naisia enemmän kuin miehiä. Jos naisten määrää vähennetään $p\,\%$ ja miesten määrää lisätään $q\,\%$, niin naisia ja miehiä on yhtä paljon.
a) Kuinka monta prosenttia miesten määrä on naisten määrästä?
b) Kuinka monta prosenttia naisten määrä on henkilöstön kokonaismäärästä?
c) Jos johdannossa mainitut muutokset toteutetaan ja sen seurauksena henkilöston kokonaismäärä pysyy ennallaan, niin mikä yhtälö vallitsee p:n ja q:n välillä?

9. Fermat[1] otaksui, että luvut $F_k = 1 + 2^{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ ovat alkulukuja. Sata vuotta myöhemmin Euler[2] näytti yhtälöiden $2^4 + 5^4 = 641$ ja $1 + 5 \cdot 2^7 = 641$ avulla, että $641 \mid F_5$. Osoita tämä jaollisuus.

10. Osoita, että edellisen tehtävän *Fermat'in luvut* $F_k = 1 + 2^{2^k}$ toteuttavat kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ yhtälön

$$F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

Miten tästä seuraa, että alkulukuja on ääretön määrä?

[1] Pierre de Fermat (1601–1665), ranskalainen matemaatikko.
[2] Leonhard Euler (1707–1783), sveitsiläinen matemaatikko.

2 Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

11. Ratkaise kaikilla a:n arvoilla yhtälö $ax = a + x$.

12. Ratkaise yhtälö $|a - x| = |x - b|$.

13. Olkoon $a \neq 0$. Osoita, että

$$|a| + \frac{1}{|a|} \geq 2.$$

Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

14. Millä n:n arvoilla

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 40?$$

15. Osoita, että jos r on yhtälön $x^3 - 3x + 1 = 0$ juuri, niin myös $r^2 - 2$ on tämän yhtälön juuri.

16. Osoita, että $n < 2^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

17. Yhtälön $ax^2 - bx + c = 0$ kertoimet ovat kokonaislukuja ja sillä on kaksi erisuurta ratkaisua välillä $]0,1[$. Osoita, että $|a| \geq 5$. [VMK1979]

18. **a)** Olkoot $a > 0$, $b > 0$ ja $0 < p < 2$. Näytä, että

$$pab < a^2 + b^2.$$

b) Osoita, että jos suorakulmaisella kolmiolla ja neliöllä on sama pinta-ala, niin kolmion piiri on pidempi kuin neliön piiri. [2007K15][1]

19. Astetta n oleva polynomifunktio p toteuttaa ehdon

$$p(k) = \frac{1}{k}, \quad \text{kun} \quad k = 1, 2, \ldots, n, n+1.$$

Osoita, että $p(n+2) = 0$, kun n on pariton. [VMK]

20. Osoita: Jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja joille $\frac{m}{n} < \sqrt{7}$, niin myös

$$\frac{m}{n} + \frac{1}{mn} < \sqrt{7}. \quad \text{[VMK1979]}$$

[1] Yhdeksän pisteen jokeritehtävä.

3 Geometriaa

21. Osoita, että suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on suunnikkaan kulmista riippumaton.

22. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat a ja b. Suoran kulman puolittaja jakaa kolmion kahteen osaan. Laske osien pinta-alat.

23. Kolmion sisäpuolella olevan mielivaltaisen pisteen P kautta piirretään sivujen suuntaiset suorat. Tällöin muodostuu kolme pienempää kolmiota, joiden yhteisenä kärkipisteenä on P. Ilmaise alkuperäisen kolmion ala A pienten kolmioiden alojen A_1, A_2 ja A_3 avulla. [1963K7]

24. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn neliön (kaksi sivua yhtyy kateetteihin ja yksi kärki on hypotenuusalla) pinta-ala on kolmasosa kolmion alasta. Laske kolmion terävien kulmien asteluvut.

25. Ympyrän jänteet AB ja CD tai niiden jatkeet leikkaavat pisteessä P. Osoita, että

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

26. Johda katkaistun kartion tilavuuden kaava.

27. Neliöpohjaisen suoran pyramidin sivutahkot muodostavat pohjan kanssa 40°:een kulman. Määritä sivutahkojen välinen kulma? [1995S8]

28. Ympyrän kehältä valitaan piste. Se keskipisteenä piirretään toinen ympyrä, joka erottaa ensin mainitun ympyrän pinta-alasta puolet. Laske ympyröiden säteiden suhde 2-desimaalin tarkkuudella.

29. Kolmion $\triangle ABC$ sivuilta AB, BC ja CA valitaan pisteet M, N ja P siten, että kolmioiden $\triangle AMP$, $\triangle BNM$ ja $\triangle CPN$ sisään piirrettyjen ympyröiden säde on r_1. Kolmion $\triangle MNP$ sisään piirretyn ympyrän säde on r_2. Osoita, että $r_1 + r_2 = r$, missä r on kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretyn ympyrän säde. [Kappa2014]

30. Kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat r ja R. Määritä ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys.

4 Analyyttista geometriaa ja vektoreita

31. Määritä suorien $110x^2 - 221xy + 110y^2 = 0$ välinen kulma asteen kymmenyksen tarkkuudella.

32. Osoita, että hyperbelin
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
pisteiden sen asymptooteista $bx \pm ay = 0$ laskettujen etäisyyksien tulo on vakio.

33. Määritä käyrien $y = 1 + x^2$ ja $x^2 + y^2 = 1$ yhteiset tangentit.

34. Luvuista a, b, c vähintään yksi on nollasta eroava. Origon kautta kulkeva suora l on kohtisuorassa tasoa $T: \ ax + by + cz = 1$ vastaan. Missä pisteessä suora leikkaa tason?

35. Vektorin $\mathbf{r}$ sekä kantavektorien $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ väliset kulmat ovat α, β ja γ. Osoita, että
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

36. Pisteiden $P = (0, 0, 1)$ ja $Q = (3, 4, 0)$ määräämä suora lävistää origokeskisen yksikköpallon. Laske leikkauspisteiden lyhin pallon pintaa pitkin mitattu etäisyys, ns. *geodeettinen etäisyys*.

37. Ruoveden maantieteellinen sijainti on 24° itäistä pituutta, 62° pohjoista leveyttä. Galapagossaaret sijaitsevat päiväntasaajalla kohdassa 90° läntistä pituutta. Kuinka pitkä matka on Ruovedeltä Galapagossaarille linnuntietä kulkien? Maapallon säde on 6370 km.

38. Olkoot $abc \neq 0$, $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ ja $C = (0, 0, c)$. Osoita, että $\triangle ABC$ on teräväkulmainen.

39. Osoita, että vektori
$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$
on kohtisuorassa samasta pisteestä lähtevien vektorien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ kärkien määräämää tasoa vastaan.

40. Mistä xy-tason pisteistä paraabeli $y = x^2$ näkyy suorassa kulmassa?

5 Trigonometriaa

41. Osoita, että $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$.

42. Osoita, että jos $\tan x \in \mathbb{Q}$, niin myös $\cos 2x \in \mathbb{Q}$ ja $\sin 2x \in \mathbb{Q}$.

43. Osoita, että yhtälön $x^3 - 3x + 1 = 0$ ratkaisut ovat

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} \quad \text{ja} \quad x_3 = 2\cos\frac{8\pi}{9}.$$

44. Määritä funktion $f(x) = a\cos x + b\sin x$ pienin ja suurin arvo.

45. Maan ja Marsin etäisyydet Auringosta ovat 150 ja 228 miljoonaa kilometriä. Niiden kiertoradat ovat likimain ympyröitä. Maan kiertoaika on 365 vuorokautta ja Marsin vastaavasti 687 vuorokautta. Eräänä hetkenä planeetat ovat linjassa Auringon kanssa sen samalla puolella. Kuinka kaukana planeetat ovat toisistaan 100 vuorokautta tuon hetken jälkeen?

46. **a)** Tasakylkisen kolmion kantakulma on α ja huippukulma on γ. Osoita, että

$$2\cos^2\alpha \;=\; 1 \;-\; \cos\gamma.$$

b) Kolmion kulmat $\alpha, \beta, \gamma \neq 90°$. Osoita, että

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \;=\; \tan\alpha\,\tan\beta\,\tan\gamma.$$

47. Määritä r-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen **a)** 10-kulmion, **b)** 5-kulmion sivun pituus.

48. Ratkaise yhtälö $\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x = \frac{1}{4}$.

49. Todista *Ptolemaioksen*[1] lause: Jos e ja f ovat jännenelikulmion lävistäjät ja a, b, c, d sen sivut kiertojärjestyksessä, niin

$$ac + bd \;=\; ef.$$

50. Osoita, että säännöllisen 7-kulmion sivun s ja eripituisten lävistäjien a ja b välillä vallitsee yhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{s}. \qquad [1975S10]$$

[1] Klaudios Ptolemaios (85–165), kreikkalainen tähtitieteilijä ja matemaatikko.

6 Differentiaalilaskentaa

51. Pistemäisen valolähteen etäisyys pallon keskipisteestä on a. Määritä pallon säde siten, että valaistu kalotti on suurin mahdollinen.

52. Nelitahokkaassa $ABCD$ on $AC = BC = AD = BD = s$. Mikä on nelitahokkaan suurin mahdollinen tilavuus? [1970K10]

53. Määritä funktion $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2$ ääriarvot.

54. Määritä funktion $f(x) = x^x$ **a)** pienin arvo, kun $x > 0$, **b)** pienin arvo.

55. Määritä Newtonin menetelmällä yhtälön $x^3 - 3x + 1 = 0$ ratkaisujen 6-desimaaliset likiarvot. (Vrt. teht. 15 ja 43.)

56. Onko funktiolla

$$g(x) \;=\; \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

käänteisfunktio? Myönteisessä tapauksessa määritä se.

57. Käyrän

$$y \;=\; \frac{1+x^2}{x}$$

mielivaltaiseen pisteeseen $P(a, b)$ asetetty tangentti ja käyrän asymptootit muodostavat kolmion. Osoita, että kolmion ala ei riipu tangentin sivuamispisteestä P. [1998S9]

58. Funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_+$ yhtälön

$$f(xy) \;=\; f(x) + f(y). \tag{1}$$

a) Osoita, että jos f on jatkuva pisteessä $x = 1$, niin se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.
b) Osoita, että jos f on derivoituva pisteessä $x = 1$, niin se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan.
c) Laske $f'(x)$, kun $f'(1) = m$.
d) Miksi f, joka toteuttaa yhtälön (1) *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$, ei ole erityisen mielenkiintoinen?

59. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$4\sin^4\frac{x}{4} + 4\cos^4\frac{x}{4} \;=\; 3 + \cos x.$$

60. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$. Osoita, että $x^a|\ln x| \le (a\mathrm{e})^{-1}$ kaikilla $x \in]0,1[$.

61. Kappaletta, jonka massa on m, vedetään vaakasuoralla alustalla vakionopeudella. Pinnan ja kappalen välinen kitkakerroin on μ. Määritä kappaleen kulkusuunnan ja kappaletta vetävän voiman välinen kulma siten, että vetävän voiman itseisarvo on mahdollisimman pieni.

62. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

63. Osoita, että funktio

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$$

on aidosti kasvava välillä $]0,\pi[$.

64. Yhtälö $x^3-3xy+y^3=0$ määrittelee pisteen $x=1$ eräässä ympäristössä kolme derivoituvaa funktiota $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ ja $y=f_3(x)$. Määritä derivaattojen $f_1'(1)$, $f_2'(1)$ ja $f_3'(1)$ kaksidesimaaliset likiarvot. Ohje: Jos $y=f(x)$ on tällainen funktio, niin funktio $g(x)=x^3-3xf(x)+f(x)^3$ on vakio. Laske aluksi $g'(x)$.

65. Tutki funktion $g(x)=\log_x(\ln x)$ kulkua.

66. Kärjellään seisovan suoran ympyräpohjaisen kartion pohjan säde on 1,00 m ja korkeus 3,00 m. Kartioon aletaan pumpata vettä tasaisella nopeudella 0,020 m^3/min. Millä nopeudella kartion sisällä olevan vesipatsaan korkeus kasvaa hetkellä, jolloin se on 1,20 m?

67. Puolipallon muotoisen padan suuaukon säde on 1,00 m. Pataan alkaa virrata vettä nopeudella 0,050 m^3/min. Millä nopeudella veden pinta padassa nousee silloin, kun pata on puolillaan?

68. Suoran, ympyräpohjaisen kartion vaipan pinta-ala on π. Määritä kartion sisään mahtuvan suurimman pallon säde.

69. Luvut u ja v ovat positiivisia. Osoita, että

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{u^x+v^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{uv}.$$

70. Osoita, että epäyhtälön

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\ldots+\frac{20}{x-20} \geq \frac{70}{669}$$

ratkaisujoukko koostuu erillisistä väleistä, joiden yhteenlaskettu pituus on 2007.[1]

[1] Muunnelma vuoden 1988 IMO-tehtävästä. MT-sarjan seitsemäs osa julkaistiin v. 2007.

7 Integraalilaskentaa

71. Jatkuvan funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *keskiarvo* välillä $[0,x]$ määritellään seuraavasti:

$$G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Määritä keskiarvofunktion derivaatta $G'(x)$ ja lausu se funktionarvojen $f(x)$ ja $G(x)$ avulla. Osoita, että $G(x) \leq f(x)$, jos f on kasvava. Osoita edelleen, että tällöin myös G on kasvava. [2003S14]

72. Olkoon s_n harmonisen sarjan n:s osasumma. Osoita, että

$$\ln(1+n) \leq s_n \leq 1 + \ln n.$$

73. Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja

$$\phi_n(t) = \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n.$$

Osoita, että

$$\frac{2}{n+1} \leq \int_0^\pi \phi_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \pi.$$

74. Laske integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(u\cos\theta + v\sin\theta)^2},$$

missä u ja v ovat positiivisia reaalilukuja.

75. Muovista valmistetun pallon massa on jakautunut siten, että pallon sisällä olevan massan tiheys on suoraan verrannollinen etäisyyteen pallon keskipisteestä. Samasta materiaalista valmistetaan samalla periaatteella massaltaan kaksinkertainen pallo. Kuinka monta prosenttia sen säde on suurempi kuin ensin mainitun pallon säde?

76. Olkoon

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{kun} \quad x \neq 0 \quad \text{ja} \quad f(0) = 1.$$

Käyrä $y = f(x)$ rajoittaa välillä $[0,\pi]$ koordinaattiakselien kanssa alueen, joka pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

77. Käyrän ja koordinaattiakselien sekä suoran $x = a$ rajoittaman kuvion pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus on $\mathrm{e}^a - 1$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$. Määritä käyrän yhtälö.

78. Olkoon f ei-negatiivisten reaalilukujen joukossa määritelty funktio. Todista: Jos f on jatkuva ja aidosti vähenevä, niin funktio

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

toteuttaa epäyhtälön $F(u+v) \leq F(u)+F(v)$ kaikilla $u, v > 0$. [VMK1979]

79. Gravitaatiolain mukaan massat m ja M vetävät toisiaan puoleensa voimalla

$$G = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

missä r on massojen (niiden painopisteiden) välinen etäisyys ja γ on gravitaatiovakio.
a) Kuinka suuri työ tehdään, kun massa m kiihdytetään lepotilasta loppunopeuteen v?
b) Kuinka suuri työ tehdään, kun massa m viedään i) etäisyydelle x Maan pinnasta, ii) "äärettömän kauas"?
c) Millä lähtönopeudella massa m on ammuttava ylöspäin, jotta se pääsisi "äärettömän kauas"? (Tätä nopeutta kutsutaan *pakonopeudeksi.*)
d) Jos Maa romahtaisi mustaksi aukoksi, niin pakonopeus aukon tapahtumahorisontin rajalta eli *Schwarzschildin*[1] *säteen* etäisyydeltä pisteeksi kutistuneesta Maasta olisi valon nopeus c. Kuinka suuri on Maan Schwarzschildin säde?

80. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

a) Laske $I_0,\ I_1$ ja osoita, että

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \text{kun} \quad n \geq 2.$$

b) Osoita, että $I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1}$.

c) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

d) Todista *Wallisin*[2] *kaava*

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\left(1 + \frac{1}{2k}\right).$$

[1] Karl Schwarzschild (1873–1916), saksalainen fyysikko.
[2] John Wallis (1616–1703), englantilainen matemaatikko.

8 Kombinaatioita ja todennäköisyyslaskentaa

81. Noppaa heitetään, kunnes jokin silmäluku esiintyy toisen kerran. Satunnaismuuttuja X on heittojen lukumäärä. Laske X:n odotusarvo.

82. Kaksi pelaajaa heittää noppaa vuorotellen. Voittaja on se, joka ensiksi saa kuutosen. Millä todennäköisyydellä aloittaja voittaa pelin?

83. ”Kaikki-tai-ei-mitään” pelissä arvotaan 12 numeroa 24:stä. Päävoiton saa, jos sarakkeessa on kaikki tai ei yhtään oikein. Laske **a)** päävoiton todennäköisyys, **b)** todennäköisyys saada 7 oikein.

84. Eräs sairaus on keskimäärin yhdellä miljoonasta. Se todetaan testillä, joka antaa oikean tuloksen 99 %:n varmuudella riippumatta siitä, onko testattava sairas vai ei. Satunnaisesti valittu henkilö saa testistä positiivisen tuloksen. Millä todennäköisyydellä hänellä on sairaus?

85. Satunnaismuuttuja X on r-säteisen ympyrän sisältä valitun mielivaltaisen pisteen etäisyys keskipisteestä. Laske $\mathrm{E}X$.

86. Tehdas valmistaa tiivisterenkaita, joiden halkaisijan tulee olla 200 mm. Yksittäisen renkaan halkaisija ei kuitenkaan aina ole tavoitteen mukainen vaan noudattaa normaalijakaumaa keskiarvolla 200 mm ja keskihajonnalla 1 mm. Jos halkaisija poikkeaa keskiarvosta enemmän kuin 2,2 mm, niin rengas hylätään. Tehdas saa 10000 renkaan tilauksen. Kuinka monta rengasta on valmistettava, jotta melko tarkasti saataisiin vaadittu määrä hyväksyttäviä renkaita?

87. Olkoot $a > 0$, $f(x) = a\mathrm{e}^{-ax}$, kun $x \geq 0$ ja $f(x) = 0$ muualla. Osoita, että f on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Määritä X:n kertymäfunktio ja odotusarvo.

88. Olkoon p alkuluku. Osoita, että

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}.$$

89. Tennisturnaukseen osallistuu $2n$ pelaajaa. Kuinka monella eri tavalla ensimmäisen kierroksen pelit voidaan arpoa?

90. Laatikossa on 129 kolikkoa, joista yhdessä on kaksi klaavapuolta. Kun valitaan sattumanvaraisesti yksi kolikko ja heitetään sitä kahdeksan kertaa, saadaan joka kerta klaava. Millä todennäköisyydellä yhdeksännen heiton tulos on klaava?

9 Jonoja ja summia

91. Laske summa

$$s_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

92. Suppenevan geometrisen sarjan n:s osasumma on s_n ja sarjan summa on s. Lisäksi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s - s_n) = 2s.$$

Määritä sarjan suhdeluku.

93. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\textbf{a)}\quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\textbf{b)}\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

94. Olkoot $0 < \varepsilon < 1$ ja $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Osoita, että jono (u_n) suppenee ja määritä sen raja-arvo u. Mistä n:n arvosta alkaen $|u - u_n| < \varepsilon$?

95. Olkoon p_n todennäköisyys sille, että heitettäessä kolikkoa $2n$ kertaa saadaan n klaavaa. Osoita, että jono (p_n) on aidosti vähenevä. Määritä sen raja-arvo *Stirlingin*[1] *kaavan* (löydät sen netistä) avulla.

96. Millä x:n arvoilla funktio

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^n$$

on määritelty? Mitä arvoja se saa?

97. Kolmion pinta-ala on A. Siitä poistetaan sivujen keskipisteiden yhdysjanojen muodostama kolmio. Jäljelle jääneille kolmelle osakolmiolle toistetaan sama, ja näin jatketaan.
a) Kuinka paljon alkuperäisen kolmion pinta-alasta on jäljellä, kuin poisto-operaatio on suoritettu n kertaa?
b) Millä n:n arvoilla alkuperäisen kolmion pinta-alasta on jäljellä vähemmän kuin tuhannesosa?
c) Jääkö kolmiosta jäljelle mitään, kun poistamisprosessia jatketaan loputtomiin?

[1] James Stirling (1692–1770), englantilainen matemaatikko.

98. Olkoon T_n puolisuunnikassäännön integraalille

$$I = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$$

antama likiarvo, kun väli [0,1] on jaettu n:ään osaan. *Todista*[1], että $\lim T_n = I$ osoittamalla, että mielivaltaisesti valittua positiivista lukua ε vastaa kokonaisluku n_ε siten, että

$$n > n_\varepsilon \implies |T_n - I| < \varepsilon.$$

99. **a)** Funktio $g : [a,b] \to [a,b]$ on *kutistava*, jos on olemassa vakio $k \in]0,1[$ siten, että

$$|g(u) - g(v)| \;\le\; k|u - v|$$

kaikilla $u, v \in [a,b]$. Osoita, että kutistava funktio on jatkuva.
b) Piste ξ on funktion g *kiintopiste*, jos $g(\xi) = \xi$. Osoita, että kutistavalla funktiolla $g : [a,b] \to [a,b]$ on täsmälleen yksi kiintopiste.
c) Olkoon $g : [a,b] \to [a,b]$ kutistava. Osoita, että rekursiivisesti määritelty jono (x_n), missä $x_0 \in [a,b]$ ja $x_{n+1} = g(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, suppenee kohti g:n kiintopistettä.

100. Olkoon

$$\gamma_n \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{kaikilla} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Todista että jono (γ_n) suppenee osoittamalla, että se on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. (Raja-arvoa $\gamma = \lim \gamma_n$ kutsutaan *Eulerin vakioksi*.)

[1] Yleisesti määritellään: Jonon (u_n) raja-arvo on u, jos

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \;\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+ : \; n > n_\varepsilon \implies |u - u_n| < \varepsilon.$$

Havainnollisesti tämä merkitsee sitä, että etäisyys $|u - u_n|$ voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa ennalta valittu positiivinen luku valitsemalla n riittävän suureksi. Koulukirjoissa asia on joskus ilmaistu sanomalla, että n:n kasvaessa u_n ”lähestyy rajattomasti” lukua u.

Ohjeita ja vastauksia

1. $3^n - 3$ on kolmella jaollinen ja parillinen. Myös induktiotodistus onnistuu helposti.

2. Tutki parillisten ja parittomien lukujen neliöitä.

3. Tee vastaoletus.

6. Väite on selvästi tosi arvolla $n = 1$. Jos se on tosi arvolla n, niin

$$z^{n+1} - x^{n+1} = z^{n+1} - zx^n + zx^n - x^{n+1} = \dots.$$

8. **a)**

$$\frac{100-p}{100+q} \cdot 100\,\%.$$

b)

$$\frac{100+q}{200+q-p} \cdot 100\,\%.$$

c)

$$pq = 50(q-p).$$

9. Eulerin yhtälöistä seuraa, että $2^4 \equiv -5^4$ ja $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$. Eulerin aikaan kongruenssit olivat vielä tuntemattomia, joten hän ilmeisesti käytti tehtävässä olevia yhtälöitä sellaisinaan.

10. Todista yhtälö induktiolla. Osoita, että syt$\,(F_\imath, F_\jmath) = 1$, kun $\imath \neq \jmath$. Huomaa, että luvut F_k ovat parittomia. Siis, miksi nähdyn perusteella alkulukuja on ääretön määrä?

11. Jos $a \neq 1$, niin $x = \frac{a}{a-1}$. Jos $a = 1$, niin yhtälöllä ei ole ratkaisua.

12. Jos $a \neq b$, niin $x = \frac{a+b}{2}$. Entä jos $a = b$? Tämä on toistaiseksi yksinkertaisin keksimäni esimerkki, johon Wolfram-Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`) (ja ilmeisesti myös CAS-laskin) kompastuu.

14. n=1680.

16. Väite todistuu parhaiten induktiolla.

19. Tutki aluksi polynomifunktiota $q(x) = xp(x) - 1$.

20. Tee vastaoletus, jonka mukaan on olemassa $m, n \in \mathbb{Z}_+$, joille

$$\frac{m}{n} < \sqrt{7} \quad \text{ja} \quad \frac{m}{n} + \frac{1}{mn} > \sqrt{7}.$$

Yhtäsuuruus ei tule kysymykseen, koska $\sqrt{7}$ on irrationaalinen. Johda vastaoletuksesta ristiriita!

22. Alat ovat

$$A_a = \frac{a^2 b}{2(a+b)} \quad \text{ja} \quad A_b = \frac{ab^2}{2(a+b)}.$$

23. $A = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3})^2$.

24. 15° ja 75°.

26. Tilavuus

$$V = \frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2\right).$$

27. $\approx 126°$.

28. $\approx 1{,}16$.

30. Etäisyys $= \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

31. $\approx 5{,}5°$.

33. $y = 1$, $y = \pm 2x\sqrt{6} - 5$.

34. Leikkauspiste

$$P = \left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2}, \frac{b}{a^2+b^2+c^2}, \frac{c}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

36. Leikkauspisteet ovat $(0, 0, 1)$ ja $(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$. Geodeettinen etäisyys on $\arccos \frac{12}{13} \approx 0{,}395$.

37. Etäisyys ≈ 11200 km. Sijoita maapallo koordinaatistoon ”luonnollisella” tavalla ja muodosta R.:n ja G.:n paikkavektorit.

40. Suoran $y = -\frac{1}{4}$ pisteistä.

44. Suurin ja pienin arvo $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

45. ≈ 165 milj. km.

47. **a)** $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, **b)** $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

48. $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

49. Huomaa, että jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia.

51. $\frac{2}{3}a$.

52. $\frac{2\sqrt{3}}{27}s^3$.

53. $2\,(=f(0))$, minimi- ja samalla pienin arvo.

54. **a)** $(\frac{1}{\mathrm{e}})^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 0{,}6922$, **b)** $-1\,(=f(-1))$.

56. Käänteisfunktio

$$g^{-1}(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

58. **c)** $f'(x) = \frac{m}{x}$.

61. $\arctan\mu$.

64. Hyödynnä tehtävää 43.

65. Vaihda aluksi kantaluku x e:ksi.

66. $\approx 0{,}040\,\mathrm{m/min}$.

67. $\approx 0{,}018\,\mathrm{m/min}$.

68. $\sqrt{2}-1$.

69. Tutki funktiota

$$g(x) \;=\; \ln\left(\frac{u^x + v^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

70. Osoita aluksi, että yhtälön vasemman puolen määrittelemä funktio on aidosti vähenevä pystysuorien asymptoottiensa määräämillä väleillä.

71. $G'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - G(x))$.

72. Huomaa, että

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

74. $\frac{1}{uv}$.

75. $(\sqrt[4]{2}-1)\cdot 100\,\% \approx 19\,\%$.

76. 4π.

77. $y = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

79. **a)** $\frac{1}{2}mv^2$.
b) Olkoon r Maapallon säde. i) $W_x = \gamma mM(\frac{1}{r}-\frac{1}{x})$ ii) $W_\infty = \frac{\gamma mM}{r}$.
c)

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}.$$

d) $\approx 0{,}009\,\mathrm{m}$.

81. $\mathrm{E}X = 3\frac{251}{324}$.

82. $\frac{6}{11}$.

83. **a)**

$$\text{Päävoiton todennäköisyys} = \frac{\binom{12}{12}+\binom{12}{0}}{\binom{24}{12}} \approx 7{,}4\cdot 10^{-7}.$$

b)

$$\mathrm{P}(7\,\mathrm{ok}) = \frac{\binom{12}{7}\binom{12}{5}}{\binom{24}{12}} \approx 0{,}23.$$

84. $\approx 0{,}0001$.

85. $\mathrm{E}X = \frac{2}{3}r$.

86. 10286 rengasta.

87. Kertymäfunktio $F(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $F(x) = 1-\mathrm{e}^{-ax}$, kun $x \geq 0$. Odotusarvo $\mathrm{E}X = \frac{1}{a}$.

88. Osoita aluksi että

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2.$$

89. $n!\,(2n)!\,2^{-n}$.

90. $\frac{5}{6}$.

91. Jos $x = 1$, niin $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Jos $x \neq 1$, niin

$$s_n = \frac{x[1-(n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(x-1)^2}.$$

92. $\frac{2}{3}$.

93. Väitteet todistuvat helpoimmin induktiolla.

94. $|u - u_n| < \varepsilon$, kun

$$n > \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2}.$$

95. $\lim p_n = 0$.

96. $M_f =]1, \infty[$, $A_f =]\frac{1}{2}, \infty[$. $(f(x) = \frac{1}{2}x)$.

97. **a)** Jäljellä oleva ala n:n poistokerran jälkeen

$$A_n = (\tfrac{3}{4})^n A.$$

b) $n > 24$. **c)** Kolmiosta jää jäljelle ainakin kärkipisteet.

98. $|I - T_n| < \varepsilon$, kun $n > \lfloor \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \rfloor = n_\varepsilon$. Merkintä $\lfloor a \rfloor$ tarkoittaa pienintä kokonaislukua, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin a. T_n:n laskemisessa sovella tehtävän 93 b-kohtaa.

99. **b)** Tutki funktiota $h(x) = g(x) - x$.

100. Sovella puolisuunnikassääntöä sen osoittamiseen, että jono (γ_n) on alhaalta rajoitettu. Väite seuraa *monotonisen jonon suppenemislauseesta*. Sen mukaan kasvava, ylhäältä rajoitettu (vähenevä, alhaalta rajoitettu) jono suppenee. Lause lienee mainittu useimmissa lukion oppikirjoissa.