

SUPPEAA SUHTEELLISUUSTEORIAA ALUSTA ALKAEN

Lasse Pantsar

lasse.pantsar@ohjelmointipalvelu.fi

2017

SISÄLLYS

JOHDANTO	1
1 PERUSTEET.....	2
1.1 Ongelman asettelu	2
1.2 Perusoletukset.....	5
2 SEURAUKSET	7
2.1 Ajan suhteellisuus, erikoistapaus	7
2.1.1 Johdanto.....	7
2.1.2 Kaavan johtaminen.....	7
2.1.3 Tulos.....	10
2.1.4 Esimerkkejä.....	11
2.2 Pituuden suhteellisuus.....	15
2.2.1 Johdanto.....	15
2.2.2 Kaavan johtaminen.....	15
2.2.3 Tulos.....	18
2.2.4 Esimerkkejä.....	18
2.3 Ajan suhteellisuus yleisesti	21
2.3.1 Johdanto.....	21
2.3.2 Kaavan johtaminen.....	21
2.3.3 Tulos.....	24
2.3.4 Esimerkkejä.....	24
2.4 Nopeuksien yhteenlasku	28
2.4.1 Johdanto.....	28
2.4.2 Kaavan johtaminen.....	28
2.4.3 Tulos.....	29
2.4.4 Esimerkkejä.....	30
3 LIIKEMÄÄRÄ JA ENERGIA.....	33
3.1 Klassinen liikemäärä ja liike-energia.....	33
3.1.1 Liikemäärä	33
3.1.2 Liike-energia	34
3.1.3 Liikemäärien ja liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen, esimerkki	34
3.1.4 Kappalejoukon liikemäärä ja liike-energia.....	36
3.1.5 Kappalejoukkojen liikemäärien ja liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen	37
3.2 Liikemäärä ja liike-energia suhteellisuusteoriassa, erikoistapaus.....	41
3.3 Liikemäärän määrittely	45
3.3.1 Liikemäärälle asetettavat ehdot	45
3.3.2 Liikemäärän määritelmän johtaminen	46
3.3.3 Liikemäärän määritelmä.....	47
3.4 Liike-energian määrittely	48
3.4.1 Liike-energialle asetettavat ehdot	48
3.4.2 Liike-energian määritelmän johtaminen	48
3.4.3 Liike-energian määritelmä.....	50
3.4.4 Esimerkkejä.....	52
3.5 Liikemäärän ja liike-energian yhtäsuuruuksien säilyminen.....	58
3.5.1 Liikemäärän, kokonaisenergian ja liike-energian muunnoskaavat	58
3.5.2 Kappalejoukon liikemäärä, kokonaisenergia ja liike-energia	61
3.5.3 Liikemäärien yhtäsuuruuden säilyminen.....	62
3.5.4 Kokonaisenergioiden yhtäsuuruuden säilyminen	64
3.5.5 Liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen.....	65
3.5.6 Tulos.....	65
3.5.7 Esimerkkejä.....	66
3.6 Massa suhteellisuusteoriassa.....	75

4 KÄYTÄNNÖN ESIMERKKEJÄ	80
4.1 Myonit.....	80
4.2 Satelliittipaikannus.....	82
4.2.1 Satelliittipaikannuksen periaate.....	82
4.2.2 Esimerkki	83
4.2.3 Nopeuden vaikutus	84
4.2.4 Gravitaation vaikutus	85
4.2.5 Yhteisvaikutus.....	86
4.3 Massan ja energian välinen yhteys	89
4.3.1 Alkeishiukkaset.....	89
4.3.2 Protoni, neutroni ja atomi	90
4.3.3 Alkuaineet ja isotoopit	93
4.3.4 Sidosenergia.....	94
4.3.5 Radioaktiivisuus	95
4.3.6 α -aktiivisuus.....	97
4.3.7 β^- -aktiivisuus.....	100
4.3.8 β^+ -aktiivisuus ja elektronikaappaus.....	102
4.3.9 Muut radioaktiivisuuden lajit	104
4.3.10 γ -säteily	105
4.3.11 Fuusio.....	105
4.3.12 Reaktiot Auringossa	107
4.3.13 Alkuaineiden synty	112
4.3.14 Fissio.....	113
4.3.15 Kemialliset reaktiot ja energia.....	116
5 LOPUKSI	119
LIITE 1 Vektorit.....	120
LIITE 2 Liikemääräfunktion ratkaiseminen	124
LIITE 3 Liike-energiafunktion ratkaiseminen.....	128
LIITE 4 Muutamia esimerkkejä liikemäärästä ja kokonaisenergioista.....	133
LIITE 5 Satelliittipaikannuksen periaate.....	143
LIITE 6 Suorakulmaisten ja maantieteellisten koordinaattien muunnoskaavat	151
LIITE 7 Käytetyt arvot.....	162
LÄHTEET.....	166

JOHDANTO

Tämä kirjoituksen tarkoitus on esitellä suppean suhteellisuusteorian keskeisimmät tulokset yksityiskohtaisesti maanläheisellä tavalla. Kirjoituksessa on pyritty tuomaan mahdollisimman selvästi esille mitä oletetaan, miksi oletetaan juuri niin kuin oletetaan ja mitä oletuksista seuraa. Tehdyt perusoletukset saavat oikeutuksensa siitä, että ne, samoin kuin niistä johdettu teoriakin, on testattu valtavalla määrällä kokeita, mutta mitään niitä kumoavaa ei ole löydetty.

Suhteellisuusteorian ymmärrettävä esittely vaatii välttämättä matemaattisten kaavojen käyttöä. Kaavojen johtaminen on tehty hyvin yksityiskohtaisesti kahdesta syystä: siksi, että lukijan olisi helppo seurata lausekkeiden muokkausta vaihe vaiheelta ja siksi, että lukija, joka haluaa harjoitella matemaattisten lausekkeiden käsittelyä voi itse tehdä laskutoimitukset ja tarkistaa ne sen jälkeen. Kaavojen johtamisen voi kernaasti myös ohittaa.

Käytetty matematiikka on pyritty pitämään mahdollisimman yksinkertaisena niin, että ainoastaan peruslaskutoimitukset, potenssit, juuret ja polynomien laskutoimitukset on osattava etukäteen. Vektorikäsitteen tunteminen on eduksi, joskin vektorit on esitelty kirjoituksen ymmärtämisen kannalta riittävässä laajuudessa liitteessä 1. Muutamassa esimerkissä tarvitaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Liikemäärän ja liike-energian suhteellisuusteoreettisten määritelmien johtamisessa käytetään raja-arvon ja koordinaatiston muunnoksissa derivaatan käsitettä. Muutoin matematiikka on hallittavissa hyvien peruskoulutaitojen pohjalta.

Kirjoitus on jaettu viiteen osaan, joista ensimmäisessä asetetaan perusoletukset, joihin koko kirjoitus perustuu. Toisessa osassa selvitetään, mitä asetetut perusoletukset tekevät liikeopin suureille matka, aika ja nopeus. Tämän osan lopussa on nopeuksien yhteenlaskukaava, jolla on seurauksensa suureisiin liikemäärä ja liike-energia. Nämä seuraukset on käsitelty osassa 3, jonka tärkein anti on massan ja energia välinen yhteys. Neljännessä osassa on esitelty kolme esimerkkiä, joissa suhteellisuusteoria näkyy käytännössä ja viidennessä on lyhyt yhteenveto siitä, mitä on saatu aikaan. Kirjoituksen lopussa oleviin liitteisiin on otettu edellä mainittu vektoreiden käsittely, matematiikaltaan raskaimmat kaavojen johtamiset ja taulukko käytetyistä arvoista.

Kirjoituksen tavoitteena on tehdä lukijalle ymmärrettäviksi ilmiöitä, joita ei tavallisessa arkielämässä välttämättä huomaa, mutta jotka kuitenkin vaikuttavat siihen tai – peräti – ovat kaiken elämän edellytys.

Kiitän lämpimästi Matti Lehtistä, joka tarjoutui lukemaan kirjoitukseni ensimmäisen käsikirjoituksen ja teki siihen arvokkaita korjaus- ja parannusehdotuksia.

Kiitän Markus Pantsaria hyvistä neuvoista kirjoitustyön aikana ja arvokkaasta palautteesta, jonka hän antoi luettuaan valmiin kirjoituksen. Lisäksi kiitän Johanna Pakarista ja Merja Pantsaria kirjoitukseen perehtymisestä ja hyvistä ideoista kirjoituksen luettavuuden parantamiseksi ja ymmärtämisen helpottamiseksi. Kiitän heitä sekä Tuomas Pantsaria ja Tiina Vesteristä tuesta ja kannustuksesta pitkän kirjoitusprosessin aikana.

Lopuksi kiitän Matematiikkalehti Solmun toimitussihteeri Juha Ruokolaista mahdollisuudesta julkaista kirjoitus sähköisessä muodossa Solmun Oppimateriaalit-sivulla.

1 PERUSTEET

1.1 Ongelman asettelu

Oletetaan, että junassa matkustaja nostaa matkalaukkunsa lattialta laukkuhyllylle niin, että laukku nousee vakionopeudella 1,8 metriä puolessa sekunnissa (kuva 1). Tällöin laukun nopeus on

$$v = \frac{1,8 \text{ m}}{0,5 \text{ s}} = 3,6 \text{ m/s}$$

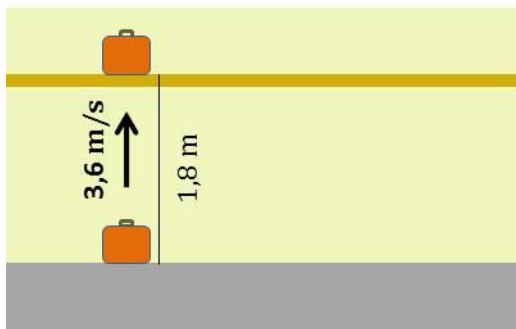
Miltä tämä nosto näyttää asemalaiturilla paikallaan seisovasta tarkkailijasta, jos juna liikkuu laukun nostoajan vaakasuoraan vakionopeudella 4,8 m/s?

Asemalla oleva tarkkailija näkee laukun nousevan tasaisesti 0,5 sekunnissa 1,8 metriä ja samalla liikkuvan tasaisesti vaakasuorassa suunnassa junan mukana $4,8 \text{ m/s} \cdot 0,5 \text{ s} = 2,4 \text{ metriä}$ (kuva 2). Laukun kulkema matka asemalla seisovan tarkkailijan näkemänä on Pythagoraan lauseen mukaan

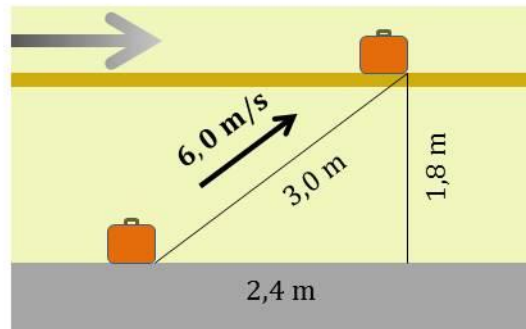
$$s = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3 \text{ m}$$

ja kun tähän matkaan kuluu aikaa 0,5 sekunnissa, on laukun nopeus

$$v = \frac{3 \text{ m}}{0,5 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}$$

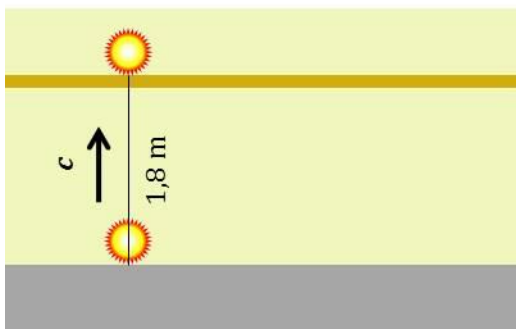


Kuva 1: Salkun nosto junasta nähtynä.

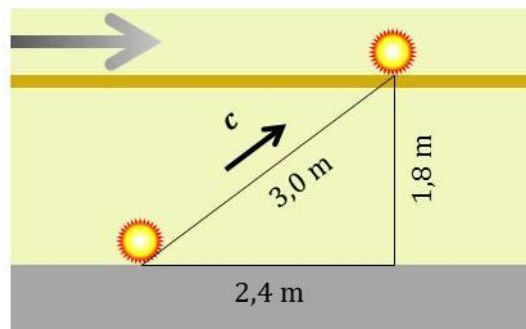


Kuva 2: Salkun nosto asemalta nähtynä.

Mutta miten käy, jos on olemassa jokin, X, joka liikkuu niin, että sekä junan matkustaja että asemalla oleva tarkkailija näkevät sen nopeuden yhtä suureksi (kuvat 3 ja 4)? Olkoon tämä nopeus c . Oletetaan, että X liikkuu junassa pystysuoraan 1,8 m lattialta laukkuhyllylle ja juna kulkee X:n nousuaikana 2,4 m. Tällöin saadaan sama suorakulmainen kolmio kuin edellä ja sen hypotenuusa on 3 m.



Kuva 3: X:n liike junasta nähtynä.



Kuva 4: X:n liike asemalta nähtynä.

Tämä merkitsee, että junan matkustaja näkee X:n nousevan 1,8 m nopeudella c , jolloin nousuun kuluva aika on $1,8/c$, mutta asemalla oleva tarkkailija näkee X:n liikkuvan yläviistoon 3 m nopeudella c , jolloin nousuun kuluva aika on $3/c$. Siis X:n nousu lattialta laukkuhyllylle näyttää asemalta katsoen kestävän kauemmin kuin junasta katsoen. Johtopäätös on, että aika kuluu eri vauhtia junassa kuin asemalla. Kuten on arvattavissa ja kuten myöhemmin huomataan, tämä ei ole vähäinen asia, vaan merkitsee syvälle käyviä muutoksia fysiikan teoriaan. Tämän vuoksi on tärkeää tehdä selväksi, mihin oletuksiin teoria perustetaan. Ennen perusoletuksia on kuitenkin paikallaan täsmentää, millä tavalla ilmiötä tarkastellaan.

On tiedostettava, että asemalaiturilla oleva tarkkailija ja junan matkustaja näkevät samat tapahtumat eri tavalla. Jos asemalla oleva tarkkailija näkee aseman ympäristöineen olevan paikallaan ja junan kulkevan vakionopeudella vaakasuoraan kohti etelää, näkee junan matkustaja junan olevan paikallaan ja aseman ja sen rakennelmien liikkuvan vakionopeudella vaakasuoraan kohti pohjoista. Tosin vahva ennakkokäsitys siitä, että asema ja sen ympäristö ovat aina paikallaan ja junat ovat ne, jotka liikkuvat, voi hämärtää tätä ajatusta. Asia tulee selvemmäksi, jos junan matkustaja näkee vain viereisen junan. Tällöin hän näkee vain junien nopeuksien erotuksen eikä voi selvittää, miten junat liikkuvat aseman suhteen.

Voidaan sanoa, että junan matkustajalla ja aseman tarkkailijalla on kummallakin oma maailmansa. Se, mitä seuraavassa tarkastellaan, on nimenomaan se, mitä näissä maailmoissa tapahtuu ja miten ne ovat sidoksissa toisiinsa. Eikä kysymys ole siitä, miten junan matkustaja ja aseman tarkkailija näkevät asiat, vaan siitä, mitä todella tapahtuu heidän maailmoissaan. Kutsutaan näitä maailmoja vähemmän mahtipontisilla nimillä järjestelmiksi ja – ellei erikseen toisin mainita – tarkastellaan, millaisena junassa tapahtuva ilmiö tapahtuu aseman järjestelmässä. Tästä syystä merkitään aseman järjestelmää symbolilla $\mathcal{S}$ (station, stationary, seisova) ja junan järjestelmää symbolilla $\mathcal{T}$ (train, travelling, tasaisesti liikkuva) ja jotta seuraavassa esitettävät matemaattiset lausekkeet olisivat helpompia lukea ja käsitellä, käytetään aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ suureilla alaindeksiä S ja junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ alaindeksiä T . Siis esimerkiksi nopeuksia merkitään v_S ja v_T . Edellä olevassa esimerkissä näillä merkinnöillä matkalaukun nopeus junan järjestelmässä on $v_T = 3,6$ m/s ja aseman järjestelmässä $v_S = 6$ m/s.

Teoria pyritään seuraavassa esittämään mahdollisimman konkreettisesti ja siitä syystä se esitetään junan ja aseman avulla. Mutta teoria pätee sellaisenaan mille tahansa kahdelle järjestelmälle, kunhan toinen järjestelmästä liikkuu toisessa järjestelmässä vakionopeudella ja suoraviivaisesti. Molemmat voivat olla kiihtyvässä liikkeessä, toisin sanoen nopeuden suuruus tai suunta (tai kumpikin) voi muuttua kaiken aikaa jossakin kolmannessa järjestelmässä.

Esimerkiksi juna voi liikkua aseman suhteen vakionopeudella suoraviivaisesti, mutta kummankin liikkuminen on hyvin monimutkainen ilmiö vaikkapa Linnunradan keskuksesta tarkasteltuna. Esimerkiksi Helsingin rautatieasema kiertää Maan akselia n. 3180 km:n etäisyydellä akselista yhden kierroksen tähtivuorokaudessa (23 h 56 min, 4,098903691 s), siis nopeudella n. 232 m/s. Maa puolestaan kiertää Aurinkoa ellipsin muotoista rataa niin, että vuosittain pienin etäisyys vuodesta 2001 vuoteen 2100 on keskimäärin 147098074 km (2. – 5. tammikuuta) ja suurin 152097701 km (3. – 7. heinäkuuta). Maan nopeus puolestaan vaihtelee 30,29 km/s:stä 29,29 km/s:iin niin, että nopeus on pienimmillään silloin, kun etäisyys on suurimmillaan ja päinvastoin. Lisäksi Maa kiertää Aurinkokunnan mukana Linnunradan keskustaa n. 27200 valovuoden eli n. $27200 \cdot 9460730472580,8 = n. 2,57 \cdot 10^{17}$ km:n etäisyydellä nopeudella, joka on n. 220 km/s jne. jne. Lisäksi on otettava huomioon, että Maan akselin suunta vaihtelee, kun Maa tekee säännöllistä prekessio- ja nutaatioliikettä

sekä lisäksi useita eri epäsäännöllisiä liikkeitä. Maan akselin paikkakin vaihtelee niin, että navat liikkuvat n. 15 m:n laajuisella alueella.

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan inertiaalijärjestelmiä eli järjestelmiä, joissa ei vaikuta sellaisia voimia, joiden suunta tai suuruus vaihtelee paikan tai ajan mukaan. On kuitenkin tärkeää tietää, että tulokset, jotka tässä johdetaan, pätevät vakionopeudella suoraviivaisesti tapahtuvan liikkumisen osalta myös ei-inertiaalisissa järjestelmissä, kuten painovoimakentissä. Näissä ilmiöiden kokonaishallinta vaatii tosin uusia (vaikeammin johdettavia ja käsiteltäviä) tuloksia eli yleistä suhteellisuusteoriaa.

1.2 Perusoletukset

Tarkastellaan kahta inertiaalijärjestelmää $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{S}$, jotka täyttävät seuraavat perusoletukset:

- P1:** *Jos järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{S}$, niin järjestelmä $\mathcal{S}$ liikkuu yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella nopeudella järjestelmässä $\mathcal{T}$.*
- P2:** *Jos järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{S}$, ja järjestelmä $\mathcal{K}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{T}$, niin järjestelmä $\mathcal{K}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{S}$.*
- P3:** *Jokaisella janalla, joka on järjestelmässä $\mathcal{T}$ kohtisuorassa sitä suuntaa vastaan, johon järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu järjestelmässä $\mathcal{S}$, on sama pituus sekä järjestelmässä $\mathcal{T}$ että järjestelmässä $\mathcal{S}$.*
- P4:** *Fysiikan lait ovat samat sekä järjestelmässä $\mathcal{T}$ että järjestelmässä $\mathcal{S}$.*
- P5:** *On olemassa objekti, joka voi liikkua järjestelmässä $\mathcal{T}$ jokaiseen suuntaan suoraviivaisesti niin, että sen nopeus on yhtä suuri järjestelmässä $\mathcal{T}$ kuin järjestelmässä $\mathcal{S}$.*

Perusoletus P1 on varsin järkeenkäypä eikä tarvinne erityisiä perusteluja.

Perusoletus P2 vaatii, että hyllylle nostettava matkalaukku (siis matkalaukun järjestelmä $\mathcal{K}$) joka junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ liikkuu suoraviivaisesti ylöspäin vakionopeudella, liikkuu myös aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ vakionopeudella ja suoraviivaisesti, vaikkakaan ei samalla nopeudella eikä samaan suuntaan kuin junan järjestelmässä.

Perusoletuksen P3 sijaan tekisi mieli vaatia, että jokaisen janan pituus on sama molemmissa järjestelmissä, mutta silloin päädyttäisiin, kuten myöhemmin osoitetaan, ristiriitaan perusoletuksen P5 kanssa. Vaaditaan siis vain, että junassa kulkusuuntaa vastaan kohtisuorien janojen pituudet ovat samat aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ kuin junan järjestelmässä $\mathcal{T}$. Esimerkiksi junan korkeus ja leveys ovat näin ollen yhtä suuret molemmissa järjestelmissä, mikä on varsin ymmärrettävä vaatimus, sillä muutoin voitaisiin rakentaa tunneli, josta juna mahtuisi kulkemaan joillakin nopeuksilla ja joillakin toisilla nopeuksilla ei. Samoin jos junassa asetetaan matkalaukun liikkeen alkupisteestä loppupisteeseen keppi, jonka pituus on siis 1,8 m, niin tämän kepin pituus on 1,8 m myös aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$.

Esimerkki, joka havainnollistaa perusoletusta P4 ja joka myöhemmin käsitellään tarkemmin, on kahden kappaleen täysin kimmoisen törmäys. Sellaisessa törmäyksessä kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia ennen törmäystä on yhtä suuri kuin törmäyksen jälkeen. Käytännössä tämä tarkoittaa, että alkuperäinen liike-energia voi kyllä jakaantua uudelleen törmäävien kappaleiden kesken, mutta liike-energiaa ei kulu muuhun, ei esimerkiksi kappaleiden muodonmuutoksiin, kuten rikkoontumiseen. Perusoletus P4 tarkoittaa tällöin sitä, että jos törmäys on täysin kimmoisen yhdessä järjestelmässä, se on täysin kimmoinen myös muissa järjestelmissä. Siis, jos junan matkustaja näkee kahden biljardipallon törmäävän niin, että kumpikin pallo pysyy ehjänä, myös aseman tarkkailija näkee niiden pysyvän ehjinä.

Perusoletukset P1 – P4 ovat siis hyvin järkeenkäyviä, mutta perusoletus P5 ei. Pikemminkin järkevältä vaikuttaisi se, että jos juna liikkuu vaikkapa nopeudella 100 km/h aseman järjestelmässä ja junassa heitetään pallo nopeudella 100 km/h junan kulkusuuntaan, niin pallo liikkuu nopeudella 200 km/h aseman järjestelmässä. Perusoletuksen P5 mukaan on kuitenkin olemassa objekti, joka

liikkuu junan järjestelmässä ja aseman järjestelmässä samalla nopeudella c . Siis, jos tämä objekti liikkuu junan kulkusuuntaan nopeudella c ja juna liikkuu nopeudella $0,8c$, niin objektin nopeus aseman järjestelmässä ei ole järkevältä tuntuva $1,8c$, vaan c .

Tässä vaiheessa on paikallaan paljastaa, että tällainen jokaisessa järjestelmässä samalla vakionopeudella liikkuva objekti todella on olemassa. Se on valo tai mikä tahansa muu sähkömagneettinen säteily (radioaallot, infrapuna-, ultraviolett-, röntgen- ja gammasäteily) tyhjiössä ja nopeus c on noin 300000 km/s. Tällä nopeudella liikkuva objekti taittaa Stadionin tornin huipun ja Turun tuomiokirkon tornin huipun välin (n. 149,3 km) edestakaisin yli tuhat kertaa sekunnissa. Tarkasti ottaen $c = 299792458$ m/s, sillä määritelmänsä mukaan metri on täsmälleen 299792458:s osa siitä matkasta, jonka valo etenee tyhjiössä yhden sekunnin aikana. Nopeus c on myös sähkömagneettisen aaltoliikkeen pienimpien rakenneosasten ja samalla sähkömagneettisen vuorovaikutuksen välittäjähiukkasten, säteilykvanttien eli fotonien nopeus.

Seuraavassa käytetään termiä valonnopeus, kun tarkoitetaan valon nopeutta tyhjiössä. Väliaineessa, edetessään valon nopeus on pienempi. Esimerkiksi kuivassa ilmassa, jonka lämpötila on 15°C , paine normaali ilmanpaine 101325 Pa ja hiilidioksidipitoisuus 0,045 %, valon nopeus on aallonpituudesta riippuen 299707,71 km/s:stä (jos aallonpituus on 400 nm eli valon väri tumma violetti) 299709,80 km/s:iin (jos aallonpituus 700 nm eli valon väri tumma punainen). Puhtaassa vedessä, jonka lämpötila on 15°C ja johon kohdistuu normaali ilmanpaine, valon nopeus on 223058 km/s:stä 225316 km/s:iin.

Seuraavassa oletetaan, että kaikki käsiteltävät (ajatus)kokeet tehdään tyhjiössä ja että näin ollen valonsäteiden nopeus on aina valonnopeus c . Tällöin ei tarvitse erikseen tehdä sitä pientä, mutta kiusallisen työlästä korjausta, joka aiheutuu siitä, että valon nopeus ilmassa on hiukan pienempi kuin valonnopeus.

Puuttumatta tarkemmin yksityiskohtiin, todetaan vain, että skotlantilaisen matemaatikon ja fyysikon James Clerk Maxwellin 1860-luvun alussa esittämät sähkö- ja magneettikenttien käyttäytymistä ja vuorovaikutusta kuvaavat yhtälöt, ns. Maxwellin yhtälöt, sisältävät vakioita, jotka on perusteltua olettaa kenttien liiketilasta riippumattomiksi ja joista on johdettavissa sähkömagneettisten aaltojen etenemisnopeus. Toinen tärkeä suhteellisuusteorian syntyyn vaikuttanut seikka olivat ne vaikeudet, joita syntyi, kun yritettiin tulkita tuloksia, jotka yhdysvaltalaiset fyysikot Albert A. Michelson ja Edward W. Morley 1887 olivat saaneet selvittäessään, mikä on Maan nopeus siinä oletetussa avaruuden täyttävässä väliaineessa, eetterissä, jonka valo sen hetkisen käsityksen mukaan tarvitsi etenemiseensä.

Valo siis etenee tyhjiössä perusoletuksessa P5 tarkoitetulla nopeudella c ja myös yksittäinen valokvantti etenee tyhjiössä nopeudella c ja se on siis objekti, joka täyttää perusoletuksen P5. Tämä on erittäin moneen kertaan testattu asia ja voidaan luottaa, että se ja kaikki se, mitä siitä seuraa, pitää paikkansa.

Perusoletukset P4 ja P5 ovat saksalais-amerikkalaisen fyysikon Albert Einsteinin vuonna 1905 esittämät suhteellisuusteorian perusteet, perusoletus P5 tosin muodossa: valonnopeus on sama kaikissa inertiaalijärjestelmissä.

Vaikka tässä kirjoituksessa tämän jälkeen c tarkoittaa – esimerkiksi 2 lukuun ottamatta – valonnopeutta, on syytä pitää mielessä, että valo, tai muu sähkömagneettinen säteily, ei ole teorian kannalta oleellinen asia. Se vain sattuu olemaan perusoletuksen P5 tarkoittama objekti.

2 SEURAUKSET

Kuten kohdassa 1.1 mainittiin, sopii odottaa, että perusoletuksella P5 on vakavat seuraukset fysiikan teorialle. Tässä luvussa selvitetään, mitä perusoletuksista seuraa suureille matka, aika ja nopeus. Helpointa on aloittaa tarkastelemalla aikaa eräässä erikoistapauksessa. Siitä saatavaa tulosta käyttäen selvitetään sitten, mitä matkasta, samanaikaisuudesta, ajasta ja lopulta nopeuksien yhteenlaskusta voidaan yleisesti sanoa.

2.1 Ajan suhteellisuus, erikoistapaus

2.1.1 Johdanto

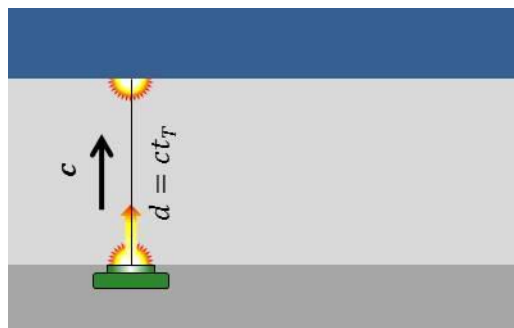
Jos lasersäde lähetetään junassa lattialta pystysuoraan ylöspäin, niin junan järjestelmässä säde kulkee vain matkan lattialta kattoon, mutta aseman järjestelmässä se kulkee samalla junan mukana junan kulkusuuntaan. Matka lattialta kattoon on perusoletuksen P3 mukaan sama sekä junan että aseman järjestelmässä, joten säde kulkee aseman järjestelmässä pitemmän matkan. Perusoletuksen P5 mukaan lasersäteen, kuten minkä tahansa muunkin valonsäteen (tai minkä tahansa sähkömagneettisen aaltoliikkeen), nopeus on kuitenkin sama c kummassakin järjestelmässä.

Mikäli ei luovuta siitä, että nopeus on kuljettu matka jaettuna siihen käytetyllä ajalla, on hyväksyttävä se, että kun aseman järjestelmässä säde kulkee pitemmän matkan, se käyttää siihen myös enemmän aikaa. Aika ei siis kulje samaa tahtia molemmissa järjestelmissä ja seuraavaksi johdetaan kaava, jolla voidaan laskea aika toisessa järjestelmässä, jos se tunnetaan toisessa.

2.1.2 Kaavan johtaminen

Tarkastellaan koetta, jossa juna kulkee vakionopeudella v vaakasuoraan ja lasersäde lähetetään junassa lattialta pystysuoraan ylöspäin kattoon, joka on korkeudella d . Se, miksi käsitellään juuri tämä koe, eikä esimerkiksi koe, jossa lasersäde lähetetään junan kulkusuuntaan, selvitetään kohdan 2.2.2 lopussa.

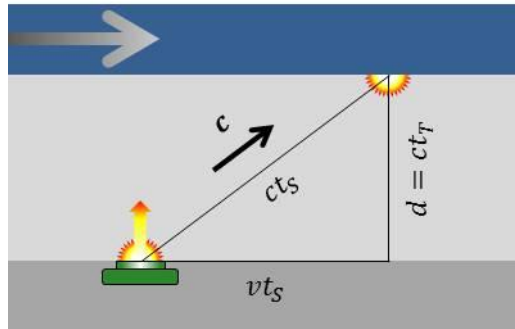
Koska säde kulkee nopeudella c , sen käyttämälle ajalle t_T matkalla lattiasta kattoon pätee $d = ct_T$ (kuva 5). Näin siis junan järjestelmässä $\mathcal{J}$.



Kuva 5: Lasersäde junasta nähtynä.

Asemalla seisovan tarkkailijan järjestelmässä $\mathcal{S}$ lasersäde liikkuu perusoletusten P2 ja P5 mukaan suoraviivaisesti samalla vakionopeudella c kuin junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ ja perusoletuksen P3 mukaan sen pystysuoraan kulkema matka on sama $d = ct_T$ kuin junan järjestelmässä. Jos aseman

järjestelmässä $\mathcal{S}$ säteen käyttämä aika on t_S , kulkee se katon piste, johon lasersäde osuu, vaakasuoraan junan mukana junan nopeudella v matkan vt_S . Toisaalta lasersäteen ajassa t_S kulkema matka on ct_S (kuva 6).



Kuva 6: Lasersäde asemalta nähtynä.

Yllä olevasta kuvasta nähdään, että jos $v < c$, muodostavat lasersäteen vaakasuoraan kulkema matka vt_S , pystysuoraan kulkema matka ct_T ja todellinen matka ct_S järjestelmässä $\mathcal{S}$ suorakulmaisen kolmion, ja Pythagoraan lausetta käyttäen saadaan

$$(ct_S)^2 = (vt_S)^2 + (ct_T)^2$$

$$c^2 t_S^2 = v^2 t_S^2 + c^2 t_T^2$$

$$c^2 t_S^2 - v^2 t_S^2 = c^2 t_T^2$$

$$(c^2 - v^2) t_S^2 = c^2 t_T^2$$

$$t_S^2 = \frac{c^2 t_T^2}{c^2 - v^2}$$

$$t_S^2 = \frac{t_T^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

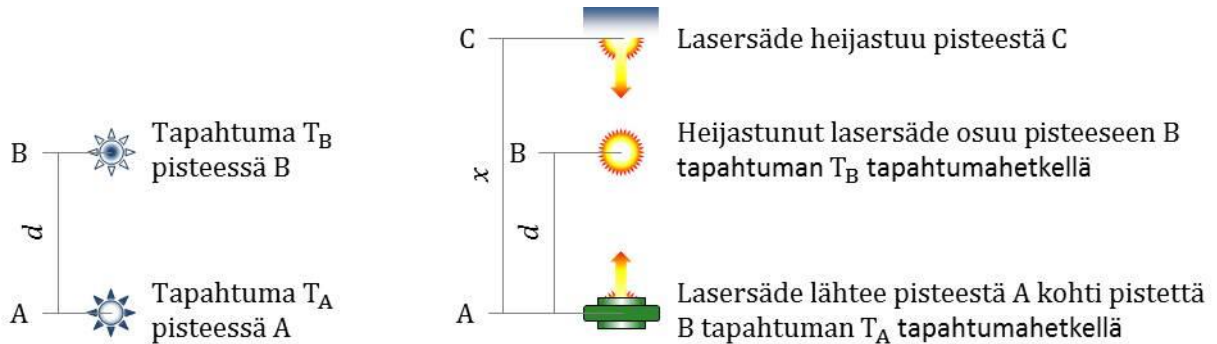
(2.1.1)

$$t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tässä tarkasteltujen tapahtumien – säteen lähtö ja kattoon osuminen – välinen aika t_T ja matka d on sidottu toisiinsa niin, että $d = ct_T$. Lisäksi paikkojen on oltava samassa järjestelmän $\mathcal{T}$ liikesuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa. Nyt kysymys kuuluu, mitä voidaan yleisesti sanoa järjestelmässä $\mathcal{T}$ pisteessä A tapahtuvan tapahtuman T_A ja sen jälkeen pisteessä B ajan t_T kuluttua tapahtuvan tapahtuman T_B välisestä ajasta t_S järjestelmässä $\mathcal{S}$. Oletetaan kuitenkin vielä toistaiseksi, että A ja B ovat samassa järjestelmän $\mathcal{T}$ liikesuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa. Tällöin on kolme mahdollisuutta: $d = ct_T$, $d < ct_T$ tai $d > ct_T$.

Tapaus $d = ct_T$. Lähetetään T_A :n tapahtumishetkellä pisteestä A lasersäde (tai mikä tahansa nopeudella c liikkuva objekti) pisteeseen B ja todetaan, että se on pisteessä B ajan $d/c = t_T$ kuluttua lähdöstään eli samalla hetkellä kuin T_B tapahtuu. Tällöin t_T on säteen kulkuaika ja t_S :lle pätee kaava (2.1.1).

Tapaus $d < ct_T$. Asetetaan pisteiden A ja B kautta kulkevalle suoralle heijastin sellaiseen pisteeseen C, että B jää A:n ja C:n väliin ja sellaiselle etäisyydelle x pisteestä A, että kun A:sta lähetetään lasersäde kohti C:tä samalla hetkellä tapahtuman T_A kanssa, osuu tämä säde C:stä takaisin heijastuttuaan B:hen samalla hetkellä tapahtuman T_B kanssa (kuva 7).



Kuva 7: Tapahtumien välinen aika, kun $d < ct_T$.

Merkitään t_{T1} :llä lasersäteen kulkuaikaa A:sta C:hen junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ ja t_{S1} :llä aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ sekä vastaavasti t_{T2} :lla ja t_{S2} :lla kulkuaikoja C:stä B:hen. Nyt voidaan laskea t_{S1} t_{T1} :stä ja t_{S2} t_{T2} :sta kaavalla (2.1.1) ja koska lasersäteen koko kulkuaika järjestelmässä $\mathcal{J}$ on $t_{T1} + t_{T2}$ ja toisaalta tapahtumien T_A ja T_B välinen aika t_T , saadaan tapahtumien T_A ja T_B väliseksi ajaksi t_S järjestelmässä $\mathcal{S}$:

$$t_S = t_{S1} + t_{S2} = \frac{t_{T1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{t_{T2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_{T1} + t_{T2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

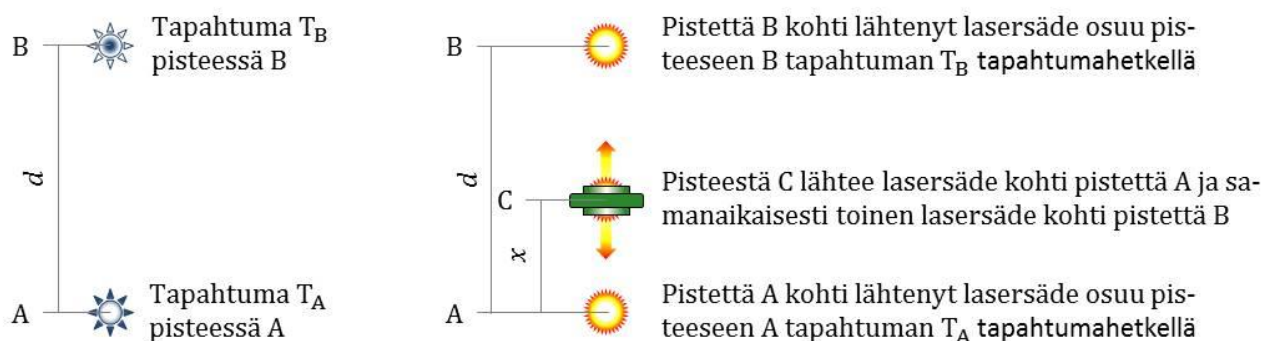
Pisteen C etäisyys x pisteestä A saadaan, kun kirjoitetaan näkyviin se, että matka A:sta C:hen, x , ja matka C:stä B:hen, $x - d$, ovat yhteensä lasersäteen ajassa t_T kulkema matka ct_T :

$$x + (x - d) = ct_T$$

$$x = \frac{ct_T + d}{2}$$

Tapaus $d < ct_T$ sisältää erikoistapauksenaan, että $d = 0$ eli T_A ja T_B tapahtuvat samassa pisteessä.

Tapaus $d > ct_T$. Valitaan pisteiden A ja B väliseltä janalta piste C sellaiselta etäisyydeltä x pisteestä A, että C:stä samanaikaisesti lähetetyistä lasersäteistä kohti A:ta lähetetty osuu pisteeseen A samalla hetkellä tapahtuman T_A kanssa ja kohti B:tä lähetetty pisteeseen B samalla hetkellä tapahtuman T_B kanssa (kuva 8).



Kuva 8: Tapahtumien välinen aika, kun $d > ct_T$.

Merkitään t_{T1} :llä lasersäteen kulkuaikaa C:stä A:han junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ ja t_{S1} :llä aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ sekä vastaavasti t_{T2} :lla ja t_{S2} :lla kulkuaikoja C:stä B:hen. Nyt voidaan laskea t_{S1} t_{T1} :stä ja t_{S2} t_{T2} :sta kaavalla (2.1.1). Koska lasersäteen kulkuaikojen erotus järjestelmässä $\mathcal{J}$ on $t_{T2} - t_{T1}$ ja toisaalta tapahtumien T_A ja T_B välinen aika t_T , saadaan tapahtumien T_A ja T_B väliseksi ajaksi t_S järjestelmässä $\mathcal{S}$:

$$t_S = t_{S2} - t_{S1} = \frac{t_{T2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_{T1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_{T2} - t_{T1}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pisteen C etäisyys x pisteestä A saadaan, kun kirjoitetaan näkyviin se, että matkaan $d - x$ C:stä B:hen lasersäde käyttää aikaa t_T :n verran enemmän kuin matkaan x C:stä A:han:

$$\frac{d - x}{c} - \frac{x}{c} = t_T$$

$$-2x + d = ct_T$$

$$x = \frac{d - ct_T}{2}$$

Erikoistapauksena tästä tilanteesta on se, jossa $t_T = 0$ eli T_A ja T_B tapahtuvat samanaikaisesti junan järjestelmässä, jolloin kaavan (2.1.1) mukaan ne tapahtuvat samanaikaisesti myös aseman järjestelmässä.

Kaava (2.1.1) pätee siis olipa tapahtumien välinen aika ja välimatka mikä tahansa, kunhan ne vain tapahtuvat samassa junan liikesuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa.

2.1.3 Tulos

Jos järjestelmä $\mathcal{J}$ liikkuu vakionopeudella v suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{S}$ ja jos järjestelmässä $\mathcal{J}$ tapahtuu kaksi tapahtumaa ajan t_T välein samassa pisteessä tai kahdessa eri pisteessä, joiden välillä on kohtisuorassa järjestelmän $\mathcal{J}$ liikesuuntaa vastaan, on tapahtumien välinen aika järjestelmässä $\mathcal{S}$

$$(2.1.2) \quad t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Edellä on oletettu, että $v < c$. Jos kaava (2.1.2) kirjoitetaan muotoon

$$t_T = t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

todetaan, että jos $v = c$, on järjestelmässä $\mathcal{J}$ kuluva aika $t_T = 0$ riippumatta siitä, kuinka pitkä aika t_S järjestelmässä $\mathcal{S}$ kuluu. Jos taas $v > c$, sortuu edellä esitetty teoria siihen, että kaavassa (2.1.2) nimittäjässä neliöjuuren alla oleva lauseke on negatiivinen eikä neliöjuuri ole tällöin reaalityyppinen. Tätä tapausta ei tässä käsitellä.

Edellä olevan perusteella on järkevää olettaa, että valonnopeus on suurin mahdollinen nopeus, joka objektilla voi olla. Toki valonnopeutta suurempiakin nopeuksia on olemassa. Yksinkertaisen esi-

merkin saa sytyttämällä tulitikun. Liekistä oikealle lähtevä valonsäde on sekunnin miljardisosan kuluttua edennyt matkan $10^{-9}c$ (n. 30 cm) oikealle ja vasemmalle lähtenyt säde saman verran vasemmalle. Niiden välimatka on kasvanut 0:sta $2 \cdot 10^{-9}c$:hen miljardisosasekunnissa, joten välimatka kasvaa nopeudella $2 \cdot 10^{-9}c/10^{-9} = 2c$. Tässä ei kuitenkaan mikään objekti liiku $2c$:n nopeudella. Mielenkiintoista on myös se, että oikealle menevän valonsäteen kärjestä katsoen sekä tulitikku että vasemmalle menevän valonsäteen kärki loittonevat perusoletuksien P1 ja P5 mukaan molemmat samalla nopeudella c .

2.1.4 Esimerkkejä

Esim 1 Pendolino ajaa nopeudella $v = 216 \text{ km/h}$ Haarajoen ja Mäntsälän asemien välin 19,5 km. Kuinka paljon enemmän näiden asemien ohitusten välinen aika on pitempi Mäntsälän asemalla mitattuna kuin junassa mitattuna?

Ratkaisu Lasketaan ensin ohitusten välinen aika asemalla mitattuna ja sitä varten todetaan ensin, että Pendolinon nopeus on

$$v = 216 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{216000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 60 \text{ m/s}$$

Ohitusten välinen aika Mäntsälän (kuten myös Haarajoen) aseman järjestelmässä S on siten

$$t_S = \frac{19500 \text{ m}}{60 \text{ m/s}} = 325 \text{ s}$$

Jos nyt A on kiinteä piste junassa, tapahtuu siinä kaksi tapahtumaa, ensin Haarajoen aseman ja sen jälkeen Mäntsälän aseman ohitus, niin että ohitusten välinen aika t_T junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ saadaan sijoittamalla junan nopeus v ja äsken laskettu ohitusten välinen aika t_S Mäntsälän aseman järjestelmässä S kaavaan (2.1.2):

$$t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_T$$

$$t_T = 325 \cdot \sqrt{1 - \frac{60^2}{299792458^2}} \approx 325 \text{ s}$$

Mielenkiintoista on nyt tietää, kuinka paljon t_T poikkeaa t_S :stä. Kun lasketaan t_S :n ja t_T :n erotusta taskulaskimella tai taulukkolaskentaohjelmalla, saattaa välineen laskentatarkkuuden riittämättömyyden takia tulokseksi tulla 0 tai jokin muu väärä tulos. Tämä ongelma voidaan ratkaista niin, että aikojen erotus

$$\Delta t = t_S - t_T = t_S - t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_S \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

lavennetaan lausekkeella

$$1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

jolloin se saadaan muotoon

$$\Delta t = \frac{t_S \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_S \left(1 - \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_S \frac{v^2}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ja käsillä olevassa tapauksessa

$$\Delta t = \frac{325 \cdot \frac{60^2}{299792458^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{60^2}{299792458^2}}} \approx 6,509 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

Jotta tämä tulos olisi saatu laskemalla ensin t_T ja vähentämällä siitä t_S , olisi t_T pitänyt saada vähintään tarkkuudella 325,000000000006509. Käytetyn tempun ansiosta riittää, kun laskentaväline pystyy laskemaan Δt :n osoittajan tuhannesosan tarkkuudella (ja 10:n potenssit erikseen).

Aikaero on hyvin pieni, mutta kuitenkin mitattavissa. Kovin suureksi ero ei tule, vaikka liikkuttaisiin vuoden ajan (365 d) suurimmalla nopeudella, joka ihmisen rakentamalla laitteella toistaiseksi on Maan suhteen ollut. Tämä nopeus oli Jupiteria tutkivalla luotaimella Junolla heinäkuun alussa 2016, kun sen nopeus Maan suhteen kiihtyi Jupiterin vetovoiman ansiosta nopeuteen $n. 265000 \text{ km/h} = n. 73600 \text{ m/s}$. Ero on nimittäin

$$\Delta t = \frac{t_S \frac{v^2}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{73600^2}{299792458^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{73600^2}{299792458^2}}} \approx 0,95 \text{ s}$$

Mutta jos avaruusaluksen nopeudeksi saataisiin $v = 0,8c$, olisi aikaero vuodessa

$$\Delta t = 365 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}} \right) = 365 \cdot 0,4 = 146 \text{ vuorokautta}$$

Esim 2 Suhteellisuusteorian ja klassisen teorian erojen selvittämiseksi kuvitellaan, että kaikille yhtä suuri nopeus c olisikin 90 km/h eikä 299792458 m/s . Tällöin 1255 km:n matka Lahdenväylän eteläpäästä Utsjoen keskusta nopeudella 80 km/h kestäisi paikallaan olevan tarkkailijan kellon mukaan ajan

$$t_S = \frac{1255 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = 15,6875 \text{ h} \approx 15 \text{ h } 41 \text{ min}$$

ja autossa olevan henkilön kellon mukaan kaavan 2.1.2 perusteella ajan

$$t_T = t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 15,6875 \cdot \sqrt{1 - \frac{80^2}{90^2}} \approx 7,19 \text{ h} \approx 7 \text{ h } 11 \text{ min}$$

Nopeudella 89 km/h matka kestäisi ajan

$$t_T = t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 15,6875 \cdot \sqrt{1 - \frac{89^2}{90^2}} \approx 2,33 \text{ h} \approx 2 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Todellisessa maailmassa matkustusaika 7,19 h edellyttää nopeutta

$$v = \frac{1255 \text{ km}}{7,19 \text{ h}} \approx 175 \text{ km/h}$$

ja matkustusaika 2,34 h nopeutta

$$v = \frac{1255 \text{ km}}{2,33 \text{ h}} \approx 538 \text{ km/h}$$

Esim 3 Doppler-ilmiö. Kysymys on siitä, kuinka suuri on kahden signaalin saapumisaikojen väli Δt_S järjestelmässä $\mathcal{S}$, jos niiden lähettämisaikojen väli järjestelmässä $\mathcal{T}$ on Δt_T .

Oletetaan, että juna lähestyy vakionopeudella v suoraviivaisesti asemaa ja junassa oleva matkustaja M lähettää asemalla olevalle kaverilleen K kännykällään kaksi viestiä ajan Δt_T välein. Näiden viestien lähettämishetkien välinen aika aseman järjestelmässä on kaavan (2.1.2) mukaan

$$t_S = \frac{\Delta t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Koska juna lähestyy asemaa nopeudella v , on M jälkimmäisen viestin lähtöhetkellä matkan vt_S verran lähempänä K:ta kuin ensimmäisen viestin lähtöhetkellä ja koska nopeudella c etenevältä radiosignaalitylta tähän matkaan kuluva aika on vt_S/c , saa K jälkimmäisen viestin ajan

$$\Delta t_S = t_S - \frac{vt_S}{c} = \frac{(c - v)t_S}{c} = \frac{(c - v)\Delta t_T}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(c - v)\Delta t_T}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{(\sqrt{c - v})^2 \Delta t_T}{\sqrt{(c - v)(c + v)}} = \Delta t_T \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

kuluttua ensimmäisen viestin jälkeen.

Tästä nähdään, että viestien väli on sitä lyhyempi mitä kovempi on junan vauhti ja kun junan vauhti lähestyy valonnopeutta c , lähestyy viestien väli nollaa. Tästä johdonmukainen seuraus on, että jos junan nopeus olisi valonnopeus, tulisivat viestit tarkkailijalle samanaikaisesti.

kaisesti. Ja edelleen, jos junan nopeus olisi suurempi kuin valonnopeus, tulisi jälkimmäinen viesti tarkkailijalle ennen ensimmäistä viestiä. Toisin sanoen aseman tarkkailija K havaitsisi junan tapahtumat päinvastaisessa järjetyksessä kuin junan matkustaja M. Tätä ei kuitenkaan saada edellä johdetusta Δt_S :n kaavasta, koska silloin $c - v < 0$ ja neliöjuuren alus on negatiivinen. Jätetään tämä tarkastelu kuitenkin nyt tähän ja rajoitutaan vain nopeuksiin, jotka ovat pienempiä tai korkeintaan yhtä suuria kuin valonnopeus.

Oletetaan, että juna loittonee asemalta. Tällöin lähtee jälkimmäinen M:n viesti matkan vt_S verran kauempaa K:sta kuin ensimmäinen viesti, joten saapumisaikojen väli on

$$\Delta t_S = t_S + \frac{vt_S}{c} = \frac{(c+v)t_S}{c} = \frac{(c+v)\Delta t_T}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(c+v)\Delta t_T}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{(\sqrt{c+v})^2 \Delta t_T}{\sqrt{(c-v)(c+v)}} = \Delta t_T \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(2.1.3)

Tätä kaavaa käyttäen voidaan laskea lähestyvän tai loittonevan kohteen nopeus vastaanottajan suuntaan. Oletetaan esimerkiksi, että kaukaisesta galaksista tulevassa säteilyssä galaksin vetyatomeissa tapahtuvan tietyn energiatilamuutoksen synnyttämän säteilyn aallonpituudeksi mitataan $\lambda_S = 735,4$ nm. Laboratoriossa keskimäärin paikallaan olevien vetyatomien spektrissä tunnistetaan tämä sama energiatilamuutos ja mitataan sen aiheuttaman säteilyn aallonpituudeksi $\lambda_T = 656,28$ nm. Tällöin voidaan päätellä, että tämän säteilyn aallonpituus galaksissa, siis galaksin järjestelmässä, on myös $\lambda_T = 656,28$ nm.

Koska valo etenee nopeudella c , etenee se yhden aallonpituuden λ_S ajassa $\Delta t_S = \lambda_S/c$ ja aallonpituuden λ_T verran ajassa $\Delta t_T = \lambda_T/c$. Galaksi lähettää siis kaksi signaalia, aallon alkupisteen ja aallon loppupisteen, omassa järjestelmässään ajan Δt_T välein, mutta Maassa oleva tarkkailija saa ne vastaanottimeensa ajan Δt_S välein. Kaavasta (2.1.3) saadaan tällöin galaksin nopeus Maan suhteen

$$\Delta t_S = \Delta t_T \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$\frac{\lambda_S}{c} = \frac{\lambda_T}{c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$\lambda_S^2 = \lambda_T^2 \frac{c+v}{c-v}$$

$$c\lambda_S^2 - v\lambda_S^2 = c\lambda_T^2 + v\lambda_T^2$$

$$v(\lambda_S^2 + \lambda_T^2) = c(\lambda_S^2 - \lambda_T^2)$$

$$v = \frac{\lambda_S^2 - \lambda_T^2}{\lambda_S^2 + \lambda_T^2} c$$

ja sijoittamalla tähän $\lambda_S = 735,4$ nm ja $\lambda_T = 656,28$ nm $v \approx 0,113c$.

2.2 Pituuden suhteellisuus

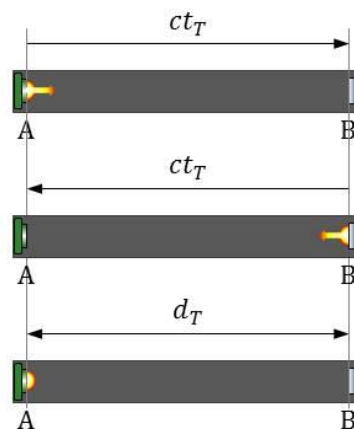
2.2.1 Johdanto

Perusoletuksessa P3 vaaditaan, että samassa junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa olevien janojen pituudet ovat yhtä suuret sekä junan että aseman järjestelmässä. Oudolta tuntuisi, jos näin ei olisi. Mutta yhtä oudolta ainakin aluksi tuntuu myös se, että muiden janojen pituudet ovat eri suuret eri järjestelmissä. Näin kuitenkin asia on ja millainen tämä ero on, selviää kun tehdään ajatuskoe, jossa mitataan laseretäisyysmittarilla junan kulkusuuntaan olevan janan pituus ensin junan ja sitten aseman järjestelmässä.

2.2.2 Kaavan johtaminen

Mitataan laseretäisyysmittarilla etäisyys junan vaunun perältä pisteestä A vaunun etuseinässä olevaan pisteeseen B, joka on mittarista tarkalleen junan kulkusuuntaan. Tehdään se niin, että asetetaan etäisyysmittari pisteeseen A ja lähetetään lasersäde pisteeseen B, josta se heijastuu takaisin mittariin pisteeseen A. Kun mittari jakaa kahdella säteen lähtöhetken ja tulohetken välisen ajan, se saa säteen kulkuajan t_T A:sta B:hen ja kun se kertoo tämän valonnopeudella c , se saa pisteiden A ja B etäisyydeksi $d_T = ct_T$ (kuva 9).

JUNAN JÄRJESTELMÄSSÄ $\mathcal{J}$



Ylin kuva: Vaunun takaosasta pisteestä A lähetetään lasersäde junan kulkusuuntaan.

Toinen kuva: Ajan t_T kuluttua säde osuu vaunun etuseinän heijastimen pisteeseen B ja heijastuu takaisin. Tuolloin säde on kulkenut matkan ct_T .

Alin kuva: Heijastumisesta ajan t_T kuluttua säde osuu lähtöpisteeseensä A. Tuolloin säde on edennyt heijastumisen jälkeen matkan ct_T ja kaikkiaan matkan $2ct_T$.

Kuva 9: Lasersäteen kulku junasta nähtynä.

Näin siis junan järjestelmässä $\mathcal{J}$, mutta mitä tapahtuu aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$?

Säteen lähtö ja paluuhetken välinen aika junassa on $2t_T = 2d_T/c$. Koska lähtö ja paluu tapahtuvat samassa pisteessä A, voidaan käyttää kohdan 2.1.3 tulosta, jolloin säteen lähtöhetken ja paluuhetken väliseksi ajaksi aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ saadaan kaavalla (2.1.2)

$$(2.2.1) \quad t_S = \frac{2d_T}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

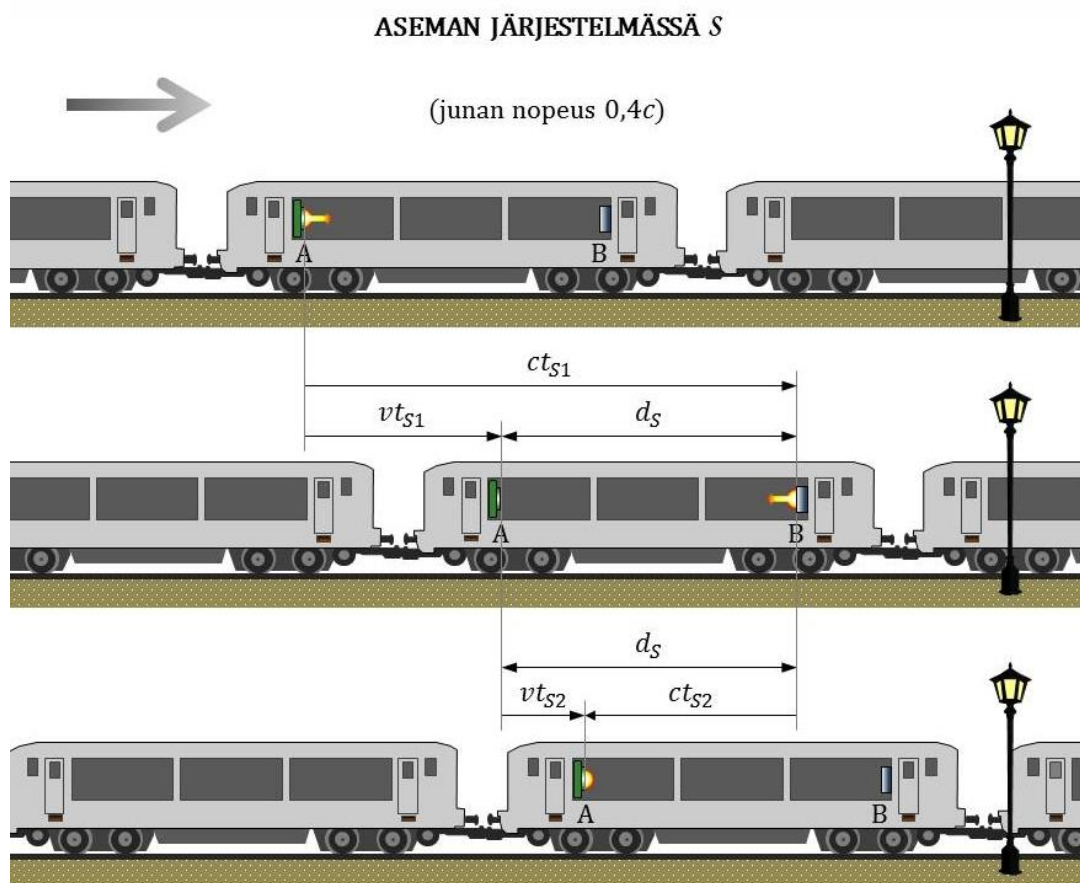
Aseman järjestelmässä S säde kulkee A:sta B:hen jossakin ajassa t_{S1} ja takaisin B:stä A:han jossakin ajassa t_{S2} . Jos junan nopeus on v , kulkee juna ajassa t_{S1} matkan vt_{S1} ja ajassa t_{S2} matkan vt_{S2} .

Merkitään d_S :llä pisteiden A ja B välistä etäisyyttä järjestelmässä S . Koska A:sta B:hen säde kulkee junan kulkusuuntaan, se kulkee matkan d_S lisäksi matkan, jonka junan piste B kulkee ajassa t_{S1} eli matkan vt_{S1} , siis yhteensä matkan $d_S + vt_{S1}$. Toisaalta säde kulkee ajassa t_{S1} matkan ct_{S1} , joten

$$(2.2.2) \quad ct_{S1} = d_S + vt_{S1}$$

Palatessaan B:stä A:han säde käyttää ajan t_{S2} , jona aikana A tulee junan mukana sädetä vastaan matkan vt_{S2} . Säteen matka ct_{S2} on siis vt_{S2} :n verran lyhyempi kuin A:n B:n välimatka d_S (kuva 10).

$$(2.2.3) \quad ct_{S2} = d_S - vt_{S2}$$



Ylin kuva: Vaunun takaosasta pisteestä A lähetetään lasersäde junan kulkusuuntaan.

Toinen kuva: Ajan t_{S1} kuluttua säde osuu vaunun etuseinän heijastimen pisteeseen B ja heijastuu takaisin. Tuolloin säde on kulkenut matkan ct_{S1} ja juna matkan vt_{S1} .

Alin kuva: Heijastumisesta ajan t_{S2} kuluttua säde osuu lähtöpisteeseensä A. Tuolloin säde on kulkenut matkan ct_{S2} ja juna matkan vt_{S2} .

Kuva 10: Lasersäteen kulku asemalta nähtynä.

Kaavasta (2.2.2) saadaan

$$ct_{S1} = d_S + vt_{S1}$$

$$ct_{S1} - vt_{S1} = d_S$$

$$(c - v)t_{S1} = d_S$$

$$t_{S1} = \frac{d_S}{c - v}$$

ja kaavasta (2.2.3)

$$ct_{S2} = d_S - vt_{S2}$$

$$ct_{S2} + vt_{S2} = d_S$$

$$(c + v)t_{S2} = d_S$$

$$t_{S2} = \frac{d_S}{c + v}$$

Lasersäteen käyttämäksi ajaksi järjestelmässä $\mathcal{S}$ saadaan näin ollen

$$t_{S1} + t_{S2} = \frac{d_S}{c - v} + \frac{d_S}{c + v} = \frac{d_S(c + v)}{(c - v)(c + v)} + \frac{d_S(c - v)}{(c + v)(c - v)} = \frac{cd_S + vd_S + cd_S - vd_S}{c^2 - cv + cv - v^2} = \frac{2cd_S}{c^2 - v^2}$$

Siis

$$(2.2.4) \quad t_{S1} + t_{S2} = \frac{2cd_S}{c^2 - v^2}$$

Näin saadaan sille ajalle, jossa lasersäde kulkee järjestelmässä $\mathcal{S}$ A:sta B:hen ja takaisin, kaksi arvoa, kaavasta (2.2.1) aika t_S ja kaavasta (2.2.4) aika $t_{S1} + t_{S2}$. Merkitsemällä nämä yhtä suuriksi saadaan

$$\frac{2d_T}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2cd_S}{c^2 - v^2}$$

$$\frac{2d_T}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2cd_S}{c^2 - v^2}$$

$$d_S = \frac{2d_T(c^2 - v^2)}{2c\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{d_T\sqrt{c^2 - v^2}}{c} = d_T\sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = d_T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Tämä sama kaava saadaan, luonnollisesti, jos mitataan samalla periaatteella matka pisteestä B pisteeseen A. Ainoastaan t_{S1} :n ja t_{S2} :n lausekkeet vaihtuvat keskenään.

Jos kohdassa 2.1.2 olisi otettu tarkasteltavaksi koe, jossa lasersäde lähetetään junan kulkusuuntaan, olisi päädytty kaavaan (2.2.4), jossa olisi ollut kaksi tuntematonta, $t_S = t_{S1} + t_{S2}$ ja d_S eikä t_S :lle olisi saatu yksikäsitteistä ratkaisua. Kun säde lähetettiin kohtisuoraan junan kulkusuuntaa vastaan,

saatiin perusoletuksen P3 mukaan sekä junan että aseman järjestelmässä t_S :n ratkaisemisen kannalta välttämätön yhtä suuri matka, etäisyys vaunun lattiasta kattoon.

2.2.3 Tulos

Jos järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella v suoraviivaisesti järjestelmässä $\mathcal{S}$ ja jos järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan olevan janan pituus järjestelmässä $\mathcal{T}$ on d_T , niin järjestelmässä $\mathcal{S}$ tämän janan pituus on

$$(2.2.5) \quad d_S = d_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaiset janat ovat siis lyhyempiä järjestelmässä $\mathcal{S}$ kuin järjestelmässä $\mathcal{T}$.

Jos jana ei ole järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuunnassa, voidaan määrittää sen komponentit järjestelmässä $\mathcal{S}$. Jos janan komponentti junan kulkusuuntaan järjestelmässä $\mathcal{T}$ on d_{Tx} , saadaan sen komponentti junan kulkusuuntaan järjestelmässä $\mathcal{S}$ kaavalla (2.2.5). Perusoletuksen P3 mukaan junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuora komponentti d_{Ty} järjestelmässä $\mathcal{T}$ on yhtä suuri kuin kohtisuora komponentti d_{Sy} järjestelmässä $\mathcal{S}$. Siis

$$(2.2.6) \quad d_{Sx} = d_{Tx} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$(2.2.7) \quad d_{Sy} = d_{Ty}$$

Jos $d_{Tx} > 0$ ja $v > 0$, pätee janan AB pituudelle d_S järjestelmässä $\mathcal{S}$ ja pituudelle d_T järjestelmässä $\mathcal{T}$

$$d_S = \sqrt{d_{Sx}^2 + d_{Sy}^2} = \sqrt{d_{Tx}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + d_{Ty}^2} < \sqrt{d_{Tx}^2 + d_{Ty}^2} = d_T$$

2.2.4 Esimerkkejä

Esim 4 Pendolino-junan pituus on $d_T = 158,9$ m. Kun se ajaa nopeudella $v = 60$ m/s (216 km/h), sen pituus aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ on kaavan (2.2.5) mukaan

$$d_S = 158,9 \cdot \sqrt{1 - \frac{60^2}{299792458^2}}$$

Tämän ja junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ mitatun pituuden erotus on (kts esim 1 kohdassa 2.1.4)

$$\begin{aligned} \Delta d &= d_S - d_T = d_T \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) = \frac{-d_T \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1} = \frac{-158,9 \cdot \frac{60^2}{299792458^2}}{\sqrt{1 - \frac{60^2}{299792458^2}} + 1} \\ &\approx 3,182 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

Esim 5 Mikä pitää olla 4,659 m pitkän auton nopeus, jotta se mahtuisi 4 m pitkään pysäköintiruutuun?

Ratkaisu Sijoittamalla kaavaan (2.2.5) saadaan

$$\begin{aligned}
 (2.2.8) \quad & 4 = 4,659 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 & \frac{4}{4,659} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 & \frac{4^2}{4,659^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \\
 & \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{4^2}{4,659^2} \\
 & v^2 = c^2 \left(1 - \frac{4^2}{4,659^2} \right) \\
 & v = c \sqrt{1 - \frac{4^2}{4,659^2}} \\
 & v \approx 0,5127c
 \end{aligned}$$

Kuitenkaan 4,659 m pitkää autoa ei voi pysäköidä 4 m:n ruutuun, sillä kun autoa aletaan hidastaa pysäköintiä varten, sen pituus kasvaa pysäköintiruudun järjestelmässä niin, että se on 4,659 m, kun auto on pysähtynyt. Mutta eipä autoilija yrittäisikään pysäköintiä 4 m:n ruutuun, sillä hänen järjestelmässään auto on paikallaan ja pysäköintiruutu liikkuu perusolituksen P1 mukaan nopeudella v vastakkaiseen suuntaan jolloin kaavan (2.2.5) ja kaavan (2.2.8) mukaan hänen järjestelmässään auton pituus on 4,659 m ja ruudun pituus

$$d_S = d_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4 \cdot \frac{4}{4,659} \approx 3,434 \text{ m}$$

Jos autoilija ei tietäisi kulkusuuntaisten etäisyyksien suhteellisuutta, hän uskoisi tarvitsevänsä ruudun, jonka pituus hänen järjestelmässään on 4,659 m ja jonka pituudelle d_T ruudun järjestelmässä saadaan kaavojen (2.2.5) ja (2.2.8) mukaan

$$\begin{aligned}
 4,659 &= d_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 d_T &= \frac{4,659}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4,659}{\frac{4}{4,659}} \approx 5,427 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Esim 6 Matkustaja istuu junassa menosuuntaan ja kallistaa salkkuaan itseensä päin 30° . Kuinka kallellaan salkku näyttää olevan asemalta katsottaessa, jos junan nopeus on $0,6c$?

Ratkaisu Jos salkulla on kallistettuna ollessaan komponentti d_{Tx} junan kulkusuuntaan ja d_{Ty} kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan, on tangentin määritelmän mukaan

$$\frac{d_{Ty}}{d_{Tx}} = \tan 30^\circ$$

Kaavojen (2.2.6) ja (2.2.7) mukaan salkun suuntakulma φ_S junan kulkusuunnan suhteen asemalta katsottaessa on

$$\varphi_S = \tan^{-1} \frac{d_{Sy}}{d_{Sx}} = \tan^{-1} \frac{d_{Ty}}{d_{Tx} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tan^{-1} \left(\frac{\tan 30^\circ}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} \right) \approx 35,8^\circ$$

Mielenkiintoiseksi tilanteen tekee se, että jos salkku on nahkaa ja sen päällä on metallikuorinen kännykkä, jolloin lepokitkakerroin on $0,6$, niin kännykkä pysyy paikallaan vain jos kaltevuuskulma on enintään $\tan^{-1} 0,6 \approx 31,0^\circ$. Toisin sanoen junasta nähtynä kännykkä pysyy paikallaan ja asemalta nähtynä liukuu alas. Paitsi, jos kitkan suuruuteen vaikuttava Maan vetovoiman komponentti kohtisuoraan salkkua vastaan on suurempi ja salkun suuntainen komponentti vastavasti pienempi kuin junan järjestelmässä. Tarkempi asian käsittely sivuutetaan tässä yhteydessä.

2.3 Ajan suhteellisuus yleisesti

2.3.1 Johdanto

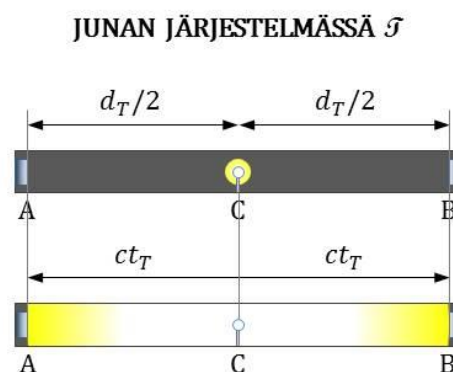
Tulos 2.1.3 kertoo, kuinka kahden tapahtuman välinen aika eroaa aseman järjestelmässä siitä, mitä se on junan järjestelmässä. Rajoituksena kuitenkin on, että tapahtumien on tapahduttava junassa samassa junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa. Seuraavaksi johdetaan kaava, jolla voidaan laskea junassa tapahtuvien tapahtumien välinen aika aseman järjestelmässä tapahtuivatpa tapahtumat missä tahansa. Tämä onnistuu, kun selvitetään ensin, mikä on junassa junan kulkusuunnalla suoralla samaan aikaan tapahtuvien tapahtumien välinen aika aseman järjestelmässä. Osoitetaan, että junassa samanaikaiset tapahtumat eivät olekaan samanaikaisia asemalta katsottuna.

Korostettakoon vielä, varmuuden vuoksi, että tässä puhutaan tapahtumien todellisesta samanaikaisuudesta, ei niiden havaitsemisen (kuulemalla, näkemällä tms.) samanaikaisuudesta. Toisin sanoen, jos tapahtumat tapahtuvat eri etäisyyksillä havaitsijasta, oletetaan etäisyyseroista johtuvat havaitsemisten aikaerot aina korjatuiksi.

2.3.2 Kaavan johtaminen

Tarkastellaan tilannetta, jossa junan järjestelmä $\mathcal{J}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$. Oletetaan, että junan vaunun takaseinässä on taulu ja siinä piste A ja tästä pisteestä täsmälleen junan kulkusuunnassa etuseinässä etäisyydellä d_T piste B. Oletetaan lisäksi, että pisteessä A tapahtuu tapahtuma T_A ja junassa havaittuna samanaikaisesti pisteessä B tapahtuma T_B .

Jotta saataisiin selville, mitä tapahtuu aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$, oletetaan, että täsmälleen pisteiden A ja B puolivälissä, pisteessä C on sytytetty lamppu ajan $t_T = d_T/2c$ verran ennen tapahtumia T_A ja T_B . Tällöin valo on tapahtumien T_A ja T_B tapahtumishetkellä edennyt C:stä matkan $ct_T = cd_T/2c = d_T/2$ sekä junan kulkusuuntaan että vastakkaiseen suuntaan eli pisteisiin B ja A saakka (kuva 11).



Ylempi kuva: Vaunun keskellä syttyy lamppu.

Alempi kuva: Ajan t_T kuluttua syttymisestään valo tavoittaa vaunun takaseinän taulun pisteessä A ja etuseinän taulun pisteessä B. Tuolloin valo on edennyt matkan ct_T .

Kuva 11: Junassa samanaikaiset tapahtumat.

Merkitään d_S :llä pisteiden A ja B välimatkaa aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$. Lisäksi merkitään t_{S1} :llä sitä aikaa, joka kuluu lampun sytyttämisestä siihen hetkeen, jolloin valo saavuttaa pisteen A ja t_{S2} :llä sitä aikaa, joka kuluu lampun sytyttämisestä siihen hetkeen, jolloin valo saavuttaa pisteen B.

Ajassa t_{s1} säde kulkee nopeudellaan c matkan ct_{s1} pisteestä C pisteeseen A. Tässä samassa ajassa piste A tulee sädettä vastaan junan nopeudella v matkan vt_{s1} . Näin ollen matkat ct_{s1} ja vt_{s1} ovat yhteensä pisteiden A ja C välinen matka $d_S/2$ Siis

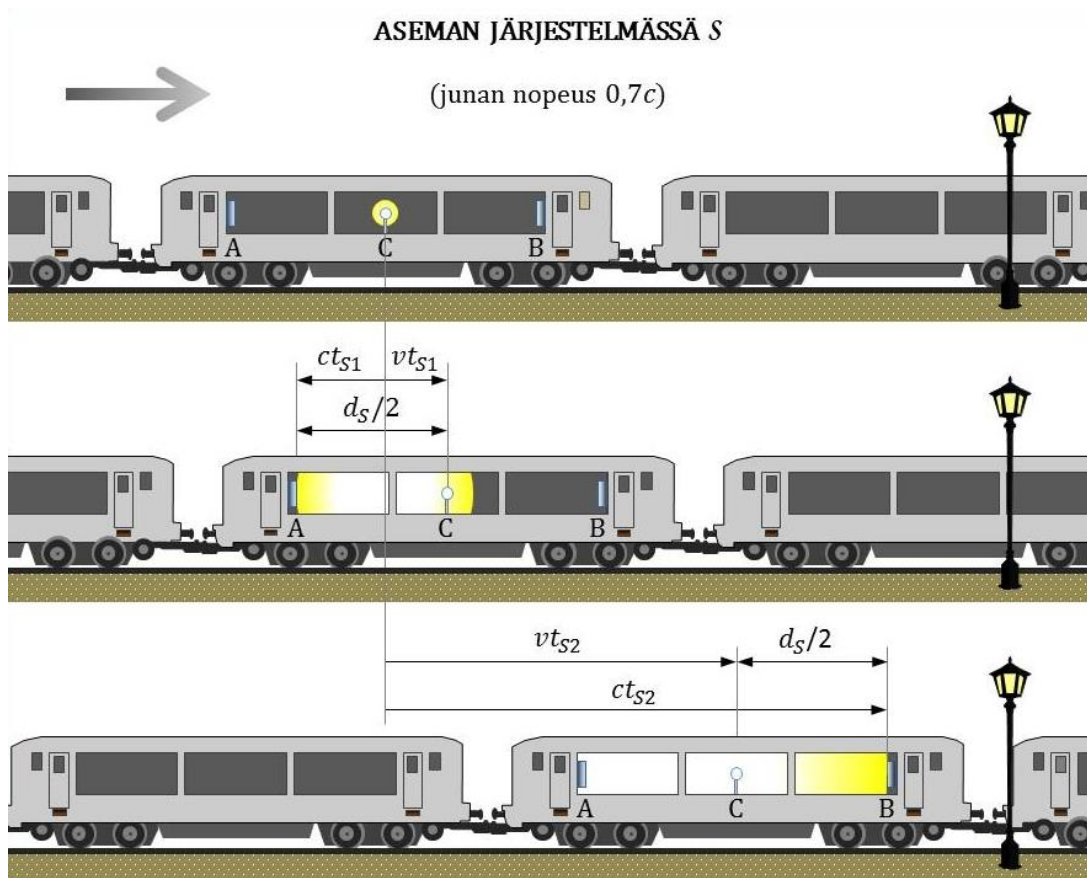
$$ct_{s1} + vt_{s1} = \frac{d_S}{2}$$

$$(2.3.1) \quad t_{s1} = \frac{d_S}{2(c+v)}$$

Ajan t_{s2} kuluttua kohti B:tä lähtenyt säde osuu etuseinän pisteeseen B ja on tuolloin kulkenut matkan ct_{s2} , joka on pisteen C kulkeman matkan vt_{s2} verran pitempi kuin pisteiden C ja B välimatka $d_S/2$ (kuva 12). Siis:

$$ct_{s2} = vt_{s2} + \frac{d_S}{2}$$

$$(2.3.2) \quad t_{s2} = \frac{d_S}{2(c-v)}$$



Ylin kuva: Vaunun keskellä syttyy lamppu.

Toinen kuva: Ajan t_{s1} kuluttua syttymisestään valo tavoittaa vaunun takaseinän taulun pisteessä A. Tuolloin valo on edennyt matkan ct_{s1} ja juna matkan vt_{s1} .

Alin kuva: Ajan t_{s2} kuluttua syttymisestään valo tavoittaa vaunun etuseinän taulun pisteessä B. Tuolloin valo on edennyt matkan ct_{s2} ja juna matkan vt_{s2} .

Kuva 12: Junassa samanaikaiset tapahtumat asemalta nähtynä.

Vertaamalla yhtälöitä (2.3.1) ja (2.3.2) todetaan, että $t_{s1} < t_{s2}$ aina, kun junan nopeus $v > 0$. Toisin sanoen junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ samanaikaiset tapahtumat, valon tulo pisteeseen A ja valon tulo pisteeseen B, eivät ole samanaikaisia aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$, vaan säde saavuttaa pisteen B ajan

$$\Delta t_S = t_{s2} - t_{s1} = \frac{d_S}{2(c-v)} - \frac{d_S}{2(c+v)} = \frac{d_S(c+v) - d_S(c-v)}{2(c-v)(c+v)} = \frac{cd_S + vd_S - cd_S + vd_S}{2(c^2 - v^2)} = \frac{vd_S}{c^2 - v^2}$$

verran myöhemmin kuin pisteen A. Kun tähän sijoitetaan d_S kaavasta (2.2.5), saadaan

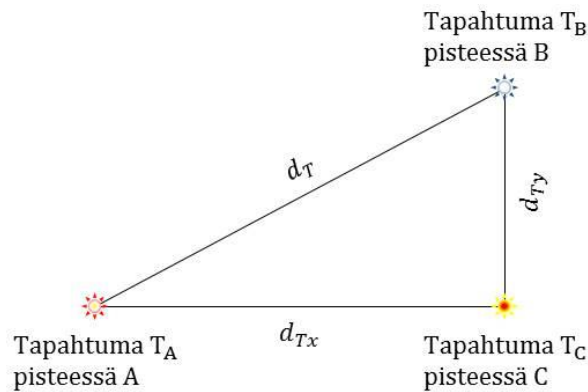
$$\Delta t_S = \frac{vd_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} = \frac{vd_T \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} = \frac{vd_T \sqrt{c^2 - v^2}}{c(c^2 - v^2)} = \frac{vd_T}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{vd_T}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(2.3.3)

Siis junan kulkusuunnan suuntaisella suoralla tapahtuvista junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ samanaikaisista tapahtumista tapahtuu aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ ensin se, jonka tapahtumispiste on toisen tapahtumispisteestä junan kulkusuunnalle vastakaiseen suuntaan ja aikaero on kaavan (2.3.3) mukainen.

Oletetaan nyt, että junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ tapahtuu kaksi tapahtumaa: T_A pisteessä A ja sen jälkeen tapahtuma T_B pisteessä B. Asetetaan pisteen B kautta junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuora taso ja pisteen A kautta junan kulkusuuntainen suora ja merkitään näiden leikkauspistettä C:llä. Merkitään janan AB pituutta d_T :llä, janan AB kulkusuuntaista komponenttia AC d_{Tx} :llä ja janan AB kulkusuuntaa vastaan kohtisuoran komponenttia CB d_{Ty} :llä. Oletetaan lisäksi, että pisteessä C tapahtuu "aputapahtuma" T_C junan järjestelmässä samalla hetkellä kuin T_A tapahtuu pisteessä A (kuva 13).

Käsitellään ensin tapaus, jossa piste C on pisteestä A junan kulkusuuntaan.



Kuva 13: Tapahtumien samanaikaisuus yleisesti.

Tapahtumien T_C ja T_B välinen aika aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ saadaan kaavalla (2.1.2), sillä T_C ja T_B tapahtuvat samassa junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa. Tapahtumien T_A ja T_C välinen aika puolestaan saadaan kaavasta (2.3.3) sijoittamalla d_T :n paikalle d_{Tx} , sillä T_A ja T_C tapahtuvat junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ samanaikaisesti ja junan kulkusuuntaisella suoralla. Laskemalla yhteen nämä kaksi aikaa saadaan tapahtumien T_A ja T_B välinen aika aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$

$$(2.3.4) \quad t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{vd_{Tx}}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_T + \frac{vd_{Tx}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tapauksessa, jossa piste C on pisteestä A junan kulkusuunnalle vastakkaiseen suuntaan, on komponentti d_{Tx} negatiivinen ja sen pituus on $-d_{Tx}$. Tällöin T_C tapahtuu aseman järjestelmässä ennen tapahtumaa T_A ja aikaero saadaan kaavasta (2.3.3) sijoittamalla $d_T = -d_{Tx}$. Tapahtumien T_A ja T_B välinen aika aseman järjestelmässä S on siten

$$t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(-d_{Tx})}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_T + \frac{vd_{Tx}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Todetaan vielä, että jos pisteet C ja A yhtyvät, on $d_{Tx} = 0$ ja kaava (2.3.4) pätee tuloksen 2.1.3 perusteella. Kaava (2.3.4) pätee siis kaikissa tapauksissa.

2.3.3 Tulos

Jos järjestelmä $\mathcal{J}$ liikkuu vakionopeudella v suoraviivaisesti järjestelmässä S , jos järjestelmässä $\mathcal{J}$ tapahtuu pisteessä A tapahtuma T_A hetkellä 0 ja pisteessä B tapahtuma T_B hetkellä t_T ja jos A:sta B:hen piirretyn vektorin komponentti järjestelmän $\mathcal{J}$ kulkusuuntaan järjestelmässä $\mathcal{J}$ on d_{Tx} , on tapahtumien T_A ja T_B välinen aika järjestelmässä S

$$(2.3.5) \quad t_S = \frac{t_T + \frac{vd_{Tx}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Erityisesti, jos tapahtumat T_A ja T_B ovat samanaikaiset järjestelmässä $\mathcal{J}$, on niiden välinen aika järjestelmässä S

$$(2.3.6) \quad t_S = \frac{vd_{Tx}}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2.3.4 Esimerkkejä

Esim 7 Andromedan galaksi lähestyy Maata (keskimäärin) nopeudella 300 km/s. Oletetaan, että sen tällä reunalla tapahtuu säteilypurkaus T_B ja vastakkaisella reunalla säteilypurkaus T_A galaksin järjestelmässä samanaikaisesti T_B :n kanssa. Koska Andromedan galaksin läpimita on 220000 valovuotta (1 valovuosi = 9460730472580800 m), niin Maasta havaittuna T_B tapahtuu myöhemmin kuin T_A ja tapahtumien välinen aika on

$$\Delta t_S = \frac{300000 \cdot 220000 \cdot 9460730472580800}{299792458^2 \sqrt{1 - \frac{300000^2}{299792458^2}}} = 6947481790 \text{ s} = \frac{6947481790}{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 365,2422}$$

$$\approx 220 \text{ a}$$

Maasta katsoen T_A :sta lähtenyt säteily on tullut siis 220 vuotta Maata kohti silloin, kun T_B tapahtuu, joten Maahan T_A näkyy $220000 - 220 = 219780$ vuotta myöhemmin kuin T_B .

Esim 8 Samanaikaisuuden suhteellisuus tulee hyvin esille, kun tarkastellaan tilannetta, jossa Pendolinon (pituus $d_T = 158,9$ m) nopeus on niin suuri, että aseman järjestelmässä sen pituus on $d_S = 50$ m. Tämä nopeus voidaan ratkaista kaavaa (2.2.5) käyttäen:

$$d_S = d_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$(2.3.7) \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d_S}{d_T}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{d_S^2}{d_T^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{d_S^2}{d_T^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{d_S^2}{d_T^2}}$$

$$(2.3.8) \quad v = c \sqrt{1 - \frac{d_S^2}{d_T^2}}$$

$$v = c \sqrt{1 - \frac{50^2}{158,9^2}} \approx 0,949c$$

Oletetaan, että Pendolino ajaa tällä nopeudella kohti etelää asemalla olevaan tunneliin, jonka pituus (aseman järjestelmässä) on $d_S = 50$ m. Oletetaan lisäksi, että tunnelin etelä- ja pohjoispäässä lähtevät samanaikaisesti vaakasuoraan lasersäteet kohtisuoraan junan kulkusuuntaa vastaan niin, että juna juuri ja juuri mahtuu niiden väliin.

Miltä tilanne näyttää junasta katsoen?

Junan järjestelmässä juna on paikallaan ja tunneli kulkee kohdan 1.2 perusoletuksen P1 mukaan nopeudella v pohjoiseen. Tämä tarkoittaa, että tunnelin pituus junan järjestelmässä on kaavojen (2.2.5) ja (2.3.7) mukaan

$$D_T = D_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d_S \frac{d_S}{d_T} = \frac{d_S^2}{d_T} = \frac{50^2}{158,9} \approx 15,7 \text{ m}$$

sillä aseman järjestelmässä junan pituus d_S ja tunnelin pituus D_S ovat yhtä suuret.

Ensimmäiseksi tulee mieleen, että junasta katsoen sillä hetkellä, kun junan eteläpää on tunnelin eteläpäässä, on junasta n. $158,9 \text{ m} - 15,7 \text{ m} = 143,2 \text{ m}$ tunnelin ulkopuolella ja tunnelin pohjoispään lasersäde osuu junaan kohtaan, joka on n. $15,7 \text{ m}$ junan eteläpäästä. Edellinen näistä ajatuksista on oikea. Jälkimmäinen sitä vastoin johtaa ristiriitaan kohdan 1.2 perusoletuksen P4 kanssa. Tämä huomataan ainakin silloin, jos säde on niin voimakas, että se jättää junan kylkeen jäljen. Nimittäin asemalta katsottuna kumpikaan lasersäde ei osu junaan, mutta junasta katsoen pohjoispään säde osuu. Asemalta katsoen junan kylkeen ei siis jää jälkeä, mutta junasta katsoen jää.

Edellä olevassa päättelyssä on kuitenkin se virhe, että siinä on oletettu lasersäteiden lähtevän samanaikaisesti sekä aseman että junan järjestelmässä, mutta näinhän ei ole, kuten edellä on osoitettu.

Merkitään $t = 0$ hetkeä, jolloin tunnelin eteläpään lasersäde lähtee ja jolloin junan eteläpää on tunnelin eteläpään kohdalla. Tällöin junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ junan pohjoispää on junan pituuden $d_T = 158,9 \text{ m}$ verran tunnelin eteläpäästä pohjoiseen ja kaavojen (2.3.7) ja (2.2.5) mukaan matkan

$$d_T - D_T = \frac{d_S}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - d_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d_S - d_S \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v^2 d_S}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

verran tunnelin pohjoispäästä pohjoiseen.

Koska tunnelin nopeus junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ on v , on tunnelin pohjoispää junan pohjoispään kohdalla hetkellä

$$t = \frac{d_T - D_T}{v} = \frac{v d_S}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Toisaalta aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ etelä- ja pohjoispään lasersäteet lähtevät samanaikaisesti, tunnelin pituus aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ on d_S ja tunnelin pohjoispää on eteläpäästä katsoen tunnelin kulkusuuntaan. Kaavan (2.3.6) mukaan tämä merkitsee, että junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ tunnelin pohjoispään lasersäde lähtee ajan

$$t_S = \frac{v d_S}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

verran myöhemmin kuin eteläpään säde. Siis juuri sillä hetkellä, kun junan pohjoispää on tunnelin pohjoispään kohdalla.

Loppupäätelmä on, että juna mahtuu myös junasta katsoen juuri ja juuri lasersäteiden väliin. Pohjoispään säde vain lähtee junan järjestelmässä kaavojen (2.3.6), (2.3.7) ja (2.3.8) mukaan ajan

$$t_T = \frac{vd_S}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c \sqrt{1 - \frac{d_S^2}{d_T^2}} \cdot d_S}{c^2 \cdot \frac{d_S}{d_T}} = \frac{d_T \sqrt{1 - \frac{d_S^2}{d_T^2}}}{c} = \frac{158,9 \cdot \sqrt{1 - \frac{50^2}{158,9^2}}}{299792458} = \text{n. } 5,03 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

verran myöhemmin kuin eteläpään lasersäde.

Tämä esimerkki on versio suhteellisuusteoriaa käsittelevässä kirjallisuudessa suositusta ns. lipputankoparadoksista, jossa kysytään, miten 10-metrinen lipputanko mahtuu 5-metriseen vajaan. Vastaus on edellä olevan perusteella: lipputankoa on kuljetettava kaavan (2.3.8) mukaan vähintään nopeudella

$$v_l = c \sqrt{1 - \frac{5^2}{10^2}} = c \sqrt{0,75} = \text{n. } 0,866c$$

edellyttäen, että asiaa tarkastellaan vajan järjestelmässä. Lipputangon järjestelmässä tangon etupään koskettaessa vajan takaseinää tankoa on vajan ulkopuolella sitä enemmän mitä suurempi on tangon nopeus, nopeudella v_l tasan 7,5 m, sillä vajan pituus lipputangon järjestelmässä on kaavan (2.2.5) mukaan tuolloin

$$d_S = d_T \sqrt{1 - \frac{v_l^2}{c^2}} = 5 \sqrt{1 - \frac{0,75c^2}{c^2}} = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ m}$$

Siis mitään paradoksia ei ole, vaan 158,9-metrinen Pendolino mahtuu 50-metriseen tunneliin asemalta katsottuna, mutta ei junasta katsottuna ja 10-metrinen lipputanko mahtuu 5-metriseen vajaan vajasta katsottuna, mutta ei lipputangolta katsottuna.

Pendolinosta katsoen Pendolino ei mahdu 158,9 metriä lyhyempään tunneliin, mutta voi kyllä täyttää päästä päähän minkä tahansa tunnelin. Mahdollisesti rakennettavan Helsingin ja Tallinnan välisen 85 km pitkän tunnelin se kaavan (2.3.8) mukaan täyttäisi ajaessaan nopeudella

$$v = c \sqrt{1 - \frac{158,9^2}{85000^2}} \approx 0,99999825c$$

Tällöin Pendolinon pituus asemalta katsottuna on kaavojen (2.2.5) ja (2.3.7) mukaan

$$d_S = d_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 158,9 \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2 \left(1 - \frac{158,9^2}{85000^2}\right)}{c^2}} = \frac{158,9^2}{85000} \approx 0,297 \text{ m} = 29,7 \text{ cm}$$

2.4 Nopeuksien yhteenlasku

2.4.1 Johdanto

Jos junassa heitetään pallo nopeudella 20 m/s junan kulkusuuntaan ja juna kulkee nopeudella 60 m/s, tuntuu itsestään selvältä, että asemalla paikallaan oleva tarkkailija näkee pallon liikkuvan nopeudella 80 m/s. Kuitenkin edellä johdetuista tuloksista 2.2.3 ja 2.3.3 seuraa, että kumpikin nopeuden muodostavista perussuureista, matka ja aika, ovat eri suuret asemalta havaittuina kuin junasta havaittuina. On siis mahdollista, että pallon nopeus asemalta nähtynä ei olekaan 80 m/s.

Jotta nopeuksien yhteenlaskulle saataisiin mahdollisimman yleispätevä menetelmä, täytyy nopeuksia tarkastella vektoreina. Siis sen lisäksi, että nopeudella on määrätty suuruus, on sillä myös määrätty suunta. Vektorin käsite, laskutoimitukset ja ominaisuudet on esitetty liitteessä 1.

2.4.2 Kaavan johtaminen

Oletetaan nyt, että junassa jokin objekti, vaikkapa heitetty pallo, liikkuu junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ suoraviivaisesti vakionopeudella u_T . Kysytään, millä nopeudella pallo liikkuu aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$.

Junan ja pallon kulkusuuntien, toisin sanoen niiden nopeusvektoreiden, määräämässä tasossa otetaan käyttöön suorakulmainen Oxy -koordinaatisto, jossa pallon nopeuden komponentit junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ olkoot u_{Tx} junan kulkusuuntaan ja u_{Ty} junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan. Jos pallon nopeuden komponentti junan kulkusuunnassa on junan kulkusuunnalle vastakkainen, siis jos pallo heitetään pienemmässä tai suuremmassa kulmassa taaksepäin, on u_{Tx} negatiivinen. Nopeuksien yhteenlaskukaavan johtaminen on kuitenkin aivan samalainen olipa u_{Tx} positiivinen, 0 tai negatiivinen.

Oletetaan, että pallo lähtee junan pisteestä A ja on junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ mitatun ajan t_T kuluttua junan pisteessä B. Junan järjestelmässä pallon kulkeman matkan komponentti junan kulkusuuntaan on tällöin $d_{Tx} = u_{Tx}t_T$ ja kohtisuoraan suuntaan $d_{Ty} = u_{Ty}t_T$.

Tapahtumien T_A = pallon lähtö pisteestä A ja T_B = pallon tulo pisteeseen B, välinen aika aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ on kaavan (2.3.5) mukaan

$$(2.4.1) \quad t_S = \frac{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ pisteiden A ja B välisen junan komponentti junan kulkusuuntaan on kaavan (2.2.5) mukaan

$$d_{Sx} = u_{Tx}t_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Koska juna ja sen mukana junan piste B liikkuu nopeudella v , kulkee piste B tapahtumien T_A ja T_B välisenä aikana aseman järjestelmässä matkan vt_S . Näin ollen tapahtumien T_A ja T_B välimatkan eli pallon kulkeman matkan komponentti junan kulkusuuntaan aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ on

$$\begin{aligned}
d'_{sx} &= d_{sx} + vt_s = u_{Tx}t_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + v \frac{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_{Tx}t_T \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + vt_T + v \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{u_{Tx}t_T - \frac{v^2 u_{Tx}t_T}{c^2} + vt_T + \frac{v^2 u_{Tx}t_T}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_{Tx}t_T + vt_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Kun tämä matka jaetaan siihen käytetyllä kaavasta (2.4.1) saatavalla ajalla t_s , saadaan pallon nopeuden junan kulkusuuntaiseksi komponentiksi aseman järjestelmässä S

$$u_{sx} = \frac{d'_{sx}}{t_s} = \frac{\frac{u_{Tx}t_T + vt_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}} = \frac{u_{Tx}t_T + vt_T}{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}} = \frac{u_{Tx} + v}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}$$

Perusoletuksen P3 mukaan tapahtumien T_A ja T_B välimatkan eli pallon kulkeman matkan komponentti junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa on aseman järjestelmässä sama kuin junan järjestelmässä eli

$$d_{sy} = u_{Ty}t_T$$

Kun tämä jaetaan tapahtumien välisellä ajalla t_s yhtälöstä (2.4.1), saadaan pallon nopeuden junan kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraksi komponentiksi aseman järjestelmässä S

$$u_{sy} = \frac{u_{Ty}t_T}{t_s} = \frac{u_{Ty}t_T}{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}} = \frac{u_{Ty}t_T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t_T + \frac{vu_{Tx}t_T}{c^2}} = \frac{u_{Ty} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}$$

2.4.3 Tulos

Jos järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella v suoraviivaisesti järjestelmässä S ja jos järjestelmässä $\mathcal{T}$ liikkuu objekti nopeudella, jonka komponentti järjestelmässä $\mathcal{T}$ järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan on u_{Tx} ja kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan u_{Ty} , niin järjestelmässä S objektin nopeuden komponentti järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan on

$$(2.4.2) \quad u_{sx} = \frac{u_{Tx} + v}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}$$

ja komponentti järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaa vastaan kohtisuoraan suuntaan

$$(2.4.3) \quad u_{Sy} = \frac{u_{Ty} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}$$

Jos objekti liikkuu järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan järjestelmässä $\mathcal{T}$ nopeudella u_T , on $u_{Ty} = 0$ ja tällöin on kaavan (2.4.3) mukaan myös $u_{Sy} = 0$ ja kaavan (2.4.2) mukaan saadaan objektin nopeuden suuruudeksi

$$u_S = \frac{u_T + v}{1 + \frac{u_T v}{c^2}}$$

Tämän kaavan kanssa on kuitenkin oltava varovainen, sillä se pätee vain, kun $u_{Ty} = 0$ tai $v = 0$. Muulloin kohteen nopeuden suuruus järjestelmässä $\mathcal{S}$ on kaavojen (2.4.2) ja (2.4.3) mukaan

$$\begin{aligned} u_S &= \sqrt{u_{Sx}^2 + u_{Sy}^2} = \sqrt{\left(\frac{u_{Tx} + v}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}\right)^2 + \left(\frac{u_{Ty} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{u_{Tx}^2 + 2u_{Tx}v + v^2 + u_{Ty}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} \\ &= \frac{\sqrt{u_{Tx}^2 + 2u_{Tx}v + v^2 + u_{Ty}^2 - \frac{u_{Ty}^2 v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} = \frac{\sqrt{u_T^2 + 2u_{Tx}v + v^2 - \frac{u_{Ty}^2 v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} \end{aligned}$$

Siis

$$(2.4.4) \quad u_S = \frac{\sqrt{u_T^2 + 2u_{Tx}v + v^2 - \frac{u_{Ty}^2 v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}}$$

2.4.4 Esimerkkejä

Esim 9 Jos junan nopeus $v = 60$ m/s ja junassa heitetään pallo nopeudella 20 m/s junan kulkusuuntaan, on $u_{Tx} = 20$ ja $u_{Ty} = 0$ ja nopeuden komponentit aseman järjestelmässä ovat tällöin kaavojen (2.4.2) ja (2.4.3) mukaan

$$u_{Sx} = \frac{20 + 60}{1 + \frac{20 \cdot 60}{299792458^2}} \approx 80 \text{ m/s}$$

$$u_{Sy} = 0 \text{ m/s}$$

Huomionarvoista on, että u_{Sx} ei ole tasan 80 m/s, kuten tavanomaisesti ajatellen luulisi, vaan poikkeama 80 m/s:sta on

$$80 - \frac{20 + 60}{1 + \frac{20 \cdot 60}{299792458^2}} = \frac{80 + \frac{80 \cdot 20 \cdot 60}{299792458^2} - 80}{1 + \frac{20 \cdot 60}{299792458^2}} = \frac{\frac{80 \cdot 20 \cdot 60}{299792458^2}}{1 + \frac{20 \cdot 60}{299792458^2}} \approx 1,068 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}$$

Ero on tässä tapauksessa hyvin pieni, mutta jos nopeudet ovat lähellä valonnopeutta, tavanomaisella ajattelulla saatavat tulokset ovat oleellisesti vääriä.

Esim 10 Jos juna liikkuu nopeudella $v = 0,8c$ ja pallo heitetään junassa nopeudella $0,5c$ suuntaan, joka muodostaa 60° :n kulman junan kulkusuunnan kanssa, ovat pallon nopeuden komponentit junan järjestelmässä $u_{Tx} = 0,5c \cos 60^\circ$ ja $u_{Ty} = 0,5c \sin 60^\circ$ ja kaavojen (2.4.2) ja (2.4.3) mukaan aseman järjestelmässä

$$u_{Sx} = \frac{0,5c \cos 60^\circ + 0,8c}{1 + \frac{0,5c \cos 60^\circ \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,05}{1,2} c = 0,875c$$

$$u_{Sy} = \frac{0,5c \sin 60^\circ \sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}}}{1 + \frac{0,5c \cos 60^\circ \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{0,3 \sin 60^\circ}{1,2} c \approx 0,217c$$

ja pallon nopeuden suuruus

$$u_S = \sqrt{u_{Sx}^2 + u_{Sy}^2} = \sqrt{(0,875c)^2 + (0,25 \sin 60^\circ c)^2} \approx 0,901c$$

ja suunta

$$\varphi_S = \tan^{-1} \left(\frac{u_{Sy}}{u_{Sx}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0,25 \sin 60^\circ c}{0,875c} \right) \approx 13,9^\circ$$

Sitä vastoin tavanomaisen ajattelun mukaan junan nopeus vaikuttaisi vain junan kulkusuuntaiseen komponenttiin ja komponentit olisivat $u_{Sx} = u_{Tx} + v = 0,5c \cos 60^\circ + 0,8c = 1,05c$, mikä on mahdotonta, ja $u_{Sy} = 0,5c \sin 60^\circ = n. 0,433c$, suuruus $u_S = n. 1,136c$ ja suuntakulma $n. 22,4^\circ$.

Esim 11 Tarkastellaan lopuksi rajatapauksia, joissa junan tai pallon nopeus on c ja oletetaan, että edellä johdetut kaavat (2.4.2) ja (2.4.3) pätevät myös näissä tapauksissa.

Jos junan nopeus $v = c$, ovat heitetyn pallon nopeuden komponentit aseman järjestelmässä

$$u_{Sx} = \frac{u_{Tx} + c}{1 + \frac{u_{Tx}c}{c^2}} = \frac{u_{Tx} + c}{1 + \frac{u_{Tx}}{c}} = \frac{c(u_{Tx} + c)}{c + u_{Tx}} = c$$

$$u_{Sy} = \frac{u_{Ty} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}c}{c^2}} = 0$$

riipumatta siitä, mitkä pallon nopeuden komponentit ovat junan järjestelmässä.

Jos taas junan nopeus on v ja pallon nopeus c suuntaan φ , ovat pallon nopeuden komponentit junan järjestelmässä $u_{Tx} = c \cos \varphi$ ja $u_{Ty} = c \sin \varphi$ ja aseman järjestelmässä

$$u_{Sx} = \frac{c \cos \varphi + v}{1 + \frac{cv \cos \varphi}{c^2}} = \frac{c \cos \varphi + v}{1 + \frac{v \cos \varphi}{c}} = \frac{c(c \cos \varphi + v)}{c + v \cos \varphi}$$

$$u_{Sy} = \frac{c \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{cv \cos \varphi}{c^2}} = \frac{\sin \varphi \sqrt{c^2 - v^2}}{1 + \frac{v \cos \varphi}{c}} = \frac{c \sin \varphi \sqrt{c^2 - v^2}}{c + v \cos \varphi}$$

ja nopeuden suuruus

$$\begin{aligned} u_S &= \sqrt{u_{Sx}^2 + u_{Sy}^2} = \sqrt{\frac{c^2(c \cos \varphi + v)^2}{(c + v \cos \varphi)^2} + \frac{c^2 \sin^2 \varphi (c^2 - v^2)}{(c + v \cos \varphi)^2}} \\ &= c \frac{\sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + 2cv \cos \varphi + v^2 + c^2 \sin^2 \varphi - v^2 \sin^2 \varphi}}{c + v \cos \varphi} \\ &= c \frac{\sqrt{c^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 2cv \cos \varphi + v^2(1 - \sin^2 \varphi)}}{c + v \cos \varphi} \\ &= c \frac{\sqrt{c^2 + 2cv \cos \varphi + v^2 \cos^2 \varphi}}{c + v \cos \varphi} = c \frac{\sqrt{(c + v \cos \varphi)^2}}{c + v \cos \varphi} \\ &= c \end{aligned}$$

kuten kohdan 1.2 perusoletuksen P5 mukaan pitääkin olla.

3 LIIKEMÄÄRÄ JA ENERGIA

Tähän saakka on käsitelty vain suureita matka, aika ja nopeus. Nyt otetaan mukaan massa ja sen myötä käsitteet liikemäärä ja liike-energia. Aloitetaan käsittelemällä liikemäärän ja liike-energian käsitteitä klassisessa teoriassa, siis teoriassa, jossa perusoletusta P5 ei ole. Todetaan, että ne eivät täytä perusoletusta P4 ja siksi niitä on muutettava. Edellä esitetystä tällöin nousevat keskeisimmiksi nopeuksien yhteenlaskukaavat (2.4.2) ja (2.4.3). Tällä kertaa yksityiskohdat ovat jonkin verran monimutkaisemmat, mutta ovat tuloksetkin vastaavasti merkittävämpiä.

3.1 Klassinen liikemäärä ja liike-energia

3.1.1 Liikemäärä

Klassisen teorian mukaan kappaleella, jonka massa on m ja nopeus $\vec{u}$, on liikemäärä $\vec{p} = m\vec{u}$. Liikemäärä on siis vektorisuure: sen suunta on kappaleen kulkusuunta ja suuruus kappaleen nopeuden suuruuden ja massan tulo.

Liikemäärän merkitys on siinä, että kappaleen liikemäärä tai usean kappaleen liikemäärien summa ei muutu, jos kappaleeseen tai kappalejoukkoon ei vaikuta ulkoista voimaa. Tämä on seuraus englantilaisen fyysikon, matemaatikon ja tähtitieteilijän Isaac Newtonin vuonna 1687 esittämistä mekaniikan peruslaeista, joissa sanotaan, että kappaleeseen vaikuttava voima $\vec{F}$ on kappaleen massan m ja kappaleen kiihtyvyyden $\vec{a}$ tulo, $\vec{F} = m\vec{a}$. Siis jos kappaleeseen ei vaikuta voimaa, on kappaleen kiihtyvyys $\vec{a} = \vec{0}$, mikä tarkoittaa, että kappaleen nopeus on sekä suunnaltaan että suuruudeltaan vakio. Tällöin myös $\vec{p} = m\vec{u}$ on vakio.

Liikemäärän muuttumattomuus pätee esimerkiksi silloin, jos kaksi kappaletta törmää yhteen tai yksi kappale hajoaa (räjähtää) useaan osaan.

Esimerkiksi 9.3x62 -kaliiperisen Tikka T3 Lite -kiväärin massa on 2,8 kg. Oletetaan, että käytetään Norma Oryx 285 gr -patruunaa, jonka hylsyn massa on 12,4 g, luodin massa 18,5 g, ruudin massa 3,6 g ja luodin lähtönopeus 720 m/s. Kun kivääri laukaistaan, lähtee luoti yhteen suuntaan ja kivääri ja hylsy vastakkaiseen suuntaan. Oletetaan, että ruutikaasut seuraavat luotia luodin nopeudella, jolloin luodin suuntaan lähtee massaa 0,0185 g + 0,0036 g = 0,0221 g nopeudella 720 m/s ja vastakkaiseen suuntaan 2,8 kg + 0,0124 kg = 2,8124 kg jollakin nopeudella u .

Kiväärin ja patruunan muodostama kokonaisuus on paikallaan ennen ruodin räjähtämistä, joten sen liikemäärä on silloin $\vec{p} = m\vec{0} = \vec{0}$, ja kun räjähdyksessä ei tähän kokonaisuuteen vaikuta ulkoista voimaa, on liikemäärä räjähdysen jälkeenkin $\vec{0}$. Luodilla ja ruutikaasuilla on siis luodin kulkusuuntaan yhtä paljon liikemäärää kuin aseella ja hylsillä vastakkaiseen suuntaan. Kiväärin ja ruutikaasujen saamalle nopeudelle u pätee siis yhtälö

$$0,0221 \cdot 720 = 2,8124u$$

josta

$$u = \frac{0,0221 \cdot 720}{2,8124} = \frac{15,912}{2,8124} \approx 5,7 \text{ m/s}$$

Mainittakoon, että jos jätetään luoti pois, otetaan ruutia enemmän, poltetaan sitä kauemmin ja järjestetään vielä niin, että siinä tilassa, jossa ruuti palaa (oikeammin ruudin nitroselluloosa hajoaa vedeksi, hiilidioksidiksi, hiilimonoksidiksi, vedyksi ja typeksi) paine pysyy ruudin tehokkaalle palamiselle sopivana ja kiväärin tilalle otetaan vähän paremmin muotoiltu esine, on kysymyksessä raketti.

3.1.2 Liike-energia

Liikkuvalla kappaleella on kyky tehdä työtä: kirveellä pystyy halkaisemaan pölkyn ja – jos vähän venytetään kappaleen käsitettä – virtaava vesi pystyy pyörittämään vesimyllyn ja liikkuva ilma tuulimyllyn koneistoa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa kappale, jonka massa on m ja nopeus u , pysäytetään tasaisesti ajassa t . Tällöin on kappaleen vakiona pysyvä kiihtyvyys, nopeuden muutos jaettuna muutokseen kulu- neella ajalla, $a = -u/t$. Miinus siksi, että nopeus pienenee. Tähän tarvittavan voiman suuruus on mekaniikan toisen peruslain mukaan $F = ma = mu/t$. Koska kappale pysäytetään tasaisesti, on kappaleen keskinopeus jarrutuksen aikana alku- ja loppunopeuden keskiarvo, $u_k = (u + 0)/2 = u/2$ ja kappaleen jarrutuksen aikana kulkema matka näin ollen $s = u_k t = ut/2$. Koska työ W on voiman ja matkan tulo, saadaan $W = Fs = mu/t \cdot ut/2 = mu^2/2$.

Edellä oletettiin, että pysäyttäminen tapahtuu tasaisesti, mutta voidaan osoittaa, että tehtävä työ on yhtä suuri riippumatta siitä, millä tavalla pysäyttäminen tehdään.

Kappaleella on siis kyky tehdä työtä, mikä tarkoittaa, että sillä on energiaa, tässä tapauksessa liike- energiaa. Jos kappaleen massa on m ja nopeus u , on sillä liike- eli kineettinen energia

$$K = \frac{mu^2}{2}$$

Esimerkiksi edellä mainitun Norma Oryx 285 gr -patruunan luodin liike-energia lähdössä on

$$K_0 = \frac{0,0185 \text{ kg} \cdot 720^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} \approx 4800 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 4800 \text{ J}$$

ja kun 300 m:n päässä piipun suusta luodin nopeus on 491 m/s, on sen liike-energia tuolloin

$$K_{300} = \frac{0,0185 \cdot 491^2}{2} \approx 2230 \text{ J}$$

Aseen liike-energia sitä vastoin on vain

$$K_{ase} = \frac{2,8 \cdot \left(\frac{15,912}{2,8124}\right)^2}{2} \approx 45 \text{ J}$$

3.1.3 Liikemäärien ja liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen, esimerkki

Kuvitellaan, että edellä kuvattu kiväärin laukaisu tehdään junassa ja sitä tarkastellaan myös ase- malta. Tällöin junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ kiväärin ja luodin liikemäärien summa ennen laukaisua ja lau- kaisun jälkeen on $\vec{0}$. Jos junan nopeuden suuruus on 60 m/s, on junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ kiväärin ja

patruunan muodostaman kokonaisuuden massalla $2,8 + 0,0124 + 0,0036 + 0,0185 = 2,8345 \text{ kg}$ ennen laukaisua liikemäärä

$$p_{\text{ennen}} = 2,8345 \cdot 60 = 170,07 \text{ kgm/s}$$

Jos luoti ammutaan junan kulkusuuntaan, on sen nopeus aseman järjestelmässä S klassisen teorian mukaan $720 + 60 = 780 \text{ m/s}$. Luodin ja ruutikaasujen liikemäärää junan kulkusuuntaan on siten

$$p_{S1\text{jälkeen}} = 0,0221 \cdot 780 = 17,238 \text{ kgm/s}$$

Kiväärin ja hylsyn muodostaman $2,8124 \text{ kg:n}$ kokonaisuuden nopeus aseman järjestelmässä on junan nopeus vähennettynä kohdassa 3.1.1 lasketulla kiväärin rekyylinopeudella $u = 15,912/2,8124 \text{ m/s}$ ja liikemäärä on siten

$$p_{S2\text{jälkeen}} = 2,8124(60 - u) = 2,8124 \left(60 - \frac{15,912}{2,8124} \right) = 152,832 \text{ kgm/s}$$

Luodin, ruutikaasujen, kiväärin ja hylsyn liikemäärien summa on laukaisun jälkeen aseman järjestelmässä siis

$$p_{S\text{jälkeen}} = p_{S1\text{jälkeen}} + p_{S2\text{jälkeen}} = 17,238 + 152,832 = 170,07 \text{ kgm/s}$$

eli täsmälleen sama kuin ennen laukaisua.

Kiväärin ja patruunan muodostaman kokonaisuuden liikemäärä on junan järjestelmässä 0 kgm/s sekä ennen laukaisua että laukaisun jälkeen ja aseman järjestelmässä $170,07 \text{ kgm/s}$ sekä ennen laukaisua että laukaisun jälkeen. Liikemäärä siis säilyy tarkasteltiinpa sitä junassa tai asemalla.

Entä mitä tapahtuu liike-energioille? Tässä esimerkissä ase- ja patruunan liike-energia junan järjestelmässä $\mathcal{T}$ ennen laukaisua on

$$K_{T\text{ennen}} = \frac{2,8345 \cdot 0^2}{2} = 0 \text{ J}$$

Laukaisun jälkeen luodin ja sen mukaan lähtevien ruutikaasujen liike-energia on

$$K_{T1\text{jälkeen}} = \frac{0,0221 \cdot 720^2}{2} = 5728,32 \text{ J}$$

ja kiväärin ja hylsyn liike-energia kohdan 3.1.2 mukaan

$$K_{T2\text{jälkeen}} = \frac{2,8124 \cdot \left(\frac{15,912}{2,8124} \right)^2}{2} = \frac{126,595872}{2,8124} \text{ J}$$

ja liike-energia yhteensä

$$K_{T\text{jälkeen}} = K_{T1\text{jälkeen}} + K_{T2\text{jälkeen}} = 5728,32 + \frac{126,595872}{2,8124} = \frac{16236,92304}{2,8124} \text{ J}$$

joten laukaisun jälkeisen liike-energian ja laukaisua edeltävän liike-energian erotus on

$$\Delta K_T = K_{T\text{jälkeen}} - K_{T\text{ennen}} = \frac{16236,92304}{2,8124} - 0 = \frac{16236,92304}{2,8142} \approx 5773 \text{ J}$$

Aseman järjestelmässä **S** kiväärin ja patruunan muodostaman kokonaisuuden liike-energia ennen laukaisua on

$$K_{S\text{ennen}} = \frac{2,8345 \cdot 60^2}{2} = 5102,1 \text{ J}$$

Laukaisun jälkeen luodin ja ruutikaasujen liike-energia on

$$K_{S1\text{jälkeen}} = \frac{0,0221 \cdot 780^2}{2} = 6722,82 \text{ J}$$

ja kiväärin ja hylsyn

$$K_{S2\text{jälkeen}} = \frac{2,8124 \cdot \left(60 - \frac{15,912}{2,8124}\right)^2}{2} = \frac{2,8124 \cdot \left(\frac{60 \cdot 2,8124 - 15,912}{2,8124}\right)^2}{2} = \frac{11678,810112}{2,8124} \text{ J}$$

ja liike-energia yhteensä

$$K_{S\text{jälkeen}} = K_{S1\text{jälkeen}} + K_{S2\text{jälkeen}} = 6722,82 + \frac{11678,810112}{2,8124} = \frac{30586,06908}{2,8124} \text{ J}$$

joten laukaisun jälkeisen liike-energian ja laukaisua edeltävän liike-energian erotus on

$$\Delta K_S = K_{S\text{jälkeen}} - K_{S\text{ennen}} = \frac{30586,06908}{2,8124} - 5102,1 = \frac{16236,92304}{2,8142} \approx 5773 \text{ J}$$

mikä on täsmälleen sama kuin liike-energioiden erotus junan järjestelmässä ΔK_T . Tämä on tietenkin näin, sillä ruudin räjähtäminen tuottaa saman liike-energian lisäyksen katsottiinpa sitä junasta tai asemalta.

3.1.4 Kappalejoukon liikemäärä ja liike-energia

Edellä tarkasteltiin tapausta, jossa yksi kappale (kivääri ja patruuna) hajosi kahteen osaan (luoti ja ruutikaasut sekä kivääri ja hylsy). Tämä voidaan tulkita niinkin, että tarkasteltavana on kaksi kappalejoukkoa, joukko **A**, johon kuuluu yksi kappale, kiväärin ja patruunan muodostama kokonaisuus ennen laukaisua, ja joukko **B**, johon kuuluu kaksi kappaletta, joista toinen on kivääri ja hylsy ja toinen luoti ja ruuti palamiskaasuina. Voidaan myös ajatella, että joukossa **A** on neljä kappaletta kivääri, hylsy, luoti ja ruuti kiinteänä aineena ennen laukaisua ja joukossa **B** samoin neljä kappaletta kivääri, hylsy, luoti ja ruuti kaasumaisena laukauksen jälkeen. Oleellista on, että kappale on kokonaisuus, jossa ei ole toistensa suhteen liikkuvia osia.

Olkoon siis **A** kappalejoukko, joka koostuu kappaleista $K_{A1}, \dots, K_{An}$, joiden massat ovat $m_{A1}, \dots, m_{An}$. Tarkastellaan sitä kahdessa järjestelmässä: junan järjestelmässä **J** ja aseman järjestelmässä **S**. Olkoot kappaleiden nopeudet junan järjestelmässä $\vec{u}_{TA1}, \dots, \vec{u}_{TAn}$

Useamman kappaleen muodostaman kokonaisuuden liikemäärän ja liike-energian tarkastelu on syytä tehdä kolmiulotteisena, sillä jo kahden kappaleen tapauksessa kappaleiden nopeusvektoreita ja junan liikesuuntaa ei yleensä saada samaan tasoon.

Otetaan siis käyttöön suorakulmainen kolmiulotteinen $Oyxyz$ -koordinaatisto, jossa joukon **A** nopeuksien komponentit ovat $u_{TA1x}, u_{TA1y}, u_{TA1z}, \dots, u_{TAnx}, u_{TAny}, u_{TAnz}$, liikemäärät $\vec{p}_{TA1} = m_{A1}\vec{u}_{TA1}, \dots, \vec{p}_{TAn} = m_{An}\vec{u}_{TAn}$ ja liikemäärien komponentit

$$\begin{cases} p_{TA1x} = m_{A1}u_{TA1x} & p_{TA1y} = m_{A1}u_{TA1y} & p_{TA1z} = m_{A1}u_{TA1z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{TAnx} = m_{An}u_{TAnx} & p_{TAny} = m_{An}u_{TAny} & p_{TAnz} = m_{An}u_{TAnz} \end{cases}$$

Määritellään nyt kappalejoukon **A** massaksi m_A sen kappaleiden massojen summa

$$m_A = m_{A1} + \dots + m_{An}$$

liikemääräksi $\vec{p}_{TA}$ sen kappaleiden liikemäärien summa

$$\vec{p}_{TA} = \vec{p}_{TA1} + \dots + \vec{p}_{TAn}$$

komponentteittain

$$\begin{cases} p_{TAx} = p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx} \\ p_{TAy} = p_{TA1y} + \dots + p_{TAny} \\ p_{TAz} = p_{TA1z} + \dots + p_{TAnz} \end{cases}$$

ja auki kirjoitettuna

$$\begin{cases} p_{TAx} = m_{A1}u_{TA1x} + \dots + m_{An}u_{TAnx} \\ p_{TAy} = m_{A1}u_{TA1y} + \dots + m_{An}u_{TAny} \\ p_{TAz} = m_{A1}u_{TA1z} + \dots + m_{An}u_{TAnz} \end{cases}$$

Kappalejoukon **A** liike-energiaksi K_{TA} määritellään sen kappaleiden liike-energioiden summa

$$K_{TA} = K_{TA1} + \dots + K_{TAn}$$

$$K_{TA} = \frac{m_{A1}u_{TA1}^2}{2} + \dots + \frac{m_{An}u_{TAn}^2}{2}$$

joka komponentteittain lausuttuna on

$$K_{TA} = \frac{m_{A1}(u_{TA1x}^2 + u_{TA1y}^2 + u_{TA1z}^2)}{2} + \dots + \frac{m_{An}(u_{TAnx}^2 + u_{TAny}^2 + u_{TAnz}^2)}{2}$$

3.1.5 Kappalejoukkojen liikemäärien ja liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen

Edellä määriteltiin kappalejoukon liikemäärä ja liike-energia junan järjestelmässä $\mathcal{J}$. Ne tietenkin määritellään samalla tavalla myös aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ ja merkinnät ovat joukon **A** kappaleiden

nopeuksille $\bar{u}_{SA1}, \dots, \bar{u}_{SAn}$, nopeuksien komponenteille $u_{SA1x}, u_{SA1y}, u_{SA1z}, \dots, u_{SAnx}, u_{SAny}, u_{SAnz}$ ja liikemäärien komponenteille $p_{SA1x}, p_{SA1y}, p_{SA1z}, \dots, p_{SAnx}, p_{SAny}, p_{SAnz}$ sekä joukon **A** liikemäärän komponenteille p_{SAx}, p_{SAy} ja p_{SAz} ja liike-energialle K_{SA} .

Jos koordinaatisto asetaan niin, että sen positiivinen x -akseli on junan kulkusuuntaan ja jos junan nopeuden suuruus on v , ovat aseman järjestelmässä S joukon **A** kunkin kappaleen K_{Ai} , $i = 1, \dots, n$ nopeuden komponentit

$$\begin{cases} u_{SAix} = u_{TAix} + v \\ u_{SAiy} = u_{TAiy} \\ u_{SAiz} = u_{TAiz} \end{cases}$$

nopeuden suuruus

$$\begin{aligned} u_{SAi} &= \sqrt{u_{SAix}^2 + u_{SAiy}^2 + u_{SAiz}^2} = \sqrt{(u_{TAix} + v)^2 + u_{TAiy}^2 + u_{TAiz}^2} \\ &= \sqrt{u_{TAix}^2 + 2u_{TAix}v + v^2 + u_{TAiy}^2 + u_{TAiz}^2} \\ &= \sqrt{u_{TAi}^2 + 2u_{TAix}v + v^2} \end{aligned}$$

liikemäärän komponentit

$$\begin{cases} p_{SAix} = m_{Ai}u_{SAix} = m_{Ai}(u_{TAix} + v) = m_{Ai}u_{TAix} + m_{Ai}v = p_{TAix} + m_{Ai}v \\ p_{SAiy} = m_{Ai}u_{SAiy} = m_{Ai}u_{TAiy} = p_{TAiy} \\ p_{SAiz} = m_{Ai}u_{SAiz} = m_{Ai}u_{TAiz} = p_{TAiz} \end{cases}$$

ja liike-energia

$$\begin{aligned} K_{SAi} &= \frac{m_{Ai}u_{SAi}^2}{2} = \frac{m_{Ai}(u_{TAi}^2 + 2u_{TAix}v + v^2)}{2} = \frac{m_{Ai}u_{TAi}^2}{2} + m_{Ai}u_{TAix}v + \frac{m_{Ai}v^2}{2} \\ &= K_{TAi} + p_{TAix}v + \frac{m_{Ai}v^2}{2} \end{aligned}$$

Näistä seuraa, että aseman järjestelmässä S kappalejoukon **A** liikemäärän komponentit ovat

$$\begin{aligned} p_{SAx} &= p_{SA1x} + \dots + p_{SAnx} = p_{TA1x} + m_{A1}v + \dots + p_{TAnx} + m_{An}v \\ &= p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx} + (m_{A1} + \dots + m_{An})v = p_{TAx} + m_Av \\ p_{SAy} &= p_{SA1y} + \dots + p_{SAny} = p_{TA1y} + \dots + p_{TAny} = p_{TAy} \\ p_{SAz} &= p_{SA1z} + \dots + p_{SAnz} = p_{TA1z} + \dots + p_{TAnz} = p_{TAz} \end{aligned}$$

ja liike-energia

$$\begin{aligned}
K_{SA} &= K_{SA1} + \dots + K_{SAn} = K_{TA1} + p_{TA1x}v + \frac{m_{A1}v^2}{2} + \dots + K_{TAn} + p_{TAnx}v + \frac{m_{An}v^2}{2} \\
&= K_{TA1} + \dots + K_{TAn} + (p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx})v + \frac{(m_{A1} + \dots + m_{An})v^2}{2} \\
&= K_{TA} + p_{TAx}v + \frac{m_A v^2}{2}
\end{aligned}$$

Yhteenvedona siis

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} p_{SAx} = p_{TAx} + m_A v \\ p_{SAy} = p_{TAy} \\ p_{SAz} = p_{TAz} \end{cases}$$

$$(3.1.2) \quad K_{SA} = K_{TA} + p_{TAx}v + \frac{m_A v^2}{2}$$

Olkoon **B** toinen kappalejoukko, joka koostuu kappaleista $K_{B1}, \dots, K_{Bk}$, joiden massat ovat $m_{B1}, \dots, m_{Bk}$ ja junan järjestelmässä **T** nopeudet $\bar{u}_{TB1}, \dots, \bar{u}_{TBk}$. Vastaavasti kuten edellä joukon **A** suhteen, saadaan joukon **B** liikemäärän komponenteiksi aseman järjestelmässä **S**

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} p_{SBx} = p_{TBx} + m_B v \\ p_{SBx} = p_{TBx} \\ p_{SBz} = p_{TBz} \end{cases}$$

ja liike-energiaksi

$$(3.1.4) \quad K_{SB} = K_{TB} + p_{TBx}v + \frac{m_B v^2}{2}$$

Joukkojen **A** ja **B** liikemäärien erotuksen x -komponentit järjestelmässä **S** ovat ensimmäisten yhtälöiden (3.1.1) ja (3.1.3) mukaan näin ollen

$$p_{SAx} - p_{SBx} = p_{TAx} + m_A v - (p_{TBx} + m_B v) = p_{TAx} - p_{TBx} + (m_A - m_B)v$$

ja kaikkiaan

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} p_{SAx} - p_{SBx} = p_{TAx} - p_{TBx} + (m_A - m_B)v \\ p_{SAy} - p_{SBx} = p_{TAy} - p_{TBx} \\ p_{SAz} - p_{SBz} = p_{TAz} - p_{TBz} \end{cases}$$

Jos joukon **A** liikemäärä on yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärä junan järjestelmässä **T**, on joukon **A** liikemäärä on yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärä aseman järjestelmässä **S**, jos ja vain jos

$$m_A = m_B$$

eli joukkojen massat ovat yhtä suuret.

Yleisemmin yhtälöistä (3.1.5) seuraa, että jos joukkojen **A** ja **B** massat ovat yhtä suuret, $m_A - m_B = 0$, on liikemäärien erotus yhtä suuri järjestelmässä $\mathcal{T}$ kuin järjestelmässä $\mathcal{S}$.

Joukkojen **A** ja **B** liike-energioiden erotus järjestelmässä $\mathcal{S}$ on kaavojen (3.1.2) ja (3.1.4) mukaan

$$\begin{aligned} K_{SA} - K_{SB} &= K_{TA} + p_{TAx}v + \frac{m_A v^2}{2} - \left(K_{TB} + p_{TBx}v + \frac{m_B v^2}{2} \right) \\ &= K_{TA} - K_{TB} + (p_{TAx} - p_{TBx})v + \frac{(m_A - m_B)v^2}{2} \end{aligned}$$

Siis

$$(3.1.6) \quad K_{SA} - K_{SB} = K_{TA} - K_{TB} + (p_{TAx} - p_{TBx})v + \frac{(m_A - m_B)v^2}{2}$$

Oletetaan, että joukon **A** liikemäärän komponentti järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan on yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärän komponentti tähän suuntaan, $p_{TAx} = p_{TBx}$, ja joukon **A** massa on yhtä suuri kuin joukon **B** massa, $m_A = m_B$. Toisin sanoen oletetaan, että joukon **A** liikemäärä on yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärä sekä järjestelmässä $\mathcal{T}$ että järjestelmässä $\mathcal{S}$. Jos tällöin joukon **A** liike-energia on yhtä suuri kuin joukon **B** liike-energia järjestelmässä $\mathcal{T}$, niin joukon **A** liike-energia on yhtä suuri kuin joukon **B** liike-energia myös järjestelmässä $\mathcal{S}$, ja jos liike-energiat eivät ole yhtä suuret, on kuitenkin niiden erotus yhtä suuri kummassakin järjestelmässä.

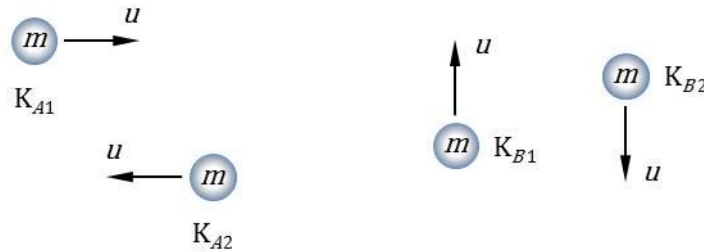
Klassisessa teoriassa massojen yhtäsuuruus on taattu törmäyksissä, kun **A** on törmäävien kappaleiden joukko ennen törmäystä ja **B** niiden joukko törmäyksen jälkeen. Samoin on laita kappaleen hajoamisessa useampaan osaan. Mikäli tällaisissa tapauksissa kappalejoukkoon ei vaikuta ulkoista voimaa, on sen liikemäärä yhtä suuri ennen törmäys- tai hajoamistapahtumaa ja joukkojen liike-energioiden erotus on yhtä suuri sekä järjestelmässä $\mathcal{T}$ että järjestelmässä $\mathcal{S}$, kuten kohdan 3.1.3 esimerkissä todettiin.

Seuraavaksi selvitetään, päteekö tämä sama myös kohdan 1.2 perusoletusten P1 – P5 voimassa ollessa.

3.2 Liikemäärä ja liike-energia suhteellisuusteoriassa, erikoistapaus

Koska klassisissa liikemäärän ja liike-energian kaavoissa esiintyy nopeus, on syytä ryhtyä selvittämään, päteekö liikemäärien ja liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen, kun otetaan huomioon kohdassa 2.4.3 johdetut nopeuden yhteenlaskukaavat (2.4.2) ja (2.4.3).

Tarkastellaan edellä esitetyn kysymyksen selvittämiseksi yksinkertaista tilannetta, jossa juna liikkuu nopeudella u , joukko **A** koostuu kahdesta kappaleesta K_{A1} ja K_{A2} ja joukko **B** kahdesta kappaleesta K_{B1} ja K_{B2} . Oletetaan, että jokaisella kappaleella on yhtä suuri massa m . Kappaleen K_{A1} nopeus on u junan kulkusuuntaan, K_{A2} :n nopeus u junan kulkusuuntaa vastaan, K_{B1} :n nopeus u kohtisuoraan junan kulkusuuntaa vastaan sekä K_{B2} :n nopeus u K_{B1} :n kulkusuuntaa vastaan (kuva 14).



Kuva 14: Liikemäärät ja liike-energiat yhtä suuret.

Tämä tilanne voidaan käsitellä kaksiulotteisena niin, että positiivinen x -akseli asetetaan junan kulkusuuntaan ja y -akseli kappaleen K_{B1} kulkusuuntaan. Tällöin kappaleiden nopeuksien komponentit ovat junan järjestelmässä $\mathcal{T}$

$$(3.2.1) \quad u_{TA1x} = u$$

$$(3.2.2) \quad u_{TA1y} = 0$$

$$(3.2.3) \quad u_{TA2x} = -u$$

$$(3.2.4) \quad u_{TA2y} = 0$$

$$(3.2.5) \quad u_{TB1x} = 0$$

$$(3.2.6) \quad u_{TB1y} = u$$

$$(3.2.7) \quad u_{TB2x} = 0$$

$$(3.2.8) \quad u_{TB2y} = -u$$

ja joukkojen **A** ja **B** liikemäärien komponentit

$$p_{TAx} = m_{A1}u_{TA1x} + m_{A2}u_{TA2x} = mu + m(-u) = 0$$

$$p_{TAy} = m_{A1}u_{TA1y} + m_{A2}u_{TA2y} = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0$$

$$p_{TBx} = m_{B1}u_{TB1x} + m_{B2}u_{TB2x} = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0$$

$$p_{TBy} = m_{B1}u_{TB1y} + m_{B2}u_{TB2y} = mu + m(-u) = 0$$

ja siis joukon **A** liikemäärä on yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärä.

Aseman järjestelmässä **S** nopeuksien komponentit ovat kaavojen (2.4.2) ja (2.4.3) mukaan (huom: junan nopeus v oletettiin yhtä suureksi kuin kappaleen K_{A1} nopeus u)

$$(3.2.9) \quad u_{SA1x} = \frac{u_{TA1x} + v}{1 + \frac{u_{TA1x}v}{c^2}} = \frac{u + u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2c^2u}{c^2 + u^2}$$

$$(3.2.10) \quad u_{SA1y} = \frac{u_{TA1y}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TA1x}v}{c^2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = 0$$

$$(3.2.11) \quad u_{SA2x} = \frac{u_{TA2x} + v}{1 + \frac{u_{TA2x}v}{c^2}} = \frac{-u + u}{1 + \frac{-u^2}{c^2}} = 0$$

$$(3.2.12) \quad u_{SA2y} = \frac{u_{TA2y}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TA2x}v}{c^2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{-u^2}{c^2}} = 0$$

$$(3.2.13) \quad u_{SB1x} = \frac{u_{TB1x} + v}{1 + \frac{u_{TB1x}v}{c^2}} = \frac{0 + u}{1 + \frac{0 \cdot u}{c^2}} = u$$

$$(3.2.14) \quad u_{SB1y} = \frac{u_{TB1y}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TB1x}v}{c^2}} = \frac{u\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{0 \cdot u}{c^2}} = u\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$(3.2.15) \quad u_{SB2x} = \frac{u_{TB2x} + v}{1 + \frac{u_{TB2x}v}{c^2}} = \frac{0 + u}{1 + \frac{0 \cdot u}{c^2}} = u$$

$$(3.2.16) \quad u_{SB2y} = \frac{u_{TB2y}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TB2x}v}{c^2}} = \frac{-u\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{0 \cdot u}{c^2}} = -u\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Joukon **A** liikemäärän x -komponentti on siten

$$p_{SAx} = m_{A1}u_{SA1x} + m_{A2}u_{SA2x} = m \cdot \frac{2c^2u}{c^2 + u^2} + m \cdot 0 = \frac{2mc^2u}{c^2 + u^2}$$

mutta joukon **B**

$$p_{SBx} = m_{B1}u_{SB1x} + m_{B2}u_{SB2x} = mu + mu = 2mu$$

Liikemäärien yhtäsuuruus ei siis säily siirryttäessä järjestelmästä toiseen, vaan joukkojen **A** ja **B** järjestelmässä **J** yhtä suurien liikemäärien x -komponenttien p_{TAx} ja p_{TBx} suhde järjestelmässä **S** on

$$\frac{p_{SAx}}{p_{SBx}} = \frac{\frac{2mc^2u}{c^2 + u^2}}{2mu} = \frac{c^2}{c^2 + u^2} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

joka kylläkin on lähellä yhtä, jos u on pieni. Esimerkiksi jos $u = 73600$ m/s (Juno-luotaimen nopeus, kts. esim 1 kohdassa 2.1.4), on suhde

$$\frac{p_{SAx}}{p_{SBx}} = \frac{1}{1 + \frac{73600^2}{299792458^2}} \approx 0,9999999397$$

Mutta jos u on lähellä c :tä, on

$$\frac{p_{SAx}}{p_{SBx}} \approx \frac{1}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$$

esimerkiksi, jos $u = 0,9c$, on suhde n. 0,552 ja jos $u = 0,99c$, on suhde n. 0,505.

Jos halutaan pitää kiinni liikemäärien yhtäsuuruuden säilymisestä, on ainoa keino liikemäärän määritelmän muuttaminen. Mutta ennen kuin mennään siihen, katsotaan, kuinka liike-energioiden yhtäsuuruus säilyy järjestelmästä toiseen.

Kaavojen (3.2.1) – (3.2.8) perusteella joukon **A** liike-energia junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ on

$$\begin{aligned} K_{TA} &= \frac{m_{A1}u_{TA1}^2}{2} + \frac{m_{A2}u_{TA2}^2}{2} = \frac{m_{A1}(u_{TA1x}^2 + u_{TA1y}^2)}{2} + \frac{m_{A2}(u_{TA2x}^2 + u_{TA2y}^2)}{2} \\ &= \frac{m(u^2 + 0^2)}{2} + \frac{m((-u)^2 + 0^2)}{2} = mu^2 \end{aligned}$$

ja joukon **B** liike-energia

$$\begin{aligned} K_{TB} &= \frac{m_{B1}u_{TB1}^2}{2} + \frac{m_{B2}u_{TB2}^2}{2} = \frac{m_{B1}(u_{TB1x}^2 + u_{TB1y}^2)}{2} + \frac{m_{B2}(u_{TB2x}^2 + u_{TB2y}^2)}{2} \\ &= \frac{m(0^2 + u^2)}{2} + \frac{m(0^2 + (-u)^2)}{2} = mu^2 \end{aligned}$$

ja siis

$$K_{TA} = K_{TB}$$

Aseman järjestelmässä $\mathcal{S}$ ovat nopeuksien suuruudet yhtälöiden (3.2.9) – (3.2.16) mukaan

$$(3.2.17) \quad u_{SA1} = \sqrt{u_{SA1x}^2 + u_{SA1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right)^2 + 0^2} = \frac{2c^2u}{c^2 + u^2}$$

$$(3.2.18) \quad u_{SA2} = \sqrt{u_{SA2x}^2 + u_{SA2y}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

$$(3.2.19) \quad u_{SB1} = \sqrt{u_{SB1x}^2 + u_{SB1y}^2} = \sqrt{u^2 + \left(u \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2} = \sqrt{u^2 + u^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$(3.2.20) \quad u_{SB2} = \sqrt{u_{SB2x}^2 + u_{SB2y}^2} = \sqrt{u^2 + \left(-u \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2} = \sqrt{u^2 + u^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}$$

jolloin joukkojen **A** ja **B** liike-energiat ovat

$$K_{SA} = \frac{m_{A1}u_{SA1}^2}{2} + \frac{m_{A2}u_{SA2}^2}{2} = \frac{m \left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right)^2}{2} + \frac{m \cdot 0^2}{2} = \frac{4mc^4u^2}{2(c^2 + u^2)^2} = \frac{2mu^2}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2}$$

ja

$$K_{SB} = \frac{m_{B1}u_{SB1}^2}{2} + \frac{m_{B2}u_{SB2}^2}{2} = \frac{m \left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2}{2} + \frac{m \left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2}{2} = mu^2 \left(2 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

Näin ollen myöskään liike-energioiden yhtäsuuruus ei säily järjestelmästä toiseen siirryttäessä, vaan joukon **A** liike-energian suhde joukon **B** liike-energiaan on

$$\frac{K_{SA}}{K_{SB}} = \frac{\frac{2mu^2}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2}}{mu^2 \left(2 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{2}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)^2 \cdot \left(2 - \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

joka on lähellä yhtä, kun u on pieni, esimerkiksi kun $u = 73600$ m/s, on

$$\frac{K_{SAx}}{K_{SBx}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{73600^2}{299792458^2}\right)^2 \left(2 - \frac{73600^2}{299792458^2}\right)} \approx 0,9999999096$$

mutta, kun u on lähellä c :tä, on suhde

$$\frac{K_{SAx}}{K_{SBx}} \approx \frac{2}{\left(1 + \frac{c^2}{c^2}\right)^2 \left(2 - \frac{c^2}{c^2}\right)} = \frac{2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

esimerkiksi, jos $u = 0,9c$, on tämä suhde n. 0,513 ja jos $u = 0,99c$, on se n. 0,500.

Kuten liikemäärä, tarvitsee siis myös liike-energia uuden määrittelyn.

3.3 Liikemäärän määrittely

3.3.1 Liikemäärälle asetettavat ehdot

Lähtökohtana liikemäärän uudelle määritelmälle on klassisen teorian perusidea, eli se, että liikemäärä on kappaleen kulkusuuntaan ja riippuu vain kappaleen massasta ja nopeudesta. Nämä merkitsevät sitä, että $\bar{p} = k\bar{u}$, missä kerroin k on positiivinen ja riippuu vain kappaleen massasta ja nopeudesta. Kovennetaan vielä k :lle asetettavaa vaatimusta niin, että se on kappaleen massan m ja pelkästään kappaleen nopeuden suuruudesta riippuvan suureen $f(u)$ tulo. Siis

$$\bar{p} = mf(u)\bar{u}$$

Edellä esitetyn perusteella on syytä vaatia myös, että pienillä nopeuksilla nyt määriteltävänä olevan liikemäärän suuruus p on lähellä klassisen teorian mukaista massan ja nopeuden suuruuden tuloa mu . Tämän vaatimuksen voi muotoilla monella tavalla, mutta asetetaan tässä varsin ankara vaatimus, että p :n ja mu :n suhde lähestyy lukua 1, kun u lähestyy nollaa. Matemaattisesti lausuttuna

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{mf(u)u}{mu} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$$

Selvitetään nyt, löytyykö liikemäärälle määritelmä, joka täyttää kaikki edellä asetetut ehdot:

L1. Kappaleen liikemäärä $\bar{p}$ on kappaleen massan m ja nopeuden $\bar{u}$ tulo kerrottuna vain kappaleen nopeuden suuruudesta u riippuvalla suureella $f(u)$,

$$(3.3.1) \quad \bar{p} = m\bar{u}f(u)$$

L2. Funktiolle f pätee

$$(3.3.2) \quad \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$$

L3. Jos kappalejoukon A liikemäärä on yhtä suuri kuin kappalejoukon B liikemäärä järjestelmässä $\mathcal{I}$, on kappalejoukon A liikemäärä yhtä suuri kuin kappalejoukon B liikemäärä myös joksaisessa muussa järjestelmässä S , jossa järjestelmä $\mathcal{I}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti.

Komponenttimuodossa esitettynä ehto L1 on:

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} p_x = mu_x f(u) \\ p_y = mu_y f(u) \\ p_z = mu_z f(u) \end{cases}$$

3.3.2 Liikemäärän määritelmän johtaminen

Tutkitaan, mitä näin asetetut ehdot merkitsevät kohdan 3.2 erikoistapauksessa. Ehdon L3 mukaan joukon **A** liikemäärän on oltava yhtä suuri kuin joukon **B** liikemäärä aseman järjestelmässä, koska liikemäärät ovat yhtä suuret junan järjestelmässä $\mathcal{J}$. Liikemäärien x -komponenteille tästä seuraa

$$p_{SAx} = p_{SBx}$$

$$p_{SA1x} + p_{SA2x} = p_{SB1x} + p_{SB2x}$$

$$m_{A1}u_{SA1x}f(u_{SA1}) + m_{A2}u_{SA2x}f(u_{SA2}) = m_{B1}u_{SB1x}f(u_{SB1}) + m_{B2}u_{SB2x}f(u_{SB2})$$

ja tästä yhtälöiden (3.2.9), (3.2.17), (3.2.11), (3.2.18), (3.2.13), (3.2.19), (3.2.15) ja (3.2.20) mukaan

$$m \frac{2c^2u}{c^2 + u^2} f\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right) + m \cdot 0 \cdot f(0) = muf\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right) + muf\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$$

$$2mu \frac{c^2}{c^2 + u^2} f\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right) = 2muf\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$$

Saadaan siis yhtälö

$$\frac{c^2}{c^2 + u^2} f\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right) = f\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$$

Liitteessä 2 osoitetaan, että tämän funktionaaliyhtälön ainoa ehdon (3.3.2) täyttävä ratkaisu on

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Tämä $f(u)$ toteuttaa myös kaavan (3.3.3) mukaisten liikemäärien y -komponenttien yhtäsuuruuden säilymisen, sillä yhtälöiden (3.2.10), (3.2.17), (3.2.12) ja (3.2.18) mukaan

$$\begin{aligned} p_{SAy} &= p_{SA1y} + p_{SA2y} = m_{A1}u_{SA1y}f(u_{SA1}) + m_{A2}u_{SA2y}f(u_{SA2}) \\ &= m \cdot 0 \cdot f\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right) + m \cdot 0 \cdot f(0) = 0 \end{aligned}$$

sekä yhtälöiden (3.2.14), (3.2.19), (3.2.16), ja (3.2.20) mukaan

$$\begin{aligned} p_{SB y} &= p_{SB1y} + p_{SB2y} = m_{B1}u_{SB1y}f(u_{SB1}) + m_{B2}u_{SB2y}f(u_{SB2}) \\ &= mu \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot f\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right) + m \left(-u \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) f\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Koska kappaleet K_{A1} , K_{A2} , K_{B1} ja K_{B2} liikkuvat kaikki xy -tasossa, on sekä joukon **A** että joukon **B** liikemäärän z -komponentti 0 niin aseman kuin junankin järjestelmässä, joten myös liikemäärien z -komponenttien yhtäsuuruus säilyy.

Näin päädytään kaavan (3.3.1) mukaan liikemäärän määritelmään.

3.3.3 Liikemäärän määritelmä

Kappaleella, jonka massa on m ja nopeus $\bar{u}$, on *liikemäärä*

$$(3.3.4) \quad \bar{p} = \frac{m\bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

jonka suuruus on

$$(3.3.5) \quad p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

ja joka komponenteittain lausuttuna on

$$(3.3.6) \quad p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad p_y = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad p_z = \frac{mu_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Jos kappaleen liikemäärän suuruus p tunnetaan, saadaan kaavasta (3.3.5) sen nopeuden suuruus u

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p^2 = \frac{m^2 u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$p^2 = \frac{m^2 c^2 u^2}{c^2 - u^2}$$

$$p^2 c^2 - p^2 u^2 = m^2 c^2 u^2$$

$$p^2 c^2 = (m^2 c^2 + p^2) u^2$$

$$u^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}$$

Koska nopeuden suuruus u ja liikemäärän suuruus p ovat molemmat ei-negatiivisia, on

$$(3.3.7) \quad u = \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$

3.4 Liike-energian määrittely

3.4.1 Liike-energialle asetettavat ehdot

Lähtökohdaksi otetaan se, että kappaleen liike-energia K riippuu vain kappaleen massasta ja nopeudesta ja, samaan tapaan kuin liikemäärän tapauksessa, tiukennetaan tätä vaatimalla, että liike-energia on kappaleen massan m ja pelkästään kappaleen nopeuden suuruudesta riippuvan suureen $f(u)$ tulo, siis $K = mf(u)$. Toinen vaatimus tulee siitä, että kun pienillä nopeuksilla klassinen liike-energia kuvaa hyvin liikkuvan kappaleen kykyä tehdä työtä, täytyy liike-energian pienillä nopeuksilla olla lähes $mu^2/2$ ja vieläpä niin, että K :n ja $mu^2/2$:n suhde lähestyy 1:tä, kun u lähestyy 0:aa:

$$1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{mf(u)}{\frac{mu^2}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2mf(u)}{mu^2} = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u^2}$$

Toisin kuin liikemäärän tapauksessa on nyt erikseen oletettava vielä, että liike-energia on 0, kun nopeus on 0. Lopuksi tulee vielä vaatimus siitä, että liike-energioiden yhtäsuuruuden pitää säilyä järjestelmästä toiseen siirryttäessä. Näin ollen asetettavat ehdot ovat täsmällisesti

K1. Kappaleen liike-energia K on kappaleen massan m ja vain kappaleen nopeuden suuruudesta u riippuvan suureen $f(u)$ tulo,

$$(3.4.1) \quad K = mf(u)$$

K2. Funktiolle f pätee

$$(3.4.2) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$$

K3. Jos kappaleen nopeus on 0, on sen liike-energia 0, toisin sanoen

$$(3.4.3) \quad f(0) = 0$$

K4. Jos kappalejoukon A liike-energia on yhtä suuri kuin kappalejoukon B liike-energia yhdessä järjestelmässä $\mathcal{J}$, on kappalejoukon A liike-energia yhtä suuri kuin kappalejoukon B liike-energia myös jokaisessa muussa järjestelmässä S , jossa järjestelmä $\mathcal{J}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti.

3.4.2 Liike-energian määritelmän johtaminen

Mitä edellä asetetuista vaatimuksista seuraa kohdan 3.2 erikoistapauksessa?

Koska siinä joukon **A** liike-energia on yhtä suuri kuin joukon **B** liike-energia junan järjestelmässä $\mathcal{J}$, on ehdon K4 mukaan liike-energioiden oltava yhtä suuret myös aseman järjestelmässä S eli

$$K_{SA} = K_{SB}$$

$$K_{SA1} + K_{SA2} = K_{SB1} + K_{SB2}$$

$$m_{A1}f(u_{SA1}) + m_{A2}f(u_{SA2}) = m_{B1}f(u_{SB1}) + m_{B2}f(u_{SB2})$$

Yhtälöiden (3.2.17), (3.2.18), (3.2.19) ja (3.2.20) mukaan tämä tarkoittaa, että

$$mf\left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right) + m \cdot f(0) = mf\left(u\sqrt{2-\frac{u^2}{c^2}}\right) + mf\left(u\sqrt{2-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

ja edelleen K3:n perusteella

$$mf\left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right) = 2mf\left(u\sqrt{2-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

$$f\left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right) = 2f\left(u\sqrt{2-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

Liitteessä 3 on todistettu, että ainoa ehdot K2 ja K3 täyttävä tämän funktionaaliyhtälön ratkaisu on

$$f(u) = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - c^2$$

Tämä antaa liike-energiaksi $K = mf(u)$:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2$$

joka merkinnoilla

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

ja

$$E = mc^2$$

muuttuu muotoon

$$(3.4.4) \quad T = K + E$$

Tässä esiintyvä suure T koostuu siis kahdesta osasta: nopeudesta riippuvasta osasta K , joka on 0, kun nopeus u on 0 ja nopeudesta riippumattomasta osasta E . Oli Einsteinin idea v. 1905, että suure E voidaan tulkita kappaleen energiaksi silloin, kun kappale ei liiku, siis kappaleen lepoenergiaksi. Tämä johtaa pitämään suuretta T kappaleen kokonaisenergiana.

3.4.3 Liike-energian määritelmä

Kappaleelle, jonka massa on m ja nopeus u , on *kokonaisenergia*

$$(3.4.5) \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

joka on *liike-energian*

$$(3.4.6) \quad K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2$$

ja *lepoenergian*

$$(3.4.7) \quad E = mc^2$$

summa.

Jos kaavoissa (3.4.5) ja (3.4.6) kappaleen nopeus u kasvaa kohti valonnopeutta c , kasvaa nimittäjässä oleva u^2/c^2 kohti lukua 1, jolloin nimittäjässä oleva neliöjuurilauseke pienenee kohti lukua 0 ja sekä kokonaisenergia että liike-energia kasvavat rajattomasti.

Kun sijoitetaan E kaavasta (3.4.7) kaavaan (3.4.5), saadaan, edellyttäen, että $T > 0$

$$T = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$T = \frac{Ec}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

$$T^2 = \frac{E^2 c^2}{c^2 - u^2}$$

$$T^2 c^2 - T^2 u^2 = E^2 c^2$$

$$T^2 u^2 = T^2 c^2 - E^2 c^2$$

$$u^2 = \frac{T^2 c^2 - E^2 c^2}{T^2}$$

$$u^2 = c^2 \left(1 - \frac{E^2}{T^2} \right)$$

$$(3.4.8) \quad u = c \sqrt{1 - \frac{E^2}{T^2}}$$

jolla voidaan laskea kappaleen nopeus, kun sen lepo- ja kokonaisenergia tunnetaan. Kun tätä sovelletaan kaavaan (3.3.5) ja käytetään kaavaa (3.4.8), saadaan

$$p^2 = \frac{m^2 u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{m^2 c^2 \left(1 - \frac{E^2}{T^2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{E^2}{T^2}\right)} = \frac{m^2 c^4 \left(1 - \frac{E^2}{T^2}\right)}{c^2 \frac{E^2}{T^2}} = \frac{E^2 \left(1 - \frac{E^2}{T^2}\right)}{\frac{c^2 E^2}{T^2}} = \frac{T^2 \left(1 - \frac{E^2}{T^2}\right)}{c^2} = \frac{(T^2 - E^2)}{c^2}$$

siis

$$p^2 c^2 = T^2 - E^2$$

ja lopuksi

$$(3.4.9) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + E^2}$$

jolla voidaan laskea kappaleen kokonaisenergia, kun sen liikemäärä ja lepoenergia tunnetaan.

Kirjoitetaan kaava (3.4.5) muotoon

$$m = \frac{T \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{c^2}$$

Kun tämä pätee kaikilla $0 \leq u < c$, on perusteita vaatia, että se pätee myös kun $u = c$. Tämä tarkoittaa, että jos kappaleen nopeus $u = c$, on

$$m = \frac{T \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}}}{c^2} = 0$$

Siis ainoastaan massaton kappale voi liikkua nopeudella c . Kaavan (3.4.7) mukaan tällaisen kappaleen lepoenergia on 0, joten sen kokonaisenergia on pelkkää liike-energiaa.

Jos taas oletetaan, että kappaleen kokonaisenergia $T > 0$, on kaavan (3.4.8) mukaan

$$u = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{T^2}}$$

mikä tarkoittaa, että jos $m = 0$, on $u = c$. Siis massaton kappale, jolla on energiaa, liikkuu nopeudella c .

Nyt tietenkin herää kysymys, millaisen kappaleen kokonaisenergia on positiivinen ja massa 0? Vastaus on: esimerkiksi fotonin. Fotoni on sähkömagneettisen aaltoliikkeen pienin rakenneyksikkö, joka etenee tyhjiössä, kuten myös itse aaltoliike, nopeudella c . Fotonin kokonaisenergia, joka on sama sen liike-energia, koska sen lepoenergia $E = mc^2 = 0 \cdot c^2 = 0$, saadaan kaavasta

$$(3.4.10) \quad T = \frac{hc}{\lambda}$$

missä $h = 6,626070040 \cdot 10^{-34}$ Js on ns. Planckin vakio ja λ sen säteilyn aallonpituus, johon fotoni kuuluu. Näin ollen mikroaaltouunin mikroaaltojen, joiden aallonpituus on 12,2 cm, fotonin energia on

$$T = \frac{6,626070040 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 299792458 \text{ m/s}}{0,122 \text{ m}} \approx 1,63 \cdot 10^{-24} \text{ J}$$

Revontulien punaisen värin aallonpituus on $630 \text{ nm} = 630 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ja fotonin energia $3,15 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ja sinisen aallonpituus $428 \text{ nm} = 428 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ja fotonin energia $4,64 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Jos taas fotonin kokonaisenergia on $8,1871 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ on sen aallonpituus kaavan (3.4.10) mukaan

$$\lambda = \frac{hc}{T} = \frac{6,626070040 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 299792458 \text{ m/s}}{8,1871 \cdot 10^{-14} \text{ J}} \approx 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \text{ nm}$$

On tietysti makuasia, voidaanko fotonia nimittää kappaleeksi.

Kaavojen (3.3.5) ja (3.4.5) mukaan on kaikille nopeuksille u , $0 \leq u < c$,

$$\frac{p}{T} = \frac{\frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{u}{c^2}$$

Jos oletetaan, että tämä pätee myös, kun $u = c$, jolloin kappaleen massa on 0, saadaan

$$\frac{p}{T} = \frac{1}{c}$$

On siis perusteltua määritellä massattoman kappaleen liikemäärä sen kokonaisenergian avulla seuraavasti:

Kappaleelle, jonka massa on 0 ja kokonaisenergia T , on liikemäärä

$$(3.4.11) \quad p = \frac{T}{c}$$

Esimerkiksi, jos fotonin kokonaisenergia on edellä mainittu $8,1871 \cdot 10^{-14} \text{ J}$, on sen liikemäärä

$$p = \frac{8,1871 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{299792458 \text{ m/s}} \approx 2,731 \cdot 10^{-22} \text{ kgm/s}$$

3.4.4 Esimerkkejä

Esim 12 Kuinka suuri lepoenergia on 1 gramman suuruisella massalla?

Kaavan (3.4.7) mukaan

$$\begin{aligned} E &= 0,001 \text{ kg} \cdot \left(299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0,001 \cdot 299792458^2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 0,001 \cdot 299792458^2 \text{ J} \\ &= 0,001 \cdot 299792458^2 \text{ Ws} = \frac{0,001 \cdot 299792458^2}{1000 \cdot 60 \cdot 60} \text{ kWh} \approx 25000000 \text{ kWh} \end{aligned}$$

Tällä energiamäärällä voi lämmittää 150 m²:n ns. matalaenergiataloja (energian kulutus on korkeintaan 60 kWh/m²/vuosi) vuoden ajan

$$\frac{0,001 \cdot 299792458^2}{1000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 150 \cdot 60} \approx 2800 \text{ kpl}$$

Esim 13 Olkiluoto 1:n kiehutusvesireaktorin vuotuinen sähköntuotanto on n. 7 TWh. Koska hyötysuhde on n. 35 %, on vuotuinen energian kokonaistuotanto $7/0,35 = 20$ TWh, joka on

$$E = 20 \text{ TWh} = 20 \cdot 10^{12} \text{ Wh} = 20 \cdot 10^{12} \cdot 60 \cdot 60 \text{ Ws} = 7,2 \cdot 10^{16} \text{ Ws} = 7,2 \cdot 10^{16} \text{ J}$$

Reaktorissa muuttuu siis kaavan (3.4.7) mukaan uraanin massaa energiaksi vuodessa

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{7,2 \cdot 10^{16}}{299792458^2} = \text{n. } 0,801 \text{ kg}$$

Koska uraanin tiheys on 19,1 g/cm³, on tämän tilavuus n. $801/19,1 = 41,9 \text{ cm}^3$. Se siis mahtuu mainiosti kahteen pieneen tulitikkurasiaan. Kohdassa 4.3.14 selvitetään periaate, jolla uraania saadaan muuttumaan energiaksi.

Esim 14 Millä nopeudella kappaleen liike-energia ja lepoenergia ovat yhtä suuret?

Ratkaisu Kysytty nopeus u on se, jolla kaavojen (3.4.6) ja (3.4.7) mukaan

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 2mc^2$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} = 2$$

$$\frac{c^2}{c^2 - u^2} = 4$$

$$c^2 = 4c^2 - 4u^2$$

$$u^2 = \frac{3c^2}{4}$$

$$u = \frac{\sqrt{3}c}{2} \approx 0,866c$$

Sattumoisin juuri tällä nopeudella liikkuvan kappaleen pituuden paikallaan oleva tarkkailija näkee pienentyneen puoleen todellisesta, sillä kaavan (2.2.5) mukaan

$$d_s = d_T \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = d_T \sqrt{1 - \frac{3c^2}{4c^2}} = d_T \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = d_T \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{d_T}{2}$$

Esim 15 Euroopan hiukkasfysiikan tutkimuskeskuksessa CERN:issä (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) Ranskan ja Sveitsin rajalla lähellä Meyrinin pikkukaupunkia sijaitsevassa hiukkaskiihdyttimessä LHC (Large Hadron Collider) saavutettiin 20.5.2015 siihen mennessä suurin mitattu protonin liike-energia $1,04 \text{ pJ}$. Mikä on tällöin ollut protonin nopeus, kun protonin massa on $1,672621898 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$?

Ratkaisu Jos kysyttyä nopeutta merkitään u :lla, protonin massaa m :llä ja LHC:ssä saavutettua liike-energiaa K :lla ($K = 1,04 \cdot 10^{-6} \text{ J}$), on kaavan (3.4.6) mukaan

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = K$$

$$\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} = K + mc^2$$

$$m^2 c^6 = (c^2 - u^2)(K + mc^2)^2$$

$$c^2 - u^2 = \frac{m^2 c^6}{(K + mc^2)^2}$$

$$u^2 = c^2 - \frac{m^2 c^6}{(K + mc^2)^2}$$

$$u = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(K + mc^2)^2}} \approx 0,9999999896c$$

Mainittakoon, että 15.10.1991 Utahin yliopiston Fly's Eye -ilmaisim havaitsi Utahissa Dugway Proving Groundin yllä kosmisessa säteilyssä hiukkasen, jonka liike-energiaksi arvioitiin 48 J. Todennäköisesti hiukkanen oli protoni ja jos niin oli, oli sen nopeus

$$u = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(K + mc^2)^2}}$$

missä $K = 48 \text{ J}$. Jos tässä merkitään

$$a = \frac{m^2 c^4}{(K + mc^2)^2}$$

oli nopeus $u = c\sqrt{1 - a}$ ja se poikkesi valonnopeudesta vain (vrt. esim 1 kohdassa 2.1.4)

$$\Delta u = c - u = c - c\sqrt{1 - a} = (1 - \sqrt{1 - a})c = \frac{(1 - \sqrt{1 - a})(1 + \sqrt{1 - a})}{(1 + \sqrt{1 - a})}c$$

$$= \frac{1 - (1 - a)}{1 + \sqrt{1 - a}}c = \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a}}c \approx 1,470 \cdot 10^{-15} \text{ m/s}$$

Se siis jäisi fotonista jälkeen 65 vuodessa matkan

$$s = 1,470 \cdot 10^{-15} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365,2422 \cdot 65 \approx 3 \cdot 10^{-6} = 3 \mu\text{m}$$

eli hämähäkin seittilangan paksuuden verran. Jos tämän hiukkasen järjestelmässä näytettäisiin elokuvaa kuvataajuudella 25 kuvaa sekunnissa (PAL), olisi kuvien vaihtumisväli Maan järjestelmässä kaavan (2.1.2) mukaan

$$t_s = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{1 - \frac{(c\sqrt{1-a})^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{m^2 c^4}{(K + mc^2)^2}}} = \frac{1}{25} \cdot \frac{K + mc^2}{mc^2} = \frac{1}{25} \left(\frac{K}{mc^2} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{48}{1,672621898 \cdot 10^{-27} \cdot 299792458^2} + 1 \right) \approx 12,8 \text{ miljardia vuotta}$$

Ei ihme, että hiukkasen sai lempinimen OMG (Oh-My-God) -hiukkasen. Ilmiö on harvinaisen, mutta on havaittu myöhemminkin ja siten vahvistettu.

Esim 16 Alla olevassa taulukossa 1 vertaillaan kaavalla (3.4.6) laskettua liike-energiaa K_s ja klassisen teorian kaavalla $K_k = mu^2/2$ laskettua liike-energiaa 1 kg:n kappaleelle eri nopeuksilla, jotka ovat kohdan 2.1.4 esimerkistä 1, kohdan 2.2.4 esimerkistä 5, kohdasta 4.1 ja edellä olevasta esimerkistä 15. Kaksidesimaaliset luvut ovat likiarvoja, muut tarkkoja.

Taulukko 1: Liike-energioiden vertailu.

v	K_s (J)	K_k (J)	$K_s - K_k$ (J)	$K_s/K_k - 1$
0 m/s	0	0	0	
Pendolino 60 m/s	1800,00	1800	$5,41 \cdot 10^{-11}$	$3,00 \cdot 10^{-14}$
Juno-luotain 73600 m/s	$2,71 \cdot 10^9$	$2,71 \cdot 10^9$	122,43	$4,52 \cdot 10^{-8}$
Esimerkki 5 $0,5127c$	$1,48 \cdot 10^{16}$	$1,18 \cdot 10^{16}$	$2,99 \cdot 10^{15}$	0,25
Myoni $0,9935c$ (kohta 4.1)	$7,00 \cdot 10^{17}$	$4,44 \cdot 10^{16}$	$6,55 \cdot 10^{17}$	14,77
LHC:n protoni $0,9999999896c$	$6,23 \cdot 10^{20}$	$4,49 \cdot 10^{16}$	$6,23 \cdot 10^{20}$	$1,39 \cdot 10^4$
OMG, jos protoni	$2,87 \cdot 10^{28}$	$4,49 \cdot 10^{16}$	$2,87 \cdot 10^{21}$	$6,39 \cdot 10^{11}$

Vielä paremman käsityksen erosta saa, kun vertaa niitä energioita, jotka tarvitaan kappaleen nopeuden kasvattamiseksi. Alla olevassa taulukossa 2 on näitä energioita, ΔK_s ja ΔK_k , 1 m/s:n nopeuden lisäyksillä edellisen taulukon 1 nopeuksista lähtien

Taulukko 2: Liike-energioiden lisäysten vertailu.

v	ΔK_s (J)	ΔK_k (J)	$\Delta K_s/\Delta K_k - 1$
0 m/s	0,50	0,5	$8,34 \cdot 10^{-18}$
Pendolino 60 m/s	60,50	60,5	$6,11 \cdot 10^{-14}$
Juno-luotain 73600 m/s	$7,36 \cdot 10^4$	$7,36 \cdot 10^4$	$9,04 \cdot 10^{-8}$
Esimerkki 5 $0,5127c$	$2,43 \cdot 10^8$	$1,54 \cdot 10^8$	0,58
Myoni $0,9935c$ (kohta 4.1)	$2,02 \cdot 10^{11}$	$2,98 \cdot 10^8$	676,96
LHC:n protoni $0,9999999896c$	$1,33 \cdot 10^{20}$	$3,00 \cdot 10^8$	$4,43 \cdot 10^{11}$
OMG, jos protoni	mahdoton	$3,00 \cdot 10^8$	mahdoton

Taulukosta 2 näkyy se, miten kaavalla (3.4.6) lasketun energian tarve nopeuden nostamiseksi kasvaa rajusti nopeuden lähestyessä valonnopeutta ja miten tämän ja klassisen liike-energian suhde tällöin suurenee. Mielenkiintoista on, että jos kohdassa 3.1.1 mainittu 18,5 gramman luodin nopeus olisi sama kuin protoneilla LHC:ssä, olisi luodin liike-energia taulukon 1 mukaan

$$0,0185 \cdot 6,23 \cdot 10^{20} \text{ J} = 0,0185 \cdot 6,23 \cdot 10^{20} \text{ Ws} = \frac{0,0185 \cdot 6,23 \cdot 10^{20}}{10^{12} \cdot 60 \cdot 60} \text{ TWh} = 3200 \text{ TWh}$$

ja jos luodin nopeus nousisi tästä 1 m/s:llä, kasvaisi sen liike-energia taulukon 2 mukaan

$$0,0185 \cdot 1,33 \cdot 10^{20} \text{ J} = 0,0185 \cdot 1,33 \cdot 10^{20} \text{ Ws} = \frac{0,0185 \cdot 1,33 \cdot 10^{20}}{10^{12} \cdot 60 \cdot 60} \text{ TWh} = 683 \text{ TWh}$$

Jotta luodille saataisiin LHC:n protonin nopeus, tarvittaisiin koko Suomen vuoden 2015 sähkönkulutukseen (n. 81,1 TWh) verrattuna yli 39-kertainen ja nopeuden nostamiseen edelleen 1 m/s:llä yli 8-kertainen energia. Klassisessa teoriassa nämä energiat ovat 0,23 TWh ja $1,54 \cdot 10^{-9}$ TWh.

Huom! Laskettaessa liike-energioita pienillä nopeuksilla kaavalla (3.4.6) käy helposti kuten kohdan 2.1.4 esimerkissä 1 niin, että laskin tai taulukkolaskentaohjelma antaa väärän tuloksen. Tästä syystä kannattaa kaavassa (3.4.6) tehdä sopiva laventaminen

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2 \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} - 1 \right) = mc^2 \cdot \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - u^2}}{\sqrt{c^2 - u^2}} \right) \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{c^2 - u^2}} \cdot \frac{(c - \sqrt{c^2 - u^2})(c + \sqrt{c^2 - u^2})}{c + \sqrt{c^2 - u^2}} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{c^2 - u^2}} \cdot \frac{c^2 - (c^2 - u^2)}{c + \sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{mc^2 u^2}{(c + \sqrt{c^2 - u^2})\sqrt{c^2 - u^2}} \end{aligned}$$

Vastaavanlainen laventaminen joudutaan tekemään vieläkin useammin laskettaessa taulukossa 2 olevia ΔK_s :n arvoja.

Esim 17 Etäisyys Maata toiseksi lähimpään tähteen, Proxima Centauriin, on 4,246 valovuotta. Tämä on

$$d = 4,246 \cdot 9460730472580800 \approx 4,017 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

Jos sinne matkustettaisiin 23 vuodessa, siis 23 vuodessa avaruusaluksen järjestelmässä $\mathcal{T}$, eli ajassa

$$t_T = 23 \text{ a} = 23 \cdot 365,2422 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 725809299,84 \text{ s}$$

niin Maan järjestelmässä $\mathcal{S}$ matka kestäisi kaavan (2.1.2) mukaan ajan

$$t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Maan järjestelmässä avaruusaluksen nopeus u on sen kulkema matka jaettuna tällä ajalla eli

$$u = \frac{d}{t_S}$$

$$u = \frac{\frac{d}{t_T}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$u = \frac{d\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{t_T}$$

$$t_T^2 u^2 = d^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$c^2 t_T^2 u^2 = c^2 d^2 - u^2 d^2$$

$$u^2 = \frac{c^2 d^2}{c^2 t_T^2 + d^2}$$

Jos käytettävän avaruusaluksen massa olisi sama kuin kansainvälisen avaruusaseman ISS massa $m = 391000$ kg, olisi sen liike-energia kaavan (3.4.6) mukaan

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \approx 5,94 \cdot 10^{20} \text{ J}$$

Tämä on vähän suurempi kuin International Energy Agency (IEA) arvion mukaan koko ihmiskunnan vuonna 2013 kuluttama energiamäärä (energian suoranainen kulutus ja tämän energian tuottamiseen, siirtämiseen varastointiin yms. kulutettu energia yhteensä), joka oli $5,80 \cdot 10^{20}$ J. Tällainen matka ei siis toteutune aivan lähitulevaisuudessa. Ei vaikka 24.8.2016 löydetty Proxima Centauria kiertävä planeetta Proxima b olisikin asuiskelpoinen, jolloin tarvitsisi vain kiihdyttää matkanopeuteen ja jarruttaa se pois, mutta paluumatkaa ei tarvitsisi tehdä.

3.5 Liikemäärän ja liike-energian yhtäsuuruuksien säilyminen

Edellä on osoitettu, että kohdassa 3.3.3 määritelty liikemäärä täyttää sille kohdassa 3.3.1 asetetut vaatimukset L1 ja L2 ja kohdassa 3.4.3 määritelty liike-energia sille kohdassa 3.4.1 asetetut vaatimukset K1, K2 ja K3. Selvittämättä on vielä, toteuttaako liikemäärä myös ehdon L3 ja liike-energia ehdon K4. Nämä ehdothan olivat juuri se syy, miksi liikemäärän ja liike-energian määritelmien muuttamiseen ryhdyttiin ja toistaiseksi niiden toteutuminen on osoitettu vain kohdan 3.2 hyvin rajoittuneessa erikoistapauksessa. Kysytään siis, säilyvätkö liikemäärien yhtäsuuruus ja liike-energioiden yhtäsuuruus yleisesti järjestelmästä toiseen siirryttäessä.

Tätä varten johdetaan ensin kaavat, joilla yhdessä järjestelmässä tunnetut liikemäärä ja liike-energia voidaan lausua toisessa järjestelmässä. Tämä tehdään niin että ensin johdetaan muunnoskaava yksittäiselle kappaleelle ja sitten kappalejoukolle. Tämän jälkeen voidaan tarkastella, onko kahden kappalejoukon yhdessä järjestelmässä todettu liikemäärien yhtäsuuruus voimassa myös toisessa järjestelmässä ja jos on, niin millä ehdoilla. Vastaavasti käsitellään kokonaisenergioiden ja liike-energioiden yhtäsuuruudet.

3.5.1 Liikemäärän, kokonaisenergian ja liike-energian muunnoskaavat

Käytetään suorakulmaista $Oxyz$ -koordinaatistoa, jossa positiivinen x -akseli on siihen suuntaan, johon järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu järjestelmässä $\mathcal{S}$. Oletetaan, että järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu järjestelmässä $\mathcal{S}$ nopeudella, jonka suuruus on v ja kappale K liikkuu järjestelmässä $\mathcal{T}$ nopeudella $\bar{u}$, jonka komponentit ovat u_{Tx} , u_{Ty} ja u_{Tz} . Koska kappaleen järjestelmän $\mathcal{T}$ ajassa t_T kulkeman matkan komponentti y -akselilla ja z -akselilla ovat kumpikin kohtisuorassa x -akselia ja siis $\mathcal{T}$:n kulkusuuntaa vastaan, ovat ne kumpikin kohdan 1.2 perusoletuksen P3 mukaan yhtä suuret sekä järjestelmässä $\mathcal{S}$ että järjestelmässä $\mathcal{T}$. Nopeuden komponenteiksi järjestelmässä $\mathcal{S}$ saadaan siis samalla periaatteella kuin kohdassa 2.4.2

$$u_{Sx} = \frac{u_{Tx} + v}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} = \frac{u_{Tx} + v}{\frac{c^2 + u_{Tx}v}{c^2}} = \frac{c^2(u_{Tx} + v)}{c^2 + u_{Tx}v}$$

$$u_{Sy} = \frac{u_{Ty}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} = \frac{c^2 u_{Ty} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 \left(1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}\right)} = \frac{cu_{Ty}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}$$

$$u_{Sz} = \frac{u_{Tz}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}} = \frac{c^2 u_{Tz} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 \left(1 + \frac{u_{Tx}v}{c^2}\right)} = \frac{cu_{Tz}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}$$

joten nopeuden suuruuden neliö on

$$u_S^2 = u_{Sx}^2 + u_{Sy}^2 + u_{Sz}^2 = \left(\frac{c^2(u_{Tx} + v)}{c^2 + u_{Tx}v}\right)^2 + \left(\frac{cu_{Ty}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}\right)^2 + \left(\frac{cu_{Tz}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}\right)^2$$

$$= \frac{c^4(u_{Tx} + v)^2}{(c^2 + u_{Tx}v)^2} + \frac{c^2 u_{Ty}^2 (c^2 - v^2)}{(c^2 + u_{Tx}v)^2} + \frac{c^2 u_{Tz}^2 (c^2 - v^2)}{(c^2 + u_{Tx}v)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 \frac{c^2(u_{Tx}^2 + 2u_{Tx}v + v^2) + u_{Ty}^2(c^2 - v^2) + u_{Tz}^2(c^2 - v^2)}{(c^2 + u_{Tx}v)^2} \\
&= c^2 \frac{c^2u_{Tx}^2 + 2c^2u_{Tx}v + c^2v^2 + c^2u_{Ty}^2 - u_{Ty}^2v^2 + c^2u_{Tz}^2 - u_{Tz}^2v^2}{(c^2 + u_{Tx}v)^2} \\
&= c^2 \frac{c^2(u_{Tx}^2 + u_{Ty}^2 + u_{Tz}^2) + 2c^2u_{Tx}v + c^2v^2 - u_{Ty}^2v^2 - u_{Tz}^2v^2}{(c^2 + u_{Tx}v)^2} \\
&= \frac{c^2(c^2u_T^2 + 2c^2u_{Tx}v + c^2v^2 - u_{Ty}^2v^2 - u_{Tz}^2v^2)}{(c^2 + u_{Tx}v)^2}
\end{aligned}$$

kerroin $\sqrt{1 - u_S^2/c^2}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \frac{u_S^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \frac{c^2u_T^2 + 2c^2u_{Tx}v + c^2v^2 - u_{Ty}^2v^2 - u_{Tz}^2v^2}{(c^2 + u_{Tx}v)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{c^4 + 2c^2u_{Tx}v + u_{Tx}^2v^2 - c^2u_T^2 - 2c^2u_{Tx}v - c^2v^2 + u_{Ty}^2v^2 + u_{Tz}^2v^2}}{c^2 + u_{Tx}v} \\
&= \frac{\sqrt{c^4 + (u_{Tx}^2 + u_{Ty}^2 + u_{Tz}^2)v^2 - c^2u_T^2 - c^2v^2}}{c^2 + u_{Tx}v} \\
&= \frac{\sqrt{c^4 + u_T^2v^2 - c^2u_T^2 - c^2v^2}}{c^2 + u_{Tx}v} = \frac{\sqrt{c^2(c^2 - u_T^2) - (c^2 - u_T^2)v^2}}{c^2 + u_{Tx}v} \\
&= \frac{\sqrt{(c^2 - u_T^2)(c^2 - v^2)}}{c^2 + u_{Tx}v} = \frac{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}
\end{aligned}$$

ja liikemäärän komponentit kaavojen (3.3.6) ja (3.4.5) mukaan

$$\begin{aligned}
p_{Sx} &= \frac{mu_{Sx}}{\sqrt{1 - \frac{u_S^2}{c^2}}} = \frac{m \frac{c^2(u_{Tx} + v)}{c^2 + u_{Tx}v}}{\frac{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}} = \frac{mc^2(u_{Tx} + v)}{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}} \\
&= \frac{mc^2u_{Tx}}{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{mc^2v}{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\frac{mc^2u_{Tx}}{c\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} + \frac{mc^2v}{c\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(c \frac{mu_{Tx}}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} + \frac{v}{c} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{Tx} + \frac{v}{c} T_T \right) \\
p_{Sy} &= \frac{mu_{Sy}}{\sqrt{1 - \frac{u_S^2}{c^2}}} = \frac{m \frac{cu_{Ty}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}}{\frac{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}} = \frac{mcu_{Ty}}{\sqrt{c^2 - u_T^2}} = \frac{mu_{Ty}}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} = p_{Ty} \\
p_{Sz} &= \frac{mu_{Sz}}{\sqrt{1 - \frac{u_S^2}{c^2}}} = \frac{m \frac{cu_{Tz}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}}{\frac{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 + u_{Tx}v}} = \frac{mcu_{Tz}}{\sqrt{c^2 - u_T^2}} = \frac{mu_{Tz}}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} = p_{Tz}
\end{aligned}$$

Siis

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} p_{Sx} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{Tx} + \frac{v}{c} T_T \right) \\ p_{Sy} = p_{Ty} \\ p_{Sz} = p_{Tz} \end{cases}$$

Ainakin alkuun hämmästyttävää on, että junan nopeus v ei vaikuta liikemäärän y -komponenttiin eikä z -komponenttiin, vaikka se vaikuttaa nopeuden y -komponenttiin ja z -komponenttiin

Kappaleen kokonaisenergia järjestelmässä S on kaavojen (3.4.5) ja (3.3.6) mukaan

$$\begin{aligned}
T_S &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u_S^2}{c^2}}} = \frac{mc^2(c^2 + u_{Tx}v)}{\sqrt{c^2 - u_T^2}\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - u_T^2}} + \frac{mcu_{Tx}v}{\sqrt{c^2 - u_T^2}} \right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} + \frac{mu_{Tx}v}{\sqrt{1 - \frac{u_T^2}{c^2}}} \right) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_T + vp_{Tx})
\end{aligned}$$

ja liike-energia tämän ja kaavojen (3.4.6) ja (3.3.6) mukaan

$$\begin{aligned}
K_S &= T_S - mc^2 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_T + vp_{Tx}) - mc^2 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (K_T + mc^2 + vp_{Tx}) - mc^2 \\
&= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_T + mc^2 + vp_{Tx} - \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} mc^2 \right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_T + vp_{Tx} + m \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Siis

$$(3.5.2) \quad T_S = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_T + vp_{Tx})$$

$$(3.5.3) \quad K_S = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_T + vp_{Tx} + m \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2} \right) \right)$$

3.5.2 Kappalejoukon liikemäärä, kokonaisenergia ja liike-energia

Kuten kohdan 3.1.4 klassisessa tapauksessa, määritellään nytkin kappalejoukon $\mathbf{A} = \{K_{A1}, \dots, K_{An}\}$ liikemäärä joukon $\mathbf{A}$ kappaleiden liikemäärien summaksi, kokonaisenergia kappaleiden kokonais-energioiden summaksi, lepoenergia kappaleiden lepoenergioiden summaksi ja liike-energia kappaleiden liike-energioiden summaksi. Järjestelmässä $\mathcal{J}$ siis

$$\bar{p}_{TA} = \bar{p}_{TA1} + \dots + \bar{p}_{TAn}$$

komponenttimuodossa

$$\begin{cases} p_{TAx} = p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx} \\ p_{TAy} = p_{TA1y} + \dots + p_{TAny} \\ p_{TAz} = p_{TA1z} + \dots + p_{TAnz} \end{cases}$$

ja

$$T_{TA} = T_{TA1} + \dots + T_{TAn}$$

$$E_A = E_{A1} + \dots + E_{An}$$

$$K_{TA} = K_{TA1} + \dots + K_{TAn}$$

ja tietenkin joukon $\mathbf{A}$ massa on sen kappaleiden massojen summa

$$m_A = m_{A1} + \dots + m_{An}$$

Kaavojen (3.4.5) ja (3.4.6) mukaan on tällöin

$$\begin{aligned} K_{TA} &= K_{TA1} + \dots + K_{TAn} = T_{TA1} - m_{A1}c^2 + \dots + T_{TAn} - m_{An}c^2 \\ &= T_{TA1} + \dots + T_{TAn} - (m_{A1} + \dots + m_{An})c^2 = T_{TA} - m_Ac^2 \end{aligned}$$

Joukon $\mathbf{A}$ liikemäärän x -komponentiksi aseman järjestelmässä S saadaan tällöin yhtälöryhmän (3.5.1) ensimmäisen yhtälön mukaan

$$\begin{aligned} p_{SAx} &= p_{SA1x} + \dots + p_{SAnx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TA1x} + \frac{v}{c} T_{TA1} \right) + \dots + \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TAnx} + \frac{v}{c} T_{TAn} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TA1x} + \dots + cp_{TAnx} + \frac{v}{c} (T_{TA1} + \dots + T_{TAn}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TAx} + \frac{v}{c} T_{TA} \right) \end{aligned}$$

ja muiksi komponenteiksi toisen ja kolmannen yhtälön mukaan

$$p_{SAy} = p_{SA1y} + \dots + p_{SAny} = p_{TA1y} + \dots + p_{TAny} = p_{TAy}$$

$$p_{SAz} = p_{SA1z} + \dots + p_{SAnz} = p_{TA1z} + \dots + p_{TAnz} = p_{TAz}$$

Joukon **A** kokonaisenergia aseman järjestelmässä **S** on yhtälön (3.5.2) mukaan

$$\begin{aligned} T_{SA} &= T_{SA1} + \dots + T_{SAn} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA1} + vp_{TA1x}) + \dots + \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TAn} + vp_{TAnx}) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA1} + \dots + T_{TAn} + v(p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx})) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA} + vp_{TAx}) \end{aligned}$$

ja liike-energia yhtälön (3.5.3) mukaan

$$\begin{aligned} K_{SA} &= K_{SA1} + \dots + K_{SAn} \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TA1} + vp_{TA1x} + m_{A1} (c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2}) \right) + \dots \\ &\quad + \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TAn} + vp_{TAnx} + m_{An} (c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2}) \right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TA1} + \dots + K_{TAn} + v(p_{TA1x} + \dots + p_{TAnx}) + (m_{A1} + \dots + m_{An}) (c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2}) \right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TA} + vp_{TAx} + m_A (c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2}) \right) \end{aligned}$$

Siis

$$(3.5.4) \quad \begin{cases} p_{SAx} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TAx} + \frac{v}{c} T_{TA} \right) \\ p_{SAy} = p_{TAy} \\ p_{SAz} = p_{TAz} \end{cases}$$

$$(3.5.5) \quad T_{SA} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA} + vp_{TAx})$$

$$(3.5.6) \quad K_{SA} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TA} + vp_{TAx} + m_A (c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2}) \right)$$

Verrattaessa kaavoja (3.5.4) – (3.5.6) kaavoihin (3.5.1) – (3.5.3) todetaan, että ne pätevät samanmuotoisina niin yhden kuin useammankin kappaleen joukolle.

3.5.3 Liikemäärien yhtäsuuruuden säilyminen

Jos $\mathbf{B} = \{K_{B1}, \dots, K_{Bk}\}$ on toinen kappalejoukko, pätevät sille vastaavat yhtälöt (3.5.4) – (3.5.6). Kysytään nyt, että jos joukon **A** liikemäärä ja joukon **B** liikemäärä ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, niin ovatko se yhtä suuret myös järjestelmässä **S**. Kohdassa 3.1.5 todettiin yhtälöryhmän (3.1.5) pe-

rusteella, että klassisessa teoriassa järjestelmän $\mathcal{J}$ kulkusuuntaan olevien liikemäärien komponenttien yhtäsuuruus säilyy, jos ja vain jos joukoilla on yhtä suuret massat.

Suhteellisuusteoriassa massojen yhtäsuuruus ei ole riittävä eikä myöskään välttämätön ehto liikemäärien yhtäsuuruuden säilymiselle, kuten esimerkit L.4.1 ja L.4.2 liitteessä 4 osoittavat.

Jotta saataisiin selville, millä ehdoilla joukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ liikemäärien yhtäsuuruus säilyy järjestelmästä toiseen, tarkastellaan niiden liikemäärien erotusta. Jos järjestelmän $\mathcal{J}$ nopeus järjestelmässä $\mathcal{S}$ on v ja järjestelmässä $\mathcal{J}$ joukon $\mathbf{A}$:n liikemäärän komponentit ovat p_{TAx} , p_{TAy} ja p_{TAz} ja kokonaisenergia T_{TA} sekä joukon $\mathbf{B}$ liikemäärän komponentit p_{TBx} , p_{TBy} ja p_{TBz} ja kokonaisenergia T_{TB} , ovat järjestelmässä $\mathcal{S}$ yhtälöiden (3.5.4) mukaan liikemäärien erotuksen y - ja z -komponentit yhtä suuret kuin järjestelmässä $\mathcal{J}$. Erotuksen x -komponentiksi sitä vastoin tulee

$$\begin{aligned} p_{SAx} - p_{SBx} &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TAx} + \frac{v}{c} T_{TA} \right) - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TBx} + \frac{v}{c} T_{TB} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(cp_{TAx} + \frac{v}{c} T_{TA} - cp_{TBx} - \frac{v}{c} T_{TB} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(c(p_{TAx} - p_{TBx}) + \frac{v}{c} (T_{TA} - T_{TB}) \right) \end{aligned}$$

Siis

$$(3.5.7) \quad \begin{cases} p_{SAx} - p_{SBx} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(c(p_{TAx} - p_{TBx}) + \frac{v}{c} (T_{TA} - T_{TB}) \right) \\ p_{SAy} - p_{SBy} = p_{TAy} - p_{TBy} \\ p_{SAz} - p_{SBz} = p_{TAz} - p_{TBz} \end{cases}$$

Päätellään siis, että kappalejoukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ liikemäärien yhtäsuuruus säilyy järjestelmästä $\mathcal{J}$ järjestelmään $\mathcal{S}$ siirryttäessä, jos ja vain jos joukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kokonaisenergiat ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{J}$.

Kun verrataan kaavoja (3.5.7) klassisen teorian kaavoihin (3.1.5) kohdassa 3.1.5, todetaan ensiksikin, että kokonaisenergia T näyttäisi ottavan nyt sen roolin, joka massalla m on klassisessa teoriassa, tai oikeastaan massan roolin näyttäisi ottavan nyt suure

$$(3.5.8) \quad M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sillä tämän suureen yksikkö on kg ja kaavan (3.4.5) mukaan kokonaisenergia $T = Mc^2$.

Kuitenkin kaavoilla on oleellinen ero. Jos klassisessa teoriassa kahden kappalejoukon massat ovat yhtä suuret, on niiden liikemäärien erotus yhtä suuri niin järjestelmässä $\mathcal{J}$ kuin järjestelmässä $\mathcal{S}$. Suhteellisuusteoriassa sitä vastoin kokonaisenergioiden yhtäsuuruudesta ei seuraa liikemäärien x -komponenttien erotuksen yhtäsuuruuden säilyminen järjestelmästä toiseen siirryttäessä, vaan niiden erotus järjestelmässä $\mathcal{S}$ on $c/\sqrt{c^2 - v^2}$ -kertainen niiden erotukseen järjestelmässä $\mathcal{J}$. Erityisen kiusallista on, että tämän kertoimen suuruus riippuu järjestelmän $\mathcal{J}$ nopeudesta v .

3.5.4 Kokonaisenergioiden yhtäsuuruuden säilyminen

Järjestelmässä $\mathcal{S}$ on kokonaisenergioiden erotus kaavan (3.5.5) mukaan

$$\begin{aligned} T_{SA} - T_{SB} &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA} + v p_{TAx}) - \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TB} + v p_{TBx}) \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA} - T_{TB} + v(p_{TAx} - p_{TBx})) \end{aligned}$$

Siis

$$(3.5.9) \quad T_{SA} - T_{SB} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} (T_{TA} - T_{TB} + v(p_{TAx} - p_{TBx}))$$

Tästä nähdään, että kappalejoukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ kokonaisenergioiden yhtäsuuruus säilyy järjestelmästä $\mathcal{T}$ järjestelmään $\mathcal{S}$ siirryttäessä, jos ja vain jos järjestelmässä $\mathcal{T}$ joukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ liikemäärien komponentit ovat yhtä suuret positiivisen x -akselin suuntaan eli siihen suuntaan, johon järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu järjestelmässä $\mathcal{S}$.

Kokonaisenergioiden yhtäsuuruuden säilymisestä ei kuitenkaan seuraa joukkojen $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ liikemäärien yhtäsuuruus järjestelmässä $\mathcal{T}$, vaan liikemäärien y - ja z -komponentit voivat olla eri suuret, kuten liitteen 4 esimerkki L.4.3 osoittaa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa juna liikkuu asemalla vaakasuoraan nopeudella v_1 pohjoisesta etelään, lentokone lentää aseman yläpuolella vaakasuoraan idästä länteen nopeudella v_2 ja helikopteri laskeutuu aseman kohdalla suoraan alaspäin nopeudella v_3 . Otetaan käyttöön suorakulmainen $Oxyz$ -koordinaatisto, jossa positiivinen x -akseli on etelästä pohjoiseen, positiivinen y -akseli lännestä itään ja positiivinen z -akseli alhaalta ylös. Tarkastellaan aseman järjestelmän liikkumista junan järjestelmässä $\mathcal{J}$, lentokoneen järjestelmässä $\mathcal{L}$ ja helikopterin järjestelmässä $\mathcal{H}$. Koska se on nyt liikkuva järjestelmä, merkitään sitä poikkeuksellisesti $\mathcal{T}$:llä. Kohdan 1.2 perusoletuksen P1 mukaan järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu tällöin järjestelmässä $\mathcal{J}$ nopeudella v_1 positiivisen x -akselin suuntaan, järjestelmässä $\mathcal{L}$ nopeudella v_2 positiivisen y -akselin suuntaan ja järjestelmässä $\mathcal{H}$ nopeudella v_3 positiivisen z -akselin suuntaan.

Oletetaan, että asemalla on kaksi kappalejoukkoa $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$, joiden kokonaisenergiat aseman järjestelmässä T_{TA} ja T_{TB} , ovat yhtä suuret. Oletetaan lisäksi, että $\mathbf{A}$:n ja $\mathbf{B}$:n kokonaisenergiat ovat myös junan järjestelmässä $\mathcal{J}$ yhtä suuret, $T_{JA} = T_{JB}$. Kaavan (3.5.9) mukaan on tällöin

$$0 = T_{JA} - T_{JB} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} (T_{TA} - T_{TB} + v_1(p_{TAx} - p_{TBx})) = \frac{cv_1}{\sqrt{c^2 - v_1^2}} (p_{TAx} - p_{TBx})$$

ja siis $p_{TAx} = p_{TBx}$ eli aseman järjestelmässä $\mathcal{T}$ kappalejoukon $\mathbf{A}$ liikemäärän x -komponentti on yhtä suuri kuin kappalejoukon $\mathbf{B}$ liikemäärän x -komponentti. Tarkastelemalla vastaavasti aseman liikkumista lentokoneen ja helikopterin järjestelmissä $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{H}$, saadaan yhtäsuuruudet myös liikemäärien y - ja z -komponenteille: $p_{TAy} = p_{TBy}$ ja $p_{TAz} = p_{TBz}$, joten liikemäärät ovat yhtä suuret: $\vec{p}_{TA} = \vec{p}_{TB}$.

Yhteenvedona: jos kahden kappalejoukon kokonaisenergiat ovat yhtä suuret yhdessä järjestelmässä $\mathcal{T}$ ja kolmessa muussa toisiaan vastaan kohtisuoraan liikkuvassa järjestelmässä, ovat kappalejoukkojen liikemäärät yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$.

3.5.5 Liike-energioiden yhtäsuuruuden säilyminen

Liike-energioiden erotus järjestelmässä S on kaavan (3.5.6) mukaan

$$(3.5.10) \quad K_{SA} - K_{SB} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left(K_{TA} - K_{TB} + v(p_{TAx} - p_{TBx}) + (m_A - m_B) \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2} \right) \right)$$

Siis, jos kappalejoukkojen A ja B liikemäärien komponentit järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, niin A :n ja B :n liike-energioiden yhtäsuuruus säilyy järjestelmästä $\mathcal{T}$ järjestelmään S siirryttäessä, jos ja vain jos A :n ja B :n massat ovat yhtä suuret. Toisaalta, jos A :n ja B :n massat ovat yhtä suuret, säilyy niiden liike-energioiden yhtäsuuruus järjestelmästä $\mathcal{T}$ järjestelmään S siirryttäessä, jos ja vain jos A :n ja B :n liikemäärien komponentit järjestelmässä $\mathcal{T}$ järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan ovat yhtä suuret.

Vertaamalla saatua liike-energioiden erotuksen kaavaa (3.5.10) klassisen teorian vastaavaan kaavaan (3.1.6) todetaan, että liike-energian säilymisehto on molemmissa teorioissa sanamuodoltaan täsmälleen samanlainen.

3.5.6 Tulos

Oletetaan, että järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella suoraviivaisesti järjestelmässä S . Tällöin määritelmän (3.3.4) mukaiselle liikemäärälle, määritelmän (3.4.5) mukaiselle kokonaisenergialle ja määritelmän (3.4.6) mukaiselle liike-energialle pätee:

- 1 Jos kappalejoukkojen A ja B liikemäärät ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, ovat ne yhtä suuret järjestelmässä S , jos ja vain jos joukon A kokonaisenergia on yhtä suuri kuin joukon B kokonaisenergia järjestelmässä $\mathcal{T}$.
- 2 Jos kappalejoukkojen A ja B kokonaisenergiat ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, ovat ne yhtä suuret järjestelmässä S , jos ja vain jos järjestelmässä $\mathcal{T}$ joukon A liikemäärän komponentti järjestelmän $\mathcal{T}$ liikkumissuuntaan on yhtä suuri kuin joukon B liikemäärän komponentti tähän suuntaan.
- 3 Jos kappalejoukkojen A ja B kokonaisenergiat ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, ovat niiden kokonaisenergiat kolmessa muussa toisiaan vastaan kohtisuoraan liikkuvassa järjestelmässä yhtä suuret, jos ja vain jos joukon A liikemäärä on yhtä suuri kuin joukon B liikemäärä järjestelmässä $\mathcal{T}$.
- 4 Jos kappalejoukkojen A ja B liikemäärien komponentit järjestelmän $\mathcal{T}$ liikkumissuuntaan ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$ ja jos niiden liike-energiat ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, ovat niiden liike-energiat yhtä suuret järjestelmässä S , jos ja vain jos joukon A massa on yhtä suuri kuin joukon B massa.
- 5 Jos kappalejoukon A massa on yhtä suuri kuin kappalejoukon B massa ja jos niiden liike-energiat ovat yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$, ovat niiden liike-energiat yhtä suuret järjestelmässä S , jos ja vain jos järjestelmässä $\mathcal{T}$ kappalejoukon A liikemäärän komponentti siihen suuntaan, johon järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu, on yhtä suuri kuin kappalejoukon B liikemäärän komponentti tähän suuntaan.

3.5.7 Esimerkkejä

Tarkastellaan nyt lähemmin tilannetta, jossa kappalejoukko **A** jossakin järjestelmässä $\mathcal{T}$ muuttuu sen kappaleiden $K_{A1}, \dots, K_{An}$ hajoamisten ja keskinäisten törmäämisten seurauksena joukoksi $\mathbf{B} = \{K_{B1}, \dots, K_{Bk}\}$.

Koska kappalejoukon kappaleiden törmäyksissä ja hajoamisissa kappalejoukkoon ei tule energiaa eikä siitä lähde energiaa, ovat **A**:n ja **B**:n kokonaisenergiat kohdan 1.2 perusoletuksen P4 mukaan yhtä suuret kaikissa järjestelmissä, joissa järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu vakionopeudella ja suoraviivaisesti. Tuloksen 3.5.6 kohdan 3 mukaan tämä merkitsee, että **A**:n ja **B**:n liikemäärien on oltava yhtä suuret järjestelmässä $\mathcal{T}$. Se, että törmäyksissä ja hajoamisissa kappalejoukon kokonaisenergia ja liikemäärä säilyvät, on aivan keskeinen tieto yritettäessä selvittää, mitä kappaleiden törmäämisissä ja hajoamisissa tapahtuu. Käsitellään seuraavaksi tämän tiedon soveltamista muutamassa erikoistapauksessa.

Oletetaan, että käsiteltävissä tapahtumissa (törmäämisissä tai hajoamisissa) kappalejoukkojen pyörimisenergiat eivät muutu, joten tarkastellaan vain kappaleiden etenemis- eli radiaalista liikettä. Oletetaan lisäksi, että kappaleet liikkuvat ennen tapahtumaa ja sen jälkeen pitkin samaa suoraa ja että tarkasteluissa käytettävä järjestelmä ja sen koordinaatisto valitaan niin, että tämä suora on x -akseli. Tarkasteluista tulee näin ollen yksiulotteisia ja kappalejoukon liikemäärän suuruus eli sen kappaleiden liikemäärien summan suuruus on kappaleiden liikemäärien suuruuksien summa.

Tapaus 1

Kaksi kappaletta, joiden kummankin massa on m ja nopeuden suuruus u törmäävät vastakkaisista suunnista. Oletetaan, että kun ne törmäävät, ne takertuvat toisiinsa niin, että muodostuu yksi uusi kappale. Mitkä ovat näin syntyvän kappaleen massa M ja nopeus x ?

Kappalejoukon liikemäärän ja kokonaisenergian säilymisistä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{Mx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m(-u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Mxc}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0 \\ \frac{Mc^3}{\sqrt{c^2-x^2}} = \frac{2mc^3}{\sqrt{c^2-u^2}} \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = 0$ ja jälkimmäisestä tämän jälkeen

$$\frac{Mc^3}{c} = \frac{2mc^3}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

$$M = \frac{2mc}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

Mielenkiintoista on se, että syntyneen kappaleen massa M on suurempi kuin sen muodostavien kappaleiden massojen summa $2m$. Kohdassa 3.6 selvitetään, miten tämä on mahdollista.

Alkuaan kappaleilla oli liike-energiaa kaavan (3.4.6) mukaan yhteensä

$$K = 2 \left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} - mc^2 \right)$$

ja lepoenergiaa kaavan (3.4.7) mukaan yhteensä

$$E = 2mc^2$$

Törmäyksessä edellä mainittu liike-energia K muuttuu lepoenergiaksi, minkä jälkeen lepoenergiaa on

$$E = 2mc^2 + 2 \left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} - mc^2 \right) = \frac{2mc^3}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

siis täsmälleen saman verran kuin kappaleella, jonka massa on edellä laskettu M .

Esim 18 Jos kummankin kappaleen nopeus on 300 m/s (ampumahiihdossa yleisesti käytetyn Lapua Polar Biathlon 22 LR patruunan luodin nopeus 50 m:n etäisyydellä piipun suusta), niin niillä on liike-energiaa yhteensä

$$K = 2 \left(\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - 300^2}} - mc^2 \right) = 2mc^2 \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - 300^2}} - 1 \right)$$

Koska törmäyksessä syntyvän kappaleen liike-energia on 0 J, on sillä lepoenergiaa K :n verran enemmän kuin alkuperäisillä kappaleilla yhteensä. Kuten kohdassa 3.6 esitetään, tämä näkyy lämpöenergiana, jota syntyvä kappale saa kilogrammaa kohti määrän

$$\frac{K}{M} = \frac{2mc^2 \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 - 300^2}} - 1 \right)}{\frac{2mc}{\sqrt{c^2 - 300^2}}} = c \left(c - \sqrt{c^2 - 300^2} \right) = \text{n. } 45000 \text{ J}$$

Jos alkuperäiset kappaleet ovat lyijyä ja kummankin lämpötila on 0°C eikä lämpöä siirry ympäristöön, riittää tämä energia nostamaan syntyvän kappaleen lämpötilan lyijyn sulamispisteeseen 327,46°C:seen ja jopa sulattamaan siitä kolmisen prosenttia, sillä lyijyn lämpötilan nostaminen 0°C:sta sulamispisteeseen vaatii energiaa 44280 J ja sulattaminen 23080 J kilogrammaa kohti.

Huom! K/M :n arvoa laskettaessa voi joutua laventamaan lausekkeella $c + \sqrt{c^2 - 300^2}$ (vrt. esim 1 kohdassa 2.1.4), jolloin

$$x = \frac{c(c^2 - (c^2 - 300^2))}{c + \sqrt{c^2 - 300^2}} = \frac{300^2 c}{c + \sqrt{c^2 - 300^2}} \approx 45000 \text{ J}$$

Huom! Klassisen teorian mukaan lämmöksi muuttuva liike-energia kilogrammaa kohti on

$$\frac{K}{M} = \frac{2 \cdot \frac{m \cdot 300^2}{2}}{2m} = 45000 \text{ J}$$

joka on n. $1,13 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ vähemmän kuin edellä laskettu $c(c - \sqrt{c^2 - 300^2})$. Ero ei ole siis tällaisilla nopeuksilla merkityksellinen, mutta jos kappaleiden nopeudet ovat lähellä valonnopeutta, ero tulee merkittäväksi kahdestakin syystä: liike-energian kaava on erilainen eikä klassisessa teoriassa oleteta tapahtuvan massan muuttumista.

Tapaus 2

Tarkastellaan yleisemmin tapahtumaa, jossa kaksi kappaletta törmää tai yksi kappale hajoaa kahdeksi kappaleeksi. Oletetaan, että kappaleiden massat ja nopeudet ennen tapahtumaa ja massat tapahtuman jälkeen tunnetaan. Tehtävänä on laskea kappaleiden nopeudet tapahtuman jälkeen.

Kun kappaleiden massat ja nopeudet ennen tapahtumaa tunnetaan, tunnetaan myös niiden yhteenlaskettu liikemäärä p ja kokonaisenergia T ennen tapahtumaa. Ja kun kappaleiden massat tapahtuman jälkeen tunnetaan, tunnetaan myös niiden lepoenergiat E_1 ja E_2 tapahtuman jälkeen.

Tehtävän ratkaisu sujuu helpoiten, jos lasketaan ensin kappaleiden liikemäärät tapahtuman jälkeen. Merkitään niitä x :llä ja y :llä ja käytetään kaavaa (3.4.9), jonka mukaan kappaleen kokonaisenergialle T pätee

$$(3.5.11) \quad T = \sqrt{p^2 c^2 + E^2}$$

missä p on kappaleen liikemäärän suuruus ja E sen lepoenergia.

Nyt on kuitenkin huomattava, että kaava (3.5.11) pätee vain yksittäiselle kappaleelle, ei kappalejoukolle, vaan yleensä $T_A \neq \sqrt{p_A^2 c^2 + E_A^2}$. Tästä on tarkempi selvitys liitteen 4 esimerkissä L.4.4.

Merkitään p_0 :lla kappaleiden yhteenlaskettua liikemäärää ja T_0 :lla niiden yhteenlaskettua kokonaisenergiaa ennen tapahtumaa, jolloin hajoamistapauksessa p_0 on hajoavan kappaleen liikemäärä ja T_0 sen kokonaisenergia. Jos merkitään x :llä ja y :llä kappaleiden liikemääriä tapahtuman jälkeen, saadaan liikemäärän ja kokonaisenergian säilymisestä yhtälöpari

$$(3.5.12) \quad \begin{cases} x + y = p_0 \\ \sqrt{x^2 c^2 + E_1^2} + \sqrt{y^2 c^2 + E_2^2} = T_0 \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä y

$$(3.5.13) \quad y = p_0 - x$$

ja sijoitetaan jälkimmäiseen

$$\sqrt{x^2 c^2 + E_1^2} + \sqrt{(p_0 - x)^2 c^2 + E_2^2} = T_0$$

Kirjoitetaan muotoon

$$\sqrt{(p_0 - x)^2 c^2 + E_2^2} = T_0 - \sqrt{c^2 x^2 + E_1^2}$$

ja korotetaan puolittain neliöön

$$(p_0 - x)^2 c^2 + E_2^2 = T_0^2 - 2T_0 \sqrt{c^2 x^2 + E_1^2} + c^2 x^2 + E_1^2$$

$$p_0^2 c^2 - 2p_0 c^2 x + c^2 x^2 + E_2^2 - T_0^2 - c^2 x^2 - E_1^2 = -2T_0 \sqrt{c^2 x^2 + E_1^2}$$

$$p_0^2 c^2 - 2p_0 c^2 x + E_2^2 - T_0^2 - E_1^2 = -2T_0 \sqrt{c^2 x^2 + E_1^2}$$

Merkitään

$$(3.5.14) \quad a = p_0^2 c^2 + E_2^2 - T_0^2 - E_1^2$$

jolloin yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$-2p_0 c^2 x + a = -2T_0 \sqrt{c^2 x^2 + E_1^2}$$

Korotetaan uudelleen puolittain neliöön

$$4p_0^2 c^4 x^2 - 4ap_0 c^2 x + a^2 = 4T_0^2 c^2 x^2 + 4T_0^2 E_1^2$$

$$4c^2(p_0^2 c^2 - T_0^2)x^2 - 4ap_0 c^2 x + a^2 - 4T_0^2 E_1^2 = 0$$

$$x = \frac{4ap_0 c^2 \pm \sqrt{16a^2 p_0^2 c^4 - 4 \cdot 4c^2(p_0^2 c^2 - T_0^2)(a^2 - 4T_0^2 E_1^2)}}{8c^2(p_0^2 c^2 - T_0^2)}$$

$$= \frac{4ap_0 c^2 \pm 4c \sqrt{a^2 p_0^2 c^2 - (p_0^2 c^2 - T_0^2)(a^2 - 4T_0^2 E_1^2)}}{8c^2(p_0^2 c^2 - T_0^2)}$$

$$= \frac{ap_0 c \pm \sqrt{a^2 p_0^2 c^2 - a^2 p_0^2 c^2 + 4T_0^2 E_1^2 p_0^2 c^2 + a^2 T_0^2 - 4T_0^4 E_1^2}}{2c(p_0^2 c^2 - T_0^2)}$$

Ratkaisu on siis

$$(3.5.15) \quad x = \frac{ap_0 c \pm T_0 \sqrt{a^2 + 4E_1^2 p_0^2 c^2 - 4T_0^2 E_1^2}}{2c(p_0^2 c^2 - T_0^2)}$$

Toisen kappaleen liikemäärä y saadaan tämän jälkeen yhtälöstä (3.5.13). Saaduista liikemääristä lasketaan lopuksi kappaleiden nopeudet kaavalla (3.3.7)

$$(3.5.16) \quad u = \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$

Esim 19 Tarkastellaan neutronin (n) hajoamista. Oletetaan, että se hajoaa kahdeksi muuksi hiukkeksi, protoniksi (p) ja elektroniksi (e)

$$n \rightarrow p + e$$

ja määritetään, kuinka suuret nopeudet protoni ja elektroni saavat. Neutronin massa on $M = 1,674927471 \cdot 10^{-27}$ kg, protonin massa $m_1 = 1,672621898 \cdot 10^{-27}$ kg ja elektronin massa $m_2 = 9,10938356 \cdot 10^{-31}$ kg.

Neutronin liikemäärä ja liike-energia neutronin järjestelmässä $\mathcal{T}$ ovat

$$p_0 = \frac{M \cdot 0}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} = 0 \text{ kgm/s}$$

$$T_0 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} \approx 1,50534974 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Hajoamisessa syntyvän protonin lepoenergia on

$$E_1 = m_1 c^2 \approx 1,503277593 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

ja elektronin

$$E_2 = m_2 c^2 \approx 8,187105650 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (3.5.14) saadaan

$$a = p_0^2 c^2 + E_2^2 - T_0^2 - E_1^2 \approx -4,525920686 \cdot 10^{-20} \text{ J}^2$$

ja sitten yhtälöstä (3.5.15) protonin liikemäärä

$$x = \frac{ap_0 c \pm T_0 \sqrt{a^2 + 4E_1^2 p_0^2 c^2 - 4T_0^2 E_1^2}}{2c(p_0^2 c^2 - T_0^2)} \approx \mp 6,345187286 \cdot 10^{-22} \text{ kgm/s}$$

ja yhtälöstä (3.5.13) elektronin liikemäärä

$$y = p_0 - x \approx \pm 6,345187286 \cdot 10^{-22} \text{ kgm/s}$$

Lopuksi kaavasta (3.5.16) saadaan protonin nopeudeksi

$$u_1 = \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} = \frac{xc}{\sqrt{(1,672621898 \cdot 10^{-27})^2 c^2 + x^2}} \approx \mp 0,001265393550c$$

ja elektronin nopeudeksi

$$u_2 = \frac{yc}{\sqrt{(9,10938356 \cdot 10^{-31})^2 c^2 + y^2}} \approx \pm 0,9185381199c$$

Etumerkit kertovat sen, että protonin saama nopeus on n. 0,001265c yhteen suuntaan ja elektronin nopeus n. 0,918538c vastakkaiseen suuntaan.

Protonin liike-energia on tällöin kaavan (3.4.6) mukaan

$$K_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} - m_1 c^2 \approx 1,203541148 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

ja elektronin

$$K_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} - m_2 c^2 \approx 1,252231568 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

yhteensä

$$K = K_1 + K_2 \approx 1,253435109 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Hajoamisessa massaa muuttuu energiaksi

$$m = M - (m_1 + m_2) \approx 1,394634644 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

joka on energiana

$$E = mc^2 \approx 1,253435109 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

eli saman verran kuin protonilla ja elektronilla on liike-energiaa yhteensä. Kuten pitääkin.

On kiintoisaa, että hajoamistuotteiden nopeudet pystytään laskemaan, kun niiden massat ja alkuperäisen kappaleen massa tunnetaan. Tällä ei ole klassisessa teoriassa minkäänlaisia vastinetta, koska klassinen teoria ei tunne aineen ja energian välistä yhteyttä.

Korostettakoon lopuksi, että neutroni ei hajoa edellä mainitulla tavalla. Jos se hajoaisi, olisivat sekä protonin nopeus u_1 että elektronin nopeus u_2 joka kerta samat kuin edellä. Todellisuudessa elektronin nopeuden on todettu vaihtelevan tietyn jakauman mukaisesti 0:n ja maksimiarvon välillä. Ainoa mahdollinen selitys tälle on, että protonin ja elektronin lisäksi syntyy muitakin hajoamistuotteita. Itse asiassa näitä on vain yksi, nimeltään elektronin antineutriino, jolla on hyvin pieni massa, mutta jolla voi olla lähes valonnopeuden suuruinen nopeus. Asiaa käsitellään laajemmin kohdassa 4.3.7.

Esim 20 Tarkastellaan tapahtumaa, jossa neutroni törmää nopeudella $u_1 = 0,06c$ paikallaan olevaan vesimolekyylin. Kysytään, mikä on neutronin nopeus törmäyksen jälkeen.

Jos oletetaan, että tässä vesimolekyylissä, H_2O , molemmat vetyatomit ovat isotooppia ^1_1H (ytimestä yksi protoni eikä muuta) ja happiatomi isotooppia $^{16}_8\text{O}$ (ytimestä kahdeksan protonia ja kahdeksan neutronia), on vesimolekyylin massa

$$m_2 = 2 \cdot 1,673532812 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 2,656018017 \cdot 10^{-26} \text{ kg} = 2,990724579 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Koska neutronin massa on $m_1 = 1,674927471 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ovat neutronin ja vesimolekyylin yhteenlasketun liikemäärän suuruus ja kokonaisenergia ennen törmäystä

$$p_0 = \frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{1,674927471 \cdot 10^{-27} \cdot 0,06c}{\sqrt{1 - \frac{0,06^2 c^2}{c^2}}} + \frac{2,990724579 \cdot 10^{-26} \cdot 0}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} \\ \approx 3,018221438 \cdot 10^{-20} \text{ kgm/s}$$

ja

$$T_0 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{1,674927471 \cdot 10^{-27} c^2}{\sqrt{1 - \frac{0,06^2 c^2}{c^2}}} + \frac{2,990724579 \cdot 10^{-26} c^2}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} \\ \approx 2,838735874 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Neutronin lepoenergia on ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen

$$E_1 = m_1 c^2 \approx 1,505349739 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

ja vesimolekyylin

$$E_2 = m_2 c^2 \approx 2,687929204 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Näillä arvoilla

$$a = p_0^2 c^2 + E_2^2 - T_0^2 - E_1^2 \approx -8,560368648 \cdot 10^{-19} \text{ J}^2$$

jolloin yhtälön (3.5.15) mukaan neutronin liikemäärä on

$$x = \frac{ap_0 c \pm T_0 \sqrt{a^2 + 4E_1^2 p_0^2 c^2 - 4T_0^2 E_1^2}}{2c(p_0^2 c^2 - T_0^2)}$$

$$x \approx -2,697595977 \cdot 10^{-20} \text{ kgm/s tai } x \approx 3,018221438 \cdot 10^{-20} \text{ kgm/s}$$

ja

$$y = p_0 - x \approx 5,715817415 \cdot 10^{-20} \text{ kgm/s tai } y = 0 \text{ kgm/s}$$

Näistä jälkimmäiset tarkoittavat alkutilannetta, jossa vesimolekyylin liikemäärä oli 0 ja edelliset ovat ne liikemäärät, joita haetaan. Kaavan (3.5.16) mukaan neutronin saaman nopeuden suuruus u_3 ja vesimolekyylin saaman nopeuden suuruus u_4 ovat

$$u_3 = \frac{xc}{\sqrt{(1,674927471 \cdot 10^{-27})^2 c^2 + x^2}} \approx -0,0536456334c$$

$$u_4 = \frac{yc}{\sqrt{(2,990724579 \cdot 10^{-26})^2 c^2 + y^2}} \approx 0,00637488566c$$

Neutronin saama nopeuden suuruus on n. $0,05365c$ ja vesimolekyylin $0,00637c$. Miinusmerkki u_3 :n arvossa, tarkoittaa siitä, että törmäyksen jälkeen neutroni liikkuu sen alkuperäiselle kulkusuunnalle vastakkaiseen suuntaan ja u_4 :n positiivisuus kertoo, että vesimolekyyli liikkuu neutronin alkuperäiseen kulkusuuntaan.

Jos tämä sama neutroni törmää uudelleen paikallaan olevaan vesimolekyylisiin, saadaan sen nopeudeksi $n.0,04796c$. Seuraavan törmäyksen jälkeen sen nopeus on $n.0,04288c$ jne. Kun törmäyksiä on ollut 21, on neutronin nopeus $n.0,005701c$ eli alle kymmenesosa alkuperäisestä ja kun törmäyksiä on ollut 81, on neutronin nopeus enää $n.0,00000683c$ eli $n.2047 \text{ m/s}$. Se, mitä käytännön merkitystä tällä neutronien hidastamisella on, selvitetään kohdassa 4.3.14.

Kuten tämän kohdan alussa mainittiin, säilyvät kokonaisenergia ja liikemäärä kappalejoukon törmäyksissä ja hajoamisissa. Tässä esimerkissä näiden lisäksi säilyy myös neutronin ja vesimolekyylin muodostaman kappalejoukon massa. Kaavasta (3.5.10) seuraa tällöin, että myös liike-energia säilyy. Tällaista törmäystä kutsutaan täysin kimmoiseksi.

Tapaus 3

Kappale, joka on paikallaan ja jonka massa on M hajoaa kahdeksi kappaleeksi, joista toisen massa m_1 ja toisen nopeus u_2 tunnetaan. Mikä on edellisen kappaleen nopeus u ja mikä jälkimmäisen kappaleen massa m ?

Kun liikemäärä on hajoamisen jälkeen yhtä suuri kuin ennen hajoamista ja kokonaisenergia samoin yhtä suuri hajoamisen jälkeen kuin ennen sitä, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{m_1 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m u_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = 0 \\ \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = M c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{m_1 u}{\sqrt{c^2 - u^2}} + \frac{m u_2}{\sqrt{c^2 - u_2^2}} = 0 \\ \frac{m_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} + \frac{m}{\sqrt{c^2 - u_2^2}} = \frac{M}{c} \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä m

$$\frac{m u_2}{\sqrt{c^2 - u_2^2}} = -\frac{m_1 u}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

$$(3.5.17) \quad m = -\frac{m_1 u \sqrt{c^2 - u_2^2}}{u_2 \sqrt{c^2 - u^2}}$$

ja sijoitetaan jälkimmäiseen

$$\frac{m_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} + \frac{-m_1 u \sqrt{c^2 - u_2^2}}{u_2 \sqrt{c^2 - u^2} \sqrt{c^2 - u_2^2}} = \frac{M}{c}$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{c^2 - u^2}} - \frac{m_1 u}{u_2 \sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{M}{c}$$

$$m_1 c u_2 - m_1 c u = M u_2 \sqrt{c^2 - u^2}$$

Korotetaan puolittain neliöön

$$\begin{aligned} m_1^2 c^2 u_2^2 - 2m_1^2 c^2 u_2 u + m_1^2 c^2 u^2 &= M^2 c^2 u_2^2 - M^2 u_2^2 u^2 \\ (M^2 u_2^2 + m_1^2 c^2) u^2 - 2m_1^2 c^2 u_2 u + m_1^2 c^2 u_2^2 - M^2 c^2 u_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

ja merkitään

$$(3.5.18) \quad \begin{cases} M^2 u_2^2 + m_1^2 c^2 = \alpha \\ -2m_1^2 c^2 u_2 = \beta \\ m_1^2 c^2 u_2^2 - M^2 c^2 u_2^2 = \gamma \end{cases}$$

jolloin saadaan

$$(3.5.19) \quad u = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

minkä jälkeen m saadaan yhtälöstä (3.5.17).

Esim 21 Otetaan uudelleen käsittelyyn kohta 3.1.1, joissa laskettiin kiväärin saama rekyylinopeus. Siinä oli kivääri, jonka massa oli 2,8 kg ja patruuna, joka koostui hylsystä, jonka massa oli 12,4 g, ruudista, jota oli 3,6 g ja luodista, jonka massa oli 18,5 g. Alkuperäinen massa oli siis $M = 2,8 + 0,0124 + 0,0036 + 0,0185 = 2,8345$ kg. Rekyylinopeus u saatiin liikemäärän säilymisestä, kun luodin ja ruudin liikemäärä laukaisun jälkeen $0,0221 \cdot 720$ asetettiin yhtä suureksi kuin kiväärin ja hylsyn liikemäärä laukaisun jälkeen $2,8124u$, koska liikemäärät olivat yhtä suuret ennen laukaisua, nimittäin kumpikin oli 0,.

Suhteellisuusteorian mukaan säilyy paitsi liikemäärä myös kokonaisenergia ja ratkaisu tapahtuu siten kuin se edellä on selvitetty. Sen mukaan hajoamisessa syntyvien kappaleiden massojen summa ei ole yhtä suuri kuin alkuperäisen kappaleen massa. Oletetaan, että massan muutos tapahtuu kokonaan ruudissa, mikä onkin totta, ennen kuin syntyvää lämpöä alkaa levitä ruutikaasuista ympäristöön.

Tunnettuja ovat siis alkuperäinen paikallaan oleva koko massa $M = 2,8345$ kg, kiväärin ja hylsyn massa $m_1 = 2,8 + 0,0124 = 2,8124$ kg ja luodin ja ruudin, siis ruutikaasujen, nopeus $u_2 = 720$ m/s laukaisun jälkeen. Ratkaistava on kiväärin ja hylsyn nopeus u laukaisun jälkeen ja ruutikaasujen massa laukaisun jälkeen. Sijoittamalla nämä ensin yhtälöihin (3.5.18) saadaan

$$\begin{cases} \alpha = M^2 u_2^2 + m_1^2 c^2 = 7,108788354 \cdot 10^{17} \\ \beta = -2m_1^2 c^2 u_2 = -1,023665523 \cdot 10^{21} \\ \gamma = m_1^2 c^2 u_2^2 - M^2 c^2 u_2^2 = -5,814451729 \cdot 10^{21} \end{cases}$$

ja sen jälkeen saadut α , β ja γ yhtälöön (3.5.19), saadaan

$$u \approx 1445,657801 \text{ m/s tai } u \approx -5,657801166 \text{ m/s}$$

Näistä edellinen antaa kaavalla (3.5.17) luodin ja ruudin yhteismassaksi $m \approx -5,6469 \text{ kg}$ ja jälkimmäinen $m \approx 0,0221 \text{ kg}$, joten jälkimmäinen m :n arvoista ja siis myös jälkimmäinen u :n arvoista on oikea. Miinus tarkoittaa, että kivääri ja hylsy lähtevät vastakkaiseen suuntaan kuin luoti ja ruuti.

Kiväärin ja hylsyn nopeus u on hyvin tarkasti sama kuin kohdassa 3.1.1 laskettu. Samoin luodin ja ruudin yhteismassa m on hyvin tarkasti sama kuin kohdassa 3.1.1 oletettu $0,0221 \text{ kg}$. Teorian kannalta tärkeää on kuitenkin se, että ruudin ja luodin yhteismassa ei ole tarkasti $0,0221 \text{ kg}$, vaan poikkeaa siitä

$$\Delta m = m - 0,0221 \approx 6,423700 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$$

Koska massan muutoksen oletettiin tapahtuvan kokonaan ruudissa, ruudin massaa muuttui energiaksi $n. 6,423700 \cdot 10^{-14} \text{ kg} = 64,23700 \cdot 10^{-12} \text{ g} = 64,23700 \text{ pg}$, joka on energiana kaavan (3.4.7) mukaan

$$E = \Delta mc^2 = 6,423700 \cdot 10^{-14} \cdot 299792458^2 \approx 5773 \text{ J}$$

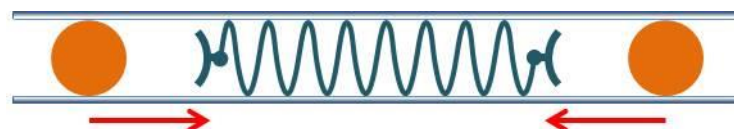
joka puolestaan on hyvin lähellä kohdassa 3.1.3 laskettua luodin, ruudin, kiväärin ja hylsyn yhteenlaskettua liike-energiaa, mutta ei kuitenkaan tasan yhtä suuri.

3.6 Massa suhteellisuusteoriassa

Edellä esitetyn mukaan kappaleen hajotessa useampaan osaan massa pienenee ja useamman kappaleen liittyessä yhdeksi kappaleeksi massa kasvaa.

Mutta mistä tässä aineen muuttumisessa energiaksi ja energian muuttumisessa aineeksi on oikein kysymys?

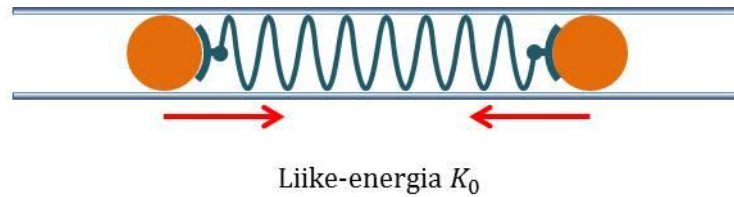
Kuvitellaan tämän selvittämiseksi tilanne, jossa suorassa putkessa liikkuu vastakkaisista suunnista yhtä suurilla nopeuksilla kaksi palloa, joilla on yhtä suuret massat. Pallojen välissä putkessa tarkalleen pallojen puolivälissä on kierrejousi, joka, kuten pallotkin, mahtuvat juuri ja juuri putkeen. Oletetaan myös, että jousi on siinä mielessä ideaalinen, että sen liikkeet eivät tarvitse energiaa. Näillä oletuksilla tilanne saadaan yksiulotteiseksi ja kaikki energia keskitetyksi palloihin. Merkitään pallojen yhteenlaskettua liike-energiaa K_0 :lla (kuva 15 a).



Liike-energia K_0

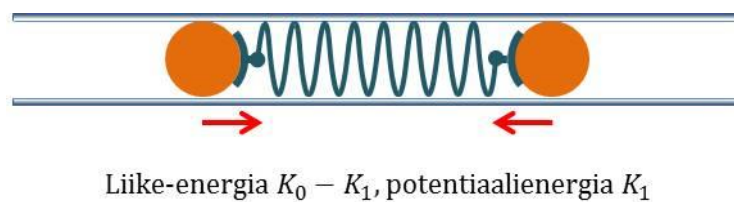
Kuva 15 a: Pallot lähestyvät kierrejousta.

Oletetaan vielä, että osuessaan kierrejouseen pallot takertuvat kiinni sen päihin. Kun pallot kohtaavat omanpuoleisensa jousen pään, mikä tapahtuu kummallakin pallolla samanaikaisesti (kuva 15 b),



Kuva 15 b: Alkutilanne, kierrejousi lepotilassa.

alkaa jousi painua kokoon ja pallojen vauhti hidastua, mikä tarkoittaa, että pallojen liike-energia pienenee. Samalla jousi jännittyy ja jos tilanteesta otetaan pysäytyskuva, kertoo se, että mikäli jousi päästettäisiin vapaaksi, se lennättäisi pallot tulosuuntiinsa. Jousi pystyy siis antamaan palloille liike-energiaa, joten palloilla on sijaintinsa perusteella energiaa, potentiaalienergiaa. Oleellista on, että se energiamäärä, K_1 , joka häviää liike-energiasta, muuttuu potentiaalienergiaksi. Energian yhteismäärä on siis sama K_0 kuin alussa (kuva 15 c).



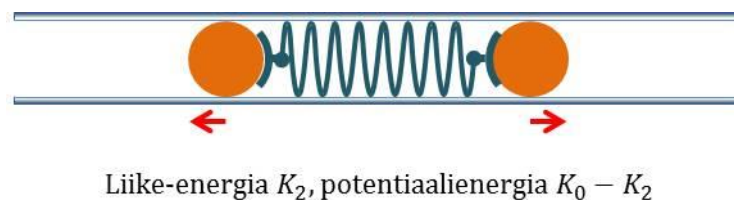
Kuva 15 c: Pallot työntävät kierrejoustusta kasaan.

Pallojen jatkaessa liikettään jousen jännitys, siis pallojen potentiaalienergia, kasvaa aina siihen saakka, kunnes pallot pysähtyvät. Silloin pallojen liike-energia on nolla ja niiden energia on pelkkää potentiaalienergiaa (kuva 15 d).



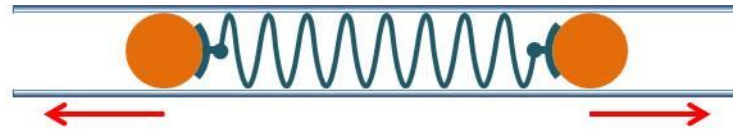
Kuva 15 d: Pallot ääriasennossa, kierrejousi kasassa .

Pallojen pysähtymisen jälkeen ne alkavat liikkua jousen työntäminä takaisin tulosuuntiinsa, jolloin ne saavat liike-energiaa (kuva 15 e).



Kuva 15 e: Kierrejousi työntää palloja.

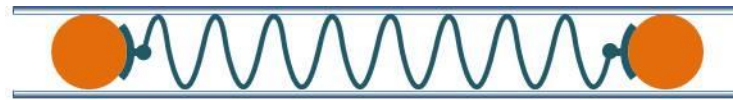
Liike-energia on huipussaan silloin, kun pallot tulevat niihin kohtiin, joissa ne ensimmäisen kerran koskettivat joustia. Tuolloin jousi on alkuperäisessä tilassaan ja sen palloille antama potentiaalienergia on nolla (kuva 15 f).



Liike-energia K_0 , potentiaalienergia 0

Kuva 15 f: Alkutilanne, kierrejousi lepotilassa.

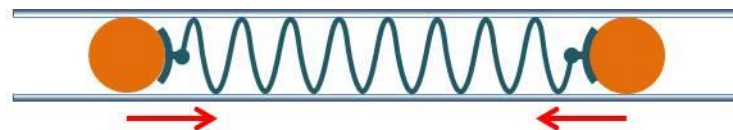
Tämän jälkeen pallot alkavat venyttää joustia ja niiden vauhti pienenee. Lopulta ne pysähtyvät, jolloin niiden liike-energia on nolla ja potentiaalienergia maksimissaan, tällä kertaa jousen venymisen takia (kuva 15 g).



Liike-energia 0, potentiaalienergia K_0

Kuva 15 g: Pallot ääriasennossa, kierrejousi venynyt äärimmilleen.

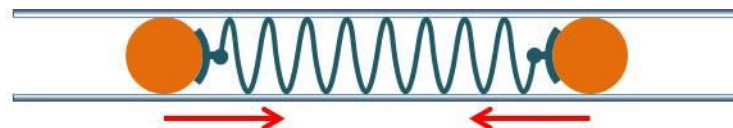
Tämän jälkeen pallot alkavat liikkua jousen vetäminä toisiaan kohti, jolloin liike-energia kasvaa ja potentiaalienergia pienenee saman verran (kuva 15 h).



Liike-energia K_3 , potentiaalienergia $K_0 - K_3$

Kuva 15 h: Kierrejousi vetää palloja toisiaan kohti.

Pallojen tultua kohtiin, joissa ne ensimmäisen kerran koskettivat joustia, niiden potentiaalienergia on nolla ja liike-energia maksimissaan (kuva 15 i).



Liike-energia K_0 , potentiaalienergia 0

Kuva 15 i: Alkutilanne, kierrejousi lepotilassa.

Tämä tapahtumaketju toistuu tämän jälkeen yhä uudestaan ja uudestaan.

Oleellista on, että koko aikana pallojen ja kierrejousen systeemiin ei tuoda ulkoa lisää energiaa eikä siitä poistu energiaa, mikä tarkoittaa, että sen kokonaisenergia pysyy koko ajan samana. Näin ollen myös sen liikemäärä on vakio, nolla, kaiken aikaa. Asian voi ilmaista yksinkertaisemminkin kutsuamalla pallojen liike-energian ja potentiaalienergian summaa värähtelyenergiaksi. Tällöin pallojen värähtelyenergia on koko ajan vakio ja yhtä suuri kuin niiden alkuperäinen liike-energiaa.

Tarkastellaan nyt hieman kolmiulotteista tapausta. Jos pallot tulevat vastakkaisista suunnista mutta eivät pitkin samaa suoraa, ne jäävät jouseen takerruttuaan kiertämään toisiaan. Tällöin pallojen nopeus ei ole koskaan nolla, joten jousikaan ei veny yhtä pitkäksi tai supistu yhtä lyhyeksi kuin yksi-

ulotteisessa tapauksessa. Pallojen energiaa voidaan kutsua tässäkin tapauksessa värähtelyenergiaksi, joskin se on nyt vähän ontuva nimi, sillä ääritapauksessa pallot voivat jäädä kiertämään ympyrä-rataa niiden yhteisen massakeskipisteen ympäri. Tällöin pallojen nopeuksien suuruudet samoin kuin kierrejousen venymä pysyvät koko ajan samana. Käytettiinpä pallojen energiasta mitä nimeä tahansa, tällaisessakin tapauksessa pallojen erilliset liike-energiat muuttuvat niiden ja jousen muodostaman kokonaisuuden sisäiseksi energiaksi.

Vieläkin pitemmälle voidaan mennä ja kuvitella mitä tapahtuu, kun usemman pallon muodostamat joukot kohtaavat ja jokainen kummankin joukon pallo on kierrejousien välityksellä kiinni jokaisessa muussa oman joukkonsa riittävän lähellä olevassa pallossa ja takertuu toisen joukon jokaiseen riittävän lähelle tulevaan palloon ja joukot yhdistyvät näin yhdeksi joukoksi. Tästä katastrofaalisen monimutkaisesta tilanteesta teoreettisesti tuskin voidaan sanoa muuta kuin oleellisin: kummankin joukon alkuperäistä liike-energiaa muuttuu syntyvän uuden joukon sisäiseksi värähtelyenergiaksi. Jos tapahtumaa tarkastellaan järjestelmässä, jossa joukkojen liikemäärät ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset, kummankin joukon liike-energia muuttuu kokonaan pallojen värähtelyenergiaksi.

Palataan esimerkissä 18 kuvattuun kappaleiden törmäämiseen. Kappaleiden pienimmät rakenneosat, molekyylit (tai yksittäiset atomit) ovat nyt ne pallot, jotka lähestyvät toisiaan ja kierrejoussina ovat niiden väliset sähköiset (ja magneettiset) veto- ja poistovoimat. Erona on vain se, että nämä voimat vaikuttavat kaikilla etäisyyksillä, mutta jos pallojen tarttuminen kierrejousen päihin kuvaa tilannetta jonakin sellaisena hetkenä, jona nämä veto- ja poistovoimat kumoavat toisensa, tilanne on hyvin samankaltainen. Tosin tilanne on kaikilla paljain silmin havaittavilla kappaleilla, mikäli mahdollista, vielä edellä kerrottuakin monimutkaisempi, sillä "kierrejoussia" on jokaisesta molekyylistä jokaiseen muuhun molekyyliin, joskin ne ovat merkityksellisiä vain suhteellisen lähellä olevien molekyylien välillä. Yhtä kaikki, törmäyksessä alkuperäisten kappaleiden liike-energiaa muuttuu niiden muodostaman kokonaisuuden sisäiseksi energiaksi.

Todellisuudessa kaikilla molekyyleillä on värähtelyenergiaa jo alunperinkin ja niiden värähtelyenergia vain kasvaa törmäyksessä. Molekyylien värähtelyenergia havaitaan kappaleen lämpönä ja se on nolla vain jos kappaleen lämpötila on absoluuttinen nollapiste, nolla kelviniä eli $-273,15^{\circ}\text{C}$, mikä puolestaan on mahdotonta.

Edellä esitetty pätee myös nesteisiin, vaikka nesteiden molekyylien väliset sidokset ovat heikommat kuin kiinteillä aineilla ja molekyylit pystyvät liikkumaan melko vapaasti toistensa ohi. Kaasuilla tilanne on toinen ja yksittäisten molekyylien värähtelyn sijaan kysymys on niiden vapaasta liikkumisesta ja siitä aiheutuvista jatkuvista keskinäisistä törmäyksistä. Mitä lämpimämpää kaasu on, sitä kovempi vauhti molekyyleillä on ja sitä enemmän ne törmäilevät toisiinsa (lämpö) sekä kaasun sisältävän astian seiniin (paine). Kun johonkin tilaan, jossa on ennestään kaasua, tuodaan lisää uutta kaasua, tuodun kaasuerän liike-energia lisää tilassa ennestään olevan kaasun molekyylien ja myös omien molekyyliensä vauhtia. Näin tapahtuu esimerkiksi, kun ilmaa pumputaan pyörän renkaaseen tai kun gravitaatio vetää vety-, helium- ja muita atomeja kohti tähden keskustaa. Uusien atomien (tai molekyylien) liike-energia leviää törmäysten kautta koko tilaan ja sen lämpötila nousee. Esimerkiksi Auringon keskustassa vetyatomien ytimien nopeus on kasvanu niin suureksi, siis keskustan lämpötila niin korkeaksi, että vety-ytimiä yhtyy heliumytimiksi kohdassa 4.3.12 kerrottavalla tavalla.

Vastaavasti hajoamisreaktioissa värähtelyenergia muuttuu liike-energiaksi. Kierrejousiesimerkissä tämä tapahtuu, jos jousi katkaistaan sillä hetkellä, jolloin pallot ovat niissä kohdissa, joissa ne en-

simmäisen kerran koskettivat jouta. Tällöin niiden potentiaalienergia on nolla, eikä jousen katkaiseminen muuta systeemin energiaa. Pallot jatkavat tämän jälkeen nopeudella, joka niillä oli alun perin ja niiden värähtelyenergia on muuttunut kokonaan niiden liike-energiaksi. Kohdan 3.5.7 esimerkissä 19 puolestaan ns. heikko vuorovaikutusvoima purkaa neutronin protoniksi, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi ja neutronin potentiaalienergia muuttuu hajoamistuotteiden liike-energioiksi. Esimerkissä 21 taas ruudin pääaineosan nitroselluloosan molekyylit purkavat sisäisen värähtely- eli potentiaali- ja liike-energiansa hajoamistulosten, vesi-, hiilidioksidi-, hiilimonoksidi-, vety- ja typpi-molekyylien, liike-energiaksi niin, että alkuaan kiinteästä ruudista tulee kaasua ja ruutikammioon syntyy paine, joka ajaa luodin liikkeelle. Kaikkiaan siis osa nitroselluloosamolekyylien potentiaali- ja liike-energioiden muodostamasta sisäisestä energiasta muuttuu luodin, syntyvien kaasujen, kiväärin ja hylsyn liike-energioiksi.

Mitä siis pitäisi ajatella aineen ja energian välisestä suhteesta?

Vaikka edellä esitetty teoria pohjautuu massan avulla määriteltyihin liikemäärän, liike-energian, kokonaisenergian ja lepoenergian käsitteisiin, sen antaman lopputuloksen ymmärtämiseksi olisi parempi luopua koko massan käsitteestä. Massan sijaan olisi helpompaa käyttää perustana kappaleen sisäistä energiaa eli lepoenergiaa, joka paikallaan olevalla tai vakionopeudella suoraviivaisesti liikkuvalla kappaleella on se osa energiasta, joka ei ole liike-energiaa. Jos kappaleeseen tai kappalejoukkoon ei tule lisää energiaa eikä siitä lähde energiaa, sen kokonaisenergia pysyy muuttumattomana, mutta sen sisäinen energia voi muuttua liike-energiaksi ja päinvastoin. Näin sillä edellytyksellä, että liike-energiaksi lasketaan myös kappaleen säteilemän sähkömagneettisen säteilyn energia, jota tietyt atomeissa ja molekyyleissä tapahtuvat energiatilan muutokset synnyttävät jokaisessa aineessa, jonka lämpötila on yli absoluuttisen nollapisteen.

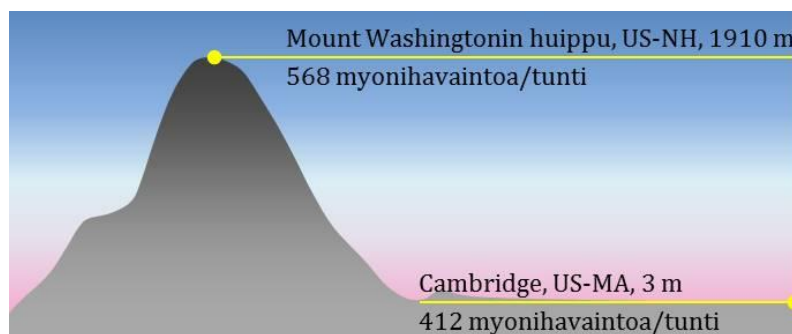
4 KÄYTÄNNÖN ESIMERKKEJÄ

4.1 Myonit

Myonit ovat alkeishiukkasia, joita syntyy ilmakehässä yli 15 km:n korkeudessa, kun erittäin suurella nopeudella liikkuvat avaruussäteilyn protonit osuvat ilmakehän typpi- ja happiatomien ytimiin. Myoneja syntyy sellaista vauhtia, että Maan pinnalle vaakasuoralle yhden neliösenttimetrin suuruiselle alueelle niitä osuu keskimäärin yksi minuutissa.

Myonilla on sama sähkövaraus kuin elektronilla ja 206,7682826-kertainen massa elektronin massa verrattuna. Mutta myonilla ja elektronilla on oleellisempikin ero: elektroni on pysyvä alkeishiukkanen, mutta myoni ei. Myoni hajoaa elektroniksi, myonin neutriinoksi ja elektronin antineutriinoksi. Myonien hajoaminen on esimerkki radioaktiivisesta hajoamisesta eli hajoamisesta, jossa yksittäinen hiukkanen hajoaa sattumanvaraisena hetkenä, mutta niin, että aika, jonka kuluessa puolet (tilastollisesti riittävän suuresta) hiukkasmäärästä hajoaa, eli ns. puoliintumisaika $t_{1/2}$, on hiukkasmäärästä ja yleensä ulkoisista olosuhteista riippumatta sama. Levossa olevien myonien puoliintumisaika on laboratoriokokeiden mukaan $t_{1/2} = 1,5228313 \cdot 10^{-6}$ s.

Vuonna 1963 yhdysvaltalaiset fyysikot David H. Frisch ja James H. Smith julkaisivat tulokset kokeesta, jossa he selvittivät käyttämänsä ilmaisimen rekisteröimien myonien lukumäärän tunnin aikana Cambridgessä Massachusettsissa lähellä meren pintaa ja 1907 m ylempänä Mount Washingtonin huipulla New Hampshiressa. Tulokset olivat 568 myonia ja 412 myonia (kuva 16).



Kuva 16: Havaittujen myonien määrät.

Mount Washingtonin huipun ilmaisin oli tehty sellaiseksi, että myonit, joiden nopeus oli pienempi kuin $0,9950c$, pysähtyivät ilmaisimen 76 cm paksuun rautakuoreen ja myonit, joiden nopeus oli suurempi kuin $0,9954c$ läpäisivät ilmaisimen. Ainoastaan myonit, joiden nopeus oli näiden rajojen välissä pysähtyivät ilmaisimeen, hajosivat siinä ja tulivat havaituiksi. Koska myonien on kuljettava Mount Washingtonin huipun korkeudelta Cambridgeen 1907 m paksun ilmakerroksen läpi, pienenee niiden nopeus. Jotta Cambridgessä havaitut myonit olisivat sellaisia, joiden nopeus ylhäällä oli $0,9950c$:n ja $0,9954c$:n välillä, oli Cambridgessä ilmaisimen rautakuoren oltava ohuempi. Kun myonien hidastuvuus sekä ilmassa että raudassa olivat tunnettuja, voitiin laskea, että rautakuoren paksuuden alhaalla oli oltava 46 cm. Ottamalla tämän ja monia muita asiaan vaikuttavia tekijöitä huomioon Frisch ja Smith päätyivät tuloksen, että ilmaisimet havaitsivat myonit, joiden keskimääräinen nopeus matkalla 1910 m:n korkeudelta 3 m:n korkeudelle oli $0,9935c$.

Myoniin kiinnitetty järjestelmä $\mathcal{S}$ liikkui siis nopeudella $v = 0,9935c$ Maahan kiinnitetyssä järjestelmässä S . Näin ollen myoni tulee Mount Washingtonin huipun korkeudelta Cambridgen korkeudelle eli 1907 m järjestelmässä S ajassa

$$t_s = \frac{1907}{0,9935c} \approx 6,402684746 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Myonin järjestelmässä $\mathcal{T}$ myonin käyttämä aika ylhäältä alas, t_T , on kaavan (2.1.2) mukaan

$$t_T = t_s \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6,4027 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{1 - \frac{0,9935^2 c^2}{c^2}} \approx 7,288311349 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Myoneja jäi ilmaisimeen ylhäällä tunnin aikana 568 kappaletta. Edellä mainitun puoliintumisajan $T_{1/2}$ kuluttua 568 myonista on jäljellä $568/2$, kahden puoliintumisajan kuluttua $568/2/2 = 568/2^2, \dots n:n$ puoliintumisajan kuluttua $568/2^n$ ja yleisesti $x:n$ puoliintumisajan kuluttua $568/2^x$, olipa x mikä tahansa reaaliluku. Kun myonin järjestelmässä on kulunut edellä laskettu myonien kulku-aika t_T , on puoliintumisaikoja kulunut

$$\frac{t_T}{t_{1/2}} = \frac{7,288311349 \cdot 10^{-7}}{1,5228313 \cdot 10^{-6}} \approx 0,4786026899$$

kappaletta. Näin ollen Mount Washingtonin huipun 568 myonista pitäisi Cambridgessä olla jäljellä

$$\frac{568}{20,4786026899} \approx 408 \text{ kpl}$$

mikä vastaa varsin hyvin havaittua lukumäärää 412.

Saatu tulos on kaukana siitä määrästä, joka myoneja olisi jäljellä, jos myonin järjestelmässä aika kuluisi samaan tahtiin kuin Maan järjestelmässä, jolloin puoliintumisaikoja olisi kulunut

$$\frac{t_T}{t_{1/2}} = \frac{6,402684746 \cdot 10^{-6}}{1,5228313 \cdot 10^{-6}} \approx 4,204461082 \text{ kpl}$$

ja myoneja olisi jäljellä

$$\frac{568}{24,204461082} \approx 31 \text{ kpl}$$

Itse asiassa Frisch ja Smith tekivät vielä viisi vastaavaa koetta, joista viimeisessä ei kuitenkaan tehty havaintoja Cambridgessä. Myonien havaitut lukumäärät Mount Washingtonin huipulla, teoreettiset lukumäärät ja lukumäärät, jos ajan hidastumista ei olisi, ovat alla olevassa taulukossa 3.

Taulukko 3: Havaitut myonien määrät eri kokeissa.

Mt. Washington havaittu	Cambridge havaittu	Cambridge teoreettinen	Cambridge, ei ajan hidastumista
568	412	408	31
554	403	398	30
582	436	418	32
527	395	378	29
588	393	422	32

Nämä tulokset eivät tietenkään todista kaavaa (2.1.2) oikeaksi, mutta ne ovat erittäin vahva näyttö siitä, että kappaleen nopeus vaikuttaa sen kokemaan ajankulkuun.

4.2 Satelliittipaikannus

4.2.1 Satelliittipaikannuksen periaate

Kaikissa satelliittipaikannusjärjestelmissä on sama toimintaperiaate, mutta käsitellään tässä GPS-järjestelmää (Global Positioning System). Kysytään, onko GPS-satelliittien kelloissa tapahtuva nopeudesta johtuva kaavan (2.1.2) mukainen ajan hidastuminen otettava huomioon paikannuksessa.

GPS-satelliitit kiertävät n. 26560 kilometrin kiertosäteellä kaksi kierrosta Maan ympäri siinä ajassa, tähtivuorokaudessa (n. 23 h 56 min), jossa Maa kiertää täyden kierroksen akselinsa ympäri eli yhden kierroksen n. 718 minuutissa. Ne kiertävät Maata kuudessa Maan keskipisteen kautta kulkevassa tasossa. Nämä tasot ovat n. 55°:n kulmassa päiväntasaajan kanssa ja sijaitsevat niin, että vierekkäisten ratatasojen ja päiväntasaajatason leikkaussuorien välinen kulma on 60°. Jokaisessa tasossa kiertää neljä satelliittia toistensa suhteen niin sijoittuneina, että napa-alueita lukuun ottamatta jokaisessa Maan pinnan pisteessä on koko ajan vähintään kuusi satelliittia horisontin yläpuolella. Näiden 24 satelliitin lisäksi järjestelmään kuuluu muutamia ylimääräisiä satelliitteja, jotka parantavat paikannustarkkuutta ja ovat myös varalla, jos jokin satelliiteista menee epäkuntoon. Paikannus GPS-järjestelmässä perustuu siihen, että paikannussatelliitit lähettävät radiosignaaleja, joilla ne ilmoittavat sijaintinsa ja signaalin lähtöhetken. Sijaintinsa ja kellonsa tarkkuutta satelliitit säätävät Maan pinnalla olevien tukiasemien avulla.

Oletetaan, että paikannin P saa signaalit neljältä satelliitilta S_1, S_2, S_3 ja S_4 niin, että signaalien saapumishetket paikantimeen ovat paikantimen kellon mukaan T_1, T_2, T_3 ja T_4 ja satelliittien ilmoittamat signaalien lähtöhetket ovat L_1, L_2, L_3 ja L_4 , jotka ovat hyvin tarkasti Maan pinnalla käytettävän ajan mukaisia. Jos myös paikantimen kello kävisi tarkalleen tätä samaa aikaa, saataisiin signaalien kulkuajat vähentämällä saapumisajoista lähtöajat. Itse asiassa tällöin riittäisi kolmen satelliitin antamat tiedot ja neljäs antaisi vain lisää tarkkuutta. Kuitenkaan näin tarkat kellot eivät ole paikantimissa mm. kustannussyistä mahdollisia. Siksi pitää varautua siihen, että paikantimen mittaamisissa ajoissa on oleellisia virheitä. Jos paikantimen kellon virhe t pysyy riittävän tarkasti samana koko edellä mainittujen neljän signaalin saapumisten ajan, saadaan signaalien oikeat saapumisajat riittäväällä tarkkuudella vähentämällä paikantimen kellon antamista saapumisajoista paikantimen kellon virhe t . Oikeat saapumisajat ovat siten $T_1 - t, T_2 - t, T_3 - t$ ja $T_4 - t$. Kun näistä vähennetään signaalien oikeat lähtöajat, saadaan signaalien oikeat kulkuajat $T_1 - t - L_1, T_2 - t - L_2, T_3 - t - L_3$ ja $T_4 - t - L_4$. Jos laskutoimitusten yksinkertaistamiseksi merkitään vielä $t_1 = T_1 - L_1, t_2 = T_2 - L_2, t_3 = T_3 - L_3$ ja $t_4 = T_4 - L_4$, saadaan signaalien kulkuajoiksi $t_1 - t, t_2 - t, t_3 - t$ ja $t_4 - t$. Koska paikantimen kellon virhettä t ei tiedetä, on ratkaistavana neljä tuntematonta: paikantimen kolme paikkakoordinaattia ja kellon virhe t . Näiden ratkaisemiseksi tarvitaan neljä yhtälöä ja siis neljä satelliittia.

GPS-paikantimen sijainnin määrittämiseksi otetaan käyttöön suorakulmainen $Oxyz$ -koordinaatisto. Tässä koordinaatistossa origo O on Maan keskipisteessä. Positiivinen x -akseli on origosta kohti päiväntasaajan ja nollameridiaanin leikkauspistettä, toisin sanoen pistettä, jonka maantieteellinen leveys ja pituus ovat 0°. Tämä piste sijaitsee Guinean lahdella n. 750 km São Tomésta länteen. Positiivinen y -akseli on origosta kohti päiväntasaajan ja 90 asteen meridiaanin leikkauspistettä, siis pistettä, jonka maantieteellinen leveys 0° ja pituus 90° ja joka sijaitsee Intian valtameressä n. 1550 km Singaporesta länteen. Positiivinen z -akseli on origosta kohti pohjoisnapaa eli pistettä, jonka maantieteellinen leveys on 90°.

Oletetaan, että tässä suorakulmaisessa koordinaatistossa satelliittien S_1, S_2, S_3 ja S_4 koordinaatit signaalien lähtöhetkillä ovat $S_1: (x_1, y_1, z_1), S_2: (x_2, y_2, z_2), S_3: (x_3, y_3, z_3), S_4: (x_4, y_4, z_4)$ ja GPS-pai-

kantimen paikka on (x, y, z) ensimmäisestä signaalin saapumisesta viimeiseen. Kunkin satelliitin etäisyys paikantimesta voidaan lausua kahdella tavalla: paikantimen ja satelliitin koordinaattien erotuksista $x - x_i$, $y - y_i$ ja $z - z_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ Pythagoraan lausetta soveltaen ja toisaalta signaalin kulkeman matkan perusteella, joka saadaan kertomalla signaalin kulkuaika $t_i - t$ signaalin nopeudella c . Tekemällä tämä jokaiselle satelliitille saadaan etäisyyksien neliöistä neljän yhtälön yhtälöryhmä

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t_1 - t)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t_2 - t)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t_3 - t)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t_4 - t)^2 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän (4.2.1) ratkaiseminen yleisesti ja seuraavassa kohdassa käsiteltävässä esimerkkitapauksessa erityisesti on esitetty liitteessä 5.

4.2.2 Esimerkki

Sivuston <http://www.n2yo.com/satellites/?c=20> mukaan GPS-satelliittien Navstar 72, Navstar 70, Navstar 66 ja Navstar 58 sijainnit olivat 12.3.2015 klo 07:16:40 UTC-aikaa (09:16:40 Suomen aikaa) allaolevan taulukon 4 mukaiset

Taulukko 4: Satelliittien maantieteelliset koordinaatit

	leveys φ (°)	pituus λ (°)	korkeus h (m)
Navstar 72	50,49	36,61	20192060
Navstar 70	54,78	-65,08	20194440
Navstar 66	7,07	30,08	20272520
Navstar 58	53,93	104,55	20262210

Näiden maantieteellisten koordinaattien tarkkuus, asteen sadasosa leveydessä ja pituudessa sekä 10 metriä korkeudessa, on muutamien kilometrien luokkaa. Koska tehtävänä on selvittää, mikä on kaavan (2.1.2) mukaisen ajan kulun suhteellisuuden vaikutus paikanmäärityksen tarkkuuteen, oletetaan, että ilmoitetut koordinaatit ovat täsmälleen oikeita tai ainakin niin tarkkoja, että niistä koordinaattimuunnoksella saatavat suorakulmaiset koordinaatit ovat oikeita metrin tarkkuudella.

Maantieteellisten koordinaattien muuntaminen suorakulmaisiksi koordinaateiksi ja päinvastoin on esitelty liitteessä 6. Esimerkissä L.6.1 on Navstar 72:n maantieteellisten koordinaattien muuntaminen suorakulmaisiksi ja esimerkissä L.6.2 Lánká-tunturin huipun suorakulmaisten koordinaattien muuntaminen maantieteellisiksi. Muunnoksia varten tehtyjä sovelluksia on myös internetissä mm. sivulla <http://www.apsalin.com/convert-geodetic-to-cartesian.aspx> (maantieteellisistä suorakulmaisiksi) ja sivulla <http://www.apsalin.com/convert-cartesian-to-geodetic.aspx> (suorakulmaisista maantieteellisiin).

Satelliittien suorakulmaisiksi koordinaateiksi saadaan taulukon 5 arvot.

Taulukko 5: Satelliittien suorakulmaiset koordinaatit.

	x_i (m)	y_i (m)	z_i (m)
Navstar 72	13575819	10085969	20476093
Navstar 70	6460645	-13905556	21685017
Navstar 66	22886448	13256139	3274997
Navstar 58	-3942561	15190057	21510070

Laskentatarkkuuden parantamiseksi valitaan nollahetkeksi, $t = 0$, signaalien lähtöaika 07:16:40.

Kysytään nyt, mikä oli paikantimen sijainti, jos signaalit saapuivat siihen paikantimen kellon mukaan seuraavan taulukon 6 hetkillä t_1, t_2, t_3 ja t_4

Taulukko 6: Signaalien saapumisajat.

	t_i (s)
Navstar 72	0,413597802
Navstar 70	0,420527863
Navstar 66	0,423564542
Navstar 58	0,420104432

Kuten edellä esitettiin, nämä ajat ovat signaalien kulkuajojen ja paikantimen kellovirheen summia. Kun nämä ajat ja satelliittien koordinaatit sijoitetaan yhtälöryhmään (4.2.1) ja ratkaistaan se liitteen 5 esimerkissä L.5.1 esitettyllä tavalla, saadaan paikantimen suorakulmaiset koordinaatit

$$\begin{cases} x = 2961900,328 \text{ m} \\ y = 1251955,263 \text{ m} \\ z = 5489765,661 \text{ m} \end{cases}$$

ja paikantimen kellon virhe $t = 0,3456222945$ s. Nämä suorakulmaiset koordinaatit muunnetaan liitteen 6 kohdan L.6.2 kaavoilla (L. 6.9) maantieteellisiksi ja saadaan: leveys $\varphi = 59,80796697^\circ$, pituus $\lambda = 22,91312195^\circ$ ja korkeus $H = 0$ m. Paikannin on siis Hankoniemen eteläkärjessä merenpinnan tasalla ja sen koordinaatit ovat

$$(P_0) \quad \begin{cases} \text{leveys } \varphi = 59,8080^\circ \\ \text{pituus } \lambda = 22,9131^\circ \\ \text{korkeus } H = 0 \text{ m} \end{cases}$$

4.2.3 Nopeuden vaikutus

Satelliitit siis lähettivät signaalit, joissa ne ilmoittivat sijaintinsa hetkellä, jolloin niiden kellot näyttivät 07:16:40 UTC-aikaa. Selvitetään nyt, mitkä olisivat olleet seuraukset, jos jostakin syystä satelliitin Navstar 72 kello olisi vuorokauden ajan ennen tätä hetkeä jättänyt ottamatta huomioon kaavan (2.1.2) mukaisen ajan hidastumisen, mutta kolmen muun satelliitin kellot olisivat olleet säädetyt niin, että ne olisivat näyttäneet Maan pinnalla noudatettavaa virallista UTC-aikaa.

Navstar 72 kiertää Maata lähes ympyränmuotoista rataa 26560 kilometrin etäisyydellä Maan keskipisteestä yhden kierroksen n. 718 minuutissa, joten sen nopeus on

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 26560000}{718 \cdot 60} \approx 3873,755844 \text{ m/s}$$

Silloin, kun Navstar 72:n kello on käynyt vuorokauden, $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sekuntia, siis sen järjestelmässä $\mathcal{T}$ aikaa on kulunut tasan vuorokausi, on Maan pinnalla paikoillaan olevassa järjestelmässä $\mathcal{S}$ aikaa kulunut kaavan (2.1.2) mukaan

$$t_S = \frac{t_T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{86400}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 86400,000007213 \text{ s}$$

Näin ollen Navstar 72:n signaali olisi lähtenyt satelliitista ja myös saapunut paikantimeen ajan

$$\Delta t_v = t_S - t_T = 0,000007213 \text{ s} = 7,213 \text{ } \mu\text{s}$$

verran myöhemmin kuin jos se olisi lähtenyt klo 07:16:40 UTC-aikaa. Se ei siis olisi osunut paikantimeen edellisen kohdan taulukon 6 mukaisella hetkellä $t_1 = 0,413597802 \text{ s}$, vaan hetkellä

$$t'_1 = t_1 + \Delta t_v = 0,413597802 + 0,000007213 = 0,413605015 \text{ s}$$

Koska paikannin toimii satelliiteilta saamiensa tietojen varassa, se olisi olettanut, että Navstar 72:n signaali oli lähtenyt nolлахetkellä 07:16:40 ja olisi laskenut liitteen 5 esimerkissä L.5.2 esitetyllä tavalla koordinaateikseen $x = 2959148,066 \text{ m}$, $y = 1250959,228 \text{ m}$ ja $z = 5485964,064 \text{ m}$. Maan-tieteelliset koordinaatit olisivat olleet liitteen 6 mukaan tällöin

$$(P1) \quad \begin{cases} \varphi' = 59,8135^\circ \\ \lambda' = 22,9159^\circ \\ H' = -4756 \text{ m} \end{cases}$$

Jos paikantimen haltija ei olisi huomannut korkeuskoordinaattia, olisi hän luullut olevansa paikassa, joka on oikeasta paikasta 634 m:n etäisyydellä suunnassa 14° . Mutta hassuinta olisi ollut, että paikannin olisi ilmoittanut olevansa 4756 m:n syvyydellä Maan sisässä.

4.2.4 Gravitaation vaikutus

Ajankulkuun satelliiteissa vaikuttaa myös se yleisen suhteellisuusteorian puolelle kuuluva (ja tässä perustelematta jäävä) tosiseikka, että mitä pienempi on Maan vetovoima sitä nopeammin aika kuluu. Näin ollen satelliiteissa aika kuluu nopeammin kuin Maan pinnalla. Jos kahden tapahtuman välinen aika on t_1 etäisyydellä r_1 pallonmuotoisen taivaankappaleen K keskipisteestä, niin näiden tapahtumien välinen aika etäisyydellä r_2 K:n keskipisteestä on

$$(4.2.2) \quad t_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}}} t_1$$

missä m on K:n massa ja G on yleinen gravitaatiovakio $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Kaava edellyttää, että sekä r_1 että r_2 ovat vähintään kappaleen K säteen suuruisia.

Koska Maata, jonka massa on $5,9723 \cdot 10^{24}$ kg, voidaan vaadittavan tarkkuuden rajoissa pitää pallo-
na, voidaan kaavaa (4.2.2) soveltaa ratkaistaessa, kuinka paljon Navstar 72:n aika ja Maan pinnalla
mitattu aika poikkeavat toisistaan painovoimaeron johdosta. Navstar 72 kiertää Maata keskimää-
räisellä kiertosäteellä $r_1 = 26560$ km ja Hankoniemen kärjessä pisteessä (P0) etäisyys Maan keski-
pisteestä on kohdan 4.2.2 mukaan

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2961900,328^2 + 1251955,263^2 + 5489765,661^2} \approx 6362214 \text{ m}$$

Kun Navstar 72:n korkeudella aikaa kuluu vuorokausi, $t_1 = 86400$ s, sitä pisteessä (P0) kuluu

$$t_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6,67408 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97237 \cdot 10^{24}}{299792458^2 \cdot 6362214}}}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot 6,67384 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97219 \cdot 10^{24}}{299792458^2 \cdot 26560000}}} \cdot 86400 \approx 86399,999954199 \text{ s}$$

eli

$$\Delta t_G = 24 \cdot 60 \cdot 60 - t_2 \approx 0,000045801 \text{ s} = 45,801 \text{ } \mu\text{s}$$

vähemmän.

4.2.5 Yhteisvaikutus

Edellä esitetyn perusteella Navstar 72:n nopeus hidastaa ajan kulumista ja gravitaatio nopeuttaa
sitä niin, että niiden yhteisvaikutus on

$$\Delta t = \Delta t_v + \Delta t_G = 7,213 - 45,798 = -38,588 \text{ } \mu\text{s}$$

Kuvitellaan, että Navstar 72:n kello ei olisi ottanut huomioon kumpaakaan näistä vaikutuksista.
Siitä olisi seurannut, että signaali, jonka Navstar 72 olisi lähettänyt nollahetkellä 07:16:40 UTC, olisi
saavuttanut paikantimen $-38,588 \text{ } \mu\text{s}$ etuajassa. Tämä tarkoittaa, että laskettaessa paikantimen si-
jaintia t_1 :n paikalla olisi ollut

$$t_1'' = t_1 + \Delta t = 0,413597802 - 0,000038588 = 0,413559214 \text{ s}$$

Tällöin koordinaateiksi olisivat tulleet liitteen 5 esimerkissä L.5.3 esitetyllä tavalla $x =$
 $2976609,486$ m, $y = 1257278,520$ m ja $z = 5510083,564$ m ja näistä liitteessä 6 esitetyllä tavalla
maantieteelliset koordinaatit

$$(P2) \quad \begin{cases} \varphi'' = 59,7786^\circ \\ \lambda'' = 22,8985^\circ \\ H'' = 25419 \text{ m} \end{cases}$$

Siis paikka, joka on todellisesta paikasta 3372 m suuntaan 194° ja 25419 m:n korkeudella.

Vielä on huomattava, että Navstar 72 olisi ilmoittanut sijaintinsakin väärin antamalla pisteen, jossa
se oli ajan Δt verran nollahetken 07:16:40 jälkeen. Kuitenkin se etenee ajassa Δt vain matkan

$$v\Delta t = 3873,755844 \cdot 38,585 \cdot 10^{-6} \approx 0,149 \text{ m} = 14,9 \text{ cm}$$

joten tällä virheellä ei olisi ollut käytännön merkitystä koordinaattien määräytymisessä.

Näin Hankoniemen kärjessä. Mutta virheen suuruuteen vaikuttaa myös se, missä paikannin on. Esimerkkinä tästä tarkastellaan tilannetta, jossa toinen paikannin sijaitsi niin, että edellä mainitusta nollahetkestä, 12.3.2015 klo 07:16:40 UTC-aikaa, signaalien saapumisajat olivat t_1^* , t_2^* , t_3^* ja t_4^* (taulukko 7)

Taulukko 7: Signaalien saapumisajat.

	t_i^* (s)
Navstar 72	0,350356579
Navstar 70	0,355165029
Navstar 66	0,362634921
Navstar 58	0,354439593

Liitteen 5 esimerkistä L.5.4 käy ilmi, tämä paikannin oli tuolloin pisteessä $x = 2020780,744$ m, $y = 985008,305$ m, $z = 5949498,787$ m ja sen kellon virhe oli $t = 0,2813992443$ s. Liitteen 6 mukaan paikan maantieteelliset koordinaatit olivat

$$\begin{cases} \varphi^* = 69,4274^\circ \\ \lambda^* = 25,9864^\circ \\ H^* = 620 \text{ m} \end{cases}$$

Paikannin on näin olen Lánká-tunturin huipulla Utsjoella.

Tässä pisteessä etäisyys Maan keskipisteestä on

$$r_2 = \sqrt{2020780,744^2 + 985008,305^2 + 5949498,787^2} \approx 6360057,546 \text{ m}$$

mikä tarkoittaa, että kun Navstar 72:n korkeudella aikaa kuluu vuorokausi eli 86400 s, kuluu sitä Lánká-tunturin huipulla kaavan (4.2.2) mukaan 86399,999954178 s. Erotus on $\Delta t_G = 45,822 \mu\text{s}$ ja yhteisvirhe $\Delta t = \Delta t_v + \Delta t_G = 7,213 - 45,822 = -38,609 \mu\text{s}$.

Jos Navstar 72:n ajassa ei olisi tehty suhteellisuusteorian vaatimia korjauksia, olisi sen lähettämän signaalin saapumisaika paikantimeen ollut $t_1^{**} = 0,350356579 - 0,000038609 = 0,350317970$ s ja paikantimen suorakulmaiset koordinaatit olisivat olleet liitteen 5 esimerkin L.5.5 mukaan $x = 2036281,338$ m, $y = 990569,520$ m, $z = 5969850,414$ m ja maantieteelliset koordinaatit liitteen 6 mukaan

$$\begin{cases} \varphi^{**} = 69,3545^\circ \\ \lambda^{**} = 25,9411^\circ \\ H^{**} = 25431 \text{ m} \end{cases}$$

Tämä piste on oikeasta paikasta 8336 m suuntaan 192° ja 25431 m:n korkeudessa.

Paikantimen tekemän virheen suuruus riippuu myös siitä, minkä satelliitin kello on käynyt väärin. Jos virheellistä aikaa näyttänyt satelliitti olisi ollut Navstar 70, olisi sen lähettämän signaalin saapumisaika Lánká-tunturin tapauksessa ollut $t_2^{***} = 0,355165029 - 0,000038609 = 0,355126420$ s ja paikannin olisi laskenut koordinaateiksi liitteen 5 esimerkin L.5.6 tapaan $x = 2018350,912$ m, $y = 975382,254$ m, $z = 5947854,513$ m, joista saatavat maantieteelliset koordinaatit ovat

$$\begin{cases} \varphi^{***} = 69,4759^\circ \\ \lambda^{***} = 25,7925^\circ \\ H^{***} = -3162 \text{ m} \end{cases}$$

siis oikeasta paikasta 9327 m suuntaan 306° ja 3162 m Maan sisässä.

Mutta mielenkiintoista on se, että jos kaikki satelliitit olisivat tehneet tämän tai jonkin muun, mutta kaikki kuitenkin yhtä suuren virheen k , olisi paikannin laskenut sijaintinsa aivan oikein, sillä jos x , y , z ja t ovat yhtälöryhmän (4.2.1) ratkaisu, ovat x , y , z ja $t + k$ yhtälöryhmän

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t_1 + k - t)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t_2 + k - t)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t_3 + k - t)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t_4 + k - t)^2 \end{cases}$$

ratkaisu. Paikantimen koordinaateiksi tulevat siis täsmälleen samat kuin oikeillakin arvoilla ja satelliittien kellojen virhe sulautuu paikantimen kellon virheeseen.

Kaikkien GPS-satelliittien kellojen pitää käydä samaa aikaa ja siis aina, kun uusi satelliitti laukaitaan radalleen, sen kello on asetettava käymään tai ainakin näyttämään samaa aikaa jo radoillaan olevien satelliittien kanssa.

On hyvä tietää, että paikannukseen liittyy myös muita teoreettisesti vaikeasti hallittavissa olevia ja hallitsemattomia virheitä, jotka johtuvat mm. ilmakehän tapahtuvista sähkömagneettisista ilmiöistä. Nämä häiriöt syntyvät Auringon hiukkassäteilyn vaihteluista ja vääristävät signaalien kulkureittejä. Yksi virhelähde on signaalien heijastumiset Maan pinnalla olevista kohteista jne. Näin ollen satelliittien sijaintia ja kelloja on joka tapauksessa kaiken aikaa säädettävä Maan pinnalla olevalla kontrollijärjestelmällä.

Toisaalta tarkkuutta yleensä lisää se, että paikantimella on yhteys useampaan kuin neljään satelliittiin.

4.3 Massan ja energian välinen yhteys

4.3.1 Alkeishiukkaset

Aine koostuu alkeishiukkasista, joilla ei ole rakennetta, mikä tarkoittaa, että niitä ei voida jakaa pienempiin osiin. Materia-alkeishiukkasia on kaksi kuuden hiukkasen ryhmää: leptonit ja kvarkit.

Leptonit ovat elektroni (e), myoni (μ), tau (τ), elektronin neutriino (ν_e), myonin neutriino (ν_μ) ja taun neutriino (ν_τ). Leptoneille on ominaista, että ne esiintyvät aina yksin. Elektronin neutriinoa kutsutaan usein lyhyemmin neutriinoksi ja merkitäänkin (ν).

Toinen ryhmä materia-alkeishiukkasia on kvarkit: ylös (u), alas (d), lumo (c), outo (s), huippu (t) ja pohja (b). Toisin kuin leptonit, kvarkit esiintyvät yksin vain erittäin poikkeuksellisissa tilanteissa ja silloinkin erittäin lyhyen ajan, esimerkiksi silloin, kun niistä koostuvia hiukkasia on saatu hajotetuksi törmäyttämällä niitä toisiinsa valtavilla nopeuksilla hiukkaskiihdyttimessä.

Jokaisella materia-alkeishiukkasella on vastaava antimateria-alkeishiukkanen. Elektronin antishiukasta, antielektronia, kutsutaan myös positroniksi. Sen ominaisuudet ovat muutoin samat kuin elektronin, mutta sen sähkövaraus on positiivinen, kun elektronin varaus on yhtä suuri, mutta negatiivinen. Kun edellä luetellut hiukkaset ovat aineen perusosasia, ovat antishiukkaset antimaterian perusosasia. Antishiukkasia merkitään samoilla symboleilla kuin vastaavia hiukkasia asettamalla viiva symbolin päälle, siis esimerkiksi positronia merkitään $\bar{e}$. Positronille tosin käytetään myös merkintää e^+ (ja elektronille vastaavasti merkintää e^-).

Materia- ja antimateriahiukkasten lisäksi ovat mittabosonit, joita ovat luonnon neljän perusvoiman välittäjähiukkaset: sähkömagneettisen vuorovaikutusvoiman välittäjähiukkanen fotonit (γ), vahvan vuorovaikutusvoiman välittäjähiukkanen gluoni (g), heikon vuorovaikutusvoiman välittäjähiukkaset W^+ -bosoni (W^+), W^- -bosoni (W^-) ja Z^0 -bosoni (Z^0) sekä massojen välisen vetovoiman eli gravitaation välittäjähiukkanen gravitoni, jota ei ole kuitenkaan pystytty tähän mennessä havaitsemaan. Alkeisbosoneihin kuuluu vielä Higgsin bosoni (H^0). Mittabosoneita ja Higgsin bosonia ei tässä yhteydessä kuitenkaan tarkastella.

Edellä kohdassa 4.1 oli esillä, että myoni hajoaa heikon vuorovaikutusvoiman vaikutuksesta elektroniksi, myonin neutriinoksi ja elektronin antineutriinoksi:

$$\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

Itse asiassa termi ”hajoaa” on arveluttava, koska se voi johtaa ajatteluun, että myoni koostuu näistä hajoamistuloksistaan, kun kuitenkin myoni on alkeishiukkanen eikä se koostu muista hiukkasista. Tätä korostaa sekin, että myoni voi hajota myös niin, että näiden lisäksi syntyy muita hiukkasia, esimerkiksi

$$\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e + \bar{e}$$

Kvarkkien yhdistelmiä ovat baryonit ja mesonit. Baryonit koostuvat kolmesta kvarkista ja niitä ovat mm. protoni (p), joka koostuu kahdesta ylös- ja yhdestä alas-kvarkista (uud) ja neutroni, joka koostuu yhdestä ylös- ja kahdesta alas-kvarkista (udd). Vastaavasti antiprotoni koostuu kahdesta antiylös- ja yhdestä antialaskvarkista ($\bar{u}\bar{u}\bar{d}$) ja antineutroni koostuu yhdestä antiylös- ja kahdesta anti-alas-kvarkista ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$). Mesonit puolestaan koostuvat kvarkista ja antikvarkista, tai oikeammin ne hajoavat kvarkiksi ja antikvarkiksi.

4.3.2 Protoni, neutroni ja atomi

Unohdetaan hetkeksi muut hiukkaset ja keskitytään elektroniin, ylös-kvarkkiin, alas-kvarkkiin, protoniin ja neutroniin, koska kaikki tavallinen suoraan aistein havaittava aine koostuu niistä. Aineessa elektronit, protonit ja neutronit ovat järjestyneet atomeiksi siten, että atomin ydin koostuu protoneista ja neutroneista ja ytimen ympärillä on liikkuvien elektronien muodostama elektroniverho.

Elektroniverhon rakennetta ei tässä yhteydessä käsitellä sen enempää kuin, että atomia voi havainnollistaa Auringolla (ydin) ja planeetoilla (elektronit). Näillä on kuitenkin se oleellinen ero, että planeetta voi kiertää Aurinkoa millä tahansa ellipsiradalla, jonka toisessa polttopisteessä Aurinko on, kunhan vain planeetan nopeus (ja siis energia) on joka hetki tälle radalle sopiva. Ydintä kiertävän elektronin energia ei sitä vastoin voi olla mikä tahansa, vaan mahdolliset energiatilat voidaan järjestää suuruusjärjestykseen E_0, E_1, E_2 jne. Elektronin energiatila voi kyllä muuttua yhdestä energiatilasta E_m toiseen E_n , mutta sen energia ei voi koskaan olla kahden peräkkäisen energiatilan E_n :n ja E_{n+1} :n välissä.

Elektronin, ylös-kvarkin, alas-kvarkin, protonin ja neutronin tärkeimmät ominaisuudet ovat taulukossa 8:

Taulukko 8: Elektronin, u- ja d-kvarkin, protonin ja neutronin ominaisuudet.

	Sähkövaraus (e)	Massa (u)	Massa (MeV/c ²)
Elektroni	-1	0,000548579909070	0,5109989461
Ylös-kvarkki	+2/3	0,00247	2,3
Alas-kvarkki	-1/3	0,00515	4,8
Protoni	+1	1,007276466879	938,2720813
Neutroni	0	1,00866491588	939,5654133

Tässä taulukossa on sähkövarauksen yksikkönä e eli alkeisvaraus $1,6021766208 \cdot 10^{-19}$ C (coulombia eli ampeerisekuntia, As), joka on elektronin varauksen suuruus. Massan yksikkönä taulukossa 8 on sekä atomimassayksikkö $u = 1,660539040 \cdot 10^{-27}$ kg että MeV/c^2 . Edellinen on hyvä siksi, että useissa mielenkiintoisissa esimerkeissä massojen lukuarvot ovat sitä käyttäen lähellä kokonaislukuja ja siksi varsinkin massojen keskinäiset suhteet on helppo nähdä. Jälkimmäinen taas tulee energian yksiköstä elektronivoltti, eV, sillä sähköopin ja mekaniikan perusteiden mukaan on

$$1 \text{ CV} = 1 \text{ AsV} = 1 \text{ VAs} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ J}$$

ja näin ollen $1 \text{ eV} = 1,6021766208 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ja

$$1 \text{ J} = \frac{1}{1,6021766208 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}$$

Kaavan (3.4.7) mukaan atomimassayksikön suuruisen massan m lepoenergia on tällöin

$$\begin{aligned} E &= mc^2 = 1 \text{ u} \cdot c^2 = 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2999792458^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ &= 1,660539040 \cdot 10^{-27} \cdot 2999792458^2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \\ &= 1,660539040 \cdot 10^{-27} \cdot 2999792458^2 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\approx 1,492418062 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$= \frac{1,492418062 \cdot 10^{-10}}{1,6021766208 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$\approx 931494095 \text{ eV}$$

$$= 931,494095 \text{ MeV}$$

Siis

(4.3.1) 1 u: n suuruisen massan lepoenergia = 1,492418062 · 10⁻¹⁰ J = 931,494095 MeV

Tämän tiedon käyttö yksinkertaistaa ja selkeyttää jatkossa suoritettavia laskutoimituksia, joissa massat on annettu atomimassayksikköinä, mutta vastaus annetaan hiukkasfysiikan yleisen käytännön mukaisesti yksikköä MeV käyttäen. Kaavasta (4.3.1) nähdään, että 1 u = 931,494095 MeV/c².

On selvää, että protonin varaus on +1 e, koska protoni koostuu kahdesta ylös-kvarkista ja yhdestä alas-kvarkista, jolloin sen varaus taulukon 8 mukaan on 2 · (+2/3) + (−1/3) = +1 e. Vastaavasti neutronin varaus on (nimen mukaisesti) +2/3 + 2 · (−1/3) = 0 e.

Sitä vastoin hyvin kummallista on, että taulukon 8 mukaan kahden ylös-kvarkin ja yhden alas-kvarkin massa on yhteensä vain 2 · 0,00247 u + 0,00515 u = 0,01009 u, mutta protonin massa sitä vastoin n. 1,00728 u, siis lähes 100-kertainen. Samoin yhden ylös-kvarkin ja kahden alas-kvarkin massa on vain 0,00247 u + 2 · 0,00515 u = 0,01277 u ja silti neutronin massa on n. 1,00866 u.

Mutta on toinenkin ongelma: miten kaksi positiivisesti varautunutta ylös-kvarkkia voi olla toistensa lähellä protonissa? Selitykseksi ei kelpaa niiden massojen välinen vetovoima eli gravitaatio, sillä jos niiden etäisyys on r , vallitsee niiden välillä Coulombin lain mukaan sähköinen poistovoima

$$F_e = k_e \frac{q_u q_u}{r^2} = 10^{-7} c^2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 1,6021766208 \cdot 10^{-19}\right)^2}{r^2} \approx \frac{1,02537 \cdot 10^{-28}}{r^2} \text{ N}$$

mikä massojen väliseen Newtonin yleisen vetovoimalain mukaiseen vetovoimaan

$$F_g = G \frac{m_2 m_3}{r^2} = 6,67408 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(0,00247 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27})^2}{r^2} \approx \frac{1,12275 \cdot 10^{-69}}{r^2} \text{ N}$$

verrattuna on

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1,02537 \cdot 10^{-28}}{1,12275 \cdot 10^{-69}} \approx 9,1 \cdot 10^{40}\text{-kertainen}$$

Selitys sille, että kvarkit voivat olla toistensa lähellä, on kvarkkien välillä vaikuttava vahva vuorovaikutusvoima, joka on suurimmillaan kvarkkien välimatkan ollessa n. 1 fm (= 10⁻¹⁵ m) eli 60 % protonin läpimitasta, joka on n. 1,7 fm. Tällöin vahva vuorovaikutusvoima on n. 100-kertainen sähköiseen poistovoimaan verrattuna. Vahva vuorovaikutusvoima on sikäli erikoinen, että se muuttuu poistovoimaksi alle 0,7 fm:n etäisyyksillä ja merkityksettömän pieneksi yli 2,5 fm:n etäisyyksillä.

Samalla saadaan selitys protonin ja neutronin kummallisen suurille massoille niiden muodostavien kvarkkien massoihin verrattuna. Kun massojen sijaan puhutaan energioista, asia yksinkertaistuu oleellisesti. Tilanne on kuvattu kohdassa 3.6. Nyt palloina ovat kvarkit ja kierrejousina niiden väliset vahvat vuorovaikutusvoimat sekä kvarkkien väliset sähköiset vetovoimat sähköisesti erimerkkisten kvarkkien ja poistovoimat samanmerkkisten kvarkkien välillä. Kvarkkien liike- ja potentiaalienergiat vaihtelevat kaiken aikaa, mutta kaikkien niiden summa pysyy vakiona.

Protonin kvarkkien massat ovat yhteensä edellä laskettu $m_k = 0,01009$ u, joten niiden lepoenergiat ovat kaavan (3.4.7) mukaan yhteensä

$$E_k = 0,01009 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} c^2 \approx 1,506 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Protonin lepoenergia puolestaan on

$$E_p = 1,007276466879 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} c^2 \approx 1,50328 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Näiden erotus

$$E = E_p - E_k = 1,50328 \cdot 10^{-10} \text{ J} - 1,506 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 1,48822 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

on protonin muodostavien kvarkkien liike- ja potentiaalienergiat yhteensä.

Käsityksen kvarkkien liikkumisesta saa, jos kuvittelee tilanteen, jossa protonin jokaisen kvarkin potentiaalienergia sattuu olemaan yhtä aikaa 0. Silloin edellä mainittu energia E olisi kokonaan niiden liike-energiaa. Jos vielä kaikilla olisi yhtä suuri nopeus u , toteuttaisi u kaavan (3.4.6) mukaan yhtälön

$$\frac{m_k c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_k c^2 = E$$

$$\frac{m_k c^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} = E + m_k c^2$$

$$\frac{m_k^2 c^6}{c^2 - u^2} = (E + m_k c^2)^2$$

$$c^2 - u^2 = \frac{m_k^2 c^6}{(E + m_k c^2)^2}$$

$$u^2 = c^2 - \frac{m_k^2 c^6}{(E + m_k c^2)^2}$$

$$u = c \sqrt{1 - \frac{m_k^2 c^4}{(E + m_k c^2)^2}}$$

$$u \approx 0,9999498c$$

Kaavan (2.1.2) mukaan tällä nopeudella liikkuvassa järjestelmässä Suomi on 24.9.2017 ollut itseenäinen

$$t_T = t_S \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 36452 \cdot \sqrt{1 - \frac{0,9999498^2 c^2}{c^2}} = 365,24 \text{ d} = 1 \text{ vuoden}$$

Neutronin kvarkkien nopeudeksi saadaan vastaavasti $0,9999199c$.

Vilkkaalla mielikuvituksella tästä voisi jatkaa päättelyä niin, että kvarkeilla ja leptoneillakin on rakenne ja ne koostuvat hiukkasista, joiden massat ovat erittäin pieniä ja liike- ja potentiaalienergiat kvarkkien/leptonien sisällä lepoenergioihin verrattuina suuria ja edelleen, että näillä hiukkasilla on rakenne jne. loppumattomiin, jolloin massa ikään kuin saadaan kokonaan hävitetyksi. Voi kuitenkin olla, että jo kvarkkien rakenteen selvittäminen vaatii hiukkaskiihdyttymiltä niin suuria energioita, että edes kvarkkien rakennetta – siis jos sellainen on – ei pystytä koskaan selvittämään.

4.3.3 Alkuaineet ja isotoopit

Kuten sanottu, kaikki suoraan aistein havaittavat aineet koostuvat atomeista. Atomin ytimessä olevien protonien lukumäärä, ns. järjestysluku, määrää sen, minkä alkuaineen atomista on kyse niin, että jos protoneja on 1, on kyseessä vety (kemiallinen merkki H), jos 2, helium (He), jos 3, litium (Li), jos 4, beryllium (Be), jos 5, boori (B), jos 6, hiili (C), jos 7, typpi (N), jos 8, happi (O), jos 26, rauta (Fe), jos 79, kulta (Au), jos 92, uraani (U) jne.

Ytimessä olevien neutronien lukumäärä ratkaisee, mistä kyseisen alkuaineen isotoopista on kyse. Jos vetyatomin ytimessä on vain protoni, on kyseessä ns. tavallinen vety, jolle käytetään merkintää ^1_1H , missä alempi 1 ilmoittaa protonien lukumäärän ja ylempi 1 protonien ja neutronien lukumäärin summan eli ns. massaluvun. Jos vety-ytimessä on protonin lisäksi yksi neutroni, on kyseessä isotooppi ^2_1H , nimeltään deuterium. Jos protonin lisäksi neutroneja on kaksi, on kyseessä isotooppi ^3_1H , tritium. Jos ytimessä on kaksi protonia ja yksi neutroni, on kyseessä heliumin isotooppi ^3_2He , jos kaksi protonia ja kaksi neutronia, heliumin isotooppi ^4_2He , jos 26 protonia ja 30 neutronia, raudan isotooppi $^{56}_{26}\text{Fe}$ ja jos 92 protonia ja 143 neutronia, uraanin isotooppi $^{235}_{92}\text{U}$. Asia yhteydestä riippuen esimerkiksi $^{235}_{92}\text{U}$ voi tarkoittaa yksittäistä $^{235}_{92}\text{U}$ -atomia, sen ydintä tai isotooppia yleensä.

On hyvä tietää, että atomimassayksikkö u on hiilen isotoopin $^{12}_6\text{C}$ atomin massan kahdestoista osa.

Saman alkuaineen eri isotoopit eivät yleensä poikkea kemiallisilta ominaisuuksiltaan, mutta fysi-kaalisilta ominaisuuksiltaan kylläkin. Eräissä tapauksissa jopa hyvinkin paljon, kuten kohdassa 4.3.5 huomataan.

Koska elektronilla ja protonilla on yhtä suuret, mutta erimerkkiset varaukset, on atomi (riittävän kaukaa tarkasteltuna) sähköisesti neutraali, jos elektroniverhossa on elektroneja yhtä monta kuin ytimessä on protoneja. Muussa tapauksessa atomi on sähköisesti varautunut eli ioni, positiivisesti varautunut, jos protoneja on enemmän ja negatiivisesti varautunut, jos elektroneja on enemmän. Ionia merkitään kirjoittamalla alkuaineen kemiallisen merkin oikeaksi yläindeksiksi varauksen suuruus. Esimerkiksi merkintä $^{37}_{17}\text{Cl}^-$ tarkoittaa kloori-atomia, jonka ytimessä on 17 protonia ja 20 neutronia ja elektroniverhossa 18 elektronia ja vastaavasti $^{25}_{12}\text{Mg}^{2+}$ tarkoittaa magnesium-atomia, jonka ytimessä on 12 protonia ja 13 neutronia ja elektroniverhossa 10 elektronia.

Alkuaineita tammikuussa 2016 oli 118 kappaletta ja niillä yhteensä yli 3300 isotooppia, joista luonnossa esiintyviä 339 ja loput keinotekoisesti aikaan saatuja. Kaikkia isotooppeja, joiden järjestysluku on alle 95, tavataan luonnossa.

Vastaavasti kuten positiivisesti varautunut protoni ja sitä kiertävä negatiivisesti varautunut elektroni muodostavat vetyatomin, muodostavat negatiivisesti varautunut antiprotoni ja sitä kiertävä positiivisesti varautunut positroni antivedyn atomin ${}^1_1\bar{\text{H}}$. Joulukuussa 2016 ilmoitettiin, että CERN:issä oli pystytty mittaamaan antivedyn ominaisuuksia ja valmistamaan kaikkiaan 14 antive-tyatomia.

Atomiytimen rakennetta tarkasteltaessa herää vastaava kysymys kuin protonin rakennetta tarkas-teltaessa: miten positiivisesti varautuneet protonit voivat olla toistensa lähellä ytimessä. Selitys on tässäkin vahva vuorovaikutusvoima. Vaikka se vaikuttaakin vain kvarkkien välillä, ei se edellytä, että kvarkit olisivat samassa protonissa, vaan vaikutus ulottuu, jos vain etäisyys on riittävän pieni, yhden protonin kvarkista naapuriprotonin kvarkkiin. Jos tämän lisäksi neutroneja on omine kvark-keineen sopivasti lähellä, ydin pysyy koossa.

4.3.4 Sidosennergia

Jokaisen atomin massa on pienempi kuin sen ytimen massan ja elektronien massojen summa. Tämä näkyy jo yksinkertaisimmalla neutraalilla atomilla eli ${}^1_1\text{H}$ -atomilla. Sen massa on 1,00782503223 u, mutta kun lasketaan yhteen sen ytimen eli yhden protonin massa 1,007276466879 u ja sen elek-troniverhon eli yhden elektronin massa 0,000548579909070 u saadaan n. 1,007825046788 u. Vä-hentämällä tästä ${}^1_1\text{H}$ -atomin massa saadaan $1,456 \cdot 10^{-8}$ u, joka on energiana kaavan (4.3.1) mu-kaan

$$E = 1,456 \cdot 10^{-8} \cdot 931,494095 \text{ MeV} = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ MeV} \approx 13,6 \text{ eV}$$

Tämän verran protonin ja elektronin lepoenergiaa muuttuu vetyatomin sidosennergiaksi. Tämä si-dosennergia pitää neutraalin ${}^1_1\text{H}$ -atomin koossa ja se on elektronin potentiaalienergia ytimen synnyt-tämässä sähköisessä vetovoimakentässä. Se on myös se energia, joka tarvitaan siirtämään elektroni kokonaan pois tästä atomista äärettömän kauas eli ${}^1_1\text{H}$ -atomin ionisoitumisenergia. Tässä on oletet-tu, että elektroni on kaikkein alhaisimmalla mahdollisella energiatasolla. Muilla mahdollisilla ener-giatasoilla atomin massa on suurempi ja ionisoitumisenergia vastaavasti pienempi.

Vastaavasti kuten atomin massa on pienempi kuin sen ytimen massan ja elektronien massojen summa, on myös atomiytimen massa pienempi kuin siinä olevien protonien ja neutronien massojen summa. Esimerkiksi ${}^2_1\text{H}$ -ytimen massa on 2,013553212745 u, mutta yhden protonin ja yhden neut-ronin massojen summa on $1,007276466879 \text{ u} + 1,00866491588 \text{ u} = 2,015941382759 \text{ u}$. Näiden erotus 0,002388170014 u on kaavan (4.3.1) mukaan

$$E = 0,002388170014 \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 2220000 \text{ eV} = 2,22 \text{ MeV}$$

Ytimen sidosennergia on siis yli 160000 kertaa elektronin sidosennergia, joten ainakin vertailuja varten riittävän suurella tarkkuudella ytimen sidosennergia voidaan laskea käyttäen massoina ato-mien massoja, vaikka pitäisi käyttää ytimien massoja.

Jos ytimen massa on m ja siinä on p kappaletta protoneja, (massa m_p) ja n kappaletta neutroneja (massa m_n), on siis aina

$$m < pm_p + nm_n$$

Mielenkiintoinen tässä yhteydessä on suhde

$$q = \frac{pm_p + nm_n - m}{pm_p + nm_n} = 1 - \frac{m}{pm_p + nm_n}$$

joka muilla kuin ${}^1_1\text{H}$:n ytimellä (jolla se on 0) kertoo, kuinka suuri osa protonien ja neutronien lepo-energiasta on muuttunut ytimen sidosenergiaksi. Sitä käyttäen voidaan siis vertailla myös erikoisten ytimien kesken, kuinka vahvasti protonit ja neutronit ovat sitoutuneet ytimeen. Tämä suhde on ${}^2_1\text{H}$:lla

$$q = 1 - \frac{m}{1 \cdot m_p + 1 \cdot m_n} = 1 - \frac{2,013553212745}{1 \cdot 1,007276466879 + 1 \cdot 1,00866491588} \approx 0,001185$$

Seuraavaan taulukkoon 9 on laskettu muutamia tämän suhteen arvoja.

Taulukko 9: Sidosenergiasuhteita.

ydin	q	ydin	q	ydin	q	ydin	q
${}^2_1\text{H}$	0,001185	${}^6_3\text{Li}$	0,005678	${}^{59}_{27}\text{Co}$	0,009336	${}^{65}_{29}\text{Cu}$	0,009324
${}^3_1\text{H}$	0,003011	${}^{16}_8\text{O}$	0,008493	${}^{60}_{28}\text{Ni}$	0,009349	${}^{208}_{82}\text{Pb}$	0,008376
${}^3_2\text{He}$	0,002741	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	0,009359	${}^{62}_{28}\text{Ni}$	0,009364	${}^{232}_{90}\text{Th}$	0,008107
${}^4_2\text{He}$	0,007534	${}^{58}_{26}\text{Fe}$	0,009361	${}^{64}_{28}\text{Ni}$	0,009345	${}^{238}_{92}\text{U}$	0,008060

Toisen sarakkeen arvot on laskettu ytimien massoista ja muut koko atomien massoista, siis elektronit mukaan lukien, esimerkiksi ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ -atomille

$$q = 1 - \frac{61,9283451}{28m_p + 34m_n + 28m_e} \approx 0,009364$$

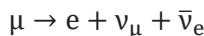
Se, mihin taulukko 9 vihjaa, pitää paikkansa myös todellisuudessa: suhdeluvun trendi on ytimen kasvaessa aluksi kasvava, mutta muuttuu nikkelin isotoopin ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ kohdalla pienentyväksi.

4.3.5 Radioaktiivisuus

Osa hiukkasista ja atomiytimistä on pysyviä (esimerkiksi protoni ja ${}^{12}_6\text{C}$) ja osa hajoaa itsekseen (esimerkiksi myoni ja ${}^{14}_6\text{C}$). Itsestään hajoavia hiukkasia ja atomiytimiä kutsutaan radioaktiivisiksi. Kaikkiaan yli 3300 isotoopista pysyviä on vain 254. Kahta poikkeusta (teknetium ja prometium) lukuun ottamatta jokaisella alkuaineella, jonka järjestysluku on pienempi kuin 83, on ainakin yksi pysyvä isotooppi. Eniten pysyviä isotooppeja on tinalla, 10 kpl. Pysyvistä isotoopeista suurin massaluku on lyijyn isotoopilla ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

On vain kaksi pysyvää isotooppia, joissa protonien lukumäärä on suurempi kuin neutronien lukumäärä (${}^1_1\text{H}$ ja ${}^3_2\text{He}$) ja 13 pysyvää isotooppia, joissa protonien ja neutronien lukumäärät ovat yhtä suuret (${}^2_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, ${}^{24}_{12}\text{Mg}$, ${}^{28}_{14}\text{Si}$, ${}^{32}_{16}\text{S}$, ${}^{36}_{18}\text{Ar}$ ja ${}^{40}_{20}\text{Ca}$). Kaikilla muilla neutroneja on enemmän kuin protoneja. Massalukuja 5 ja 8 lukuun ottamatta jokaiselle massaluvulle, joka on pienempi kuin 209, on olemassa pysyvä isotooppi.

Esimerkkinä radioaktiivisesta hiukkasesta voidaan mainita myoni, jota käsiteltiin jo kohdissa 4.1 ja 4.3.1, joissa todettiin, että myoni hajoaa elektroniksi, myonin neutriinoksi ja elektronin antineutriinoksi



Yksittäisestä radioaktiivisesta hiukkasesta tai atomiytimeistä ei voida sanoa, milloin se hajoaa. Kuitenkin, jos tutkitaan näytettä, jossa samoja hiukkasia/ytimiä on riittävän paljon, todetaan, että näytteen hajoamisvauhti on suoraan verrannollinen hiukkasten/ytimien määrään. Tämän tiedon pohjalta voidaan laskea todennäköisyys sille, että yksittäinen hiukkanen/ydin on vielä annetun ajan t kuluttua hajoamatta. Hieman erikoista tällöin on, että tämä todennäköisyys on sama riippumatta siitä, kuinka kauan hiukkanen/ydin on ollut olemassa. Hajoamisvauhti eli aktiivisuus ilmoitetaan yksikkönä hajoamisia per sekunti eli becquerel, Bq. Toinen paljon käytetty ja myös konkreettisempi käsite on puoliintumisaika $t_{1/2}$, joka tarkoittaa sitä aikaa, jonka kuluessa puolet näytteestä on hajoanut. Esimerkiksi myonin puoliintumisaika on, kuten kohdassa 4.1 kerrottiin, $1,5228313 \cdot 10^{-6}$ sekuntia.

Atomiytimien puoliintumisaika ei riipu siitä, mistä ytimet ovat peräisin tai milloin ne ovat syntyneet. Ulkoiset olosuhteet, kuten lämpötila, paine, sähkö-, magneetti- tai painovoimakenttä, kemiallinen tila (onko näyte kokonaan samaa isotooppia, samaa alkuainetta, samaa kemiallista yhdistettä vai useamman tällaisen seosta) jne. eivät vaikuta puoliintumisaikaan. Kuitenkin elektroniverhon rakenteen muutokset joissakin harvoissa tapauksissa saattavat muuttaa hieman (alle prosentin verran) puoliintumisaikaa. On kuitenkin pari mielenkiintoista poikkeusta: dysprosiumin isotooppi $^{163}_{66}\text{Dy}$, jonka neutraali atomi on pysyvä, mutta pelkkä ydin eli ioni $^{163}_{66}\text{Dy}^{66+}$ on radioaktiivinen puoliintumisaikalla 47 vuorokautta ja reniumin isotooppi $^{187}_{75}\text{Re}$, jonka neutraalin atomin puoliintumisaika on 41,6 miljardia vuotta, mutta pelkän ytimen $^{187}_{75}\text{Re}^{75+}$ vain 33 vuotta.

Yksittäisen hiukkasen puoliintumisaika voi vaihdella erittäin paljon sen ympäristön mukaan, kuten kohdassa 4.3.7 tarkemmin käy ilmi.

Isotoopista toiseen puoliintumisaika vaihtelee suuresti. Lyhyin tunnettu on vedyn isotoopilla ^3_1H , jolla se on $2,3 \cdot 10^{-23}$ s, mutta se on hyvin lyhyt, $7,6 \cdot 10^{-22}$ sekuntia, myös kohdassa 4.3.11 esille tulevalla heliumin isotoopilla ^5_2He . Pisin havaittu puoliintumisaika on $2,2 \cdot 10^{24}$ vuotta telluurin isotoopilla $^{128}_{52}\text{Te}$.

Itse asiassa isotoopin julistaminen pysyväksi on ongelmallista. Voihan olla, että isotoopin ytimen ei ole todettu milloinkaan hajoaneen, mutta tämä johtuu vain siitä, että sen puoliintumisaika on hajoamisen toteamiseksi liian pitkä. Teoreettisesti pysyviä isotooppeja on vain 90 ja näistä suurin ydin on zirkoniumin isotoopilla $^{92}_{40}\text{Zr}$. Edellä mainituista 254 pysyvästä isotoopista loput 164 ovat teoreettisesti radioaktiivisia, mutta niiden hajoamista ei ole ainakaan vielä havaittu. Tästä on esimerkiksi volframin isotoopit $^{182}_{74}\text{W}$, $^{183}_{74}\text{W}$, $^{184}_{74}\text{W}$ ja $^{186}_{74}\text{W}$, joiden hajoamista ei ole havaittu, mutta joiden pitäisi teoreettisesti olla radioaktiivisia. Se tiedetään, että jos ne ovat radioaktiivisia, niiden jokaisen puoliintumisaika on yli $4,1 \cdot 10^{21}$ vuotta.

Mielenkiintoinen tapaus on tantaalin isotooppi $^{180}_{73}\text{Ta}$. Samalla tavalla kuin elektroniverhon elektroni ja sitä kautta koko elektroniverho voi olla energialtaan perustilassa tai viritettynä johonkin korkeampaan energiatilaan, voi myös atomiydin olla eri energiatiloissa. Yleensä pysyvä isotooppi on pysyvä nimenomaan perustilassaan; muutoin se purkaa viritystilansa lähettämällä γ -kvantin, vastaavasti kuten elektroni purkaa viritystilansa lähettämällä kvantin, joka useissa tapauksissa on nä-

kyvää valoa. Mutta $^{180}_{73}\text{Ta}$ onkin pysyvä yhdessä viritystiloistaan. Perustilassa se hajoaa ja sen puoliintumisaika on 8,152 h.

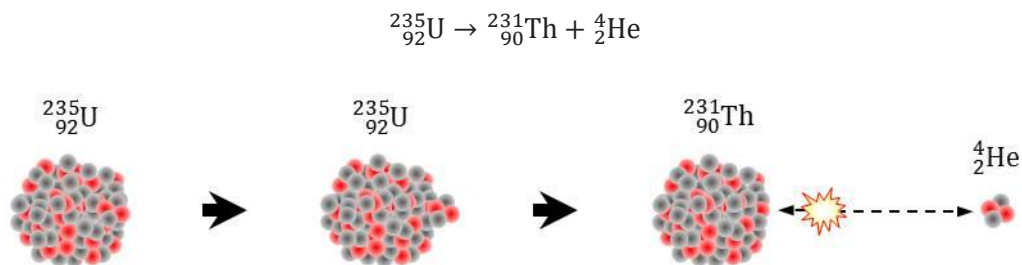
Hyvä esimerkki pysyvyyden toteamisen vaikeudesta on myös protoni yksittäisenä hiukkasena. Siitä tiedetään vain, että jos se hajoaa, sen puoliintumisaika on yli 10^{30} vuotta.

Luonnossa esiintyvistä 85 radioaktiivisesta isotoopista 27:n puoliintumisaika on suurempi kuin maailmankaikkeuden ikä $13,799 \pm 0,021$ miljardia vuotta. Näiden joukossa on aikaisemmin mainittu $^{128}_{52}\text{Te}$ ja maankuoren yleisin radioaktiivinen isotooppi, toriumin isotooppi $^{232}_{90}\text{Th}$, jonka puoliintumisaika on 14,05 miljardia vuotta.

4.3.6 α -aktiivisuus

Protonit ja neutronit ovat atomiytimessä jatkuvassa liikkeessä. Jos sivuutetaan tarkemmat yksityiskohdat, voidaan sanoa, että joissakin tapauksissa voi käydä niin, että protonin etäisyys muihin protoneihin kasvaa niin suureksi, että sähköinen poistovoima voittaa vahvan vuorovaikutusvoiman ja protoni irtaantuu ytimestä. Yleensä irtaantumassa oleva protoni vetää tällöin, kvarkkien välisen vahvan vuorovaikutusvoiman ansiosta, mukaansa toisen protonin ja kaksi neutronia. Ytimestä poistuukin siis ^4_2He -ydin, jota radioaktiivisuuden yhteydessä kutsutaan α -hiukkaseksi ja tätä tapaa hajota α -aktiivisuudeksi. Se, miksi muodostuu juuri α -hiukkanen selittyy sen kokoon nähden hyvin suurella sidosenergialla, kuten kohdan 4.3.4 taulukosta 9 käy ilmi.

Esimerkki α -aktiivisuudesta on uraanin isotooppi $^{235}_{92}\text{U}$. Kun sen ytimestä lähtee ^4_2He -ydin eli kaksi protonia ja kaksi neutronia, jää jäljelle ydin, jossa on 90 protonia ja 141 neutronia, joka on toriumin isotoopin $^{231}_{90}\text{Th}$ -ydin. Reaktio on siis (kuva 17)



Kuva 17: $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimen radioaktiivinen hajoaminen

Katsotaan nyt, mitä tämä merkitsee massoille. Taulukoista löytyvät vain neutraalien atomien massat, mutta tämä reaktio tapahtuu ytimillä ja siksi pitäisi käyttää ytimien massoja. Ongelma tulee siitä, että ytimen massaa ei saada vähentämällä atomin massasta elektronien massat, sillä osa elektronien lepoenergiasta on atomissa muuttunut niiden liike- ja potentiaalienergioiksi. Ero on kuitenkin niin pieni, että se ei näy lopputuloksessa, jos se annetaan esimerkiksi kolmen numeron tarkkuudella. Käytetään siis neutraaleja atomeja, mutta varmistetaan ensin, että reaktioyhtälön vasemman puolen 92 elektronia riittävät tekemään oikealle puolelle täsmälleen neutraalit atomit, 90 elektronia ja 2 elektronia.

$$235,0439299 \text{ u} \rightarrow 231,0363043 \text{ u} + 4,00260325415 \text{ u}$$

$$235,0439299 \text{ u} \rightarrow 235,0389076 \text{ u}$$

Massaa muuttuu siis energiaksi

$$m = 235,0439299 \text{ u} - 235,038907554 \text{ u} = 0,0050223 \text{ u}$$

mikä kaavan (4.3.1) mukaan on energiana

$$Q = 0,0050223 \cdot 1,492418062 \cdot 10^{-10} \text{ J} \approx 7,495439659 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

tai jos niin halutaan

$$Q = 0,0050223 \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 4,68 \text{ MeV}$$

Tai oikeammin massaa ei muutu energiaksi, vaan – kuten kohdassa 3.6 esitettiin – $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimen lepoenergiaa muuttuu $^{231}_{90}\text{Th}$ -ytimen ja ^4_2He -ytimen liike-energiaksi.

Ennen hajoamista ytimen $^{235}_{92}\text{U}$ järjestelmässä $^{235}_{92}\text{U}$:n nopeus $u = 0$, liikemäärä $p_0 = 0$ ja kokonaisenergia kaavan (3.4.5) mukaan

$$T_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{235,0439299 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} c^2}{\sqrt{1 - \frac{0^2}{c^2}}} \approx 3,50783806 \text{ J}$$

Liikemäärän ja kokonaisenergian säilymisen perusteella voidaan kohdan 3.5.7 esimerkissä 19 kerrotulla tavalla laskea, että ^4_2He -ydin saa nopeuden n. $0,0496c \approx 14900 \text{ km/s}$ johonkin suuntaan ja $^{231}_{90}\text{Th}$ -ydin nopeuden n. $0,00086c \approx 258 \text{ km/s}$ vastakkaiseen suuntaan.

Energiaksi muuttuneen massan suhde alkuperäiseen $^{235}_{92}\text{U}$:n massa on

$$q = \frac{235,0439299 \text{ u} - 235,0389076 \text{ u}}{235,0439299 \text{ u}} \approx 2,1367690 \cdot 10^{-5}$$

Tämä tarkoittaa, että jos yksi kilogramma isotooppia $^{235}_{92}\text{U}$ muuttuu näin $^{231}_{90}\text{Th}$:ksi ja ^4_2He :ksi, massaa muuttuu energiaksi $2,1367690 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$, joka kaavan (3.4.7) mukaan on

$$E = qc^2 = 2,1367690 \cdot 10^{-5} \cdot c^2 \text{ J} = \frac{2,1367690 \cdot 10^{-5} \cdot c^2}{10^6 \cdot 60 \cdot 60} \text{ MWh} \approx 533 \text{ MWh}$$

Se, kuinka suurella teholla tietty näyte radioaktiivista isotooppia tuottaa energiaa eli kuinka paljon energiaa sekuntia kohti syntyy, voidaan laskea, kun tiedetään näytteen aktiivisuus A eli se, kuinka monta hajoamista sekunnissa näytteessä tapahtuu. Se saadaan kaavalla

$$(4.3.2) \quad A = \frac{m \ln 2}{m_A t_{1/2}}$$

missä m on näytteen massa tarkasteluhetkellä, m_A isotoopin yhden atomin massa, $t_{1/2}$ isotoopin puoliintumisaika ja kerroin $\ln 2$ on luonnollinen logaritmi luvusta 2, $\ln 2 \approx 0,693147180560$. Kaavan johtaminen sivuutetaan tässä yhteydessä.

Koska Isotoopin $^{235}_{92}\text{U}$ puoliintumisaika on 704 miljoonaa vuotta eli

$$t_{1/2} = 704 \cdot 10^6 \cdot 365,2422 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 2,221607596 \cdot 10^{16} \text{ s}$$

on yhden $^{235}_{92}\text{U}$ -kilogramman aktiivisuus kaavan (4.3.2) mukaan

$$A = \frac{1 \text{ kg} \cdot \ln 2}{235,0439299 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2,221607596 \cdot 10^{16} \text{ s}} \approx 7,99 \cdot 10^7 \text{ 1/s} = 7,99 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

Kun jokaisessa hajoamisessa energiaa vapautuu edellä laskettu Q , tuottaa yksi kilogramma isotooppia $^{235}_{92}\text{U}$ hajotessaan $^{231}_{90}\text{Th}$:ksi ja ^4_2He :ksi energiaa teholla

$$P = AQ \approx 5,99 \cdot 10^{-5} \text{ J/s} = 5,99 \cdot 10^{-5} \text{ W} = 59,9 \text{ }\mu\text{W}$$

Muita esimerkkejä α -aktiivisista isotoopeista ovat uraanin isotooppi $^{238}_{92}\text{U}$, joka on radioaktiivisuuden tuottaman maalämmön (joka on puolet koko maalämmöstä) päälähde (maankuoressa keskimäärin 1 – 2,7 grammaa tonnissa) ja toriumin isotooppi $^{232}_{90}\text{Th}$, joka on maankuoren yleisin radioaktiivinen isotooppi (6 – 9,6 g/t). Alla olevaan taulukkoon 10 on lisäksi otettu kohdassa 4.3.14 tarkempaan käsittelyyn tuleva plutoniumin isotooppi $^{239}_{94}\text{Pu}$, radonin isotooppi $^{222}_{86}\text{Rn}$ sekä palovaroitimissa yleisesti käytetty amerikummin isotooppi $^{241}_{95}\text{Am}$ (n. 0,3 μg /varoitin)

Taulukko 10: Eräiden α -aktiivisten isotooppien hajoamisominaisuuksia.

Isotooppi	Tytär-isotooppi	Energia per hajoaminen Q (MeV)	Energia per kilogramma E (MWh)	Puoliintumisaika $t_{1/2}$ (s)	Aktiivisuus A (Bq)	Teho per kilogramma P (W)
$^{235}_{92}\text{U}$	$^{231}_{90}\text{Th}$	4,68	533	$2,222 \cdot 10^{16}$	$7,99 \cdot 10^7$	$5,99 \cdot 10^{-5}$
$^{238}_{92}\text{U}$	$^{234}_{90}\text{Th}$	4,27	481	$1,410 \cdot 10^{17}$	$1,24 \cdot 10^7$	$8,51 \cdot 10^{-6}$
$^{239}_{94}\text{Pu}$	$^{235}_{92}\text{U}$	5,24	588	$7,608 \cdot 10^{11}$	$2,30 \cdot 10^{12}$	1,93
$^{232}_{90}\text{Th}$	$^{228}_{88}\text{Ra}$	4,08	471	$4,057 \cdot 10^{17}$	$4,06 \cdot 10^7$	$2,65 \cdot 10^{-6}$
$^{241}_{95}\text{Am}$	$^{237}_{93}\text{Np}$	5,64	627	$1,363 \cdot 10^{10}$	$1,27 \cdot 10^{14}$	115
$^{222}_{86}\text{Rn}$	$^{218}_{84}\text{Po}$	5,59	675	$3,303 \cdot 10^5$	$5,69 \cdot 10^{18}$	5100000

Taulukosta 10 nähdään, että erot yhden hajoamisen ja myös kilogramman hajoamisen tuottamissa energioissa ovat yllättävän pieniä. Sitä vastoin puoliintumisaikojen suuren vaihtelun ($^{232}_{90}\text{Th}$:lla 14,05 miljardia vuotta ja radonin isotoopilla $^{222}_{86}\text{Rn}$ 3,823 vuorokautta) takia aktiivisuuksissa ja tehoissa erot ovat hyvin suuret. Niinpä $^{222}_{86}\text{Rn}$ tuottaa puolet suomalaisten saamasta säteilyannoksesta, vaikka tonnissa maankuorta sitä on keskimäärin $4 \cdot 10^{-16}$ kg. Tämän radon-määrän aktiivisuus on kuitenkin taulukon 10 mukaan

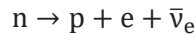
$$A = 4 \cdot 10^{-16} \cdot 5,69 \cdot 10^{18} \approx 2300 \text{ Bq}$$

ja kun $^{222}_{86}\text{Rn}$ on kaasu (kiehumpiste $-61,7^\circ\text{C}$), voi maasta nouseva ilmanvirtaus helposti nostaa ilman radon-aktiivisuuden yli arvon 200 Bq/m^3 , joka on korkein uudisrakennuksissa sallittu radonpitoisuus. Näin, vaikka radonin tiheys on ilman tiheyteen verrattuna n. 7,5-kertainen. Maankuoresa isotooppia $^{222}_{86}\text{Rn}$ syntyy $^{238}_{92}\text{U}$:n hajotessa, mistä enemmän seuraavassa kohdassa 4.3.7.

Jos halutaan selvittää, kuinka suurella teholla yksi kilogramma esimerkiksi isotooppia $^{238}_{92}\text{U}$ kaikkiaan tuottaa energiaa, on otettava lisäksi huomioon, että $^{238}_{92}\text{U}$ -ytimen hajoamisessa syntyvä $^{234}_{90}\text{Th}$ -ydin on myös radioaktiivinen ja hajoaa edelleen ytimeksi, joka myös on radioaktiivinen jne. Se, millainen reaktioketjusta kaikkiaan syntyy, selvitetään seuraavassa kohdassa.

4.3.7 β^- -aktiivisuus

Atomiytimen ulkopuolella neutroni on radioaktiivinen hiukkanen. Heikko vuorovaikutusvoima muuttaa nimittäin neutronin toisen alas-kvarkin ylös-kvarkiksi, jolloin syntyy hiukkanen, joka koostuu kahdesta ylös- ja yhdestä alas-kvarkista. Se on siis protoni. Samalla syntyy, sähkövarausten säilymisen takia, alkeisvarauksen suuruista negatiivista varausta kantava hiukkanen, elektroni. Kuten kohdan 3.5.7 esimerkissä 19 jo kerrottiin, ei syntyvän elektronin nopeus ole aina sama. Tämä merkitsee, että syntyy kolmaskin hiukkanen, elektronin antineutriino $\bar{\nu}_e$, sillä ilman sitä liikemäärä ja kokonaisenergia eivät säilyisi.



Radioaktiivisuuden yhteydessä elektronia kutsutaan β^- -hiukkaseksi ja tällaista hajoamista β^- -aktiivisuudeksi. Neutronin puoliintumisaika on $t_{1/2} \approx 611,0$ s.

Elektronin antineutriinon $\bar{\nu}_e$ massasta tiedetään vain, että se on alle $1,3 \cdot 10^{-10}$ u, joten sillä ei ole vaikutusta lopputulokseen ja se voidaan unohtaa. Kun reaktioyhtälöön sijoitetaan massat, saadaan

$$1,00866491588 \text{ u} \rightarrow 1,007276466879 \text{ u} + 5,48579909070 \cdot 10^{-4} \text{ u}$$

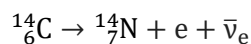
$$1,00866491588 \text{ u} \rightarrow 1,00782504679 \text{ u}$$

Kuten edellä, päätellään nytkin, että vapautuva energia on kaavan (4.3.1) mukaan

$$Q = (1,00866491588 - 1,00782504679) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 782000 \text{ eV} = 0,782 \text{ MeV}$$

Tavallaan esimerkki β^- -aktiivisuudesta on myös kohdassa 4.1 esitelty myonin hajoaminen elektroniksi, myonin neutriinoksi ja elektronin antineutriinoksi: $\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

Toisin kuin atomiytimen ulkopuolella, neutroni voi olla pysyvä atomiytimessä, kuten on jokainen neutroni hiilen isotooppien $^{12}_6\text{C}$ ja $^{13}_6\text{C}$ ja 252 muun pysyvän isotoopin ytimissä. Mutta neutroni voi hajota myös ytimessä ollessaan. Silloin yksi ytimen neutroneista hajoaa, kuten yksittäinenkin neutroni, protoniksi, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi. Kaksi viimeksimainittua sinkoutuu pois ytimestä, mutta protoni jää sinne. Ytimessä protonien lukumäärä kasvaa siis yhdellä, mutta hiukasten kokonaismäärä eli massaluku ei muutu. Esimerkki tästä on radiohiiliajoituksessa käytettävä hiilen isotooppi $^{14}_6\text{C}$. Sen atomin ytimessä protonien lukumäärä nousee seitsemään, mutta massaluku pysyy 14:nä. Ytimien osalta reaktio on siten



Neutraalissa $^{14}_6\text{C}$ -atomissa on kuusi elektronia. Kun sen ytimestä irtoaa tässä reaktiossa yksi elektroni lisää, on elektroneja reaktion jälkeen seitsemän, mikä on elektronien lukumäärä neutraalissa $^{14}_7\text{N}$ -atomissa. Jos haetaan vain reaktion nettotuottoa, voidaan ajatella, että neutraali $^{14}_6\text{C}$ -atomi muuttuu neutraaliksi $^{14}_7\text{N}$ -atomiksi. Kun $\bar{\nu}_e$:n massa voidaan jälleen unohtaa ja $^{14}_6\text{C}$:n atomin massa on 14,003241989 u ja $^{14}_7\text{N}$:n atomin 14,0030740048 u, saadaan vapautuvaksi energiaksi kaavaa (4.3.1) käyttäen

$$Q = (14,003241989 - 14,0030740048) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 0,156 \text{ MeV}$$

Energiaksi muuttuvan massan suhde alkuperäiseen massaan on

$$q = \frac{14,003241989 \text{ u} - 14,0030740048 \text{ u}}{14,003241989 \text{ u}} \approx 1,199609 \cdot 10^{-5}$$

joten yhden $^{14}_6\text{C}$ -kilogramman hajotessa vapautuu energiaa

$$E = mc^2 = 1,199609 \cdot 10^{-5} \cdot c^2 \text{ J} = \frac{1,199609 \cdot 10^{-5} \cdot c^2}{10^6 \cdot 60 \cdot 60} \text{ MWh} \approx 299 \text{ MWh}$$

Kun isotoopin $^{14}_6\text{C}$ puoliintumisaika on 5730 vuotta eli $t_{1/2} = 5730 \cdot 365,2422 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \approx 1,808 \cdot 10^{11} \text{ s}$, on yhden kilogramman aktiivisuus kaavan (4.3.2) mukaan

$$A = \frac{1 \text{ kg} \cdot \ln 2}{14,003241989 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,808 \cdot 10^{11} \text{ s}} \approx 1,65 \cdot 10^{14} \text{ 1/s} = 1,65 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$$

ja teho

$$P = AQ \approx 4,13 \text{ J/s} = 4,13 \text{ W}$$

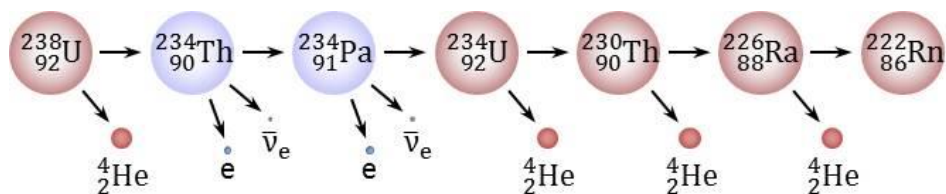
Seuraavassa taulukossa 11 on muutamien β^- -aktiivisten isotooppien hajoamisominaisuuksia

Taulukko 11: Eräiden β^- -aktiivisten isotooppien hajoamisominaisuuksia.

Isotooppi	Tytär-isotooppi	Energia per hajoaminen Q (MeV)	Energia per kilogramma E (MWh)	Puoliintumisaika $t_{1/2}$ (s)	Aktiivisuus A (Bq)	Teho per kilogramma P (W)
^3_1H	^3_2He	0,0186	165	$3,888 \cdot 10^8$	$3,56 \cdot 10^{17}$	1060
$^{14}_6\text{C}$	$^{14}_7\text{N}$	0,156	299	$1,808 \cdot 10^{11}$	$1,65 \cdot 10^{14}$	4,13
$^{40}_{19}\text{K}$	$^{40}_{20}\text{Ca}$	1,31	879	$3,938 \cdot 10^{16}$	$2,65 \cdot 10^8$	$5,57 \cdot 10^{-5}$
$^{60}_{27}\text{Co}$	$^{60}_{28}\text{Ni}$	2,82	1260	$1,663 \cdot 10^8$	$4,19 \cdot 10^{16}$	18900
$^{137}_{55}\text{Cs}$	$^{137}_{56}\text{Ba}$	1,18	230	$9,520 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^{15}$	603
$^{239}_{92}\text{U}$	$^{239}_{93}\text{Np}$	1,26	141	$1,407 \cdot 10^3$	$1,24 \cdot 10^{21}$	$2,51 \cdot 10^8$
$^{239}_{93}\text{Np}$	$^{239}_{94}\text{Pu}$	0,72	81	$2,036 \cdot 10^5$	$8,58 \cdot 10^{18}$	$9,93 \cdot 10^5$

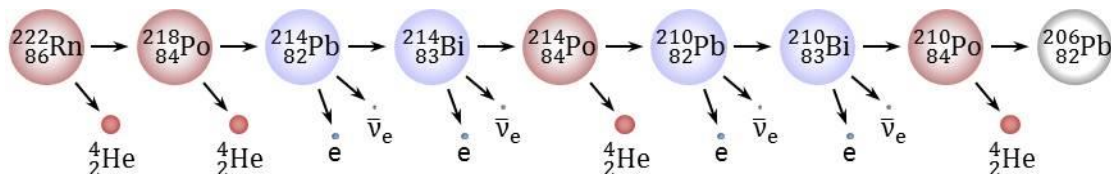
Näistä isotooppi ^3_1H ($t_{1/2} = 12,32 \text{ a}$) tulee vahvasti esille kohdassa 4.3.11. Kaliumin isotooppi $^{40}_{19}\text{K}$ ($t_{1/2} = 1,248 \cdot 10^9 \text{ a}$) on merkittävin ihmiskehon sisäinen radioaktiivisuuden lähde ja myös kolmanneksi tärkein radioaktiivisuuden tuottaman maalämmön lähteistä. Koboltin isotooppia $^{60}_{27}\text{Co}$ ($t_{1/2} = 5,2713 \text{ a}$) käytetään sen suuren tehon takia radioterapiassa ja laitteiden ja ruoan steriloinnissa. Cesiumin isotooppi $^{137}_{55}\text{Cs}$ ($t_{1/2} = 30,1671 \text{ a}$) oli Tšernobylin ja Fukushima onnettomuuksien pahin saastuttaja. Uraanin isotoopista $^{239}_{92}\text{U}$ ($t_{1/2} = 23,45 \text{ min}$) ja neptuniumin isotoopista $^{239}_{93}\text{Np}$ ($t_{1/2} = 2,356 \text{ d}$) lisää kohdassa 4.3.14. Jos atomien massojen sijasta olisi käytetty ytimien massoja, olisi ^3_1H :lle saatu $Q = 0,530 \text{ MeV}$.

Kohdassa 4.3.6 oli jo esillä se, että kun α -aktiivinen $^{238}_{92}\text{U}$ hajoaa, syntyy radioaktiivinen $^{234}_{90}\text{Th}$ -ydin. Tämä on β^- -aktiivinen ja hajoaa edelleen. Kaikkiaan muodostuu reaktiosarja, jossa protaktiniumin, uraanin, toriumin ja radiumin isotooppien kautta päädytään kohdassa 4.3.6 mainittuun isotooppiin $^{222}_{86}\text{Rn}$ (kuva 18)



Kuva 18: $^{238}_{92}\text{U}$ -ytimen hajoaminen $^{222}_{86}\text{Rn}$:iin saakka.

josta sarja jatkuu poloniumin, lyijyn, vismutin, poloniumin, lyijyn, vismutin ja poloniumin kautta isotooppiin $^{206}_{82}\text{Pb}$, joka on pysyvä (kuva 19):



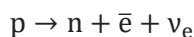
Kuva 19: $^{222}_{86}\text{Rn}$ -ytimen hajoaminen.

Yleisesti voidaan sanoa, että β^- -aktiivisia ovat ytimet, joissa on protoneihin verrattuna liikaa neutroneja, mikä tarkoittaa, että muuttaessaan neutronin protoniksi ytimen sidosenergia kasvaa.

Harvinaisissa tapauksissa β^- -hajoamisia voi tapahtua samanaikaisesti kaksikin, kuten käy kohdassa 4.3.5 mainitulle pisimmän puoliintumisaikan ytimelle $^{128}_{52}\text{Te}$, josta tulee näin pysyvä ksenonin ydin $^{128}_{54}\text{Xe}$.

4.3.8 β^+ -aktiivisuus ja elektronikaappaus

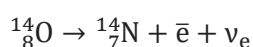
Kuten β^- -hajoamisen myös β^+ -hajoamisen saa aikaan heikko vuorovaikutusvoima. Siinä toinen protonin ylös-kvarkeista muuttuu alas-kvarkiksi ja protonista tulee näin neutroni. Protonin sähkövarauksen ottaa positroni ja lisäksi syntyy elektronin neutriino



Itsenäisenä tämä reaktio on kuitenkin mahdoton, koska neutronin massa on suurempi kuin protonin massa. Atomiytimessä reaktio sitä vastoin voi tapahtua. Silloin yhdestä ytimen protonista tulee neutroni ja positroni ja neutriino sinkoutuvat ulos ytimestä. Protonien ja neutronien yhteismäärä ei siis muutu, mutta protonien lukumäärä pienenee yhdellä. Karkeasti ottaen voidaan sanoa, että β^+ -aktiivisuutta esiintyy isotoopeilla, joilla protonien lukumäärä suhteessa neutronien lukumäärään on liian suuri verrattuna samankokoisiin ytimiin, joilla on suuri sidosenergia.

Hapen isotoopit $^{14}_8\text{O}$ ja $^{15}_8\text{O}$ ovat β^+ -aktiivisia ja niillä se on ainoa hajoamistapa. Monilla muilla ytimillä se esiintyy yhdessä muiden hajoamismuotojen kanssa.

Tarkastellaan nyt $^{14}_8\text{O}$ -ytimen reaktiota



Koska neutraalissa $^{14}_8\text{O}$ -atomissa on kahdeksan elektronia ja reaktiossa tulee vielä yksi elektronin massainen hiukkanen (positroni) lisää, tulee näistä yhteensä yhdeksän elektronin massaa ja kun neutraalissa $^{14}_7\text{N}$ -atomissa on vain seitsemän elektronia, voi reaktio onnistua vain, jos $^{14}_7\text{N}$ -atomin

massa on kahden elektronin massan verran pienempi kuin $^{14}_8\text{O}$. Näin todellisuudessa asia onkin ja atomien $^{14}_8\text{O}$ ja $^{14}_7\text{N}$ massojen erotus on

$$\Delta m = 14,00859625 \text{ u} - 14,0030740048 \text{ u} = 0,0055222 \text{ u} > 2 \cdot 0,000549 \text{ u} \approx 2m_e$$

Mikäli lähettyvillä on muita atomeja, kuten käytännössä yleensä on, ytimeistä sinkoutunut positroni kohtaa hyvin pian elektronin. Tällöin tapahtuu se, mikä aina tapahtuu kun antimateria ja materia kohtaavat: ne molemmat häviävät eli annihiloituvat niin, että jäljelle jää pelkästään energiaa tai, jos niillä on riittävästi energiaa, myös yksi tai useampi uusi hiukkanen.

Jos positronin ja elektronin nopeudet ovat pieniä, niiden yhteenlaskettu kokonaisenergia ei riitä tuottamaan uusia hiukkasia, vaan niiden massat häviävät, jolloin syntyy partikkeleita, joiden kokonaisenergiat ovat positiivisia, mutta joilla ei ole massaa. Kohdassa 3.4.3 esitetyn perusteella nämä partikkelit liikkuvat valonnopeudella ja ovat siis sähkömagneettisen säteilyn kvantteja.

Koska elektronin, protonin ja kvanttien kokonaisuuteen ei tule ulkoapäin energiaa eikä siitä lähde energiaa, on positronin ja elektronin kokonaisenergioiden summa yhtä suuri kuin kvanttien energioiden summa jokaisessa järjestelmässä ja kohdan 3.5.6 tuloksen 3 mukaan myös positronin ja elektronin liikemäärien summa yhtä suuri kuin kvanttien liikemäärien summa jokaisessa järjestelmässä. Myös siinä järjestelmässä $\mathcal{T}$, jossa positronin ja elektronin yhteenlaskettu liikemäärä on $\vec{0}$, ns. liikemääräkeskipistejärjestelmässä, jossa siis myös kvanttien liikemäärien summa on $\vec{0}$. Jos kvantteja syntyisi vain yksi, olisi sen kokonaisenergia positronin ja elektronin kokonaisenergioiden summana $T > 0$ ja kohdan 3.4.3 kaavan (3.4.11) mukaan sen liikemäärän suuruus olisi $p = T/c > 0$, eikä positronin ja elektronin liikemäärien summa olisi $\vec{0}$.

Jos sekä positronin että elektronin nopeus on kohtaamishetkellä 0, on havaittu, että syntyy kaksi säteilykvanttia, joiden energioiden summa on positronin ja elektronin lepoenergioiden summa.

$$\bar{e} + e \rightarrow 2\gamma$$

Koska positronin ja elektronin kummankin massa on $5,48579909070 \cdot 10^{-4} \text{ u}$, on syntyvien kahden säteilykvantin energia yhteensä kaavan (4.3.1) mukaan

$$T = 2 \cdot 5,48579909070 \cdot 10^{-4} \cdot 1,492418062 \cdot 10^{-10} \text{ J} \approx 1,637421129 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Kumpikin syntyvistä säteilykvanteista saa energiaa puolet tästä, $T' = T/2 = 8,187105646 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. Syntyvän säteilyn aallonpituus voidaan nyt laskea kohdan 3.4.3 kaavalla (3.4.10)

$$\lambda = \frac{hc}{T'} = \frac{6,626070040 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 299792458 \text{ m/s}}{8,187105646 \cdot 10^{-14} \text{ J}} \approx 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,426 \text{ pm}$$

Se on siis γ -säteilyä, jollaiseksi luetaan sähkömagneettinen säteily, jonka aallonpituus $\lambda < 10 \text{ pm}$ (vrt. näkyvä valo $380000 \text{ pm} < \lambda < 760000 \text{ pm}$).

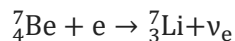
Koko tapahtumaketju voidaan kuvata niin, että neutraalista $^{14}_8\text{O}$ -atomista, jossa on kahdeksan elektronia, syntyy positroni, elektronin neutriino ja neutraali $^{14}_7\text{N}$ -atomi, jossa on seitsemän elektronia. Näin jää yli yksi elektroni, joka annihiloituu syntyneen positronin kanssa energiaksi. Vapautuvan energian kannalta elektronin neutriinin massa on häviävän pieni, joten voidaan laskea ikään kuin neutraali $^{14}_8\text{O}$ -atomi muuttuisi neutraaliksi $^{14}_7\text{N}$ -atomiksi. Siis kaavan (4.3.1) mukaan

$$Q = (14,00859625 - 14,0030740048) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 5,144 \text{ MeV}$$

mikä sisältää annihilaatiossa vapautuneen positronin ja elektronin lepoenergian

$$T \approx 2 \cdot 5,48579909070 \cdot 10^{-4} \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 1,022 \text{ MeV}$$

Jos radioaktiivisessa ytimessä on liikaa protoneja, mutta sen massa ei ole kahden elektronin massan verran suurempi kuin sen ytimen massa, joksi ydin muuttuisi, jos se β^+ -hajoaisi, voi tapahtua ns. elektronikaappaus (EC). Siinä ydin sieppaa yhden elektroniverhon lähimmistä elektroneista, joka yhtyy ytimen protoniin ja syntyy neutroni ja elektronin neutriino. Lopputuloksessa erona β^+ -hajoamiseen on vain se, että tässä ei synny positronia. Esimerkkinä tällaisesta on berylliumin isotooppi ${}^7_4\text{Be}$, jonka reaktio on



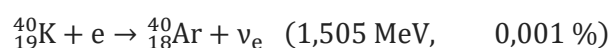
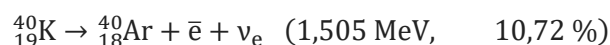
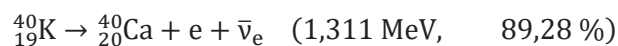
Kun neutraalista ${}^7_4\text{Be}$ -atomissa yksi protoni muuttuu neutroniksi ja yksi elektroni häviää, on tulos neutraali atomi ja energiaksi muuttuva massa saadaan atomien massojen erotuksena

$$7,01692983 \text{ u} - 7,01600455 \text{ u} = 0,00092528 \text{ u}$$

joka on vähemmän kuin kahden elektronin massa $2m_e \approx 2 \cdot 0,000549 \text{ u}$.

Kuten β^- -hajoaminen, myös elektronikaappaus voi tapahtua myös kaksinkertaisena. Näin tapahtuu esimerkiksi bariumin ytimelle ${}^{130}_{56}\text{Ba}$ (puoliintumisaika $1,6 \cdot 10^{21} \text{ a}$), josta tulee pysyvä ksenonin ydin ${}^{130}_{54}\text{Xe}$.

Varsin monet ytimet voivat hajota radioaktiivisesti useammalla tavalla. Esimerkki tällaisesta on kohdassa 4.3.7 mainittu ${}^{40}_{19}\text{K}$, joka voi siis olla β^- -aktiivinen mutta myös β^+ -aktiivinen ja sille on mahdollinen myös elektronikaappaus. Reaktiot energioineen ja esiintymistodennäköisyyksineen ovat



4.3.9 Muut radioaktiivisuuden lajit

On myös koko joukko muita radioaktiivisia hajoamistapoja.

Voi käydä niin, että ytimestä ei lähdekään ${}^4_2\text{He}$ -ydin eli α -hiukkanen, vaan pelkkä protoni. Tämä hajoamistapa, ns. protoniemiissio (p), on mm. boorin isotoopilla ${}^7_5\text{B}$, josta tulee näin ${}^6_4\text{Be}$. Protoneja voi lähteä samalla kertaa kaksikin. Näin käy juuri ${}^6_4\text{Be}$ -ytimelle, josta tulee ${}^4_2\text{He}$ -ydin, joten isotoopin ${}^6_4\text{Be}$ voi yhtä hyvin sanoa olevan α -aktiivinen. Selvempi tilanne on esimerkiksi ytimellä ${}^{12}_8\text{O}$, josta tulee ${}^{10}_6\text{C}$, joka puolestaan on β^+ -aktiivinen ja muuttuu pysyväksi ${}^{10}_5\text{B}$ -ytimeksi. Protonien poistuminen ${}^{12}_8\text{O}$ -ytimestä voi tapahtua myös kahdessa vaiheessa, joista ensimmäisessä ytimeksi tulee ${}^{11}_7\text{N}$ ja toisessa ${}^{10}_6\text{C}$.

Yksi hajoamistapa on neutroniemiissio (n). Tällainen tapahtuu mm. ${}^5_2\text{He}$:lle, josta tulee pysyvä ${}^4_2\text{He}$. Neutronejakin voi irrota samanaikaisesti kaksi, kuten käy mm. ${}^{10}_2\text{He}$ -ytimelle.

Suurilla atomiytimillä voi esiintyä spontaani fissio (SF), millä tarkoitetaan sitä, että ydin hajoaa kahteen tai useampaan α -hiukkasta suurempaan osaan. Tätä esiintyy mm. kohdassa 4.3.6 mainituilla isotoopeilla $^{232}_{90}\text{Th}$, $^{235}_{92}\text{U}$, $^{238}_{92}\text{U}$, $^{239}_{94}\text{Pu}$ ja $^{241}_{95}\text{Am}$.

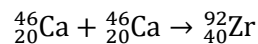
4.3.10 γ -säteily

Radioaktiivisen hajoamisen seurauksena, kuten kohdassa 4.3.8 todettiin, voi syntyä positroni, joka elektronin kohdatessaan annihiloituu kahdeksi γ -säteilyn kvantiksi. Mutta γ -säteilyä syntyy myös silloin, kun ydin jää radioaktiivisen hajoamisen jälkeen ns. viritettyyn tilaan. Kun sen protonit ja neutronit asettuvat jälleen alempaan energiatilaan, purkautuu vapautuva energia γ -säteilyn kvanttina.

4.3.11 Fuusio

Kahden atomiytimen yhdistymistä suuremmaksi atomiytimeksi kutsutaan fuusioksi. Fuusio voi tapahtua vain pienehköillä ytimillä, mikä johtuu siitä tavasta, jolla ytimen sidosenergiaksi muuttuvan massan suhde ytimen muodostavien protonien ja neutronien yhteismassaan kehittyy ytimen koon kasvaessa. Kohdassa 4.3.4 todettiin, että ytimen koon kasvaessa tämä suhde ensin kasvaa hyvin jyrkästi ja vähitellen loivemmin, kunnes ytimeistä $^{62}_{28}\text{Ni}$ lähtien suhde alkaa loivasti pienentyä. Tästä säännöstä on kaiken aikaa pieniä poikkeuksia, mutta trendi on selvä.

Edellä olevan perusteella on selvää, että energiaa tuottavat fuusiot onnistuvat helpoiten pienillä ytimillä ja aina sitä vaikeammin mitä lähempänä fuusion lopputulos on $^{62}_{28}\text{Ni}$ -ydintä ja että tätä suuremmilla ytimillä energiaa tuottava fuusio ei ole lainkaan mahdollinen. Toisaalta fuusio voi hypätä $^{62}_{28}\text{Ni}$ -rajan yli. Esimerkiksi kaksi pysyvää kalsiumin isotoopin $^{46}_{20}\text{Ca}$ ydintä voi fuusioitua pysyväksi zirkoniumin isotoopin $^{92}_{40}\text{Zr}$ ytimeksi



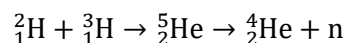
$$45,9536926 \text{ u} + 45,9536926 \text{ u} = 91,9073852 \text{ u} \rightarrow 91,9050408 \text{ u}$$

ja massojen erotus on $91,9073852 \text{ u} - 91,9050408 \text{ u}$, mikä kaavan (4.3.1) mukaan on energiana

$$Q = (91,9073852 - 91,9050408) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 2,184 \text{ MeV}$$

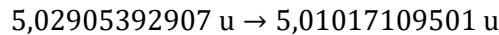
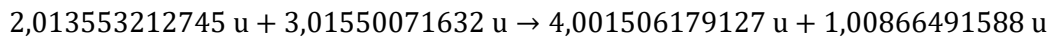
Ydin $^{46}_{20}\text{Ca}$ on muuten suurin ydin, joka voi fuusioitua itsensä kanssa.

Helpoimmin toteutettava fuusio on ^2_1H - eli deuterium-ytimen eli deutronin ja ^3_1H - eli tritium-ytimen eli tritonin yhtyminen (kuva 20)



Kuva 20: ^2_1H :n ja ^3_1H :n fuusio.

jossa välivaihe ${}^5_2\text{He}$ on nopeasti ohi, sillä ${}^5_2\text{He}$:n puoliintumisaika on vain n. $7 \cdot 10^{-22}$ s. Jos jätetään tämä välivaihe huomiotta, on reaktio massoina ilmoitettuna



Massaa, oikeammin vety-ytimien lepoenergiaa, muuttuu liike-energiaksi ja muiksi energiamuodoiksi

$$5,02905392907 \text{ u} - 5,01017109501 \text{ u} = 0,01888283406 \text{ u}$$

Tämä on energiana kaavan (4.3.1) mukaan

$$Q = 0,01888283406 \cdot 931,494095 \text{ MeV} = 17,6 \text{ MeV}$$

Massakadon suhde vety-ytimien alkuperäiseen massaan on

$$q = \frac{0,01888283406}{5,02905392907} \approx 0,00375474877$$

Jos vety-ytimiä fuusioituu 1 kg, massaa muuttuu energiaksi q kg, mikä on energiana kaavan (3.4.7) mukaan

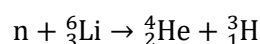
$$E = qc^2 = \frac{0,00375474877}{5,02905392907} \cdot c^2 \text{ J} = \frac{0,00375474877 \cdot c^2}{5,02905392907 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot 60} \text{ MWh} \approx 93700 \text{ MWh}$$

Tähän reaktioon tarvitaan siis deuteriumia ja tritiumia. Deuteriumin saanti ei ole ongelma, sillä vesi koostuu vesimolekyyleistä H_2O , joissa on kaksi vetyatomia ja yksi happiatomi ja meriveden 6420 vetyatomista keskimäärin yksi on deuterium-atomi. Näitä 6420 vetyatomia kohti merivedessä on 3210 happiatomia. Kun ${}^1_1\text{H}$ -atomin massa on 1,00782503223 u, ${}^2_1\text{H}$ -atomin 2,01410177812 u (huom! näissä massoissa ovat elektronit mukana) ja happiatomien keskimäärin 15,9994 u, on tonnissa puhdasta (suolatonta) merivettä

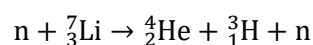
$$\frac{2,01410177812 \text{ u}}{6419 \cdot 1,00782503223 \text{ u} + 2,01410177812 \text{ u} + 3210 \cdot 15,9994 \text{ u}} \cdot 1000 \text{ kg} \approx 0,0348 \text{ kg} = 34,8 \text{ g}$$

deuteriumia. Lisäksi deuterium on helppo erottaa ${}^1_1\text{H}$:stä, koska ${}^2_1\text{H}$ -ytimen massa on melkein kaksi kertaa ${}^1_1\text{H}$ -ytimen massa.

Tritium on hankalampi, sillä se on hyvin harvinaista ja sitä paitsi se hajoaa radioaktiivisesti puoliintumisajalla 12,32 vuotta. Jos kuitenkin tritiumia on sen verran, että reaktio käynnistyy, voidaan sitä tehdä lisää asettamalla litiumia reaktioalueen ympärille, jolloin syntyvät neutronit saavat aikaan reaktion



tai



riippuen siitä, kumpaa litiumin isotooppia, ${}^6_3\text{Li}$ vai ${}^7_3\text{Li}$, käytetään. Kummassakin tapauksessa saadaan tritiumia ja jälkimmäisessä tapauksessa vielä neutroni seuraavan tritium-ytimen tekemiseksi. Jälkimmäisessä reaktiossa on kuitenkin se huono puoli, että se on energiaa kuluttava, sillä massoina reaktio on

$$1,00866491588 \text{ u} + 7,01600455 \text{ u} \rightarrow 4,00260325415 \text{ u} + 3,0160492779 \text{ u} + 1,00866491588 \text{ u}$$

$$8,02466947 \text{ u} \rightarrow 8,02731745 \text{ u}$$

kun taas edellisen reaktio on energiaa tuottava, sillä siinä

$$1,00866491588 \text{ u} + 6,015122795 \text{ u} \rightarrow 4,00260325415 \text{ u} + 3,0160492779 \text{ u}$$

$$7,023787711 \text{ u} \rightarrow 7,018652532 \text{ u}$$

ja energiaa vapautuu kaavan (4.3.1) mukaan

$$(7,023787711 - 7,018652532) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 4,78 \text{ MeV}$$

Ongelmana ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H}$ -fuusioreaktion toteuttamisessa on se, että fuusioitavat vety-ytimet ovat sähköisesti positiivisesti varautuneita ja siis hylkivät toisiaan. Puuttumatta yksityiskohtiin voidaan sanoa, että jos vety-ytimien nopeudet saadaan riittävän suuriksi, ne voivat suurten liike-energioidensa ansiosta tunkeutua niin lähelle toisiaan, että protoneissa ja neutroneissa olevien kvarkkien välinen vahva vuorovaikutusvoima vetää ne yhteen helium-ytimeksi. Suuri nopeus tarkoittaa, että vedyn, jossa reaktion halutaan käynnistyvän, on oltava hyvin kuumaa, n. 90 miljoonaa astetta, ja vielä puristettu hyvin tiheäksi. Tällaisessa vetykaasussa elektronit ovat irronneet atomeista ja vety on ns. plasmaa. Sen aikaansaaminen on vaikeaa, mutta vielä vaikeampaa on sen hallitseminen. Niin pitkälle on kuitenkin kokeissa päästy, että fuusio on muutamien sekuntien ajan tuottanut enemmän energiaa kuin se on kuluttanut ja jopa niin, että se on saatu tuottamaan enemmän energiaa kuin sen aloittaminen on kuluttanut. Silti ei olla lähelläkään tuottavasti toimivaa fuusiovoimalaa.

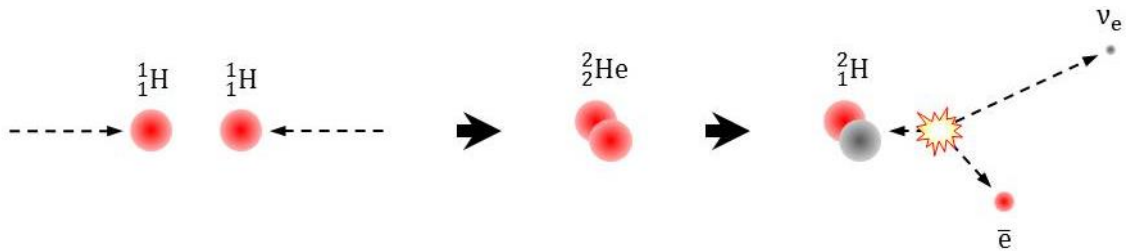
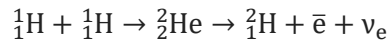
4.3.12 Reaktiot Auringossa

Aurinko, muiden tähtien tavoin, on muodostunut niin, että pääasiassa vedystä ja heliumista koostuneeseen kaasu- ja pölypilveen on syntynyt massatihentymiä, jotka ovat alkaneet vetää puoleensa ympärillä olevaa ainetta. Yhdestä näistä tihentymistä on sitten aikojen kuluessa alkanut kehittyä Aurinko. Siitä on tullut aikaa myöten yhä vain massiivisempi ja sen vetovoimakenttä on niin ollen voimistunut ja vetovoimakentän hiukkasille antama liike-energia tullut aina vain suuremmaksi. Nämä hiukkaset ovat sitten antaneet kohdassa 3.6 kuvatulla tavalla liike-energiaansa tihentymässä ennestään olleille hiukkasille ja näin tihentymän lämpötila on noussut ja se on myös ahtautunut yhä pienempään tilaan.

Lopulta Auringon keskustan lämpötila on noussut nykyiseen 15,7 miljoonaan celsius-asteeseen ja paine kasvanut 265 miljoonaan baariin ja tiheydeksi tullut 150 kg/litra. Tällaisessa kuumassa plasmaa protoneilla on hyvin suuri nopeus. Ei kuitenkaan keskimäärin niin suuri, että se protonien törmätessä riittäisi voittamaan sähköisen poistovoiman. Koska protonien nopeudet vaihtelevat tietyn jakauman mukaisesti, aina silloin tällöin riittävän nopeat protonit tulevat suurten liike-energioidensa ansiosta niin lähelle toisiaan, että syistä, jotka kuuluvat lähinnä kvanttimekaniikan piiriin, kvarkkien välillä vaikuttava vahva vuorovaikutusvoima vetää kaksi protonia yhteen.

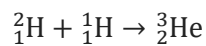
Näin syntyy kahdesta protonista koostuva ${}^2_2\text{He}$ -ydin. Tämän jälkeen tapahtuu β^+ -hajoaminen: heikko vuorovaikutusvoima muuttaa toisesta näistä protoneista ylös-kvarkin alas-kvarkiksi, jolloin protonista tulee neutroni ja sen sähkövarauksen ottaa reaktiossa syntyvä positroni $\bar{e}$. Positroni sinkoutuu ulos ytimestä ja jäljelle jää yhden protonin ja yhden neutronin sisältävä ${}^2_1\text{H}$ -ydin. Reaktiossa syntyy lisäksi elektronin neutriino ν_e .

Kun protonia merkitään selvyiden vuoksi ${}^1_1\text{H}$:llä, on reaktio kokonaisuudessaan (kuva 21)



Kuva 21: Protoni-protoni-fuusio.

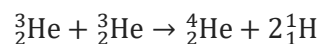
Tämän jälkeen ${}^2_1\text{H}$ -ydin ja ${}^1_1\text{H}$ -ydin voivat sopivasti kohdatessaan yhtyä, jolloin syntyy ${}^3_2\text{He}$ -ydin



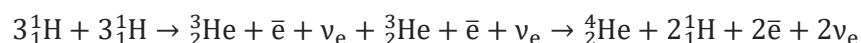
Tähän mennessä on siis kolmesta ${}^1_1\text{H}$ -ytimestä tullut yksi ${}^3_2\text{He}$ -ydin, positroni ja elektronin neutriino



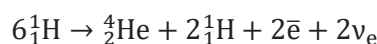
Syntynyt positroni annihiloituu heti elektronin kanssa ja syntyy kaksi γ -kvanttia, kuten kohdassa 4.3.8 kerrottiin. Tämän jälkeen voi kaksi ${}^3_2\text{He}$ -ydintä yhtyä niin, että syntyy ${}^4_2\text{He}$ -ydin ja kaksi ${}^1_1\text{H}$ -ydintä



Jos kootaan edellä oleva yhteen, saadaan



Siis



ja tämä yksinkertaistettuna



Reaktioketju voi pysähtyä tähän ja Auringossa 91 % ${}^4_2\text{He}$ -ytimistä muodostuukin näin.

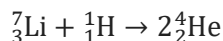
Mutta voi käydä myös niin, että ${}^3_2\text{He}$ - ja ${}^4_2\text{He}$ -ydin fuusioituvat, jolloin syntyy beryllium-ydin ${}^7_4\text{Be}$



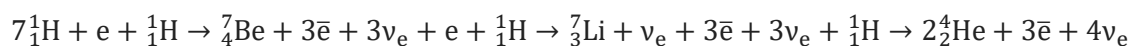
Yhdistämällä tämä yhtälöihin (4.3.3) ja (4.3.4) voidaan nyt kirjoittaa



Syntynyt ${}^7_4\text{Be}$ -ydin voi tämän jälkeen tehdä elektronikaappauksen ja muuttua ${}^7_3\text{Li}$ -yttimeksi, joka yhtyessään protonin kanssa muodostaa kaksi ${}^4_2\text{He}$ -ydintä. Siis



jolloin yhtälön (4.3.5) perusteella voidaan kirjoittaa

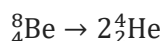
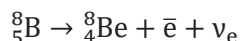
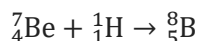


Jos tähän lisätään molemmille puolille positroni ja otetaan huomioon, että se reaktioyhtälön vasemmalla puolella annihiloituu elektronin kanssa kahdeksi γ -kvantiksi, saadaan lopputulos

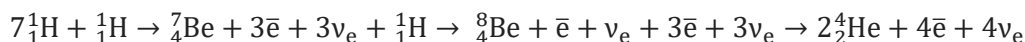


Näin syntyy 9 % Auringon keskustan ${}^4_2\text{He}$ -ytimestä.

Sen sijaan, että ${}^7_4\text{Be}$ -ytimelle käy kuten yhtälössä (4.3.6), voi käydä niin, että se fuusioituu protonin kanssa ja muodostaa boorin isotoopin ${}^8_5\text{B}$ -ytimen. Tämä taas on β^+ -aktiivinen ja hajoaa ${}^8_4\text{Be}$ -yttimeksi, positroniksi ja elektronin neutriinoksi ja jää jäljelle ${}^8_4\text{Be}$ -ydin, joka puolestaan hajoaa kahdeksi ${}^4_2\text{He}$ -yttimeksi.



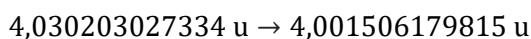
Kun katsotaan näitä ja reaktioyhtälöä (4.3.5), todetaan, että



Siis myös näissä kahdessa muussa vaihtoehdossa (4.3.7) ja (4.3.8) päädytään samaan lopputulokseen (4.3.4). Kun siinä otetaan huomioon, että syntyneet positronit annihiloituvat heti synnyttyään, saadaan lopullinen toteutuva muoto:



Kun tarkastellaan tätä reaktioyhtälöä (4.3.9) massoina ja jätetään häviävän pienet elektronin neutriinoiden massat pois, saadaan



Energiaksi vapautuva massa on siten

$$m = 4,030203027334 \text{ u} - 4,001506179815 \text{ u} = 0,028696847519 \text{ u}$$

Vapautuva energia on tällöin kaavan (4.3.1) mukaan

$$Q = 0,028696847519 \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 26,73 \text{ MeV}$$

Laskemalla massojen erotuksen suhde ${}^1_1\text{H}$ -ytimien massaansaadaan tietää, kuinka paljon energiaa vapautuu, kun 1 kg ${}^1_1\text{H}$ -ytimiä fuusioituu ${}^4_2\text{He}$ -ytimiksi. Tulos on kaavan (3.4.7) mukaan

$$E = \frac{0,028696847519 \text{ u}}{4 \cdot 1,007276466879 \text{ u}} \cdot c^2 \text{ J} = \frac{0,028696847519 c^2}{4 \cdot 1,007276466879 \cdot 10^6 \cdot 60 \cdot 60} \text{ MWh} \approx 177800 \text{ MWh}$$

joka on melkein 90 % enemmän kuin ${}^2_1\text{H}$ - ja ${}^3_1\text{H}$ -ytimien fuusiosta saatava energia, joka on kohdan 4.3.11 mukaan n. 93700 MWh.

Kottikärryllisessä, siis noin sadassa litrassa (15000 kilogrammassa), Auringon keskustaa tapahtuu $6,456 \cdot 10^{12}$ tällaista reaktiota sekunnissa, joten teho on

$$P = 6,456 \cdot 10^{12} \cdot 4,282769459 \cdot 10^{-12} \approx 27,65 \text{ W}$$

Se on vähän vajaa neljännes 60-vuotiaan kevyttä työtä tekevän ja jonkin verran vapaa-ajan liikuntaa harrastavan 77-kiloisen 180 cm pitkän miehen keskimääräisestä energiankulutuksesta.

Auringon keskustan yllättävän pientä energiatuottoa selventää myös se, että Auringon keskustan aineesta 71 % on vetyä, joten varovasti arvioiden edellä mainitussa kottikärryllisessä Auringon keskustaa on n. 10600 kg yksittäisiä protoneja. Kun yhden protonin massa on

$$m_p = 1,007276466879 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

on protoneja kottikärryllisessä Auringon keskustaa

$$\frac{10600}{1,007276466879 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27}} \approx 6,34 \cdot 10^{30} \text{ kpl}$$

Vaikka protonien fuusioita tapahtuu $6,456 \cdot 10^{12}$ kappaletta sekunnissa ja siis $6,34 \cdot 10^{30} \cdot 10^9 \cdot 365,2422 \cdot 24 \cdot 3600 = 6,34 \cdot 10^{29}$ kpl miljardissa vuodessa, on protonien fuusioita pidettävä erittäin harvinaisina tapahtumina.

Jos kottikärryllinen Auringon keskustaa tuottaakin varsin vaatimattomasti energiaa, koko Aurinko tuottaa energiaa valtavalla $3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$:n teholla. Näin siksi, että protonien fuusioitumisia tapahtuu Auringon keskipisteestä aina 200000 km:n (30 % Auringon säteestä) etäisyydelle saakka, tosin etäisyyden kasvaessa aina vähemmän ja vähemmän. Energiaa syntyy alueella, joka on

$$V = \frac{4\pi \cdot 200000000^3}{3} \approx \text{n. } 3,35 \cdot 10^{25} \text{ m}^3$$

Protonien fuusioissa vapautuva energia ilmenee syntyvien ytimien, elektronien ja elektronin neutriinojen liike-energioina sekä annihiloitumisissa syntyvien γ -kvanttien energioina. Tämä energia estää gravitaatiota vetämästä Aurinkoa pienemmäksi ja nämä reaktiot jatkuvat vakaasti niin kauan kuin Auringon keskustassa on riittävästi polttoainetta, siis protoneja. Niiden määrän vähennyttyä

alkaa tapahtumasarja, jonka lopputulos on ns. valkea kääpiö, Maan kokoluokkaa oleva hyvin tiheä taivaankappale, joka ei tuota energiaa.

Reaktioissa syntyvät ytimet ja γ -kvantit törmäilevät toisiin ytimiin ja atomeihin ja nämä taas seuraaviin jne. niin, että törmäilyjä tapahtuu aina Auringon pinnalle saakka. Nämä törmäykset saavat aikaan atomiytimissä ja elektroniverhoissa viritystiloja, joiden purkautuessa syntyy sähkömagneettisen säteilyn kvantteja. Koska erilaisia viritystiloja on erittäin paljon, noudattaa Auringon säteily varsin tarkasti sellaisen mustan kappaleen säteilyjakaumaa, jonka lämpötila on Auringon pintalämpötila n. 5500°C . Suuri osa säteilystä on näkyvää valoa ja säteilymaksimi on vihreän valon alueella, suunnilleen aallonpituuden 530 nm kohdalla.

Massojen muuttuminen energiaksi on siis alkusyy Auringon lähettämään sähkömagneettiseen säteilyyn, jonka intensiteetti etäisyydellä r Auringon keskipisteestä on

$$I = \frac{3,846 \cdot 10^{26}}{4\pi r^2}$$

koska etäisyydellä r säteily on jakautunut r -säteisen pallon pinnalle, jonka pinta-ala on $4\pi r^2$. Kun Maan etäisyys Auringosta on pienimmillään (keskimäärin 147098075 km 2. – 5. tammikuuta), intensiteetti on

$$I = \frac{3,846 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot 147098075000^2} \approx 1414 \text{ W/m}^2$$

ja kun etäisyys on suurimmillaan (152097696 km 3. – 7. heinäkuuta), on intensiteetti

$$I = \frac{3,846 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot 152097696000^2} \approx 1323 \text{ W/m}^2$$

ja keskimääräisellä etäisyydellä

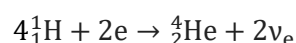
$$I = \frac{3,846 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot 149597870700^2} \approx 1368 \text{ W/m}^2$$

Tosiasiassa säteilyteho, ns. aurinkovakio, on hieman tätä pienempi, 1361 W/m^2 . Auringon säteilyn koko teho Maahan saadaan, kun kerrotaan aurinkovakio Maan Auringon suuntaa vastaan kohtisuoran projektion pinta-alalla, joka hieman vaihtelee vuodenajan mukaan, mutta on keskimäärin sen ympyrän pinta-ala, jonka säde on Maan keskimääräinen säde 6371 km. Säteilyteho on

$$P = 1361 \cdot \pi \cdot 6371000^2 \approx 1,735 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

mikä on koko ihmiskunnan energiankulutukseen verrattuna n. 10000-kertainen (kts. esim 17 kohdassa 3.4.4)

Reaktiossa



syntyvistä elektronin neutriinoista mainittakoon, että ne liikkuvat lähes valonnopeudella ja niitä tulee Auringosta Maahan Auringon säteitä vastaan kohtisuoralle neliösenttimetrin kokoiselle pinnalle 65 miljardia kappaletta sekunnissa. Koska ne ovat sähkövarauksettomia ja lähes massattomia, niillä on erittäin vähäinen vuorovaikutus aineen kanssa niin, että käytännössä neutriinoja tulee samalla

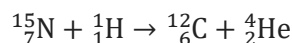
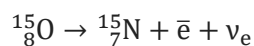
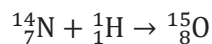
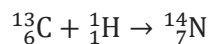
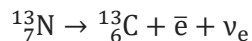
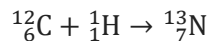
intensiteetillä sekä Auringon puoleiselle Maan pinnalle että Maan läpi vastakkaiselle Maan pinnalle. Sen verran niillä on kuitenkin vuorovaikutusta, että niitä voidaan erityisjärjestelyin havaita.

4.3.13 Alkuaineiden synty

Edellä selvitettiin, miten kahdesta ${}^1_1\text{H}$ -ytimestä voi tulla ${}^2_2\text{He}$ -ydin ja tästä edelleen ${}^3_2\text{He}$ -ydin sekä tästä ja ${}^1_1\text{H}$ -ytimestä ${}^3_2\text{He}$ -ydin. Lisäksi selvitettiin, miten kahdesta ${}^3_2\text{He}$ -ytimestä voi tulla ${}^4_2\text{He}$ -ydin, miten ${}^3_2\text{He}$ -ytimestä ja ${}^4_2\text{He}$ -ytimestä voi tulla ${}^7_4\text{Be}$ -ydin, miten ${}^7_4\text{Be}$ -ytimestä voi tulla ${}^7_3\text{Li}$ -ydin tai ${}^1_1\text{H}$ -ytimen kanssa ${}^8_5\text{B}$ -ydin ja tästä edelleen ${}^8_4\text{Be}$. Näin koossa on 5 alkuainetta (vety, helium, litium, beryllium ja boori) ja näille yhteensä 9 isotooppia (${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^2_2\text{He}$, ${}^3_2\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^7_3\text{Li}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^8_4\text{Be}$ ja ${}^8_5\text{B}$).

Auringossa muita isotooppeja syntyy hyvin vähän. Jos tähden massa on suurempi, on sen lämpötila korkeampi, sillä tähden syntyessä hiukkasilla on silloin ollut enemmän potentiaalienergiaa ja sen seurauksena myös enemmän liike-energiaa tähteen tullessaan. Korkeampi lämpötila puolestaan mahdollistaa uusia reaktioita. Jos lämpötila on 100 miljoonan celsius-asteen luokkaa, voi esimerkiksi ${}^8_4\text{Be}$ -ydin kaapata ${}^4_2\text{He}$ -ytimen, jolloin syntyy ${}^{12}_6\text{C}$ -ydin. Jotta tätä tapahtuisi merkittävässä määrin, on ${}^4_2\text{He}$ -ytimiä oltava runsaasti, jotta niistä jokin ehtisi kaapattavaksi, sillä ${}^8_4\text{Be}$ -ydin hajoaa puoliintumisaikalla $6,7 \cdot 10^{-17}$ s kahdeksi ${}^4_2\text{He}$ -ytimeksi.

Mielenkiintoinen on ns. hiilisykli, joka on vallitsevin energiantuottotapa tähdissä, joiden massa on Auringon massa verrattuna n. 1,5-kertainen ja lämpötila 20 miljoonaa celsius-astetta. Tämä reaktiosarja on

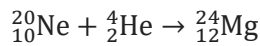


sillä ${}^{13}_7\text{N}$ ja ${}^{15}_8\text{O}$ ovat β^+ -aktiivisia.

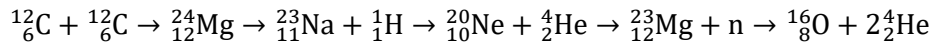
Tässä lähdetään ${}^{12}_6\text{C}$ -ytimestä, johon eri vaiheissa liittyy neljä ${}^1_1\text{H}$ -ydintä ja lopputulos on ${}^{12}_6\text{C}$ -ydin ja ${}^4_2\text{He}$ -ydin. Tässäkin ketjussa neljä ${}^1_1\text{H}$ -ydintä fuusioituu yhdeksi ${}^4_2\text{He}$ -ytimeksi ja lisäksi syntyy kaksi positronia ja kaksi elektronin neutriinoa. Siis täsmälleen edellisen kohdan reaktioyhtälön (4.3.4) mukaisesti. Hiiliytimelle ${}^{12}_6\text{C}$ ei siis tapahdu mitään ja sen rooli onkin toimia ikään kuin katalysaattorina.

Jos tähden keskustan lämpötila on 100 miljoonan celsius-asteen luokkaa, voi tapahtua seuraavaa

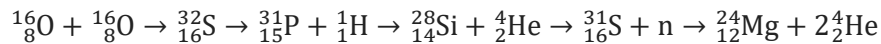




ja jos lämpötila on useita satoja miljoonia celsius-asteita, myös reaktioita



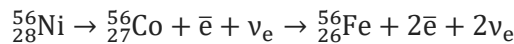
ja vielä korkeammassa lämpötilassa



ja jopa



Koska ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ -ydin on β^+ -aktiivinen, se hajoaa ${}^{56}_{27}\text{Co}$ -ytimeksi, positroniksi ja elektronin neutriinoksi ja kun ${}^{56}_{27}\text{Co}$ -ydinkin on β^+ -aktiivinen, se hajoaa ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ -ytimeksi, positroniksi ja elektronin neutriinoksi:



Syntynyt rautaydin ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ on pysyvä ja tämän reaktioketjun päätepiste, sillä mikä tahansa mahdollinen lisäys siihen vaatii energiaa, sillä lopputuloksen massa on suurempi kuin ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ -ytimen massan ja lisäyksen massan summa. Tähti, joka on saavuttanut vaiheen, jossa sen keskusta on rautaa ja ydinreaktiot loppuneet, luhistuu painovoiman vaikutuksesta ja sen ulko-osat räjähtävät avaruuteen supernovana ja sisäosa luhistuu niin, että protonit ja elektronit yhtyvät neutroneiksi ja syntyy ns. neutronitähti. Jos massaa on tarpeeksi voi syntyä myös musta aukko. Ulko-osista syntyneestä pilvestä voi alkaa seuraavan tähtisukupolven syntyminen.

Kuten kohdassa 4.3.4 jo mainittiin, nikkelin isotoopilla ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ on suurin sidosenergia suhteessa ytimen muodostavien protonien ja neutronien massojen summaan. Ydin ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ on siis eräänlainen kulminaatiokohta fuusioille. Tosin fuusioita voi tapahtua tämän rajan yli, esimerkiksi kaksi ${}^{46}_{20}\text{Ca}$ -ydintä voi fuusioitua ${}^{92}_{40}\text{Zr}$ -ytimeksi, kuten kohdassa 4.3.11 kerrottiin.

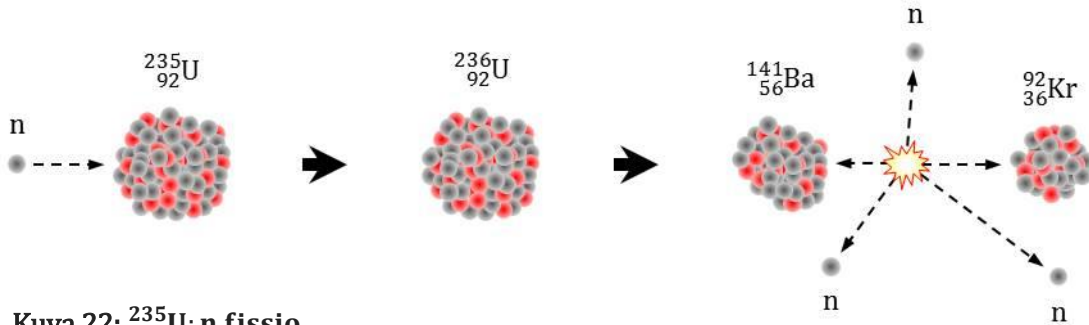
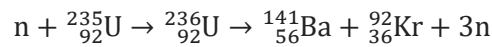
Suurten ytimien muuntuminen vielä suuremmiksi tapahtuu yleisimmin neutronikaappauksen kautta. Tästä esimerkki on neutronin tunkeutuminen kullan ainoan pysyvän isotoopin ${}^{197}_{79}\text{Au}$ ytimeen, jolloin siitä tulee β^- -aktiivinen ${}^{198}_{79}\text{Au}$ -ydin. Tämä hajoaa pysyväksi elohopeaytimeksi ${}^{198}_{80}\text{Hg}$, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi. Toinen esimerkki on ${}^{238}_{92}\text{U}$ -ytimen tekemä neutronikaappaus, jolloin syntyy β^- -aktiivinen ${}^{239}_{92}\text{U}$, josta tulee β^- -aktiivinen ${}^{239}_{93}\text{Np}$ -ydin, josta edelleen α -aktiivinen ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ -ydin.

Edellä on kerrottu keskeisimmät periaatteet, joilla yksinkertaisimmista ${}^1_1\text{H}$ -atomiytimistä eli proto-neista rakentuu yhä suurempia ja suurempia atomiymitymiä Auringossa ja muissa tähdissä, joita on arvioitu olevan $10^{22} - 10^{24}$ kappaletta.

4.3.14 Fissio

Kohdassa 4.3.6 selvitettiin, miten ${}^{235}_{92}\text{U}$ -ydin voi hajota ${}^{231}_{90}\text{U}$ -ytimeksi ja α -hiukkaseksi eli ${}^4_2\text{He}$ -ytimeksi ja että yhdessä reaktiossa vapautuva energia on 4,68 MeV ja jos ${}^{235}_{92}\text{U}$ -ytymiä hajoaa tällä tavalla 1 kg, vapautuu energiaa 533 MWh.

Ydin $^{235}_{92}\text{U}$ voi hajota myös suuremmiksi osiksi, jolloin puhutaan fissiosta. Tämä voi tapahtua itseksensäkin spontaanina fissiona, mutta se voidaan saada aikaan ampumalla neutroni sopivalla nopeudella $^{235}_{92}\text{U}$ -yttimeen, jolloin syntyy välittömästi hajoava ydin $^{236}_{92}\text{U}$. Hajoaminen voi tapahtua useamallakin tavalla, mutta yksi tyypillisimmistä on sen hajoaminen barium-ytimeksi, krypton-ytimeksi ja kolmeksi neutroniksi (kuva 22)



Kuva 22: $^{235}_{92}\text{U}$: n fissio.

Jos jätetään $^{236}_{92}\text{U}$ -vaihe pois, saadaan reaktioyhtälö massoina lausuttuna seuraavaksi

$$1,00866491588 \text{ u} + 235,0439299 \text{ u} \rightarrow 140,914411 \text{ u} + 91,926156 \text{ u} + 3 \cdot 1,00866491588 \text{ u}$$

$$236,0525948 \text{ u} \rightarrow 235,8665617 \text{ u}$$

mikä tarkoittaa energiana kaavan (4.3.1) mukaan

$$Q = (236,0525948 - 235,866562) \cdot 931,494095 \text{ MeV} \approx 173 \text{ MeV}$$

Massakadon suhde $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimen massaan on

$$q = \frac{236,0525948 \text{ u} - 235,866562 \text{ u}}{235,0439299 \text{ u}} \approx 7,91482 \cdot 10^{-4}$$

Jos $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiä hajoaa tällä tavoin 1 kg, vapautuu massaa energiaksi määrä q kg, joka energiana on

$$E = qc^2 = 7,91482 \cdot 10^{-4} \cdot 299792458^2 \text{ J} = \frac{7,91482 \cdot 10^{-4} \cdot 299792458^2}{10^6 \cdot 60 \cdot 60} \text{ MWh} \approx 19800 \text{ MWh}$$

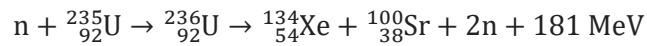
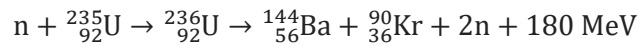
Vertaamalla tätä aikaisemmin saatuihin tuloksiin, todetaan, että 1 kg $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiä edellä mainitulla fissiolla tuottaa n. 37-kertaisesti sen energiamäärän, 533 MWh, jonka 1 kg $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiä kohdan 4.3.6 mukaan tuottaa α -hajotessaan. Mutta se tuottaa vain n. 21 % siitä energiamäärästä, 93700 MWh, jonka 1 kg ^2_1H - ja ^3_1H -ytimiä kohdan 4.3.11 mukaan tuottaa fuusioituessaan ja vain n. 11 % siitä energiamäärästä, 177800 MWh, jonka 1 kg ^1_1H -ytimiä kohdan 4.3.12 mukaan tuottaa fuusioituessaan ^4_2He -ytimiksi.

Jos $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiä hajoaa 1012 kg, on vapautuva energia

$$E = 1012 \cdot qc^2 \approx 20000000 \text{ MWh} = 20 \text{ TWh}$$

joka on Olkiluoto 1:n koko vuoden energiatuotanto, josta n. 7 TWh on sähköenergiaa. Kts. esim 13 kohdassa 3.4.4.

Edellä oleva on vain esimerkki hyvin monista tavoista, joilla $^{235}_{92}\text{U}$ -ydin voi fissioitua. Muita mahdollisuuksia ovat mm.



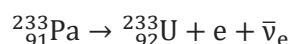
Oleellista fissioilla energiaa tuotettaessa on, että saadaan aikaan ketjureaktioita. Näiden edellytyksenä on, että fissioissa syntyy riittävästi neutroneja, fissioituvaa ainetta on riittävän paljon, jotta syntyvät neutronit voivat osua uusiin ytimiin, ja syntyvillä neutroneilla on sopiva nopeus, jotta neutroni jää ytimeen ja virittää sen niin, että se fissioituu.

Maankuoresta uraania on 1,8 – 2,7 miljoonasosaa (ppm), siis vähän vähemmän kuin tinaa ja paljon enemmän kuin esimerkiksi hopeaa. Joissakin graniiteissa uraania voi olla jopa 20 ppm. Uraniniitti eli pikivälke-mineraali sisältää pääosin uraanin oksideja UO_2 ja U_3O_8 . Luonnossa uraani koostuu kuitenkin kolmesta isotoopista $^{234}_{92}\text{U}$, $^{235}_{92}\text{U}$ ja $^{238}_{92}\text{U}$, joista ainoastaan $^{235}_{92}\text{U}$ tuottaa riittävästi neutroneja hajotessaan, mutta sitä on uraanista vain 0,72 %, mikä on useimpien ydinvoimaloiden teknille liian vähän. Uraania on siis väkeväitävä eli isotoopin $^{235}_{92}\text{U}$ osuutta nostettava. Ydinvoimaloiden polttoaineessa $^{235}_{92}\text{U}$:n pitoisuus on nostettu 3 – 5 prosenttiin, jolloin $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiä on riittävän tiheässä, jotta vapautuneet neutronit osuvat riittävän usein $^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiin. Neutronivirtojen voimakkuuksia säädellään neutroneja imevillä säätösauvoilla niin, että fissioita tapahtuu haluttua tahtia.

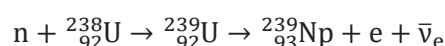
Fissioketjun, ns. ketjureaktion, syntymiselle riittävän määrän neutroneja tuottavia aineita ovat $^{235}_{92}\text{U}$:n lisäksi $^{233}_{92}\text{U}$ ja plutoniumin isotoopit $^{239}_{94}\text{Pu}$ ja $^{241}_{94}\text{Pu}$. Näistä isotooppia $^{233}_{92}\text{U}$ voidaan saada maankuoren yleisimmästä radioaktiivisesta isotoopista, toriumin isotoopista $^{232}_{90}\text{Th}$, jonka keskimääräinen pitoisuus on 6 – 9,6 ppm. Kun $^{232}_{90}\text{Th}$ -yttimeen osuu neutroni ja jää siihen, syntyy $^{233}_{90}\text{Th}$ -ydin. Tämä on β^- -aktiivinen ja hajoaa heikon vuorovaikutusvoiman vaikutuksesta protaktiniumin isotoopin $^{233}_{91}\text{Pa}$ ytimeksi, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi



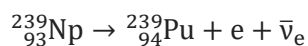
Ydin $^{233}_{91}\text{Pa}$ on niin ikään β^- -aktiivinen ja hajoaa $^{233}_{92}\text{U}$ -ytimeksi, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi



Kuten sanottu, ydinvoimalan polttoainesauvan uraanista 3 – 5 % on isotooppia $^{235}_{92}\text{U}$ ja loput isotooppia $^{238}_{92}\text{U}$. Kun fissiossa syntynyt neutroni osuu $^{238}_{92}\text{U}$ -yttimeen, syntyy β^- -aktiivinen $^{239}_{92}\text{U}$ -ydin, joka hajoaa neptuniumin isotoopin $^{239}_{93}\text{Np}$ ytimeksi, elektroniksi ja elektronin antineutriinoksi



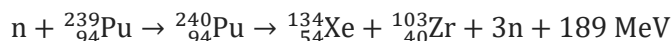
Myös $^{239}_{93}\text{Np}$ on β^- -aktiivinen ja hajoaa siis



Näin ydinvoimala tuottaa koko ajan hyvin puhdasta ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ -isotooppia.

Isotooppi ${}^{241}_{94}\text{Pu}$ syntyy puolestaan, kun ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ -ydin sieppaa kaksi neutronia.

Edellä mainitut plutoniumin isotoopit fissioituvat neutronin osuessa ytimeen samaan tapaan kuin ${}^{235}_{92}\text{U}$, esimerkiksi



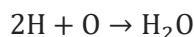
Fissiopommeissa eli atomipommeissa käytetään uraanin isotooppia ${}^{235}_{92}\text{U}$ tai plutoniumin isotooppia ${}^{239}_{94}\text{Pu}$. Jälkimmäistä saadaan hyvin puhtaana ydinvoimaloista ainoana ongelmana se, että neutronien osuessa ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ -ytimiin syntyy voimakkaasti spontaanilla fissiolla hajoavaa isotooppia ${}^{240}_{94}\text{Pu}$. Uraanin isotoopin ${}^{235}_{92}\text{U}$ väkevöimistä on jatkettava siitä, mikä toimii ydinvoimaloissa niin, että sen osuudeksi tulee yli 85 %. Riittävän puhtaasta ${}^{235}_{92}\text{U}$:stä valmistetaan riittävä määrä niin pieniä palasia, että hallitsematon ketjureaktio ei niissä käynnisty. Kun sitten palaset räjäytetään esimerkiksi trotyylipanosilla samanaikaisesti samaan paikkaan, niin mikäli massaa on yli ns. kriittisen massan, fissioissa vapautuvat neutronit osuvat hyvin varmasti uusiin ${}^{235}_{92}\text{U}$ -ytimiin ja koko massa räjähtää hyvin nopeasti. Isotoopin ${}^{240}_{94}\text{Pu}$ voimakkaan radioaktiivisuuden vuoksi ${}^{239}_{94}\text{Pu}$:n suhteen on meneeltävä niin, että siitä valmistetaan pallon kuori, joka räjäytetään sen keskipisteeseen.

Fuusiopommeissa eli vetypommeissa ${}^2_1\text{H}$:n ja ${}^3_1\text{H}$:n fuusio käynnistetään uraani- tai plutoniumpommilla, jolla saadaan fuusiolle riittävä kuumuus ja paine. Suurimmat ydinpommit ovat olleet juuri vetypommeja ja kaikkein suurin Neuvostoliiton 31.10.1961 Novaja Zemljan saaristossa räjäyttämä Tsar-Bomba, jonka tuottama energia oli $2,1 \cdot 10^{17} \text{ J}$. Tämä on sama energia, jonka 57 megatonnia $57 \cdot 10^9 \text{ kg}$ trotyyliä tuottaa räjähtäessään. Kun r -säteisen pallon tilavuus on $4\pi r^3/3$ ja trotyylin tiheys on 1654 kg/m^3 , tarkoittaa tämä, että pommilla oli sama räjähdysenergia kuin trotyylipallolla, jonka läpimitta on

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 57 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 1654}} \approx 444 \text{ m}$$

4.3.15 Kemialliset reaktiot ja energia

Jos ainenäytteen kaikkien atomien ytimissä on yhtä monta protonia, näyte on neutronien lukumäärästä riippumatta samaa alkuainetta: vetyä, heliumia, litiumia, rautaa, kultaa, uraania tai jotakin muuta tällä hetkellä tunnetuista 118 alkuaineesta. Jos näytteen kaikissa atomeissa ei ole sama määrä protoneja, on näytteessä useampia alkuaineita kemiallisina yhdisteinä tai seoksina tai molempina. Kemiallisesta yhdisteestä esimerkki on vesi, jonka pienimmässä rakenneosasessa, vesimolekyylissä, on toisiinsa sitoutuneina kaksi vetyatomia ja yksi happiatomi. Veden molekyylilaava on siis H_2O . Tällainen molekyyli syntyy, kun vedyn ja hapen seosta lämmitetään riittävästi, jolloin reaktiot



käynnistyvät.

Yksi tällainen reaktio tuottaa energiaa määrän $Q = 2,9628 \text{ eV}$ (vrt. ${}^1\text{H}$ -atomin sidosenergia $13,6 \text{ eV}$ kohdassa 4.3.4). Kun 1 kg vetyä yhtyy happeen eli palaa vedeksi, näitä reaktioita tapahtuu

$$n = \frac{1 \text{ kg}}{2 \cdot 1,0080 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \approx 2,9872471 \cdot 10^{26} \text{ kpl}$$

sillä vetyatomien keskimääräinen massa on

$$m = 1,0080 \text{ u} = 1,0080 \cdot 1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Yhden vetykilogramman palaessa vapautuu energiaa siis määrä

$$E = 2,9872471 \cdot 10^{26} \cdot 2,9628 \text{ eV} = 2,9872471 \cdot 10^{26} \cdot 2,9628 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}$$

joka kaavan (4.3.1) mukaan on

$$E = 2,9872471 \cdot 10^{26} \cdot 2,9628 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1,492418062 \cdot 10^{-10}}{931,494095 \cdot 10^6} \text{ J} \approx 141800000 \text{ J} = 141,80 \text{ MJ}$$

Näin, olettaen että alkutilanteessa vedyn ja hapen lämpötila on 25°C ja lopputilanteessa syntynyt kaasumainen vesihöyry on muuttunut nestemäiseksi ja jäähtynyt 25 -asteiseksi.

Palamisreaktiossa vety- ja happiatomien elektronit järjestäytyvät uudelleen niin, että syntyvän vesimolekyylin elektroniverhon koko energia, potentiaali- ja liike-energioiden summa on pienin mahdollinen. Asian voi tulkita kohdassa 3.6 esitetyin perustein myös niin, että osa vety- ja happiatomien lepoenergiasta muuttuu niiden syntyvän vesimolekyylin liike-energiaksi. Ja jopa niin, että osa vety- ja happiatomien massasta muuttuu vesimolekyylin liike-energiaksi. Kaavan (3.4.7) mukaan tämä energiaksi muuttuva massa on

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{141,80 \cdot 10^6}{299792458^2} \approx 1,58 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

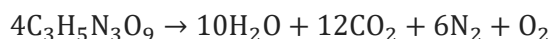
Se on tässä ja kaikissa muissakin kemiallisissa reaktioissa niin pieni, että sitä ei massojen määriä laskettaessa tarvitse ottaa huomioon.

Kun vetyatomien keskimääräinen massa on $1,0080 \text{ u}$ ja hapen $15,9994 \text{ u}$, niin vedessä hapen määrän suhde vedyn määrään on $15,9994 / (2 \cdot 1,0080)$. Tämä merkitsee, että yhden vetykilogramman polttamiseen tarvitaan $15,9994 / (2 \cdot 1,0080) \text{ kg}$ happea ja palamistuloksena saadaan

$$1 \text{ kg} + \frac{15,9994}{2 \cdot 1,00794} \text{ kg} \approx 8,9362 \text{ kg}$$

vettä.

Energiaa voi myös syntyä, kun aineen molekyylit hajoavat yksinkertaisemmiksi. Tästä esimerkki on dynamiitin vaikuttavan aineen, nitroglyseriinin, räjähtäminen vedeksi, hiilidioksidiksi, typeksi ja hapeksi:



Tällöin vapautuva energia nitroglyseriinikilogrammaa kohden on $6,73 \text{ MJ}$, mikä massana on

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{6730000}{299792458^2} \approx 7,49 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$$

eli n. 4,7 % siitä, mitä kului vesikilogramman muodostamisessa vetyä polttamalla. Koska nitroglyseriini on nestemäinen aine ja kaikki räjähdystuotteet reaktion synnyttämässä lämpötilassa kaasuja, syntyy siihen tilaan, jossa nitroglyseriiniannos räjähtää, kova paine suurella nopeudella säntäilevien kaasumolekyylien törmäillessä tilan seiniin. Tämä paine saa räjäytettävän kappaleen hajoamaan. Osa vapautuvasta energiasta siirtyy siis syntyvien kaasujen ja kappaleiden sisäiseksi lämpöenergiaksi, mutta osa antaa syntyville kappaleille liike-energiaa, joka sekin kappaleiden hidastuessa ja lopulta pysähtyessä muuttuu lämmöksi eli lisää itse kappaleiden ja niiden ympäristöjen molekyylien värähtelyenergiaa.

5 LOPUKSI

Tämä kirjoitus käynnistyi neljästä hyvin helposti uskottavasta perusoletuksesta P1, P2, P3 ja P4 sekä yhdestä kummallisesta perusoletuksesta P5, jonka mukaan on olemassa liike (valon eteneminen tyhjiössä), jonka nopeus on sama c kaikissa toistensa suhteen vakionopeudella liikkuvissa inertiaalijärjestelmissä. Näistä perusoletuksista kehitettiin johdonmukaisella päättelyllä kaavat ajan hidastumiselle, pituuden lyhenemiselle, samanaikaisuuden suhteellisuudelle ja nopeuksien yhteenlaskulle. Nopeuksien yhteenlaskukaava yhdessä liikemäärälle asetettujen vaatimusten L1, L2 ja L3 sekä liike-energialle asetettujen vaatimusten K1, K2, K3 ja K4 kanssa johti siihen, että suureet liikemäärä ja liike-energia jouduttiin määrittelemään uudelleen. Tämä puolestaan johti massan ja energian väliseen yhteyteen, siis siihen, että massan lepoenergia voi muuttua muiksi energiamuodoiksi. Massan ja energian välisen yhteyden löytäminen puolestaan tekee ymmärrettäväksi sen, miksi Aurinkossa ja muissa tähdissä voi fuusioitua uudenlaisia atomiytimiä.

Tätä kaikkea on hauska miettiä joskus, kun vaikkapa lukee kuvauksia ASASSN-15lh:sta. Tämä supernova tai mustan aukon syövereihin uppoava tähti nimittäin tuotti, massaa energiaksi muuttaessaan, energiaa kesällä 2015 niin, että parhaimmillaan se säteili yhden päivän aikana enemmän kuin Aurinko miljardissa vuodessa. Toisaalta mielenkiintoista on pohtia, miten ammoisina aikoina jonkin tähden keskuksessa alkaneesta protonien yhtymisistä helium-ytimiksi on tultu nykytilanteeseen. Tätä voi ihmetellä katsellessaan 0,5 mm pitkän ja 0,1 mm leveän lentokykyisen kovakuoriaisen, raidankääpäripsikän (*Baranowskiella ehnstromi*), puuhastelua kääpänsä pillistöössä tai pohtia, miten aistiton solmusiin kuuluva limasieni (*Physarum polycephalum*) pystyy etsimään lyhyimmän reitin labyrintin läpi tai rakentamaan optimaalisen reittiverkoston eri ravintopaikkojen välille. Sitä, mitä kaikkia elimiä niissä on ja miten ne toimivat. Mutta myös sitä, mistä aineista ne ovat rakentuneet ja mistä ne saavat elämiseen tarvitsemansa energian ja mistä nuo aineet ja energia ovat alkuaan peräisin.

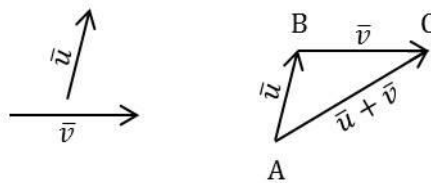
LIITE 1

Vektorit

Vektorin käsitteen lähtökohtana on suunnattu jana jostakin pisteestä A, alkupisteestä, johonkin pisteeseen B, loppupisteeseen. Suunnattu jana $\overrightarrow{AB}$ määrittää vektorin, joka on kaikkien niiden suunnattujen janojen joukko, joilla on sama pituus ja sama suunta kuin suunnatulla janalla $\overrightarrow{AB}$. Vektorin edustajaksi voidaan ottaa tarpeen mukaan mikä tahansa näistä keskenään samanpituuisista ja samansuuntaisista suunnatuista janoista. Se, milloin tarkoitetaan vain vektorin pituutta ja milloin itse vektoria, ilmaistaan niin, että vektorille käytetään merkintää $\vec{v}$ ja sen pituudelle merkintää v .

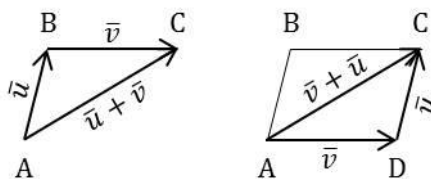
Vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ summa määritellään seuraavasti: jos vektorin $\vec{u}$ edustajaksi valitaan suunnattu jana $\overrightarrow{AB}$ ja vektorin $\vec{v}$ edustajaksi suunnattu jana $\overrightarrow{BC}$, on suunnattu jana $\overrightarrow{AC}$ vektorin $\vec{u} + \vec{v}$ edustaja.

Vektoreiden yhteenlasku



Vektoreiden yhteenlasku noudattaa vaihdantalakia, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, sillä jos $\overrightarrow{AD}$ valitaan vektorin $\vec{v}$ edustajaksi, on nelikulmio ABCD suunnikas, koska sen toiset vastakkaiset sivut BC ja AD ovat saman vektorin $\vec{v}$ edustajina yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Koska ABCD on suunnikas, ovat myös sen toiset vastakkaiset sivut AB ja CD yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, jolloin suunnattu jana $\overrightarrow{DC}$ kelpaa vektorin $\vec{u}$ edustajaksi. Näin ollen suunnikkaan toinen lävistäjä $\overrightarrow{AC}$ on sekä $\vec{u} + \vec{v}$:n että $\vec{v} + \vec{u}$:n edustaja.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

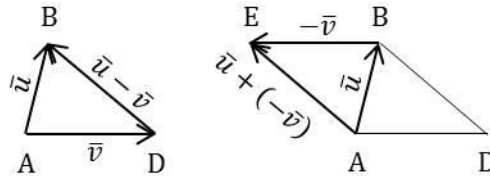


Samaan tapaan voidaan osoittaa, että vektoreiden yhteenlasku noudattaa myös liitäntälakia eli $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. On myös olemassa vektori $\vec{0}$, jolle pätee $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ja jota tästä syystä kutsutaan yhteenlaskun neutraalivektoriksi tai yksinkertaisemmin nollavektoriksi. Nollavektoria edustaa suunnattu jana $\overrightarrow{AA}$, jolla on kuitenkin se puute, että sillä ei ole määrättyä suuntaa. Jos suunnattu jana $\overrightarrow{AB}$ on vektorin $\vec{u}$ edustaja, on suunnatun janan $\overrightarrow{BA}$ edustamalla vektorilla $-\vec{u}$ ominaisuus $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$. Vektoria $-\vec{u}$ kutsutaan vektorin $\vec{u}$ yhteenlaskun käänteisvektoriksi, lyhyemmin vastavektoriksi.

Vektoreiden $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ erotus, $\vec{u} - \vec{v}$ tarkoittaa vektoria, joka on lisättävä vektoriin $\vec{v}$, jotta saataisiin $\vec{u}$. Siis aivan samoin kuin $5 - 2 = 3$ sen vuoksi, että 3 on se luku, joka on lisättävä lukuun 2, jotta

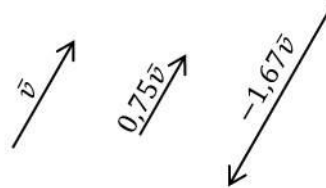
saataisiin luku 5. Määritelmän perusteella suunnattu jana $\overrightarrow{DB}$ on vektorin $\vec{u} - \vec{v}$ edustaja, jos $\overrightarrow{AB}$ on vektorin $\vec{u}$ edustaja ja $\overrightarrow{AD}$ vektorin $\vec{v}$ edustaja. Jos tällöin vektorin $-\vec{v}$ edustajaksi valitaan suunnattu jana $\overrightarrow{BE}$, on suunnattu jana $\overrightarrow{AE}$ vektorin $\vec{u} + (-\vec{v})$ edustaja. Koska suunnatut janat $\overrightarrow{DA}$ ja $\overrightarrow{BE}$ ovat vektorin $-\vec{v}$ edustajina yhtä pitkät ja samansuuntaiset, on nelikulmio AEBD suunnikas ja näin ollen myös $\overrightarrow{DB}$ on vektorin $\vec{u} + (-\vec{v})$ edustaja ja kun se on samalla vektorin $\vec{u} - \vec{v}$ edustaja, päätellään, että $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Vähennyslasku ei noudata vaihdantalakia, vaan $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Vektoreille ei ole olemassa kertolaskua, joka noudattaisi edellä mainittuja vaihdanta- ja liitântälakia ja jolla olisi neutraalivektori ja jokaisella vektorilla käänteisvektori. Kuitenkin vektori voidaan kertoa luvulla, mikä tapahtuu niin, että jos $\vec{v}$ on vektori ja k reaalityyppinen luku, niin $k\vec{v}$ vektori, jonka pituus on $k|\vec{v}|$ ja suunta sama kuin vektorilla $\vec{v}$, jos $k \geq 0$ ja $\vec{v}$:n suunnalle vastakkainen, jos $k < 0$.

Vektorin kertominen luvulla



Luvulla kertomiselle on voimassa:

$$0\vec{v} = \vec{0}, 1\vec{v} = \vec{v}, (-1)\vec{v} = -\vec{v}, k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} \text{ ja } (k + h)\vec{v} = k\vec{v} + h\vec{v}$$

Suunnan ottaminen mukaan vektoreiden tarkasteluun voi tapahtua useammalla eri tavalla, mutta tehtiinpä se miten tahansa, on aina ensin kiinnitettävä jokin suunta perussuunnaksi. Kiinnitetään nyt perussuunnan kanssa yhdensuuntainen lukusuora niin, että sen luvut kasvavat perussuuntaan. Seuraavassa kaikki tarkasteltavat vektorit ovat samassa tasossa, jolloin vektorin määrittää kaksi lukua. Nämä luvut voivat olla vektorin pituus v ja sen suuntakulma φ mitattuna positiiviseen kiertosuuntaan (kellon osoittimien kiertosuuntaa vastaan) positiivisesta x -akselista. Toinen mahdollisuus on ilmoittaa vektorin komponentit x -akselin suunnassa eli 0° -suunnassa ja y -akselin suunnassa eli 90° -suunnassa. Jos suunnattu jana $\overrightarrow{AB}$ on vektorin $\vec{v}$ edustaja ja sen alkupiste A on x -akselilla, niin piirretään pisteestä A x -akselia vastaan kohtisuora suora. Jos tämän suoran ja x -akselin leikkauspiste on C, niin $\vec{v}$:n vektorikomponentti x -akselin suuntaan $\vec{v}_x$ on vektori, jonka edustaja on suunnattu jana $\overrightarrow{AC}$ ja $\vec{v}$:n vektorikomponentti y -akselin suuntaan $\vec{v}_y$ on vektori, jonka edustaja on suunnattu jana $\overrightarrow{CB}$. Tällöin $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

Näin määriteltyjen komponenttien pituudet v_x ja v_y määrittävät vektorin $\vec{v}$ yksikäsitteisesti ja $\vec{v}$ voidaan lausua näiden komponenttiensa muodostamana lukuparina $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Komponenttiesi-

tys on kätevä, koska vektoreiden yhteenlasku ja luvulla kertominen voidaan tehdä komponenteittain, jolloin ne muuttuvat reaalityyppien laskutoimituksiksi:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

$$k\vec{u} = k(u_x, u_y) = (ku_x, ku_y)$$

Trigonometrinen funktioiden määrittelyä seuraa nyt suoraan, että jos vektorista $\vec{v}$ tiedetään sen pituus v ja suuntakulma φ , niin

$$\vec{v} = (v \cos \varphi, v \sin \varphi)$$

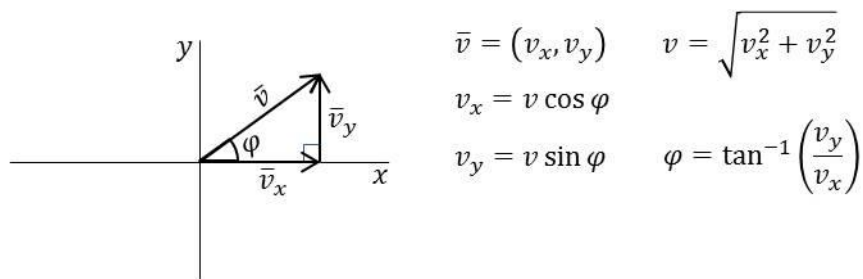
ja jos vektorista $\vec{v}$ tiedetään sen komponentit v_x ja v_y , niin sen pituus Pythagoraan lauseen ja suuntakulma $\tan^{-1}$:n määrittelyn mukaan ovat

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

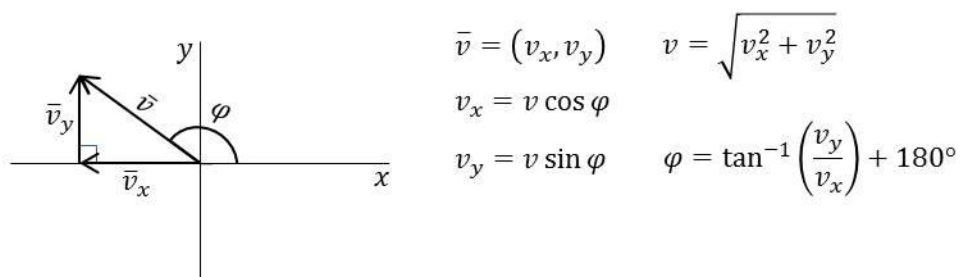
$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right), & \text{jos } v_x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + 180^\circ, & \text{jos } v_x < 0 \\ 90^\circ, & \text{jos } v_x = 0 \text{ ja } v_y > 0 \\ 270^\circ, & \text{jos } v_x = 0 \text{ ja } v_y < 0 \end{cases}$$

Valitettavasti tangentin käänteisfunktioille $\tan^{-1}a$:lle eli sille, kulmalle φ , jolle $\tan \varphi = a$ ei ole standardisoitua merkintää, vaan merkintä voi olla myös $\arctan$, atan , INVtan jne. Lisäksi on huomattava, että jos $x > 0$ ja $y < 0$, niin laskimet ja taulukkolaskentaohjelmat antavat $\tan^{-1}(y/x)$:ksi negatiivisen suuntakulman, jonka voi muuttaa positiiviseksi lisäämällä siihen 360° .

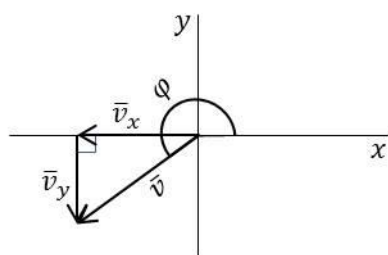
Vektorin komponenttiesitys



Vektorin komponenttiesitys

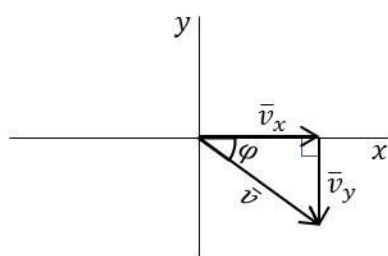


Vektorin komponenttiesitys



$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x, v_y) & v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v_x &= v \cos \varphi \\ v_y &= v \sin \varphi & \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) + 180^\circ\end{aligned}$$

Vektorin komponenttiesitys



$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x, v_y) & v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v_x &= v \cos \varphi \\ v_y &= v \sin \varphi & \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)\end{aligned}$$

LIITE 2

Liikemääräfunktion ratkaiseminen

Selvitetään, mikä funktio f toteuttaa ehdot

$$(L. 2.1) \quad \frac{c^2}{c^2 + u^2} f\left(\frac{2c^2 u}{c^2 + u^2}\right) = f\left(u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$$

kaikilla u , joille $0 \leq u < c$, ja

$$(L. 2.2) \quad \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$$

Oletetaan, että funktio f toteuttaa yhtälön (L. 2.1) ja valitaan mielivaltainen reaaliluku x , jolle pätee $x \geq 1$. Tällöin luvulle

$$(L. 2.3) \quad u = c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

pätee $0 \leq u < c$ ja se toteuttaa näin ollen yhtälön (L. 2.1), jonka lausekkeet saavat seuraavat muodot:

$$(L. 2.4) \quad \frac{c^2}{c^2 + u^2} = \frac{c^2}{c^2 + c^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}} = \frac{c^2(x+1)}{c^2(x+1) + c^2(x-1)} = \frac{c^2(x+1)}{2c^2x} = \frac{x+1}{2x}$$

$$(L. 2.5) \quad \frac{2c^2 u}{c^2 + u^2} = 2 \cdot \frac{x+1}{x} \cdot c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{c(\sqrt{x+1})^2 \sqrt{x-1}}{x\sqrt{x+1}} = \frac{c\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x} = \frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}$$

ja

$$\begin{aligned} u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}} &= c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{2 - \frac{c^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}}{c^2}} = c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{2 - \frac{x-1}{x+1}} = c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{2(x+1) - (x-1)}{x+1}} \\ &= c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{2x+2-x+1}{x+1}} = c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} = \frac{c\sqrt{(x-1)(x+3)}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{c\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} \\ &= \frac{c\sqrt{x^2+2x+1-4}}{x+1} = \frac{c\sqrt{(x+1)^2-4}}{x+1} = \frac{2c\sqrt{\frac{(x+1)^2}{4}-1}}{x+1} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}}{\frac{x+1}{2}} \end{aligned}$$

Siis

$$(L. 2.6) \quad u \sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{c\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}}{\frac{x+1}{2}}$$

Kun (L. 2.4), (L. 2.5) ja (L. 2.6) sijoitetaan yhtälöön (L. 2.1), saadaan

$$\frac{x+1}{2x} f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}}{\frac{x+1}{2}}\right)$$

ja edelleen

$$(L. 2.7) \quad \frac{f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right)}{x} = \frac{f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}}{\frac{x+1}{2}}\right)}{\frac{x+1}{2}}$$

Kun merkitään

$$(L. 2.8) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right)}{x}$$

tulee yhtälöstä (L. 2.7)

$$g(x) = g\left(\frac{x+1}{2}\right) = g\left(\frac{x-1+2}{2}\right) = g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right)$$

Sijoitetaan tähän x :n paikalle $(x-1)/2 + 1$, jolloin saadaan

$$g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = g\left(\frac{\frac{x-1}{2} + 1 - 1}{2} + 1\right) = g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right)$$

ja sitten $(x-1)/2^2 + 1$, jolloin saadaan

$$g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right) = g\left(\frac{\frac{x-1}{2^2} + 1 - 1}{2} + 1\right) = g\left(\frac{x-1}{2^3} + 1\right)$$

jne. Siis

$$g(x) = g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right) = g\left(\frac{x-1}{2^3} + 1\right) = \dots$$

Lopputuloksena on jokaisella luvulla $x \geq 1$ ja jokaisella luonnollisella luvulla $n = 1, 2, 3, \dots$ voimassa oleva yhtälö

$$g(x) = g\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)$$

ja kun tämän yhtälön oikeassa puolella käytetään $g(x)$:n määritelmää yhtälöstä (L. 2.8), saadaan

$$(L. 2.9) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1}\right)}{\frac{x-1}{2^n} + 1}$$

Kun tässä n kasvaa rajattomasti, lähestyy $(x-1)/2^n$ raja-arvonaan 0:aa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2^n} = 0$$

jolloin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c\sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1} = \frac{c\sqrt{(0+1)^2 - 1}}{0+1} = 0$$

ja yhtälöstä (L. 2.9) saadaan ehdon (L. 2.2) mukaan

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1}\right)}{\frac{x-1}{2^n} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

Tämä puolestaan tarkoittaa yhtälön (L. 2.8) mukaan

$$\frac{f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right)}{x} = 1$$

$$(L. 2.10) \quad f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = x$$

Koska x oli mielivaltainen vähintään 1:n suuruinen reaalityö, päätellään, että yhtälö (L. 2.10) toteutuu kaikilla reaalityöillä x , jotka ovat ≥ 1 .

Merkitään

$$(L. 2.11) \quad \frac{c\sqrt{x^2-1}}{x} = u$$

jolloin

$$c^2 x^2 - c^2 = u^2 x^2$$

$$x^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2}$$

ja koska $x \geq 1$, on

$$x = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Jos nyt u on mikä tahansa reaaliluku, jolle pätee $0 \leq u < c$, on $x \geq 1$, joten u toteuttaa yhtälön (L. 2.10) eli

$$(L. 2.12) \quad f(u) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Siis, jos funktio f toteuttaa ehdot (L. 2.1) ja (L. 2.2), sen on toteutettava myös (L. 2.12) kaikilla u , $0 \leq u < c$.

Toisaalta kaavan (L. 2.12) funktiolle f pätee jokaisella u , $0 \leq u < c$:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{c^2 + u^2} f\left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right) &= \frac{c^2}{c^2 + u^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{2c^2u}{c^2 + u^2}\right)^2}} = \frac{c^2}{c^2 + u^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2(c^2 + u^2)^2 - 4c^4u^2}{(c^2 + u^2)^2}}} \\ &= \frac{c^2}{c^2 + u^2} \cdot \frac{c(c^2 + u^2)}{c\sqrt{(c^2 + u^2)^2 - 4c^2u^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 2c^2u^2 + u^4 - 4c^2u^2}} \\ &= \frac{c^2}{\sqrt{c^4 - 2c^2u^2 + u^4}} = \frac{c^2}{\sqrt{(c^2 - u^2)^2}} = \frac{c^2}{c^2 - u^2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f\left(u\sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right) &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - \left(u\sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2\left(2 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 2u^2 + \frac{u^4}{c^2}}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\frac{c^4 - 2c^2u^2 + u^4}{c^2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{(c^2 - u^2)^2}}{c}} = \frac{c^2}{c^2 - u^2} \end{aligned}$$

joten f toteuttaa ehdon (L. 2.1). Lisäksi

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - 0^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c}{c} = 1$$

ja f toteuttaa myös ehdon (L. 2.2). On siis osoitettu, että funktio f

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

ja vain se toteuttaa ehdot (L. 2.1) ja (L. 2.2).

LIITE 3

Liike-energiafunktion ratkaiseminen

Selvitetään, mikä funktio f , toteuttaa ehdot

$$(L. 3.1) \quad f\left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right) = 2f\left(u\sqrt{2-\frac{u^2}{c^2}}\right)$$

kaikilla u , joille $0 \leq u < c$, ja

$$(L. 3.2) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$$

$$(L. 3.3) \quad f(0) = 0$$

Ratkaisu on hyvin samantapainen kuin liikemääräyhtälön ratkaisu liitteessä 2. Aloitetaan siis tekemällä sama sijoitus (L. 2.3) kuin liitteessä 2

$$u = c \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

jolloin yhtälöiden (L. 2.5) ja (L. 2.6) mukaan yhtälö (L. 3.1) saa muodon

$$(L. 3.4) \quad f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = 2f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}}{\frac{x+1}{2}}\right)$$

Funktiolla

$$(L. 3.5) \quad g(x) = f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

on tällöin (L. 3.4):n mukaan ominaisuus

$$g(x) = 2g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g\left(\frac{x-1+2}{2}\right) = 2g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right)$$

siis

$$g(x) = 2g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right)$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan x :n paikalle ensin $(x-1)/2 + 1$, sitten $(x-1)/2^2 + 1$ jne, saadaan

$$g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = 2g\left(\frac{\frac{x-1}{2} + 1 - 1}{2} + 1\right) = 2g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right)$$

$$g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right) = 2g\left(\frac{\frac{x-1}{2^2} + 1 - 1}{2} + 1\right) = 2g\left(\frac{x-1}{2^3} + 1\right)$$

Siis

$$g(x) = 2g\left(\frac{x-1}{2} + 1\right) = 2^2g\left(\frac{x-1}{2^2} + 1\right) = 2^3g\left(\frac{x-1}{2^3} + 1\right) = \dots$$

Kun tämä tehdään n kertaa, päädytään yhtälöön

$$g(x) = 2^n g\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)$$

ja kun tämän yhtälön oikeassa puolella käytetään $g(x)$:n määritelmää yhtälöstä (L. 3.5), saadaan

$$g(x) = 2^n f\left(\frac{c\sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1}\right)$$

Lausekkeiden yksinkertaistamiseksi merkitään tässä

$$(L. 3.6) \quad y_n = \frac{c\sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1}$$

jolloin saadaan

$$g(x) = 2^n f(y_n)$$

Jotta tähän päästäisiin käyttämään ehtoa (L. 3.2), lavennetaan yhtälön oikea puoli lausekkeella

$$\begin{aligned} y_n^2 &= \frac{c^2 \left(\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2 - 1\right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2} = \frac{c^2 \left(\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) - 1\right) \left(\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) + 1\right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2} \\ &= \frac{c^2 \left(\frac{x-1}{2^n}\right) \left(\frac{x-1}{2^n} + 2\right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2} \end{aligned}$$

jolloin saadaan

$$g(x) = 2^n f(y_n) \cdot \frac{\frac{c^2 \left(\frac{x-1}{2^n}\right) \left(\frac{x-1}{2^n} + 2\right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2}}{y_n^2} = 2^n \cdot \frac{c^2 \left(\frac{x-1}{2^n}\right) \left(\frac{x-1}{2^n} + 2\right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)^2} \cdot \frac{f(y_n)}{y_n^2}$$

$$= \frac{c^2(x-1) \left(\frac{x-1}{2^n} + 2 \right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1 \right)^2} \cdot \frac{f(y_n)}{y_n^2}$$

Kun tässä annetaan n :n kasvaa rajattomasti, saadaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c \sqrt{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1 \right)^2 - 1}}{\frac{x-1}{2^n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c \sqrt{(0+1)^2 - 1}}{0+1} = 0$$

jolloin ehdon (L. 3.2) mukaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n)}{y_n^2} = \frac{1}{2}$$

ja kaikkiaan

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c^2(x-1) \left(\frac{x-1}{2^n} + 2 \right)}{\left(\frac{x-1}{2^n} + 1 \right)^2} \cdot \frac{f(y_n)}{y_n^2} \right) = \frac{c^2(x-1) \cdot (0+2)}{(0+1)^2} \cdot \frac{1}{2} = c^2(x-1)$$

Siis

$$(L. 3.7) \quad f\left(\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = c^2x - c^2$$

Näin kaikilla $x > 1$. Mutta (L. 3.7) pätee myös, kun $x = 1$, sillä ehdon (L. 3.3) mukaan $f(0) = 0$.

Kuten liitteessä 2 merkitään

$$\frac{c\sqrt{x^2-1}}{x} = u$$

jolloin

$$x = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

ja todetaan, että jos u on mikä tahansa reaaliluku, jolle pätee $0 \leq u < c$, on $x \geq 1$, joten se toteuttaa yhtälön (L. 3.7). Toisin sanoen kaikilla $0 \leq u < c$ pätee

$$(L. 3.8) \quad f(u) = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} - c^2$$

Siis, jos funktio f toteuttaa ehdot (L. 3.1) – (L. 3.3), sen on toteutettava (L. 3.8) kaikilla u , $0 \leq u < c$.

Oletetaan nyt kääntäen, että f toteuttaa yhtälön (L. 3.8) kaikilla u , $0 \leq u < c$. Koska

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right) &= \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{2c^2u}{c^2+u^2}\right)^2}} - c^2 = \frac{c^3}{\sqrt{\frac{c^2(c^2+u^2)^2 - 4c^4u^2}{(c^2+u^2)^2}}} - c^2 \\
&= \frac{c^3(c^2+u^2)}{c\sqrt{(c^2+u^2)^2 - 4c^2u^2}} - c^2 = \frac{c^2(c^2+u^2)}{\sqrt{c^4 + 2c^2u^2 + u^4 - 4c^2u^2}} - c^2 \\
&= \frac{c^4 + c^2u^2}{\sqrt{c^4 - 2c^2u^2 + u^4}} - c^2 = \frac{c^4 + c^2u^2}{\sqrt{(c^2 - u^2)^2}} - c^2 = \frac{c^4 + c^2u^2}{c^2 - u^2} - c^2 \\
&= \frac{c^4 + c^2u^2 - c^4 + c^2u^2}{c^2 - u^2} = \frac{2c^2u^2}{c^2 - u^2}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
2f\left(u\sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right) &= \frac{2c^3}{\sqrt{c^2 - \left(u\sqrt{2 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^2}} - 2c^2 = \frac{2c^3}{\sqrt{c^2 - u^2\left(2 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} - 2c^2 \\
&= \frac{2c^3}{\sqrt{c^2 - 2u^2 + \frac{u^4}{c^2}}} - 2c^2 = \frac{2c^3}{\sqrt{\frac{c^4 - 2c^2u^2 + u^4}{c^2}}} - 2c^2 \\
&= \frac{2c^4}{\sqrt{(c^2 - u^2)^2}} - 2c^2 = \frac{2c^4}{c^2 - u^2} - 2c^2 \\
&= \frac{2c^4 - 2c^4 + 2c^2u^2}{c^2 - u^2} = \frac{2c^2u^2}{c^2 - u^2}
\end{aligned}$$

toteuttaa f ehdon (L. 3.1) ja kun

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{c^3}{\sqrt{c^2 - u^2}} - c^2}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c^3 - c^2\sqrt{c^2 - u^2}}{u^2\sqrt{c^2 - u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(c^3 - c^2\sqrt{c^2 - u^2})(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - u^2})}{u^2\sqrt{c^2 - u^2}(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - u^2})} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c^6 - c^4(c^2 - u^2)}{u^2\sqrt{c^2 - u^2}(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - u^2})} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c^6 - c^6 + c^4u^2}{u^2\sqrt{c^2 - u^2}(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - u^2})} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c^4}{\sqrt{c^2 - u^2}(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - u^2})} = \frac{c^4}{\sqrt{c^2 - 0^2}(c^3 + c^2\sqrt{c^2 - 0^2})} = \frac{c^4}{c(c^3 + c^3)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

toteuttaa f ehdon (L. 3.2) ja vielä kun

$$f(0) = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - 0^2}} - c^2 = \frac{c^3}{c} - c^2 = 0$$

toteuttaa se myös ehdon (L. 3.3).

Näin on todistettu, että kaavan (L. 3.8) mukainen funktio f toteuttaa ehdot (L. 3.1) – (L. 3.3) ja on ainoa tällainen funktio.

Yleensä f esitetään muodossa

$$f(u) = \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - c^2$$

LIITE 4

Muutamia esimerkkejä liikemääristä ja kokonaisenergioista

Tässä liitteessä esitetään muutama kappalejoukkojen liikemääriin ja liike-energioihin liittyvä esimerkki, joiden tarkoituksena on korostaa huolellisuutta suhteellisuusteoriaa koskevien väitteiden esittämisessä ja suhteellisuusteorian ja klassisen teorian välisiä eroja.

Ensimmäiseksi käsitellään esimerkki tapauksesta, jossa – toisin kuin klassisessa teoriassa – kappalejoukkojen liikemäärien yhtäsuuruus ei säily järjestelmästä toiseen siirryttäessä, vaikka kappalejoukoilla on yhtä suuret massat.

Esim L.4.1 Oletetaan, että joukossa **A** on kaksi kappaletta, K_{A1} ja K_{A2} sekä joukossa **B** yksi kappale K_B ja kaikki kappaleet liikkuvat järjestelmän $\mathcal{T}$ kulkusuuntaan, jolloin tarkastelu voidaan tehdä yksiulotteisena. Oletetaan, että K_{A1} :n massa on 4 kg, K_{A2} :n massa 3 kg ja K_B :n massa 7 kg ja että järjestelmässä $\mathcal{T}$ on K_{A1} :n nopeuden suuruus $0,6c$, ja K_{A2} :n nopeuden suuruus $0,8c$.

Joukon **A** liikemäärä järjestelmässä $\mathcal{T}$ on tällöin

$$\frac{4 \cdot 0,6c}{\sqrt{1 - \frac{0,6^2 c^2}{c^2}}} + \frac{3 \cdot 0,8c}{\sqrt{1 - \frac{0,8^2 c^2}{c^2}}} = \frac{2,4c}{0,8} + \frac{2,4c}{0,6} = 7c$$

Haetaan nyt K_B :lle sellainen nopeus u , että sillä on järjestelmässä $\mathcal{T}$ tämä sama liikemäärä. Liikemäärän määritelmän (kaava 3.3.5) mukaan tämä tarkoittaa, että

$$\frac{7u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 7c$$

$$\frac{7cu}{\sqrt{c^2 - u^2}} = 7c$$

$$u = \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$u^2 = c^2 - u^2$$

$$2u^2 = c^2$$

$$u^2 = \frac{c^2}{2}$$

$$u = \sqrt{0,5}c$$

Tällöin joukoilla **A** ja **B** on yhtä suuret massat ja yhtä suuret liikemäärät järjestelmässä $\mathcal{T}$. Mutta jos järjestelmän $\mathcal{T}$ nopeus järjestelmässä $\mathcal{S}$ on esimerkiksi $0,5c$, on järjestelmässä $\mathcal{S}$ kaavan (2.4.2) mukaan K_{A1} :n nopeus

$$u_{SA1} = \frac{0,6c + 0,5c}{1 + \frac{0,6c \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{1,1c}{1,3} = \frac{11}{13}c$$

K_{A2} :n nopeus

$$u_{SA2} = \frac{0,8c + 0,5c}{1 + \frac{0,8c \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{1,3c}{1,4} = \frac{13}{14}c$$

K_B :n nopeus

$$u_{SB} = \frac{\sqrt{0,5}c + 0,5c}{1 + \frac{\sqrt{0,5}c \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{\sqrt{0,5} + 0,5}{1 + \sqrt{0,5} \cdot 0,5}c$$

joukon **A** liikemäärä kaavan (3.3.5) mukaan

$$\begin{aligned} p_{SA} &= p_{SA1} + p_{SA2} = \frac{4 \cdot \frac{11}{13}c}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{11}{13}\right)^2 c^2}{c^2}}} + \frac{3 \cdot \frac{13}{14}c}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{13}{14}\right)^2 c^2}{c^2}}} \\ &= \frac{44}{13\sqrt{1 - \frac{11^2}{13^2}}}c + \frac{39}{14\sqrt{1 - \frac{13^2}{14^2}}}c = \frac{44c}{\sqrt{13^2 - 11^2}} + \frac{39c}{\sqrt{14^2 - 13^2}} \\ &= \frac{44c}{\sqrt{48}} + \frac{39c}{\sqrt{27}} = \frac{44\sqrt{27} + 39\sqrt{48}}{\sqrt{48}\sqrt{27}}c = \frac{132\sqrt{3} + 156\sqrt{3}c}{\sqrt{1296}} \\ &= \frac{288\sqrt{3}}{36}c = 8\sqrt{3}c \approx 13,85641c \end{aligned}$$

ja joukon **B** liikemäärä

$$p_{SB} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{0,5} + 0,5}{1 + \sqrt{0,5} \cdot 0,5}c}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\sqrt{0,5} + 0,5}{1 + \sqrt{0,5} \cdot 0,5}c\right)^2}{c^2}}} \approx 13,79838c$$

Joukkojen **A** ja **B** liikemäärät ovat siis eri suuret järjestelmässä **S**, vaikka ne ovat yhtä suuret järjestelmässä **J** ja vaikka joukoilla on yhtä suuret massat.

Massojen yhtäsuuruus ei siis ole riittävä ehto liikemäärien yhtäsuuruuden säilymiselle järjestelmästä toiseen siirryttäessä. Seuraava esimerkki osoittaa, että se ei ole myöskään riittävä ehto.

Esim L.4.2 Olkoon joukko **A** kuten edellä ja järjestelmän **J** nopeus järjestelmässä **S** sama $0,5c$ kuten edellä. Yritetään hakea kappaleelle K_B sellainen massa m ja järjestelmässä **J** sellainen nopeus u järjestelmän **J** kulkusuuntaan, että sillä on sekä järjestelmässä **J** että järjestelmässä **S** sama liikemäärä kuin joukolla **A**. Järjestelmässä **J** tämä tarkoittaa, että

$$\frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 7c$$

$$\frac{mcu}{\sqrt{c^2 - u^2}} = 7c$$

$$\frac{mu}{\sqrt{c^2 - u^2}} = 7$$

Koska K_B :n nopeus järjestelmässä S on

$$u_{SB} = \frac{u + 0,5c}{1 + \frac{u \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{u + 0,5c}{c + 0,5u} c$$

on sen liikemäärä järjestelmässä S

$$\begin{aligned} p_{SB} &= \frac{m \cdot \frac{u + 0,5c}{c + 0,5u} c}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{u + 0,5c}{c + 0,5u}\right)^2 c^2}} c^2} = \frac{mc(u + 0,5c)}{(c + 0,5u) \sqrt{1 - \frac{(u + 0,5c)^2}{(c + 0,5u)^2}}} = \frac{mc(u + 0,5c)}{\sqrt{(c + 0,5u)^2 - (u + 0,5c)^2}} \\ &= \frac{mc(u + 0,5c)}{\sqrt{c^2 + cu + 0,25u^2 - u^2 - cu - 0,25c^2}} = \frac{m(u + 0,5c)}{\sqrt{0,75c^2 - 0,75u^2}} c \end{aligned}$$

ja tämän on siis oltava yhtä suuri kuin joukon A liikemäärä järjestelmässä S , joka edellisen esimerkin mukaan on $8\sqrt{3}c$. Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{mu}{\sqrt{c^2 - u^2}} = 7 \\ \frac{m(u + 0,5c)}{\sqrt{0,75c^2 - 0,75u^2}} = 8\sqrt{3} \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä m

$$m = \frac{7\sqrt{c^2 - u^2}}{u}$$

ja sijoitetaan toiseen

$$\frac{\frac{7\sqrt{c^2 - u^2}}{u} (u + 0,5c)}{\sqrt{0,75c^2 - 0,75u^2}} = 8\sqrt{3}$$

$$\frac{7\sqrt{c^2 - u^2} (u + 0,5c)}{u\sqrt{0,75}\sqrt{c^2 - u^2}} = 8\sqrt{3}$$

$$7u + 3,5c = 8\sqrt{3}\sqrt{0,75}u$$

$$7u + 3,5c = 12u$$

$$u = \frac{3,5c}{5} = 0,7c$$

jolloin

$$m = \frac{7\sqrt{c^2 - (0,7c)^2}}{0,7c} = 10\sqrt{0,51} = \sqrt{51}$$

Tällöin kappaleen K_B liikemäärä järjestelmässä $\mathcal{J}$ on

$$p_{TB} = \frac{\sqrt{51} \cdot 0,7c}{\sqrt{1 - \frac{0,7^2 c^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{51} \cdot 0,7c}{\sqrt{0,51}} = 7c$$

ja nopeus järjestelmässä $\mathcal{S}$

$$u_{SB} = \frac{0,7c + 0,5c}{1 + \frac{0,7c \cdot 0,5c}{c^2}} = \frac{1,2}{1,35}c = \frac{120}{135}c = \frac{8}{9}c$$

$$p_{SB} = \frac{\sqrt{51} \cdot \frac{8}{9}c}{\sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{51} \cdot 8}{\sqrt{9^2 - 8^2}}c = \frac{\sqrt{3 \cdot 17} \cdot 8}{\sqrt{17}}c = 8\sqrt{3}c$$

Siis, jos kappaleen K_B massa on $m = \sqrt{51} \approx 7,141$ kg ja nopeus järjestelmässä $\mathcal{J}$ $u = 0,7c$, niin sillä on yhtä suuri liikemäärä kuin joukolla **A**, sekä järjestelmässä $\mathcal{J}$ ($7c$) että järjestelmässä $\mathcal{S}$ ($8\sqrt{3}c$), vaikka sen massa on eri suuri kuin joukolla **A**.

Kohdan 3.5.6 tuloksen 2 mukaan järjestelmästä toiseen siirryttäessä kappalejoukkojen kokonaisenergioiden säilymisestä seuraa kappalejoukkojen liikemäärien yhtäsuuruus niiden komponenttien osalta, jotka ovat siihen suuntaan, johon järjestelmä liikkuu toisessa järjestelmässä. Seuraava esimerkki osoittaa, että muiden komponenttien ei tarvitse olla yhtä suuria.

Esim L.4.3 Oletetaan, että joukoissa **A** ja **B** on kummassakin yksi kappale niin, että joukon **A** kappaleen K_A massa on 1 kg ja järjestelmässä $\mathcal{J}$ sen nopeuden komponentit $u_{TAx} = 0,4c$, $u_{TAy} = 0,3c$ ja $u_{TAz} = 0$, jolloin sen nopeuden suuruus on

$$u_{TA} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2 + 0^2}c = 0,5c$$

Oletetaan lisäksi, että järjestelmässä $\mathcal{J}$ joukon **B** kappaleen K_B nopeuden komponentit ovat $u_{TBx} = 0,4c$, $u_{TBy} = 0$ ja $u_{TBz} = 0,6c$, joten nopeuden suuruus on

$$u_{TB} = \sqrt{0,4^2 + 0^2 + 0,6^2}c = \sqrt{0,52}c$$

Kysytään, mikä on oltava kappaleen K_B massan m , jotta kappaleen K_B kokonaisenergia järjestelmässä $\mathcal{J}$ olisi yhtä suuri kuin kappaleen K_A kokonaisenergia. Siis

$$T_{TA} = T_{TB}$$

$$\frac{m_A c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_{TA}^2}{c^2}}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_{TB}^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1 \cdot c^2}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - 0,52}}$$

$$m = \frac{\sqrt{1 - 0,52}}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = \sqrt{\frac{0,48}{0,75}} = \sqrt{0,64}$$

$$= 0,8 \text{ kg}$$

Paitsi, että kokonaisenergiat ovat tällöin yhtä suuret, $T_{TA} = T_{TB}$, ovat myös liikemäärien x -komponentit yhtä suuret, sillä

$$p_{TAx} = \frac{1 \cdot 0,4c}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = \frac{0,4c}{\sqrt{0,75}} = \frac{0,4c}{\sqrt{3 \cdot 0,25}} = \frac{0,4c}{0,5\sqrt{3}} = \frac{0,8c}{\sqrt{3}}$$

ja

$$p_{TBx} = \frac{0,8 \cdot 0,4c}{\sqrt{1 - 0,52}} = \frac{0,32c}{\sqrt{0,48}} = \frac{0,32c}{\sqrt{3 \cdot 0,16}} = \frac{0,32c}{0,4\sqrt{3}} = \frac{0,8c}{\sqrt{3}}$$

Kappaleiden K_A ja K_B liikemäärät eivät kuitenkaan ole yhtä suuret, vaan

$$p_{TAy} = \frac{m_A u_{TAy}}{\sqrt{1 - \frac{u_{TA}^2}{c^2}}} = \frac{1 \cdot 0,3c}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = \frac{0,3c}{\sqrt{0,75}} = \frac{3 \cdot 0,1c}{\sqrt{3 \cdot 0,25}} = \frac{3 \cdot 0,1c}{0,5\sqrt{3}} = 0,2\sqrt{3}c$$

ja

$$p_{TBy} = \frac{m_B u_{TBy}}{\sqrt{1 - \frac{u_{TB}^2}{c^2}}} = \frac{0,8 \cdot 0c}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 0$$

Koska $T_{TA} = T_{TB}$ ja $p_{TAx} = p_{TBx}$, pitäisi K_A :n ja K_B :n kokonaisenergioiden kaavan (3.5.9) mukaan olla yhtä suuret jokaisessa järjestelmässä $\mathcal{S}$, jossa järjestelmä $\mathcal{T}$ liikkuu järjestelmän $\mathcal{S}$ positiivisen x -akselin suuntaan. Olkoon $\mathcal{S}$ yksi tällainen järjestelmä ja v sen nopeuden suuruus järjestelmässä $\mathcal{S}$. Kokonaisenergioiden yhtäsuuruuden toteamiseksi lasketaan kappaleiden nopeuksien komponentit ja nopeuksien suuruudet järjestelmässä $\mathcal{S}$ kaavoilla (2.4.2) ja (2.4.3)

$$u_{SAx} = \frac{u_{TAx} + v}{1 + \frac{u_{TAx}v}{c^2}} = \frac{0,4c + v}{1 + \frac{0,4cv}{c^2}} = \frac{0,4c^2 + cv}{c + 0,4v}$$

$$u_{SAy} = \frac{u_{TAy} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TAx} v}{c^2}} = \frac{0,3c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{0,4cv}{c^2}} = \frac{0,3c \sqrt{c^2 - v^2}}{c + 0,4v}$$

$$u_{SAz} = \frac{u_{TAz} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TAx} v}{c^2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{0,4cv}{c^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} u_{SA} &= \sqrt{\left(\frac{0,4c^2 + cv}{c + 0,4v}\right)^2 + \left(\frac{0,3c \sqrt{c^2 - v^2}}{c + 0,4v}\right)^2 + 0^2} \\ &= \frac{\sqrt{0,16c^4 + 0,8c^3v + c^2v^2 + 0,09c^4 - 0,09c^2v^2}}{c + 0,4v} \\ &= \frac{\sqrt{0,25c^4 + 0,8c^3v + 0,91c^2v^2}}{c + 0,4v} \end{aligned}$$

$$u_{SBx} = \frac{u_{TBx} + v}{1 + \frac{u_{TBx} v}{c^2}} = \frac{0,4c + v}{1 + \frac{0,4v}{c}} = \frac{0,4c^2 + cv}{c + 0,4v}$$

$$u_{SBy} = \frac{u_{TBy} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TBx} v}{c^2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{0,4cv}{c^2}} = 0$$

$$u_{SBz} = \frac{u_{TBz} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_{TBx} v}{c^2}} = \frac{0,6c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{0,4cv}{c^2}} = \frac{0,6c \sqrt{c^2 - v^2}}{c + 0,4v}$$

$$\begin{aligned} u_{SB} &= \sqrt{\left(\frac{0,4c^2 + cv}{c + 0,4v}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{0,6c \sqrt{c^2 - v^2}}{c + 0,4v}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{0,16c^4 + 0,8c^3v + c^2v^2 + 0,36c^4 - 0,36c^2v^2}}{c + 0,4v} \\ &= \frac{\sqrt{0,52c^4 + 0,8c^3v + 0,64c^2v^2}}{c + 0,4v} \end{aligned}$$

ja kokonaisenergiat kaavalla (3.4.5)

$$T_{SA} = \frac{1 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_{SA}^2}{c^2}}} = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - u_{SA}^2}} = \frac{c^3}{\sqrt{c^2 - \frac{0,25c^4 + 0,8c^3v + 0,91c^2v^2}{(c + 0,4v)^2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{c^2(c + 0,4v)^2 - 0,25c^4 - 0,8c^3v - 0,91c^2v^2}} \\
&= \frac{c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{c^4 + 0,8c^3v + 0,16c^2v^2 - 0,25c^4 - 0,8c^3v - 0,91c^2v^2}} \\
&= \frac{c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{0,75c^4 - 0,75c^2v^2}} = \frac{c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{3 \cdot 0,25c^2(c^2 - v^2)}} \\
&= \frac{c^3(c + 0,4v)}{0,5c\sqrt{3(c^2 - v^2)}} = \frac{2c^2(c + 0,4v)}{\sqrt{3(c^2 - v^2)}} \\
T_{SB} &= \frac{0,8c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_{SB}^2}{c^2}}} = \frac{0,8c^3}{\sqrt{c^2 - u_{SB}^2}} = \frac{0,8c^3}{\sqrt{c^2 - \frac{0,52c^4 + 0,8c^3v + 0,64c^2v^2}{(c + 0,4v)^2}}} \\
&= \frac{0,8c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{c^2(c + 0,4v)^2 - 0,52c^4 - 0,8c^3v - 0,64c^2v^2}} \\
&= \frac{0,8c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{c^4 + 0,8c^3v + 0,16c^2v^2 - 0,52c^4 - 0,8c^3v - 0,64c^2v^2}} \\
&= \frac{0,8c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{0,48c^4 - 0,48c^2v^2}} = \frac{0,8c^3(c + 0,4v)}{\sqrt{3 \cdot 0,16c^2(c^2 - v^2)}} \\
&= \frac{0,8c^3(c + 0,4v)}{0,4c\sqrt{3(c^2 - v^2)}} = \frac{2c^2(c + 0,4v)}{\sqrt{3(c^2 - v^2)}}
\end{aligned}$$

Kappaleiden K_A ja K_B kokonaisenergiat ovat siis yhtä suuret myös järjestelmässä S .

Kohdassa 3.4.3 osoitettiin, että yhdelle kappaleelle pätee kaava (3.4.9)

$$(L. 4.1) \quad T = \sqrt{p^2c^2 + E^2}$$

missä T on kappaleen kokonaisenergia, p sen liikemäärän suuruus, c valonnopeus ja E kappaleen lepoenergia.

Kysytään nyt, päteekö tämä myös useamman kappaleen joukolle, siis onko

$$(L. 4.2) \quad T_A = \sqrt{p_A^2c^2 + E_A^2}$$

Esim L.4.4 Tarkastellaan kahden kappaleen K_A :n ja K_B :n joukkoa A . Oletetaan, että K_A :n massa on m_1 ja nopeuden suuruus u_1 ja K_B :n massa m_2 ja nopeuden suuruus u_2 . Tällöin

$$T_A = T_1 + T_2 = \sqrt{p_1^2c^2 + E_1^2} + \sqrt{p_2^2c^2 + E_2^2}$$

Jotta kaavan (3.4.9) vastine pätsi, pitäisi tämän olla yhtä suuri kuin

$$D = \sqrt{(p_1 + p_2)^2 c^2 + (E_1 + E_2)^2}$$

Jotta nämä olisivat yhtäsuuret, on oltava

$$(L. 4.3) \quad \sqrt{p_1^2 c^2 + E_1^2} + \sqrt{p_2^2 c^2 + E_2^2} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2 c^2 + (E_1 + E_2)^2}$$

josta puolittain neliöön korottamalla saadaan

$$\begin{aligned} p_1^2 c^2 + E_1^2 + 2\sqrt{p_1^2 c^2 + E_1^2}\sqrt{p_2^2 c^2 + E_2^2} + p_2^2 c^2 + E_2^2 \\ = p_1^2 c^2 + 2p_1 p_2 c^2 + p_2^2 c^2 + E_1^2 + 2E_1 E_2 + E_2^2 \\ 2\sqrt{p_1^2 c^2 + E_1^2}\sqrt{p_2^2 c^2 + E_2^2} = 2p_1 p_2 c^2 + 2E_1 E_2 \end{aligned}$$

josta jakamalla puolittain 2:lla ja korottamalla uudelleen puolittain neliöön

$$\begin{aligned} (p_1^2 c^2 + E_1^2)(p_2^2 c^2 + E_2^2) &= (p_1 p_2 c^2 + E_1 E_2)^2 \\ p_1^2 p_2^2 c^4 + p_1^2 c^2 E_2^2 + p_2^2 c^2 E_1^2 + E_1^2 E_2^2 &= p_1^2 p_2^2 c^4 + 2p_1 p_2 c^2 E_1 E_2 + E_1^2 E_2^2 \\ p_1^2 c^2 E_2^2 + p_2^2 c^2 E_1^2 &= 2p_1 p_2 E_1 E_2 c^2 \\ p_1^2 E_2^2 - 2p_1 p_2 E_1 E_2 + p_2^2 E_1^2 &= 0 \\ (p_1 E_2 - p_2 E_1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$p_1 E_2 = p_2 E_1$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} m_2 c^2 &= \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} m_1 c^2 \\ \frac{u_1}{\sqrt{c^2 - u_1^2}} &= \frac{u_2}{\sqrt{c^2 - u_2^2}} \end{aligned}$$

josta vielä kerran neliöön korottamalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{u_1^2}{c^2 - u_1^2} &= \frac{u_2^2}{c^2 - u_2^2} \\ u_1^2 c^2 - u_1^2 u_2^2 &= u_2^2 c^2 - u_1^2 u_2^2 \\ u_1^2 &= u_2^2 \\ u_1 &= \pm u_2 \end{aligned}$$

Koska tätä ratkaistaessa tehtiin yhtälön toiseen potenssiin korottamisia, on saadut ratkaisut tarkastettava sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön (L. 4.3). Tarkastetaan ensin, mitä tapahtuu, jos $u_2 = u_1$. Tällöin yhtälön vasen puoli saa arvon

$$\begin{aligned}
\sqrt{p_1^2 c^2 + E_1^2} + \sqrt{p_2^2 c^2 + E_2^2} &= \sqrt{\frac{m_1^2 u_1^2}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{\frac{m_2^2 u_1^2}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} c^2 + m_2^2 c^4} \\
&= \sqrt{\frac{m_1^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2} + m_1^2 c^4} + \sqrt{\frac{m_2^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2} + m_2^2 c^4} \\
&= \sqrt{\frac{m_1^2 c^4 u_1^2 + m_1^2 c^6 - m_1^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2}} + \sqrt{\frac{m_2^2 c^4 u_1^2 + m_2^2 c^6 - m_2^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m_1^2 c^6}{c^2 - u_1^2}} + \sqrt{\frac{m_2^2 c^6}{c^2 - u_1^2}} = \frac{m_1 c^3}{\sqrt{c^2 - u_1^2}} + \frac{m_2 c^3}{\sqrt{c^2 - u_1^2}} = \frac{(m_1 + m_2) c^3}{\sqrt{c^2 - u_1^2}}
\end{aligned}$$

ja oikea puoli arvon

$$\begin{aligned}
\sqrt{(p_1 + p_2)^2 c^2 + (E_1 + E_2)^2} &= \sqrt{\left(\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} \right)^2 c^2 + (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{m_1 u_1 c + m_2 u_1 c}{\sqrt{c^2 - u_1^2}} \right)^2 c^2 + (m_1 + m_2)^2 c^4} \\
&= \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2} + (m_1 + m_2)^2 c^4} \\
&= (m_1 + m_2) c^2 \sqrt{\frac{u_1^2}{c^2 - u_1^2} + 1} \\
&= (m_1 + m_2) c^2 \sqrt{\frac{u_1^2 + c^2 - u_1^2}{c^2 - u_1^2}} \\
&= \frac{(m_1 + m_2) c^3}{\sqrt{c^2 - u_1^2}}
\end{aligned}$$

Tarkastetaan toinen vaihtoehto $u_2 = -u_1$. Yhtälön vasemmassa puolella u_1 ja u_2 esiintyvät vain toiseen potenssiin korotettuina, joten vasemman puolen arvo on sama kuin edellä.

Oikeasta puolesta sitä vastoin tulee

$$\begin{aligned}
\sqrt{(p_1 + p_2)^2 c^2 + (E_1 + E_2)^2} &= \sqrt{\left(\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} - \frac{m_2 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} \right)^2 c^2 + (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{m_1 u_1 c - m_2 u_1 c}{\sqrt{c^2 - u_1^2}} \right)^2 c^2 + (m_1 + m_2)^2 c^4} \\
&= \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2 c^4 u_1^2}{c^2 - u_1^2} + (m_1 + m_2)^2 c^4} \\
&= c^2 \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2 u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 (c^2 - u_1^2)}{c^2 - u_1^2}} \\
&= c^2 \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)^2 u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 c^2 - (m_1 + m_2)^2 u_1^2}{c^2 - u_1^2}} \\
&= c^2 \sqrt{\frac{((m_1 - m_2)^2 - (m_1 + m_2)^2) u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 c^2}{c^2 - u_1^2}} \\
&= c^2 \sqrt{\frac{-4m_1 m_2 u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 c^2}{c^2 - u_1^2}}
\end{aligned}$$

Tämä taas on yhtä suuri kuin vasen puoli eli

$$c^2 \sqrt{\frac{-4m_1 m_2 u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 c^2}{c^2 - u_1^2}} = \frac{(m_1 + m_2) c^3}{\sqrt{c^2 - u_1^2}}$$

vain, jos

$$c^4 \frac{-4m_1 m_2 u_1^2 + (m_1 + m_2)^2 c^2}{c^2 - u_1^2} = \frac{(m_1 + m_2)^2 c^6}{c^2 - u_1^2}$$

$$-4m_1 m_2 u_1^2 c^4 + (m_1 + m_2)^2 c^6 = (m_1 + m_2)^2 c^6$$

$$-4m_1 m_2 u_1^2 = 0$$

Siis $m_1 = 0$ tai $m_2 = 0$ tai $u_1 = 0$. Jos $u_1 = 0$, on $u_2 = -u_1 = 0$.

Lopputulos on, että kaava (L. 4.2) pätee kahden kappaleen joukolle **A** ainoastaan silloin, kun kappaleilla on sama nopeus.

LIITE 5

Satelliittipaikannuksen periaate

Oletetaan, että tunnetuista pisteistä $S_1: (x_1, y_1, z_1)$, $S_2: (x_2, y_2, z_2)$, $S_3: (x_3, y_3, z_3)$ ja $S_4: (x_4, y_4, z_4)$ lähtee jokaisesta nopeudella c etenevä signaali. Oletetaan myös, että näiden signaalien lähtöajat kellon C mukaan ovat L_1, L_2, L_3 ja L_4 ja ne tavoittavat pisteen P: (x, y, z) toisen kellon K näyttämällä hetkillä T_1, T_2, T_3 ja T_4 . Merkitään $t_1 = T_1 - L_1$, $t_2 = T_2 - L_2$, $t_3 = T_3 - L_3$ ja $t_4 = T_4 - L_4$. Oletetaan vielä, että kellot C ja K käyvät koko tarkastelujen ajan samaan tahtiin, mutta sitä, kuinka paljon niiden samalla hetkellä näyttämässä ajoissa on eroa, ei tiedetä. Merkitään kellon K näyttämän ajan ja kellon C samalla hetkellä näyttämän ajan erotusta t :llä. Tällöin signaalien käyttämät ajat matkoihin pisteistä S_1, S_2, S_3 ja S_4 pisteeseen P ovat $t_1 - t$, $t_2 - t$, $t_3 - t$ ja $t_4 - t$. Tehtävänä on laskea pisteen P koordinaatit ja samalla kellojen K ja C aikaero t .

Pythagoraan lauseen mukaan pisteen (x, y, z) etäisyys pisteestä (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$ tai 4 , on

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

Toisaalta se on signaalin ajassa $t_i - t$ nopeudella c kulkema matka $c(t_i - t)$. Kun nämä asetetaan yhtä suuriksi jokaisella $i = 1, 2, 3$ tai 4 ja korotetaan potenssiin 2, saadaan yhtälöryhmä

$$(L. 5.1) \quad \begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t_1 - t)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t_2 - t)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t_3 - t)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t_4 - t)^2 \end{cases}$$

koordinaattien x, y ja z ja aikaeron t määrittämiseksi.

Kirjoitetaan yhtälöryhmä auki

$$(L. 5.2) \quad x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 + z^2 - 2z_1z + z_1^2 = c^2t_1^2 - 2c^2t_1t + c^2t^2$$

$$(L. 5.3) \quad x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 + z^2 - 2z_2z + z_2^2 = c^2t_2^2 - 2c^2t_2t + c^2t^2$$

$$(L. 5.4) \quad x^2 - 2x_3x + x_3^2 + y^2 - 2y_3y + y_3^2 + z^2 - 2z_3z + z_3^2 = c^2t_3^2 - 2c^2t_3t + c^2t^2$$

$$(L. 5.5) \quad x^2 - 2x_4x + x_4^2 + y^2 - 2y_4y + y_4^2 + z^2 - 2z_4z + z_4^2 = c^2t_4^2 - 2c^2t_4t + c^2t^2$$

Vähentämällä yhtälöstä (L. 5.3) yhtälö (L. 5.2) ja saadaan

$$\begin{aligned} (2x_1 - 2x_2)x - x_1^2 + x_2^2 + (2y_1 - 2y_2)y - y_1^2 + y_2^2 + (2z_1 - 2z_2)z - z_1^2 + z_2^2 \\ = -c^2t_1^2 + c^2t_2^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_2)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x_1 - 2x_2)x - x_1^2 + x_2^2 + (2y_1 - 2y_2)y - y_1^2 + y_2^2 + (2z_1 - 2z_2)z - z_1^2 + z_2^2 + c^2t_1^2 - c^2t_2^2 \\ = (2c^2t_1 - 2c^2t_2)t \end{aligned}$$

ja jos $t_1 \neq t_2$, saadaan tästä

$$t = \frac{(2x_1 - 2x_2)x + (2y_1 - 2y_2)y + (2z_1 - 2z_2)z + c^2t_1^2 - c^2t_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 - z_1^2 + z_2^2}{2c^2t_1 - 2c^2t_2}$$

Kun merkitään

$$a_1 = \frac{x_1 - x_2}{c^2t_1 - c^2t_2}$$

$$b_1 = \frac{y_1 - y_2}{c^2t_1 - c^2t_2}$$

$$c_1 = \frac{z_1 - z_2}{c^2t_1 - c^2t_2}$$

$$d_1 = \frac{c^2t_1^2 - c^2t_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 - z_1^2 + z_2^2}{2(c^2t_1 - c^2t_2)}$$

saadaan t :n lauseke muotoon

$$(L. 5.6) \quad t = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$$

Vähennetään yhtälö (L. 5.2) yhtälöstä (L. 5.4) ja saadaan

$$(2x_1 - 2x_3)x - x_1^2 + x_3^2 + (2y_1 - 2y_3)y - y_1^2 + y_3^2 + (2z_1 - 2z_3)z - z_1^2 + z_3^2 = -c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_3)t$$

Sijoitetaan tähän t yhtälöstä (L. 4.6)

$$(2x_1 - 2x_3)x - x_1^2 + x_3^2 + (2y_1 - 2y_3)y - y_1^2 + y_3^2 + (2z_1 - 2z_3)z - z_1^2 + z_3^2 = -c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_3)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)$$

$$(2x_1 - 2x_3 - (2c^2t_1 - 2c^2t_3)a_1)x - x_1^2 + x_3^2 + (2y_1 - 2y_3 - (2c^2t_1 - 2c^2t_3)b_1)y - y_1^2 + y_3^2 + (2z_1 - 2z_3 - (2c^2t_1 - 2c^2t_3)c_1)z - z_1^2 + z_3^2 = -c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_3)d_1$$

$$2(x_1 - x_3 - c^2a_1t_1 + c^2a_1t_3)x + 2(y_1 - y_3 - c^2b_1t_1 + c^2b_1t_3)y + 2(z_1 - z_3 - c^2c_1t_1 + c^2c_1t_3)z = -c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + 2c^2d_1t_1 - 2c^2d_1t_3 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + z_1^2 - z_3^2$$

$$2(c^2c_1t_3 - c^2c_1t_1 + z_1 - z_3)z = -2(c^2a_1t_3 - c^2a_1t_1 + x_1 - x_3)x - 2(c^2b_1t_3 - c^2b_1t_1 + y_1 - y_3)y - 2c^2d_1t_1 + 2c^2d_1t_3 - c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + z_1^2 - z_3^2$$

ja jos $z_1 - z_3 - c^2c_1t_1 + c^2c_1t_3 \neq 0$, ratkaisemalla tästä z ja merkitsemällä

$$a_2 = \frac{c^2a_1t_1 - c^2a_1t_3 - x_1 + x_3}{c^2c_1t_3 - c^2c_1t_1 + z_1 - z_3}$$

$$b_2 = \frac{c^2b_1t_1 - c^2b_1t_3 - y_1 + y_3}{c^2c_1t_3 - c^2c_1t_1 + z_1 - z_3}$$

$$c_2 = \frac{2c^2d_1t_1 - 2c^2d_1t_3 - c^2t_1^2 + c^2t_3^2 + x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + z_1^2 - z_3^2}{2(c^2c_1t_3 - c^2c_1t_1 + z_1 - z_3)}$$

saadaan

$$(L. 5.7) \quad z = a_2x + b_2y + c_2$$

ja sijoittamalla tämä (L. 5.6):een

$$t = a_1x + b_1y + c_1(a_2x + b_2y + c_2) + d_1 = (a_2c_1 + a_1)x + (b_2c_1 + b_1)y + c_1c_2 + d_1$$

Merkitään

$$a_3 = a_2c_1 + a_1$$

$$b_3 = b_2c_1 + b_1$$

$$c_3 = c_1c_2 + d_1$$

ja saadaan

$$(L. 5.8) \quad t = a_3x + b_3y + c_3$$

Seuraavaksi vähennetään yhtälöstä (L. 5.5) yhtälö (L. 5.2)

$$\begin{aligned} (2x_1 - 2x_4)x - x_1^2 + x_4^2 + (2y_1 - 2y_4)y - y_1^2 + y_4^2 + (2z_1 - 2z_4)z - z_1^2 + z_4^2 \\ = -c^2t_1^2 + c^2t_4^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_4)t \end{aligned}$$

ja sijoitetaan tähän z yhtälöstä (L. 5.7) ja t yhtälöstä (L. 5.8)

$$\begin{aligned} (2x_1 - 2x_4)x - x_1^2 + x_4^2 + (2y_1 - 2y_4)y - y_1^2 + y_4^2 + (2z_1 - 2z_4)(a_2x + b_2y + c_2) - z_1^2 + z_4^2 \\ = -c^2t_1^2 + c^2t_4^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_4)(a_3x + b_3y + c_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x_1 - 2x_4 + (2z_1 - 2z_4)a_2 - (2c^2t_1 - 2c^2t_4)a_3)x - x_1^2 + x_4^2 \\ + (2y_1 - 2y_4 + (2z_1 - 2z_4)b_2 - (2c^2t_1 - 2c^2t_4)b_3)y - y_1^2 + y_4^2 \\ + (2z_1 - 2z_4)c_2 - z_1^2 + z_4^2 = -c^2t_1^2 + c^2t_4^2 + (2c^2t_1 - 2c^2t_4)c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x_1 - x_4 + a_2z_1 - a_2z_4 - c^2a_3t_1 + c^2a_3t_4)x + 2(y_1 - y_4 + b_2z_1 - b_2z_4 - c^2b_3t_1 + c^2b_3t_4)y \\ = -c^2t_1^2 + c^2t_4^2 + 2c^2c_3t_1 - 2c^2c_3t_4 - 2c_2z_1 + 2c_2z_4 + x_1^2 - x_4^2 + y_1^2 - y_4^2 + z_1^2 - z_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(c^2b_3t_4 - c^2b_3t_1 + b_2z_1 - b_2z_4 + y_1 - y_4)y = -2(c^2a_3t_4 - c^2a_3t_1 + a_2z_1 - a_2z_4 + x_1 - x_4)x \\ + 2c^2c_3t_1 - 2c^2c_3t_4 - c^2t_1^2 + c^2t_4^2 - 2c_2z_1 + 2c_2z_4 + x_1^2 - x_4^2 + y_1^2 - y_4^2 + z_1^2 - z_4^2 \end{aligned}$$

Jos $c^2b_3t_4 - c^2b_3t_1 + b_2z_1 - b_2z_4 + y_1 - y_4 \neq 0$, ratkaistaan y ja merkitsemällä

$$a_4 = \frac{c^2a_3t_1 - c^2a_3t_4 - a_2z_1 + a_2z_4 - x_1 + x_4}{c^2b_3t_4 - c^2b_3t_1 + b_2z_1 - b_2z_4 + y_1 - y_4}$$

$$b_4 = \frac{2c^2c_3t_1 - 2c^2c_3t_4 - c^2t_1^2 + c^2t_4^2 - 2c_2z_1 + 2c_2z_4 + x_1^2 - x_4^2 + y_1^2 - y_4^2 + z_1^2 - z_4^2}{2(c^2b_3t_4 - c^2b_3t_1 + b_2z_1 - b_2z_4 + y_1 - y_4)}$$

saadaan

$$(L. 5.9) \quad y = a_4x + b_4$$

Sijoitetaan tämä (L. 5.7):ään ja (L. 5.8):aan

$$z = a_2x + b_2(a_4x + b_4) + c_2 = (a_4b_2 + a_2)x + b_2b_4 + c_2$$

$$t = a_3x + b_3(a_4x + b_4) + c_3 = (a_4b_3 + a_3)x + b_3b_4 + c_3$$

merkitään

$$a_5 = a_4b_2 + a_2$$

$$b_5 = b_2b_4 + c_2$$

$$a_6 = a_4b_3 + a_3$$

$$b_6 = b_3b_4 + c_3$$

jolloin

$$(L. 5.10) \quad z = a_5x + b_5$$

$$(L. 5.11) \quad t = a_6x + b_6$$

ja sijoitetaan (L. 5.9), (L. 5.10) ja (L. 5.11) yhtälöön (L. 5.2). Tulos on yhtälö

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + (a_4x + b_4)^2 - 2y_1(a_4x + b_4) + y_1^2 + (a_5x + b_5)^2 - 2z_1(a_5x + b_5) + z_1^2 \\ = c^2t_1^2 - 2c^2t_1(a_6x + b_6) + c^2(a_6x + b_6)^2$$

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + a_4^2x^2 + 2a_4b_4x + b_4^2 - 2a_4y_1x - 2b_4y_1 + y_1^2 + a_5^2x^2 + 2a_5b_5x + b_5^2 \\ - 2a_5z_1x - 2b_5z_1 + z_1^2 = c^2t_1^2 - 2c^2a_6t_1x - 2c^2b_6t_1 + c^2a_6^2x^2 + 2c^2a_6b_6x + c^2b_6^2$$

$$(1 + a_4^2 + a_5^2 - c^2a_6^2)x^2 + (-2x_1 + 2a_4b_4 - 2a_4y_1 + 2a_5b_5 - 2a_5z_1 + 2c^2a_6t_1 - 2c^2a_6b_6)x \\ + x_1^2 + b_4^2 - 2b_4y_1 + y_1^2 + b_5^2 - 2b_5z_1 + z_1^2 - c^2t_1^2 + 2c^2b_6t_1 - c^2b_6^2 = 0$$

Merkitään

$$a_7 = -c^2a_6^2 + a_4^2 + a_5^2 + 1$$

$$b_7 = -2c^2a_6b_6 + 2c^2a_6t_1 + 2a_5b_5 - 2a_5z_1 + 2a_4b_4 - 2a_4y_1 - 2x_1$$

$$c_7 = 2c^2b_6t_1 - 2b_4y_1 - 2b_5z_1 - c^2b_6^2 - c^2t_1^2 + x_1^2 + b_4^2 + y_1^2 + b_5^2 + z_1^2$$

Näin saadaan toisen asteen yhtälö

$$(L. 5.12) \quad a_7x^2 + b_7x + c_7 = 0$$

ja jos $a_7 \neq 0$, tulee pisteen P x -koordinaatiksi

$$x = \frac{-b_7 \pm \sqrt{b_7^2 - 4a_7c_7}}{2a_7}$$

Jos $a_7 = 0$ ja $b_7 \neq 0$, on $x = -c_7/b_7$. Jos taas $a_7 = 0$ ja $b_7 = 0$, ei ratkaisua ole, jos $c_7 \neq 0$ ja ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa luku, jos $c_7 = 0$.

Jos siis $a_7 = 0$ ja $b_7 = 0$ tai jokin muu yhtälöryhmän ratkaisussa esiintyneistä erisuuruusehdoista ei toteudu, yksikäsitteistä ratkaisua ei ole. Näin teoriassa. Käytännössä tällainen tilanne on toki mahdollinen, mutta sen todennäköisyys on nolla. Jos näin silti tapahtuu, onnistuu paikantaminen arvojen muututtua kuitenkin hetken päästä.

Kun x -koordinaatti on ratkaistu, lasketaan y -koordinaatti yhtälöstä (L. 5.9) ja z -koordinaatti yhtälöstä (L. 5.10) sekä kellojen K ja C aikaero t yhtälöstä (L. 5.11).

Esim L.5.1

Kun edellä esitetty koordinaattien määrittäminen tehdään kohdan 4.2.2 arvoilla

$$x_1 = 13575819, y_1 = 10085969, z_1 = 20476093 \text{ ja } t_1 = 0,413597802$$

$$x_2 = 6460645, y_2 = -13905556, z_2 = 21685017 \text{ ja } t_2 = 0,420527863$$

$$x_3 = 22886448, y_3 = 13256139, z_3 = 3274997 \text{ ja } t_3 = 0,423564542$$

$$x_4 = -3942561, y_4 = 15190057, z_4 = 21510070 \text{ ja } t_4 = 0,420104432$$

saadaan ensin (L. 5.6):sta

$$(L. 5.6E) \quad t = -1,142370716 \cdot 10^{-8}x - 3,851938913 \cdot 10^{-8}y + 1,940977657 \cdot 10^{-9}z + 0,4170272159$$

ja sitten (L. 5.7):stä, (L. 5.8):sta, (L. 5.9):stä, (L. 5.10):stä, (L. 5.11):stä ja (L. 5.12):sta

$$(L. 5.7E) \quad z = 1,031882082x + 1,989176775y - 56926,54942$$

$$(L. 5.8E) \quad t = -9,420847098 \cdot 10^{-9}x - 3,465844146 \cdot 10^{-8}y + 0,4169167228$$

$$(L. 5.9E) \quad y = 0,3989351268x + 70349,18066$$

$$(L. 5.10E) \quad z = 1,825434571x + 83010,40686$$

$$(L. 5.11E) \quad t = -2,324731683 \cdot 10^{-8}x + 0,4144785298$$

$$(L. 5.12E) \quad -44,08076115x^2 - 105914956,0x + 7,004236048 \cdot 10^{14} = 0$$

Tällä yhtälöllä on kaksi juurta $x = -5364648,220$ ja $x = 2961900,328$. Ensimmäisellä x :n arvolla saadaan yhtälöstä (L. 5.9E) y -koordinaatiksi $y = -2069797,437$ ja yhtälöstä (L. 5.10E) z -koordinaatiksi (L. 5.10E) $z = -9709803,916$. Tämä z -koordinaatti ei kuitenkaan tule kohdan 4.2.2 esimerkin tapauksessa kysymykseen paikantimen sijaintipaikkana, sillä siinä oletetaan, että piste P on Maan pinnalla, eikä se näin ollen voi olla yli 9700 km päiväntasaajan eteläpuolella, kun etelänavan etäisyys päiväntasaajasta on n. 6360 km.

Toisella x :n arvolla sitä vastoin saadaan kohdan 4.2.2 esimerkkiin sopivat arvot ja pisteen P koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = 2961900,328 \text{ m} \\ y = 1251955,263 \text{ m} \\ z = 5489765,661 \text{ m} \end{cases}$$

Kellojen K ja C aikaeroksi saadaan yhtälöstä (L. 4.11E) $t = 0,3456222945 \text{ s}$.

Esim L.5.2

Jos kaikki muut arvot ovat samat kuin edellä, mutta t_1 :n paikalla on

$$t'_1 = t_1 + \Delta t_v = 0,413597802 + 0,000007213 = 0,413605015 \text{ s}$$

muuttuvat edellä olevat vaiheet seuraaviksi

$$(L. 5.6E') \quad t = -1,143560967 \cdot 10^{-8}x - 3,855952295 \cdot 10^{-8}y + 1,942999986 \cdot 10^{-9}z + 0,4170307853$$

$$(L. 5.7E') \quad z = 1,032023523x + 1,989697122y - 56976,32417$$

$$(L. 5.8E') \quad t = -9,430387975 \cdot 10^{-9}x - 3,469354147 \cdot 10^{-8}y + 0,4169200803$$

$$(L. 5.9E') \quad y = 0,3989700204x + 70347,86412$$

$$(L. 5.10E') \quad z = 1,825853024x + 82994,61862$$

$$(L. 5.11E') \quad t = -2,327207092 \cdot 10^{-8}x + 0,4144794638$$

$$(L. 5.12E') \quad -44,18270113x^2 - 105955128,2x + 7,004252656 \cdot 10^{14} = 0$$

ja kun tästä ratkaistaan x ja sijoitetaan kaavoihin (L. 5.9E') ja (L. 5.3.10E'), saadaan pisteen P kelvollisiksi koordinaateiksi

$$\begin{cases} x = 2959148,066 \text{ m} \\ y = 1250959,228 \text{ m} \\ z = 5485964,064 \text{ m} \end{cases}$$

Esim L.5.3

Jos kaikki muut arvot ovat samoja kuin esimerkissä L.5.1, mutta t_1 :n paikalla on

$$t''_1 = t_1 + \Delta t = 0,413597802 - 0,000038588 = 0,413559214 \text{ s}$$

muuttuvat edellä olevat vaiheet seuraaviksi

$$(L. 5. E6'') \quad t = -1,136044985 \cdot 10^{-8}x - 3,830609295 \cdot 10^{-8}y + 1,930229742 \cdot 10^{-9}z + 0,4170081192$$

$$(L. 5. E7'') \quad z = 1,031130240x + 1,986410815y - 56660,13907$$

$$(L. 5. E8'') \quad t = -9,370131594 \cdot 10^{-9}x - 3,447186372 \cdot 10^{-8}y + 0,4168987521$$

$$(L. 5. E9'') \quad y = 0,3987497072x + 70356,35919$$

$$(L. 5. E10'') \quad z = 1,823210971x + 83096,49373$$

$$(L. 5. E11'') \quad t = -2,311577716 \cdot 10^{-8}x + 0,4144734372$$

$$(L. 5. E12'') \quad -43,54090858x^2 - 105701877,9x + 7,004145463 \cdot 10^{14} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2976609,486 \text{ m} \\ y = 1257278,520 \text{ m} \\ z = 5510083,564 \text{ m} \end{cases}$$

Esim L.5.4

Tarkastellaan toista pistettä P^* , jossa olevan kellon K^* näyttämät ajat signaalien saapumishetkiksi ovat $t_1^* = 0,350356579$, $t_2^* = 0,355165029$, $t_3^* = 0,362634921$ ja $t_4^* = 0,354439593$. Tästä seuraa

$$(L. 5. E6^*) \quad t = -1,646413865 \cdot 10^{-8}x - 5,551512782 \cdot 10^{-8}y + 2,797386593 \cdot 10^{-9}z + 0,3527094725$$

$$(L. 5. E7^*) \quad z = 1,354449568x + 3,175873280y + 84191,62153$$

$$(L. 5. E8^*) \quad t = -1,267521959 \cdot 10^{-8}x - 4,663098248 \cdot 10^{-8}y + 0,3529449890$$

$$(L. 5. E9^*) \quad y = 0,4496746179x + 76314,49623$$

$$(L. 5. E10^*) \quad z = 2,782559172x + 326556,7910$$

$$(L. 5. E11^*) \quad t = -3,364398882 \cdot 10^{-8}x + 0,3493863691$$

$$(L. 5. E12^*) \quad -92,78687217x^2 - 154155751,8x + 6,904152538 \cdot 10^{14} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2020780,744 \text{ m} \\ y = 985008,305 \text{ m} \\ z = 5949498,787 \text{ m} \end{cases}$$

Esim L.5.5

Oletetaan, että kaikki on kuten edellä paitsi, että t_1 :n paikalla on

$$t_1^{**} = t_1 + \Delta t = 0,350356579 - 0,000038609 = 0,350317970 \text{ s}$$

Tällöin

$$(L. 5. E6^{**}) \quad t = -1,633299440 \cdot 10^{-8}x - 5,507292491 \cdot 10^{-8}y + 2,775104154 \cdot 10^{-9}z + 0,3526905769$$

$$(L. 5. E7^{**}) \quad z = 1,351106071x + 3,163572857y + 84879,49021$$

$$(L. 5. E8^{**}) \quad t = -1,258353433 \cdot 10^{-8}x - 4,629368074 \cdot 10^{-8}y + 0,3529261263$$

$$(L. 5. E9^{**}) \quad y = 0,4489921389x + 76295,20681$$

$$(L. 5. E10^{**}) \quad z = 2,771525415x + 326244,93560$$

$$(L. 5. E11^{**}) \quad t = -3,336903306 \cdot 10^{-8}x + 0,3493941404$$

$$(L. 5. E12^{**}) \quad -91,19275611x^2 - 153373039,2x + 6,904361027 \cdot 10^{14} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2036281,338 \text{ m} \\ y = 990569,520 \text{ m} \\ z = 5969850,414 \text{ m} \end{cases}$$

Esim L.5.6

Jos kaikki on samoin kuin esimerkissä L.4.4 paitsi että t_2 :n paikalla on

$$t_2^{***} = t_2 + \Delta t = 0,355165029 - 0,000038609 = 0,355126420 \text{ s}$$

niin saadaan

$$(L. 5. E6^{***}) \quad t = -1,659740597 \cdot 10^{-8}x - 5,596448946 \cdot 10^{-8}y + 2,820029759 \cdot 10^{-9}z + 0,3526897525$$

$$(L. 5. E7^{***}) \quad z = 1,360023298x + 3,196378525y + 85159,36052$$

$$(L. 5. E8^{***}) \quad t = -1,276209980 \cdot 10^{-8}x - 4,695060690 \cdot 10^{-8}y + 0,3529299044$$

$$(L. 5. E9^{***}) \quad y = 0,4457772548x + 75647,32505$$

$$(L. 5. E10^{***}) \quad z = 2,784896142x + 326956,84581$$

$$(L. 5. E11^{***}) \quad t = -3,369161245 \cdot 10^{-8}x + 0,3493782166$$

$$(L. 5. E12^{***}) \quad -93,06556085x^2 - 154227951,2x + 6,904110611 \cdot 10^{14} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2018350,912 \text{ m} \\ y = 975382,254 \text{ m} \\ z = 5947854,513 \text{ m} \end{cases}$$

LIITE 6

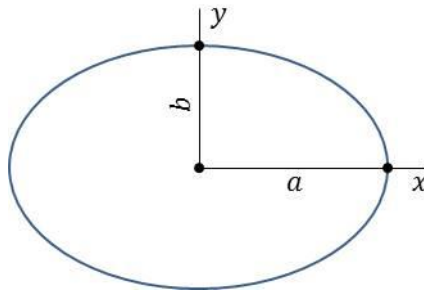
Suorakulmaisten ja maantieteellisten koordinaattien muunnoskaavat

L.6.1 Kaksiulotteinen tapaus

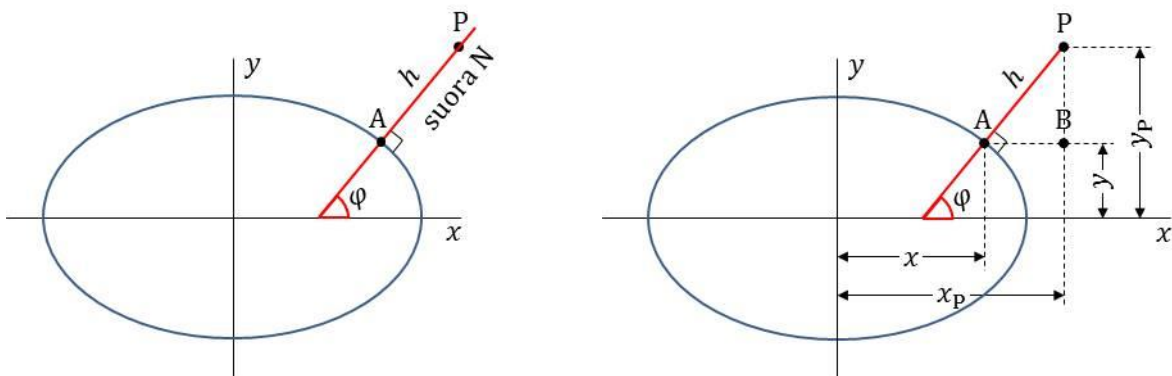
Tarkastellaan ensin kaksiulotteista tapausta, jossa on annettu suorakulmainen Oxy -koordinaatisto ja ellipsi E , jonka yhtälö on

$$(L.6.1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tämän ellipsin keskipiste on origossa ja sen isoakseli x -akselilla ja pikkuakseli y -akselilla. Isoakselin puolikas on a ja pikkuakselin puolikas b .



Tässä tasossa olevan pisteen P paikka voidaan ilmoittaa antamalla sen vaakasuora x -koordinaatti ja pystysuora y -koordinaatti. Toinen tapa ilmoittaa ellipsillä E tai sen ulkopuolella olevan pisteen P sijainti on antaa sen maantieteelliset koordinaatit, korkeus h ja leveys φ . Nämä kumpikin määräytyvät pisteestä P ellipsiä vastaan kohtisuoraan piirretyn suoran N (normaalin) avulla niin, että jos A on N :n ja ellipsin leikkauspiste eli normaalin kantapiste (samalla myös P :tä lähin ellipsin piste), niin h on janan AP pituus ja φ on N :n ja positiivisen x -akselin välinen kulma.



Merkitään B :llä pisteen P kautta kulkevan pystysuoran suoran ja pisteen A kautta kulkevan vaakasuoran suoran leikkauspistettä. Janan AB pituus on tällöin $h \cos \varphi$ ja janan BP pituus $h \sin \varphi$.

Jos pisteen A suorakulmaiset koordinaatit ovat x ja y , ovat pisteen P suorakulmaiset koordinaatit

$$\begin{cases} x_P = x + h \cos \varphi \\ y_P = y + h \sin \varphi \end{cases}$$

Kun nyt halutaan lausua pisteen P suorakulmaiset koordinaatit x_P ja y_P maantieteellisten koordinaattien φ ja h avulla, on pisteen A suorakulmaiset koordinaatit x ja y esitettävä akselien puolikkaiden a ja b avulla.

Myöhemmin käsiteltäväksi tulevaa kolmiulotteista tilannetta varten riittää tarkastella tapaus, jossa $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Yhtälöstä (L. 6.1) seuraa

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}$$

Oletetaan ensin, että $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, jolloin $0 < x < a$ ja $y > 0$, joten vain positiivinen vaihtoehto käy ja

$$(L. 6.2) \quad y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}$$

ja y :n derivaatta x :n suhteen on

$$y' = \frac{-\frac{b^2 x}{a^2}}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}} = \frac{-b^2 x}{a^2 \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}} = \frac{-b^2 x}{ab \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{-bx}{a \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ellipsille E pisteeseen (x, y) piirretyn normaalin kulmakertoimeksi saadaan näin

$$k = -\frac{1}{y'} = \frac{a \sqrt{a^2 - x^2}}{bx}$$

Jotta tämä normaali muodostaisi positiivisen x -akselin kanssa kulman φ , on oltava $k = \tan \varphi$ ja siis

$$\frac{a \sqrt{a^2 - x^2}}{bx} = \tan \varphi$$

$$a \sqrt{a^2 - x^2} = bx \tan \varphi$$

$$a^2(a^2 - x^2) = b^2 x^2 \tan^2 \varphi$$

$$a^4 - a^2 x^2 = b^2 x^2 \tan^2 \varphi$$

$$a^2 x^2 + b^2 x^2 \tan^2 \varphi = a^4$$

$$(a^2 + b^2 \tan^2 \varphi) x^2 = a^4$$

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}$$

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

joista vain positiivinen vaihtoehto käy, koska $x > 0$. Siis

$$(L. 6.3) \quad x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

Sijoittamalla saatu x yhtälöön (L. 6.2) saadaan

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{b^2 - \frac{a^4 b^2}{a^2(a^2 + b^2 \tan^2 \varphi)}} = b \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi - a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \\ &= \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \end{aligned}$$

sillä $y > 0$ ja $\tan \varphi > 0$. Siis

$$(L. 6.4) \quad y = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

Jos $\varphi = 0^\circ$, on $\tan \varphi = 0$ ja kun tällöin $x = a$ ja $y = 0$, pätevät kaavat (L. 6.3) ja (L. 6.4) myös tällöin.

Jos taas $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$, on $y < 0$ ja yhtälö (L. 6.2) muuttuu yhtälöksi

$$y = -\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}}$$

josta

$$y' = \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ellipsille E pisteeseen (x, y) piirretyn normaalin kulmakertoimeksi saadaan näin

$$k = -\frac{1}{y'} = -\frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx}$$

Jotta tämä normaali muodostaisi positiivisen x -akselin kanssa kulman φ , on siis oltava

$$-\frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx} = \tan \varphi$$

ja koska nytkin $x > 0$, on

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

ja koska $\tan \varphi < 0$, saadaan kaavaa (L. 6.2) soveltaen

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{b^2 - \frac{a^4 b^2}{a^2(a^2 + b^2 \tan^2 \varphi)}} = -b \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = -b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi - a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \\ &= \frac{-bb(-\tan \varphi)}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Kaikille φ , $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ saadaan siis x :lle ja y :lle sama lauseke ja lopputuloksena on, että ellipsin E piste, johon piirretty normaali muodostaa kulman φ positiivisen x -akselin kanssa on

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}, \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \right)$$

Jos hyväksytään, että $\tan 90^\circ = \infty$ ja $\tan(-90^\circ) = -\infty$, tulee tässä ensimmäisen lausekkeen arvoksi 0, kun $\varphi = 90^\circ$ tai kun $\varphi = -90^\circ$, mikä on totta, sillä silloin piste A on y -akselilla.

Jos $\varphi > 0^\circ$, on $\tan \varphi > 0$ ja jälkimmäinen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$y = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi}}} = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{\tan^2 \varphi} + b^2}}$$

jonka arvo on b , kun $\varphi = 90^\circ$. Jos taas $\varphi < 0^\circ$, on $\tan \varphi < 0$ ja jälkimmäinen lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$y = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = -\frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}{\tan^2 \varphi}}} = -\frac{b^2}{\sqrt{\frac{a^2}{\tan^2 \varphi} + b^2}}$$

jonka arvo on $-b$, kun $\varphi = -90^\circ$. Saadut x :n ja y :n arvot pätevät näin ollen kaikille kulmille φ , $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Kun pisteen A x -koordinaattiin lisätään korkeuden h vaakakomponentti $h \cos \varphi$ ja pystykoordinaattiin h :n pystykomponentti $h \sin \varphi$, saadaan pisteen P koordinaateiksi

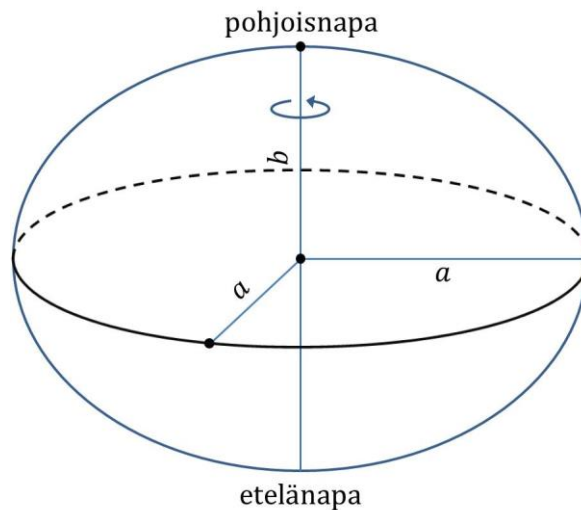
$$(L. 6.5) \quad \begin{cases} x_P = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi \\ y_P = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \sin \varphi \end{cases}$$

jossa siis $x_P = 0$ ja $y_P = b + h$, kun $\varphi = 90^\circ$ ja $y_P = -b - h$, kun $\varphi = -90^\circ$.

L.6.2 Kolmiulotteinen tapaus

Otetaan tarkasteluun nyt aivan erityinen ellipsi. Ellipsi, jonka keskipiste on Maan massakeskipiste, isoakselin puolikas $a = 6378137$ m, pikkuakselin puolikas $b = 6356752,31414036$ m ja pikkuakseli Maan napojen kautta kulkevalla suoralla. Pyöräytetään tämä ellipsi täysi kierros pikkuakselinsa ympäri. Näin syntyy pinta, joka on pyörähdysellipsoidi. Tämä pyörähdysellipsoidi on ETRS89-järjestelmän GRS 80 -ellipsoidi, ns. vertausellipsoidi, ja se on keskimääräistä merenpinnantaso globaalisti parhaiten kuvaava pyörähdysellipsoidi.

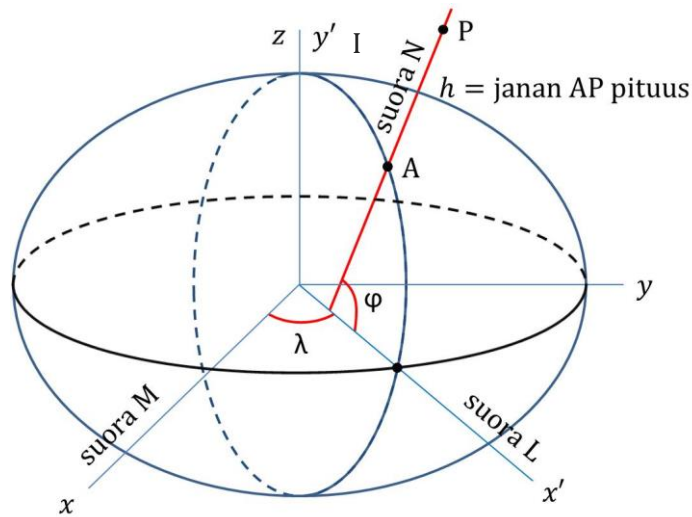
Käytännössä a on päiväntasaajan säde ja sen loppupää piirtää ellipsin pyörähtäessä päiväntasaajan. Pikkuakselin puolikas b puolestaan on Maan keskipisteen etäisyys navoista.



Jokainen taso, joka kulkee pyörimisakselin kautta, leikkaa vertausellipsoidin pitkin ellipsiä, jonka isoakselin puolikas on a ja pikkuakselin puolikas b .

Vertausellipsoidin pinnalla tai sen ulkopuolella olevan pisteen P maantieteelliset koordinaatit leveys, pituus ja korkeus määritellään seuraavasti. Asetetaan taso, joka kulkee pisteen P ja Maan pyörähdysakselin kautta. Se leikkaa päiväntasaajatason pitkin suoraa L ja vertausellipsoidin pitkin ellipsiä E . Pisteen P korkeuskoordinaatti h ja leveyskoordinaatti φ määritellään tätä ellipsiä käyttäen kohdassa L.6.1 esitetyllä tavalla. Korkeus h on pisteen P etäisyys pisteestä A , joka on pisteestä P ellipsiä E vastaan kohtisuoraan piirretyn suoran N ja ellipsin leikkauspiste. Leveys φ on suorien N ja L välinen kulma, jos P on päiväntasaajan pohjoispuolella ja tämän kulman vastaluku, jos P on päiväntasaajan eteläpuolella.

Pisteen P kolmas koordinaatti, pituus λ , on suoran L ja päiväntasaajatasossa olevan erikseen sovittu perussuoran M välinen kulma. Tämä perussuora määritellään ns. referenssimeridiaanin avulla. Referenssimeridiaanin on määritellyt WGS84 (World Geodetic System) -järjestelmässä Bureau International de l'Heure (BIH) vuonna 1984 siksi Maan pyörimisakselin kautta kulkevan tason T ja vertausellipsoidin leikkausellipsiksi, joka on 5,31 kaarisekuntia itään Greenwichin observatorion alueelle merkitystä historiallisesta nollameridiaanista. Perussuora M on tason T ja päiväntasaajatason leikkaussuora. Se kohtaa päiväntasaajan pisteessä, joka sijaitsee Guinean lahdella n. 750 km São Tomésta länteen. Pituus λ kasvaa lännestä itään mentäessä.



Pisteellä P ja sen ellipsoidilla olevalla vastinpisteellä A on sama maantieteellinen leveys ja pituus.

Suorakulmaiseksi koordinaatistoksi valitaan kolmiulotteinen $Oxyz$ -koordinaatisto, jonka origo O on vertausellipsoidin keskipisteessä (siis Maan massakeskipisteessä), positiivinen x -akseli kulkee päiväntasaajan ja nollameridiaanin leikkauspisteeseen, siis pisteen $\varphi = 0^\circ$, $\lambda = 0^\circ$, kautta, positiivinen y -akseli pisteen $\varphi = 0^\circ$, $\lambda = 90^\circ$ kautta ja positiivinen z -akseli pohjoisnavan, $\lambda = 90^\circ$, kautta.

Oletetaan nyt, että pisteen P maantieteelliset koordinaatit φ , λ ja h on annettu. Tehtävänä on selvittää, mitkä ovat P:n suorakulmaiset koordinaatit x_P , y_P ja z_P .

Piirretään taso T, joka kulkee pisteen P ja Maan pyörimisakselin kautta. Merkitään E:llä ellipsiä, jota pitkin taso T leikkaa vertausellipsoidia. Tasossa T otetaan käyttöön suorakulmainen $Ox'y'$ -koordinaatisto, jossa x' -akseli on tason T ja päiväntasaajatasen leikkaussuora ja y' -akseli yhtyy Maan pyörimisakseliin. Positiivinen suunta on x' -akselilla origosta pisteen P x' -akselilla olevan kohtisuoran projektion suuntaan ja y' -akselilla origosta pohjoisnavan suuntaan. Se, mitä edellä kaksiulotteisessa tapauksessa esitettiin, pätee tässä $Ox'y'$ -koordinaatistossa. Tässä tasokoordinaatistossa pisteen P x -koordinaatti x'_P ja y -koordinaatti y'_P ovat kaavojen (L. 6.5) mukaan

$$x'_P = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi$$

$$y'_P = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \sin \varphi$$

Pituuskoordinaatin määritelmän mukaan pisteen P pituus λ on origosta pisteeseen $(x'_P, y'_P, 0)$ piirretyn janan ja x -akselin välinen kulma, joten pisteen P kolmiulotteiset suorakulmaiset koordinaatit ovat

$$(L. 6.6) \quad \begin{cases} x_P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi \right) \cos \lambda \\ y_P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi \right) \sin \lambda \\ z_P = \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \sin \varphi \end{cases}$$

Jos suorakulmaiset koordinaatit x_P , y_P ja z_P on annettu, saadaan maantieteelliset koordinaatit ratkaisemalla yhtälöryhmä (L. 6.6) φ :n, λ :n ja h :n suhteen.

Mikäli $x_P \neq 0$, saadaan jakamalla toinen yhtälö puolittain ensimmäisellä

$$\frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \tan \lambda$$

ja tästä

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{y_P}{x_P} \right)$$

Tässä on huomattava, että laskettaessa λ :n arvoa tavanomaisella laskimella tai taulukkolaskentaohjelmalla saadaan tulos, joka on aina välillä $-90^\circ < \lambda < 90^\circ$, mikä on väärin silloin, kun $x_P < 0$. Tuolloin

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{y_P}{x_P} \right) + 180^\circ$$

Jos $x_P = 0$, on $\lambda = 90^\circ$, jos $y_P > 0$ ja $\lambda = -90^\circ$, jos $y_P < 0$. Jos $x_P = 0$ ja $y_P = 0$, on λ epämääräinen.

Näin on saatu pituuskoordinaatti λ ratkaistuksi.

Jos $x_P^2 + y_P^2 = 0$, on piste P Maan pyörähdysakselilla ja sen leveyskoordinaatti $\varphi = 90^\circ$, jos $z_P > 0$ ja $\varphi = -90^\circ$, jos $z_P < 0$.

Oletetaan nyt, että $x_P^2 + y_P^2 > 0$, siis $x_P \neq 0$ tai $y_P \neq 0$. Tällöin kaikilla λ :n arvoilla, joilla $\cos \lambda \neq 0$ on

$$\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \tan \lambda$$

$$\frac{\sin^2 \lambda}{\cos^2 \lambda} = \tan^2 \lambda$$

$$\frac{1 - \cos^2 \lambda}{\cos^2 \lambda} = \tan^2 \lambda$$

$$1 - \cos^2 \lambda = \tan^2 \lambda \cos^2 \lambda$$

$$1 = (1 + \tan^2 \lambda) \cos^2 \lambda$$

$$\cos^2 \lambda = \frac{1}{1 + \tan^2 \lambda}$$

$$\cos^2 \lambda = \frac{1}{1 + \frac{y_P^2}{x_P^2}}$$

$$\cos^2 \lambda = \frac{x_P^2}{x_P^2 + y_P^2}$$

Koska $\cos \lambda$ ja x_P ovat aina samanmerkkiset, saadaan tästä

$$\cos \lambda = \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$$

Tämä pätee myös, kun $\cos \lambda = 0$, jolloin myös $x_P = 0$.

Kun sijoitetaan tämä yhtälöryhmän (L. 6.6) ensimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$x_P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi \right) \frac{x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$$

$$1 = \frac{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + h \cos \varphi = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

$$h \cos \varphi = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

Koska oletettiin, että $x_P^2 + y_P^2 > 0$, on $\cos \varphi \neq 0$, joten tästä saadaan

$$(L. 6.7) \quad h = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\cos \varphi} - \frac{a^2}{\cos \varphi \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}}$$

ja sijoittamalla tämä yhtälöryhmän (5.6.6) viimeiseen yhtälöön

$$\begin{aligned} z_P &= \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + \left(\frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\cos \varphi} - \frac{a^2}{\cos \varphi \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \right) \sin \varphi \\ &= \frac{b^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} + \tan \varphi \sqrt{x_P^2 + y_P^2} - \frac{a^2 \tan \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Kertomalla puolittain lausekkeella $\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}$ ja siirtämällä kaikki yhtälön vasemmalle puolelle tulee yhtälö

$$\left(z_P - \tan \varphi \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \right) \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi} + (a^2 - b^2) \tan \varphi = 0$$

Kun tässä merkitään $\tan \varphi = x$ ja $\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = r_P$, saadaan yhtälö

$$(L. 6.8) \quad (z_P - x r_P) \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + (a^2 - b^2) x = 0$$

Normaalisti tämä ratkaistaisiin niin, että $(a^2 - b^2)x$ siirrettäisiin oikealle puolelle ja yhtälö korotettaisiin puolittain toiseen potenssiin, jolloin seurauksena olisi yhtälö

$$(z_P - xr_P)^2(a^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2x^2$$

$$(z_P^2 - 2z_Pxr_P + x^2r_P^2)(a^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2x^2$$

$$a^2z_P^2 + b^2z_P^2x^2 - 2a^2z_Pr_Px - 2b^2z_Pr_Px^3 + a^2r_P^2x^2 + b^2r_P^2x^4 - (a^2 - b^2)^2x^2 = 0$$

$$b^2r_P^2x^4 - 2b^2z_Pr_Px^3 + (b^2z_P^2 + a^2r_P^2 - (a^2 - b^2)^2)x^2 - 2a^2z_Pr_Px + a^2z_P^2 = 0$$

Siis täydellinen neljännen asteen yhtälö, jonka täsmällinen ratkaiseminen on kyllä mahdollista, mutta tavattoman työlästä. Tyydytään siis selvittämään yhtälön (L. 6.8) juurelle likiarvo.

Tähän on olemassa useampiakin eri keinoja, mutta varsin nopea, vaivaton ja yleisestikin toimiva keino on ns. Newtonin menetelmä. Siinä etsitään yhtälön $f(x) = 0$ juurelle likiarvo laskemalla peräkkäisiä x :n arvoja kaavalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

missä f' on funktion f derivaatta. Tässä tapauksessa

$$f(x) = (z_P - r_Px)\sqrt{a^2 + b^2x^2} + (a^2 - b^2)x$$

ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= -r_P \cdot \sqrt{a^2 + b^2x^2} + (z_P - r_Px) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2b^2x \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}} + a^2 - b^2 \\ &= -r_P \cdot \sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{(z_P - r_Px)b^2x}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}} + a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Kaava, jolla arvoja ryhdytään laskemaan, on siten

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(z_P - r_Px_n)\sqrt{a^2 + b^2x_n^2} + (a^2 - b^2)x_n}{-r_P \cdot \sqrt{a^2 + b^2x_n^2} + \frac{(z_P - r_Px_n)b^2x_n}{\sqrt{a^2 + b^2x_n^2}} + a^2 - b^2}$$

Aloitetaan laskeminen arvolla

$$x_1 = \frac{z_P}{r_P}$$

joka olisi yhtälön (L. 6.8) juuri, jos vertausellipsoidina olisi pallo, jolloin $a = b$.

Laskeminen voidaan lopettaa, kun x_n :ien arvoissa haluttu määrä desimaaleja ei enää muutu. Saatu tulos x on yhtälön (L. 6.8) juuri ja pisteen P maantieteellinen leveys φ on $\tan^{-1} x$.

Lopuksi lasketaan h yhtälöstä (L. 6.7) ja lopputulos on:

Jos pisteen P suorakulmaiset koordinaatit ovat x_P , y_P ja z_P , niin sen maantieteelliset koordinaatit ovat

$$(L. 6.9) \quad \begin{cases} \varphi = \tan^{-1} x, \text{ missä } x \text{ on yhtälön } \left(z_P - x \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \right) \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - (b^2 - a^2)x = 0 \text{ juuri} \\ \lambda = \tan^{-1} \left(\frac{y_P}{x_P} \right), \text{ jos } x_P \neq 0, \lambda = 90^\circ, \text{ jos } x_P = 0 \text{ ja } y_P > 0 \text{ ja } \lambda = -90^\circ, \text{ jos } x_P = 0 \text{ ja } y_P < 0 \\ h = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\cos \varphi} - \frac{a^2}{\cos \varphi \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} \end{cases}$$

pituuden λ arvo kuitenkin niin, että jos laskentaväline (laskin tai taulukkolaskentaohjelma) antaa $\tan^{-1}$:n arvoksi aina kulman -90° :n ja 90° :n väliltä, lisätään laskentavälineen antamaan arvoon 180° .

L.6.3 Korkeuskoordinaatit

Edellisessä kohdassa käytetty pisteen P korkeuskoordinaatti h on ns. ellipsoidikorkeus eli P:n etäisyys Maan vertausellipsoidista. Pisteen korkeuskoordinaattina käytetään kuitenkin yleisesti (mm. kartoissa) ns. ortometrasta korkeutta H , joka on pisteen etäisyys vaaituksilla määritetystä tasa-arvopinnasta, geoidista, joka on lähellä valtamerien vapaata pintaa (maalla pintaa, johon merenpinta asettuisi, jos se pääsisi asettumaan vapaasti esimerkiksi kanavia pitkin). Ortometrinen korkeus H saadaan näin ollen vähentämällä maantieteellisestä korkeudesta h geoidin korkeus N vertausellipsoidista. Tämä N voidaan Suomen alueella selvittää sovelluksella, joka löytyy internetistä osoitteesta <http://coordtrans.fgi.fi/transform-form.do> ja on esimerkiksi Helsingin rautatieasemalla pisteessä, jonka leveys $\varphi = 60,174463^\circ$ ja pituus $\lambda = 24,939208^\circ$, on $N = 17,6173$ m.

L.6.4 Esimerkkejä

Esim L.6.1 Navstar 72:n sijainti 12.3.2015 klo 07:16:40 UTC-aikaa oli $\varphi = 50,49^\circ$, $\lambda = 36,61^\circ$ ja $h = 20192,06$ km. Mitkä olivat tuolloin sen suorakulmaiset koordinaatit?

Ratkaisu Käytetään kaavoja (L. 6.9) arvoilla $a = 6378137$ m ja $b = 6356752,31414036$ m

$$x_P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 50,49^\circ}} + 20192060 \cdot \cos 50,49^\circ \right) \cos 36,61^\circ = 13575819 \text{ m}$$

$$y_P = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 50,49^\circ}} + 20192060 \cdot \cos 50,49^\circ \right) \sin 36,61^\circ = 10085969 \text{ m}$$

$$z_P = \frac{b^2 \tan 50,49^\circ}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 50,49^\circ}} + 20192060 \cdot \sin 50,49^\circ = 20476093 \text{ m}$$

Esim L.6.2 Mitkä ovat Lánjká-tunturin huipun maantieteelliset koordinaatit, kun sen suorakulmaiset koordinaatit ovat $x_P = 2020781$ m, $y_P = 985008$ m ja $z_P = 5949499$ m?

Ratkaisu Kaavan (L. 6.9) mukaan ratkaistaan yhtälö

$$\left(z_P - x \sqrt{x_P^2 + y_P^2}\right) \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - (b^2 - a^2)x = 0$$

annetuilla $x_P:n$, $y_P:n$ ja $z_P:n$ arvoilla ja edellisessä esimerkissä mainituilla $a:n$ ja $b:n$ arvoilla käyttämällä Newtonin menetelmää. Lasketaan siis peräkkäisiä $x:n$ arvoja kaavalla

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(z_P - x_n \sqrt{x_P^2 + y_P^2}\right) \sqrt{a^2 + b^2 x_n^2} - (b^2 - a^2)x_n}{-\sqrt{x_P^2 + y_P^2} \sqrt{a^2 + b^2 x_n^2} + \frac{\left(z_P - \sqrt{x_P^2 + y_P^2} x_n\right) b^2 x_n}{\sqrt{a^2 + b^2 x_n^2}} - b^2 + a^2}$$

aloittaen arvolla

$$x_1 = \frac{z_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$$

Näin saadaan

$$x_1 = 2,646497670$$

$$x_2 = 2,664437756$$

$$x_3 = 2,664331925$$

$$x_4 = 2,664331921$$

$$x_5 = 2,664331921$$

ja tästä $\varphi = \tan^{-1} 2,664331921 = 69,427449788^\circ$. Keskimmäisen kaavan (L. 6.9) mukaan

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{985008}{2020781} \right) = 25,986421741^\circ$$

Lopuksi alimman kaavan (L. 6.9) mukaan

$$h = \frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{\cos \varphi} - \frac{a^2}{\cos \varphi \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = 645,450555394 \text{ m}$$

joka on Lánjká-tunturin huipun ellipsoidikorkeus. Koska geoidin korkeus N vertausellipsoidista Lánjká-tunturin huipulla on 25,0469 m, on Lánjká-tunturin huipun ortometrinen korkeus $H = h - N = 645,450555394 - 25,0469 = 620,403655395$ m. Lánjká-tunturin huipun maantieteelliset koordinaatit ovat siis $\varphi = 69,4274^\circ$, $\lambda = 25,9864^\circ$ ja $H = 620$ m, kuten kartoista voi todeta.

LIITE 7

Käytetyt arvot

PERUSVAKIOITA		
nimi	arvo	lähde
Valonnopeus, c	299792458 m/s	1
Gravitaatiovakio, G	$6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$	2
Coulombin vakio, k_e	$10^{-7} \text{ C}^2 = 8987551787,3681764 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$	3
Alkeisvaraus, e	$1,6021766208 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	4
Planckin vakio, h	$6,626070040 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	5
Atomimassayksikkö, u	$1,660539040 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	6

- Lähteet: 1) <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c>
 2) <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg>
 3) https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's_law
 4) <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e>
 5) <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?h>
 6) <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ukg>

ALKEISHIUKKASTEN MASSOJA		
nimi	massa, u	lähde
Ylös-kvarkki, u	0,00247	https://en.wikipedia.org/wiki/Quark
Alas-kvarkki, d	0,00515	https://en.wikipedia.org/wiki/Quark
Elektroni, e	$5,48579909070 \cdot 10^{-4}$	http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?meu
Elektr. neutriino, ν_e	$< 1,3 \cdot 10^{-10}$	https://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino
Myoni, μ	0,1134289257	http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mmuu
Protoni, p	1,007276466879	http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mpu
Neutroni, n	1,00866491588	http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mnu

TÄHTITIETEELLISIÄ MITTOJA		
nimi	arvo	lähde
Tähtivuorokausi	86164,098903691 s	1
Valovuosi, ly	9460730472580,8 km	2
Astronominen yksikkö, AU	149597870,7 km	2
Maan pienin etäisyys Auringosta, keskiarvo 2001-2100	147098074 km	3
Maan suurin etäisyys Auringosta, keskiarvo 2001-2100	152097701 km	3
Maan massa	$5,9723 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	4
Auringon massa	$1,988500 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	5

- Lähteet: 1) <https://en.wikipedia.org/wiki/Earth>
 2) <https://www.iau.org/public/themes/measuring>
 3) <http://www.astropixels.com/ephemeris/perap2001.html>
 4) <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
 5) <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>

ATOMIEN JA YTIMIEN OMINAISUUKSIA			
os1 = http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value os2 = https://en.wikipedia.org/wiki os3 = https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of Esimerkiksi protonin tietojen lähde on http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mpu			
nimi	massa (u)	radioaktiivisuuden laji/ puoliintumisaika	lähde
protoni, p	1,007276466879	pysyvä	os1?mpu
neutroni, n	1,00866491588	β^- /611,0 s	os1?mnu, os2/Neutron
^1_1H -ydin, protoni	1,007276466879	pysyvä	os1?mpu
^1_1H -atomi	1,00782503223	pysyvä	os3_hydrogen
^2_1H -ydin, deuteroni	2,013553212745	pysyvä	os1?mdu
^2_1H -atomi, deuterium	2,01410177812	pysyvä	os3_hydrogen
^3_1H -ydin, tritoni	3,01550071632	β^- /12,32 a	os1?mtu
^3_1H -atomi, tritium	3,0160492779	12,32 a	os3_hydrogen
^7_1H	7,05275	$4n/2,3 \cdot 10^{-23}$ s	os3_hydrogen
^2_2He	2,015894	p, β^+ / $\ll 10^{-9}$ s	os3_helium
^3_2He -ydin, helioni	3,01493224673	pysyvä	os1?mhu
^3_2He	3,0160293191	pysyvä	os3_helium
^4_2He -ydin, α	4,001506179127	pysyvä	os1?malu
^4_2He	4,00260325415	pysyvä	os3_helium
^5_2He	5,01222	$n/7,00 \cdot 10^{-22}$ s	os3_helium
$^{10}_2\text{He}$	10,05240	$2n/2,7 \cdot 10^{-21}$ s	os3_helium
^6_3Li	6,015122795	pysyvä	os3_lithium
^7_3Li	7,01600455	pysyvä	os3_lithium
^6_4Be	6,01692983	$2p/5,0 \cdot 10^{-21}$ s	os3_beryllium
^7_4Be	7,01692983	53,22 d	os3_beryllium
^8_4Be	8,00530510	$\alpha/6,7 \cdot 10^{-17}$ s	os3_beryllium
^7_5B	7,02992	$p/3,50 \cdot 10^{-22}$ s	os3_boron
^8_5B	8,0246072	β^+ , $\alpha/0,770$ s	os3_boron
$^{10}_5\text{B}$	10,0129370	pysyvä	os3_boron
$^{10}_6\text{C}$	10,0168532	$\beta^+/19,290$ s	os3_carbon
$^{12}_6\text{C}$	12	pysyvä	os3_carbon
$^{13}_6\text{C}$	13,0033548378	pysyvä	os3_carbon
$^{14}_6\text{C}$	14,003241989	$\beta^-/5730$ a	os3_carbon
$^{11}_7\text{N}$	11,02609	$p/5,90 \cdot 10^{-22}$ s	os3_nitrogen
$^{13}_7\text{N}$	13,00573861	$\beta^+/9,965$ min	os3_nitrogen
$^{14}_7\text{N}$	14,0030740048	pysyvä	os3_nitrogen
$^{15}_7\text{N}$	15,0001088982	pysyvä	os3_nitrogen
$^{12}_8\text{O}$	12,034405	$2p, p/5,80 \cdot 10^{-22}$ s	os3_oxygen

$^{14}_8\text{O}$	14,00859625	$\beta^+ / 70,598 \text{ s}$	os3_oxygen
$^{15}_8\text{O}$	15,0030656	$\beta^+ / 122,24 \text{ s}$	os3_oxygen
$^{16}_8\text{O}$	15,99491461956	pysyvä	os3_oxygen
$^{20}_{10}\text{Ne}$	19,9924401754	pysyvä	os3_neon
$^{23}_{11}\text{Na}$	22,9897692809	pysyvä	os3_sodium
$^{23}_{12}\text{Mg}$	22,9941237	$\beta^+ / 11,317 \text{ s}$	os3_magnesium
$^{24}_{12}\text{Mg}$	23,985041700	pysyvä	os3_magnesium
$^{28}_{14}\text{Si}$	27,9769265325	pysyvä	os3_silicon
$^{31}_{15}\text{P}$	30,97376163	pysyvä	os3_phosphorus
$^{31}_{16}\text{S}$	30,9795547	$\beta^+ / 2,572 \text{ s}$	os3_sulfur
$^{32}_{16}\text{S}$	31,97207100	pysyvä	os3_sulfur
$^{36}_{18}\text{Ar}$	35,967545106	hajoamista ei ole todettu	os3_argon
$^{40}_{18}\text{Ar}$	39,9623831225	pysyvä	os3_argon
$^{40}_{19}\text{K}$	39,96399848	β^- , EC, $\beta^+ / 1,248 \cdot 10^9 \text{ a}$	os3_potassium
$^{40}_{20}\text{Ca}$	39,96259098	hajoamista ei ole todettu	os3_calcium
$^{46}_{20}\text{Ca}$	45,9536926	hajoamista ei ole todettu	os3_calcium
$^{56}_{26}\text{Fe}$	55,9349375	pysyvä	os3_iron
$^{58}_{26}\text{Fe}$	57,9332756	pysyvä	os3_iron
$^{56}_{27}\text{Co}$	55,9398393	$\beta^+ / 77,233 \text{ d}$	os3_cobalt
$^{59}_{27}\text{Co}$	58,9331950	pysyvä	os3_cobalt
$^{60}_{27}\text{Co}$	59,9338171	$\beta^- / 5,2713 \text{ a}$	os3_cobalt
$^{56}_{28}\text{Ni}$	55,942132	$\beta^+ / 6,075 \text{ d}$	os3_nickel
$^{60}_{28}\text{Ni}$	59,9307864	pysyvä	os3_nickel
$^{62}_{28}\text{Ni}$	61,9283451	pysyvä	os3_nickel
$^{64}_{28}\text{Ni}$	63,9279660	pysyvä	os3_nickel
$^{65}_{28}\text{Cu}$	64,9277895	pysyvä	os3_copper
$^{88}_{35}\text{Br}$	87,92407	β^- , n/16,29 s	os3_bromine
$^{80}_{36}\text{Kr}$	79,9163790	pysyvä	os3_krypton
$^{90}_{36}\text{Kr}$	89,919517	$\beta^- / 32,32 \text{ s}$	os3_krypton
$^{92}_{36}\text{Kr}$	91,926156	β^- , n/1,840 s	os3_krypton
$^{100}_{38}\text{Sr}$	99,93535	β^- , n/0,202 s	os3_strontium
$^{92}_{40}\text{Zr}$	91,9050408	pysyvä	os3_zirconium
$^{94}_{40}\text{Zr}$	93,9063152	hajoamista ei ole todettu	os3_zirconium
$^{103}_{40}\text{Zr}$	102,92660	$\beta^- / 1,3 \text{ s}$	os3_zirconium
$^{128}_{52}\text{Te}$	127,9044631	$2\beta^- / 2,2 \cdot 10^{24} \text{ a}$	os3_tellurium
$^{139}_{52}\text{Te}$	138,93473	β^- , n/0,500 s	os3_tellurium
$^{128}_{54}\text{Xe}$	127,9035313	pysyvä	os3_xenon
$^{130}_{54}\text{Xe}$	129,9035080	pysyvä	os3_xenon
$^{134}_{54}\text{Xe}$	133,9053945	hajoamista ei ole todettu	os3_xenon

$^{137}_{55}\text{Cs}$	136,9070895	$\beta^-/30,1671 \text{ a}$	os3_caesium
$^{130}_{56}\text{Ba}$	129,9063208	$2\text{EC}/1,6 \cdot 10^{21} \text{ a}$	os3_barium
$^{137}_{56}\text{Ba}$	136,9058274	pysyvä	os3_barium
$^{141}_{56}\text{Ba}$	140,914411	$\beta^-/18,27 \text{ min}$	os3_barium
$^{144}_{56}\text{Ba}$	143,922953	$\beta^-/11,5 \text{ s}$	os3_barium
$^{145}_{57}\text{La}$	144,92165	$\beta^-/24,8 \text{ s}$	os3_lanthanum
$^{198}_{79}\text{Au}$	197,9682423	$\beta^-/2,69517 \text{ d}$	os3_gold
$^{198}_{80}\text{Hg}$	197,9667690	hajoamista ei ole todettu	os3_mercury
$^{206}_{82}\text{Pb}$	205,9744653	hajoamista ei ole todettu	os3_lead
$^{208}_{82}\text{Pb}$	207,9766521	hajoamista ei ole todettu	os3_lead
$^{210}_{82}\text{Pb}$	209,9841885	$\beta^-, \alpha/20,20 \text{ a}$	os3_lead
$^{214}_{82}\text{Pb}$	213,999 8054	$\beta^-/26,8 \text{ min}$	os3_lead
$^{210}_{83}\text{Bi}$	209,9841204	$\beta^-, \alpha/5,012 \text{ d}$	os3_bismuth
$^{214}_{83}\text{Bi}$	213,998712	$\beta^-, \alpha/19,9 \text{ min}$	os3_bismuth
$^{210}_{84}\text{Po}$	209,9828737	$\alpha/138,376 \text{ d}$	os3_polonium
$^{214}_{84}\text{Po}$	213,9952014	$\alpha/1,643 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	os3_polonium
$^{218}_{84}\text{Po}$	218,0089730	$\alpha, \beta^-/3,10 \text{ min}$	os3_polonium
$^{222}_{86}\text{Rn}$	222,0175777	$\alpha/3,8235 \text{ d}$	os3_radon
$^{226}_{88}\text{Ra}$	226,0254098	$\alpha, 2\beta^-, \text{SF}/1600 \text{ a}$	os3_radium
$^{228}_{88}\text{Ra}$	228,0310703	$\beta^-/5,75 \text{ a}$	os3_radium
$^{230}_{90}\text{Th}$	230,0331338	$\alpha, \text{SF}/7,538 \cdot 10^4 \text{ a}$	os3_thorium
$^{231}_{90}\text{Th}$	231,0363043	$\beta^-, \alpha/25,52 \text{ h}$	os3_thorium
$^{232}_{90}\text{Th}$	232,0380553	$\alpha, 2\beta^-, \text{SF}/1,405 \cdot 10^{10} \text{ a}$	os3_thorium
$^{233}_{90}\text{Th}$	233,0415818	$\beta^-/21,83 \text{ min}$	os3_thorium
$^{234}_{90}\text{Th}$	234,043601	$\beta^-/24,10 \text{ d}$	os3_thorium
$^{231}_{91}\text{Pa}$	231,0358840	$\alpha, \text{SF}/32760 \text{ a}$	os3_protactinium
$^{233}_{91}\text{Pa}$	233,0402473	$\beta^-/26,975 \text{ d}$	os3_protactinium
$^{234}_{91}\text{Pa}$	234,043308	$\beta^-, \text{SF}/6,70 \text{ h}$	os3_protactinium
$^{233}_{92}\text{U}$	233,0396352	$\alpha, \text{SF}/1,592 \cdot 10^5 \text{ a}$	os3_uranium
$^{234}_{92}\text{U}$	234,0409521	$\alpha, \text{SF}/2,455 \cdot 10^5 \text{ a}$	os3_uranium
$^{235}_{92}\text{U}$	235,0439299	$\alpha, \text{SF}/7,04 \cdot 10^8 \text{ a}$	os3_uranium
$^{236}_{92}\text{U}$	236,045568	$\alpha, \text{SF}/2,342 \cdot 10^7 \text{ a}$	os3_uranium
$^{238}_{92}\text{U}$	238,0507882	$\alpha, \text{SF}, 2\beta^-/4,468 \cdot 10^9 \text{ a}$	os3_uranium
$^{239}_{92}\text{U}$	239,0542933	$\beta^-/23,45 \text{ min}$	os3_uranium
$^{237}_{93}\text{Np}$	237,0481734	$\alpha, \text{SF}/2,144 \cdot 10^6 \text{ a}$	os3_neptunium
$^{239}_{93}\text{Np}$	239,0529390	$\beta^-/2,356 \text{ d}$	os3_neptunium
$^{239}_{94}\text{Pu}$	239,0521634	$\alpha, \text{SF}/2,411 \cdot 10^4 \text{ a}$	os3_plutonium
$^{240}_{94}\text{Pu}$	240,0538135	$\alpha, \text{SF}/6,561 \cdot 10^3 \text{ a}$	os3_plutonium
$^{241}_{95}\text{Am}$	241,0568291	$\alpha, \text{SF}/432,2 \text{ a}$	os3_americium

LÄHTEET

- 1.1.1 Junan liike, Helsingin rautatieaseman koordinaatit: <https://asiointi.maanmittauslaitos.fi> [14.01.2017]
- 1.1.2 Junan liike, Helsingin rautatieaseman korkeuskoordinaatit: <http://coordtrans.fgi.fi/transform-form.do> [14.01.2017]
- 1.1.3 Junan liike, Helsingin rautatieaseman etäisyys Maan akselistasta: <http://www.apsalin.com/convert-geodetic-to-cartesian.aspx> [14.01.2017]
- 1.1.4 Junan liike, Maan nopeus radallaan: http://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_speed [14.01.2017]
- 1.1.5 Junan liike, Auringon liike Linnunradan keskustan ympäri: https://en.wikipedia.org/wiki/Galactic_year [14.01.2017]
- 1.1.6 Junan liike, Maan napojen liike: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_motion [14.01.2017]
- 1.1.7 Inertiaalijärjestelmän määritelmä: https://en.wikipedia.org/wiki/Inertial_frame_of_reference [14.01.2017]
- 1.1.8 Homogeenisuuden määritelmä: [https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneity_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneity_(physics)) [14.01.2017]
- 1.1.9 Isotrooppisuuden määritelmä: <https://en.wikipedia.org/wiki/Isotropy> [14.01.2017]
- 1.2.1 Valon aallonpituudet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Light> [14.01.2017]
- 1.2.2 Valon taitekeroimet ilmassa: CRC Handbook of Chemistry and Physics 83rd Edition, s. 10-224
- 1.2.3 Valon taitekeroimet vedessä: CRC Handbook of Chemistry and Physics 83rd Edition, s. 10-222
- 1.2.4 Maxwellin yhtälöt: http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations [14.01.2017]
- 1.2.5 Michelsonin-Morleyn koe: https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%27s_Morley_experiment [14.01.2017]
- 1.2.6 Albert Einstein: http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein [14.01.2017]
- 2.1.2.1 Kaavan (2.1.2) johtamisen idea: Richard Feynman, The Feynman Lectures on Physics, Volume I, Chapter 15. The Special Theory of Relativity
- 2.1.4.1 Haarajoen ja Mäntsälän asemien väli: http://fi.wikipedia.org/wiki/Haarajoen_rautatieasema [14.01.2017]. Lähteen antama etäisyys 19,6 km muunnettu 19,5 km:ksi, jotta välttyttäisiin murtoluvuilta.
- 2.1.4.2 Pendolinon nopeus: https://www.vr.fi/cs/vr/fi/junat_ja_vaunut [14.01.2017]
- 2.1.4.3 Juno-luotaimen nopeus: <http://www.space.com/33336-nasa-juno-probe-jupiter-orbit-tonight.html> [14.01.2017]
- 2.1.4.4 Matka Lahdenväylän eteläpäästä Utsjoen keskusta: <https://www.google.fi/maps/dir/60.2156746,24.9736726/69.9077712,27.0265218/@64.7278823,16.1464233,5z/data=!4m2!4m1!3e0> [14.01.2017]
- 2.1.4.5 Galaksin Q2125-431 nopeus: <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/universe/2page11.pdf> [14.01.2017]
- 2.2.4.1 Pendolinon pituus: <http://www.oiko.phnet.fi/Pendolinot/Pendolinotaulu.html> [14.01.2017]
- 2.2.4.2 4,659 m pitkä auto: http://ws.skoda-auto.com/OwnersManualService/Data/en/Octavia_5E/11-2015/Manual/Octavia/A7_Octavia_OwnersManual.pdf [14.01.2017]
- 2.2.4.3 Nahkan ja metallin välinen kitkakerroin: http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html [14.01.2017]
- 2.2.4.4 Nahkan ja metallin välinen kitkakerroin http://www.engineersedge.com/coefficients_of_friction.htm [14.01.2017]
- 2.3.4.1 Andromedan galaksi: https://en.wikipedia.org/wiki/Andromeda_Galaxy [14.01.2017]
- 2.3.4.2 Helsinki-Tallinna-rautatietunneli: https://fi.wikipedia.org/wiki/Helsinki%27s_Tallinna-rautatietunneli [14.01.2017]
- 3.1.1.1 Isaac Newton: https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton [16.01.2017]
- 3.1.1.2 Kiväärin Tikka T3 Lite SS 9.3x62 ominaisuudet: http://cdn1.tikka.fi/sites/default/files/Tikka_Export2016.pdf [17.01.2017]

- 3.1.1.3 Patruunan Norma-Oryx-286-gr Norma 202 ominaisuudet <https://www.norma.cc/us/Ammunition-Academy/Loading-Data/93x62> [17.01.2017]
- 3.1.1.4 Grain: [https://en.wikipedia.org/wiki/Grain_\(unit\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Grain_(unit)) [17.01.2017]
- 3.1.1.5 Norma Oryx 286 gr luodin nopeus: <https://www.norma.cc/en/Products/Hunting/93x62/Norma-Oryx-285-gr> [17.01.2017]
- 3.1.1.6 Patruunan Norma Oryx 285 gr ominaisuudet: Punnitustulokset [17.01.2017]
- 3.2.1 Liikemäärän kaavan johtamisen idea: P. C. Peters: An alternate derivation of relativistic momentum, American Journal of Physics; 54: 804 (1986); DOI: 10.1119/1.14450
- 3.4.3.1 Fotonin energia: https://en.wikipedia.org/wiki/Photon_energy [17.01.2017]
- 3.4.3.2 Mikroaaltouunin säteilyn taajuus: https://en.wikipedia.org/wiki/Microwave_oven [17.01.2017]
- 3.4.3.3 Revontulien värit: <http://en.wikipedia.org/wiki/Aurora> [17.01.2017]
- 3.4.4.1 Matalaenergiatalon lämmönkulutus: <https://fi.wikipedia.org/wiki/Matalaenergiatalo> [18.01.2017]
- 3.4.4.2 Olkiluoto 1:n tiedot: <http://www.tvo.fi/page-515> [18.01.2017]
- 3.4.4.3 Uraanin tiheys: <https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium> [18.01.2017]
- 3.4.4.4 CERN: <https://en.wikipedia.org/wiki/CERN> [18.01.2017]
- 3.4.4.5 LHC: https://en.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider [18.01.2017]
- 3.4.4.6 LHC: <http://lhc-machine-outreach.web.cern.ch/lhc-machine-outreach/beam.htm> [18.01.2017]
- 3.4.4.7 OMG-hiukkanen: https://en.wikipedia.org/wiki/Oh-My-God_particle [18.01.2017]
- 3.4.4.8 Hämähäkin seitin paksuus: <http://www.earthlife.net/chelicerata/silk.html> [18.01.2017]
- 3.4.4.9 Maailmankaikkeuden ikä: https://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_universe [18.01.2017]
- 3.4.4.10 Suomen sähkön kulutus ja tuotanto 2015: <http://www.fingrid.fi/fi/sahkomarkkinat/kulutus-ja-tuotanto/Sivut/default.aspx?beginDate=20150101&endDate=20151231&showChart=1&showTable=0> [18.01.2017]
- 3.4.4.11 Proxima Centaurin etäisyys: https://en.wikipedia.org/wiki/Proxima_Centauri [18.01.2017]
- 3.4.4.12 Avaruusaseman ISS massa: <http://www.space.com/16748-international-space-station.html> [18.01.2017]
- 3.4.4.13 Ihmiskunnan energiankulutus 2013: https://en.wikipedia.org/wiki/World_energy_consumption [18.01.2017]
- 3.4.4.14 Proxima Centauri b: https://en.wikipedia.org/wiki/Proxima_Centauri_b [18.01.2017]
- 3.5.7.1 Lapua Polar Biathlon -patruuna: <http://www.lapua.com/en/sport-shooting/rimfire-cartridges/polar-biathlon.html> [24.01.2017]
- 3.5.7.2 Lyijyn ominaislämpökapasiteetti: CRC Handbook of Chemistry an Physics 83rd edition, s. 12-218
- 3.5.7.3 Lyijyn atomipaino: CRC Handbook of Chemistry an Physics 83rd edition, s. 11-166
- 3.5.7.4 Lyijyn sulamispiste: CRC Handbook of Chemistry an Physics 83rd edition, s. 6-128
- 3.5.7.5 Lyijyn sulamislämpö: CRC Handbook of Chemistry an Physics 83rd edition, s. 6-128
- 3.5.7.6 Neutronin massa (kg): <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mn> [24.01.2017]
- 3.5.7.7 Elektronin massa (kg): <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?me> [24.01.2017]
- 3.6.1 Heikko vuorovaikutusvoima: https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_interaction [27.01.2017]
- 4.1.1 Myonin puoliintumisaika: <https://en.wikipedia.org/wiki/Muon> [25.01.2017]
- 4.1.2 Frischin- Smithin koe: http://phylab.fudan.edu.cn/lib/exe/fetch.php?media=exp:muon:measurement_of_the_relativistic_time_dilation_using_%CE%BC-mesons_.pdf
- 4.2.1.1 GPS-järjestelmä: https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System [25.01.2017]
- 4.2.1.2 GPS-järjestelmä: Markku Poutanen, Satelliittipaikannus Ursan julkaisu 152, 2016, ss 19 – 22.
- 4.2.2.1 GPS-satelliittien tiedot: <http://www.n2yo.com/satellites/?c=20> [23.01.2017]
- 4.2.2.2 Satelliittien Navstar 72, 70, 66 ja 58 sijainnit 12.3.2015 klo 07.16.40 UTC [12.03.2015]
- 4.2.2.3 Vertausellipsoidin mitat: https://en.wikipedia.org/wiki/Geodetic_datum [31.01.2017]

- 4.2.2.4 Vertausellipsoidi ja geoidi: <http://www.maanmittauslaitos.fi/ammattilaisille/maastotiedot/koordinaatti-korkeusjarjestelmat/etrs89-euref-fin/3d-koordinaatistot/ellipsoidi-geoidi> [31.01.2017]
- 4.2.2.5 Koordinaattimuunnos suorakulmaisista maantieteellisiin: <http://www.apsalin.com/convert-cartesian-to-geodetic.aspx> [23.01.2017]
- 4.2.2.6 Koordinaattimuunnos maantieteellisistä suorakulmisiin: <http://www.apsalin.com/convert-geodetic-to-cartesian.aspx> [23.01.2017]
- 4.2.2.7 Hankoniemen ja Långå-tunturin huipun koordinaatit: <https://asiointi.maanmittauslaitos.fi> [23.01.2017]
- 4.2.3.1 Kahden paikan välinen etäisyys Maan pintaa pitkin (Hankoniemi): <http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong-vincenty.html> [23.01.2017]
- 4.2.4.1 Gravitaation vaikutus aikaan: http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_time_dilation [25.01.2017]
- 4.2.4.2 Gravitaatiovakion vaihtelu: <https://phys.org/news/2015-04-gravitational-constant-vary.html> [26.01.2017]
- 4.3.2.1 Alkeishiukkaset: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles [26.01.2017]
- 4.3.2.2 Elektronin varaus: <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e> [26.01.2017]
- 4.3.2.3 Elektronin massa (MeV/c²): <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mec2mev> [26.01.2017]
- 4.3.2.4 Kvarkkien ominaisuudet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Quark> [26.01.2017]
- 4.3.2.5 Protonin massa (MeV/c²): <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mpc2mev> [26.01.2017]
- 4.3.2.6 Neutronin massa (MeV/c²): <http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mnc2mev> [26.01.2017]
- 4.3.2.7 Vahva vuorovaikutusvoima: https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_force [27.01.2017]
- 4.3.3.1 Alkuaineiden lukumäärä: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_chemical_elements [27.01.2017]
- 4.3.3.2 Isotooppien lukumäärä: <https://en.wikipedia.org/wiki/Isotope> [26.01.2017]
- 4.3.3.3 Pysyvät isotoopit: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_elements_by_stability_of_isotopes [31.01.2017]
- 4.3.3.4 Istoot: [https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_nuclides_\(combined\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_nuclides_(combined)) [26.01.2017]
- 4.3.3.5 Antivety: <http://www.nature.com/nature/journal/v541/n7638/full/nature21040.html> [26.01.2017]
- 4.3.4.1 Vety-1:n ionisoitumisenergia: CRC Handbook of Chemistry and Physics 83rd Edition, s. 10-178
- 4.3.5.1 Radioaktiivisuus: https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive_decay [27.01.2017]
- 4.3.5.2 Radioaktiiviset isotoopit puoliintumisaikajärjestyksessä: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_radioactive_isotopes_by_half-life [27.01.2017]
- 4.3.5.2 Protonin puoliintumisaika: https://en.wikipedia.org/wiki/Proton_decay [27.01.2017]
- 4.3.6.1 Maalämmön lähteet: http://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal_gradient [27.01.2017]
- 4.3.6.2 Palovarotin: https://en.wikipedia.org/wiki/Smoke_detector [29.01.2017]
- 4.3.6.3 Maaperän radon-pitoisuus: <https://fi.wikipedia.org/wiki/Radon> [27.01.2017]
- 4.3.6.4 Radonin kiehumispiste ja tiheys: <https://en.wikipedia.org/wiki/Radon> [27.01.2017]
- 4.3.6.5 Ilman tiheys: https://en.wikipedia.org/wiki/Density_of_air [27.01.2017]
- 4.3.6.6 Uuden asunnon sisäilman radon-pitoisuus: <http://www.stuk.fi/aiheet/radon/asuntojen-radon-kokevat-enimmaisarvot-ja-maaraykset> [27.01.2017]
- 4.3.7.1 Elektronin neutriinon massa: <https://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino> [27.01.2017]
- 4.3.8.1 Annihilaatio: <https://en.wikipedia.org/wiki/Annihilation> [29.01.2017]
- 4.3.8.2 Liikemääräkeskipiste: https://en.wikipedia.org/wiki/Center-of-momentum_frame [29.01.2017]
- 4.3.11.1 Vety-2:n pitoisuus merivedessä: <https://en.wikipedia.org/wiki/Deuterium> [28.01.2017]
- 4.3.11.2 Hapen atomipaino: https://www.degruyter.com/table/j/pac.2016.88.issue-3/pac-2015-0305/pac-2015-0305.xml?id=j_pac-2015-0305_tab_001 [31.01.2017]
- 4.3.11.3 Vety-3:n puoliintumisaika ja tuottaminen: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tritium> [29.01.2017]
- 4.3.11.4 Fuusioreaktori: https://en.wikipedia.org/wiki/Fusion_power [30.01.2017]

- 4.3.12.1 Auringon ominaisuudet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sun> [29.01.2017]
- 4.3.12.2 Auringon keskustan ominaisuudet: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_core [29.01.2017]
- 4.3.12.3 Reaktiot Auringossa: https://en.wikipedia.org/wiki/Proton%E2%80%93proton_chain_reaction [30.01.2017]
- 4.3.12.4 Reaktiot tähdissä: Tähtitieteen perusteet, Ursan julkaisu 58, Helsinki 1995
- 4.3.12.5 Ihmisen energiankulutus: <http://www.laskurini.fi/terveys/kalorilaskuri/energiantarvelaskuri> [30.01.2017]
- 4.3.12.6 Kalorin ja joulen välinen muunnos: <http://en.wikipedia.org/wiki/Calorie> [30.01.2017]
- 4.3.12.7 Maan keskietäisyys Auringosta: <https://www.iau.org/public/themes/measuring> [14.01.2017]
- 4.3.12.8 Auringon säteily: <https://en.wikipedia.org/wiki/Sunlight> [29.01.2017]
- 4.3.12.9 Aurinkovakio: https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_constant [30.01.2017]
- 4.3.12.10 Maan keskimääräinen säde: <https://en.wikipedia.org/wiki/Earth> [25.01.2017]
- 4.3.12.11 Auringon neutronivuo Maassa: <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutrino> [27.01.2017]
- 4.3.13.12 Tähtien lukumäärä: http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Herschel/How_many_stars_are_there_in_the_Universe [30.01.2017]
- 4.3.14.1 Uraani-235:n fissiot: <http://www.nuclear-power.net/nuclear-power-plant/nuclear-fuel/uranium/uranium-235/> [30.01.2017]
- 4.3.14.2 Fissio $U-235 \rightarrow Ba-141 + Kr-92 + 3n$: <http://www.world-nuclear.org/information-library/nuclear-fuel-cycle/introduction/physics-of-nuclear-energy.aspx> [30.01.2017]
- 4.3.14.3 Fissio $U-235 \rightarrow Ba-144 + Kr-90 + 2n$: <http://www.world-nuclear.org/information-library/nuclear-fuel-cycle/introduction/physics-of-nuclear-energy.aspx> [30.01.2017]
- 4.3.14.4 Fissio $U-235 \rightarrow Xe-134 + Sr-100 + 2n$: <http://www2.lbl.gov/abc/Basic.html> [30.01.2017]
- 4.3.14.5 Fissio $U-235 \rightarrow Te-139 + Zr-94 + 3n$: <http://www.world-nuclear.org/information-library/nuclear-fuel-cycle/introduction/physics-of-nuclear-energy.aspx> [30.01.2017]
- 4.3.14.6 Fissio $U-235 \rightarrow La-145 + Br-88 + 3n$: http://www.docbrown.info/page03/3_54radio09.htm [30.01.2017]
- 4.3.14.7 Alkuaineiden pitoisuudet Maankuoressa: https://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_elements_in_Earth's_crust [30.01.2017]
- 4.3.14.8 Graniitin uraanipitoisuus: <https://en.wikipedia.org/wiki/Granite> [30.01.2017]
- 4.3.14.9 Uraniniitti-mineraali: <https://en.wikipedia.org/wiki/Uraninite> [30.01.2017]
- 4.3.14.10 Uraanin isotooppien runsaudet: https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_uranium [27.01.2017]
- 4.3.14.11 Ydinvoimala: <https://fi.wikipedia.org/wiki/Ydinreaktori> [30.01.2017]
- 4.3.14.12 Uraanin rikastaminen: https://en.wikipedia.org/wiki/Enriched_uranium [30.01.2017]
- 4.3.14.13 Fissiilit isotoopit: https://en.wikipedia.org/wiki/Fissile_material [30.01.2017]
- 4.3.14.14 Fissio $Pu-239 \rightarrow Xe-134 + Zr-103 + 3n$: <http://www.nuclear-power.net/nuclear-power-plant/nuclear-fuel/plutonium/plutonium-239/> [31.01.2017]
- 4.3.15.1 Vedin lämpöarvo: https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_of_combustion [31.01.2017]
- 4.3.15.2 Vedin ja hapen atomipainot: https://www.degruyter.com/table/j/pac.2016.88.issue-3/pac-2015-0305/pac-2015-0305.xml?id=j_pac-2015-0305_tab_001 [30.01.2017]
- 4.3.15.3 Nitroglyseriinin räjähtäminen: <http://antoine.frostburg.edu/chem/senese/101/redox/faq/nitroglycerin.shtml> [31.01.2017]
- 4.3.15.4 Nitroglyseriinin kaava ja lämpöarvo: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nitroglycerin> [31.01.2017]
- 4.3.15.5 ASASSN-15lh: Tähdet ja avaruus -lehti nro 1/2017, ss. 38 – 41.
- 4.3.15.6 ASASSN-15lh: <https://en.wikipedia.org/wiki/ASASSN-15lh> [31.01.2017]
- 5.1 Raidankäpäripsikän mitat: http://en.wikipedia.org/wiki/Baranowskiella_ehnstromi [31.01.2017]
- 5.2 Limasienet: Marja Härkönen ja Elina Sivonen: Limasienet, Luonnontieteellinen keskusmuseo, Helsinki 2011
- 5.3 Physarum polycephalum ominaisuudet: <http://scitechdaily.com/brainless-slime-mold-physarum-polycephalum-shows-intelligence/> [31.01.2017]