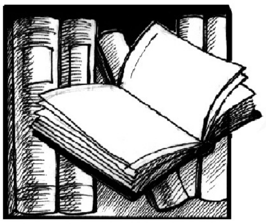
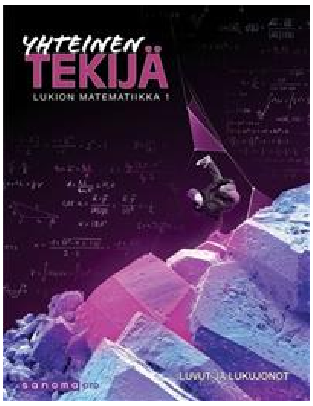


Kirja-arvio: Lukion yhteisen matematiikan kurssin oppikirjoja

Matti Lehtinen

Hanna Halinen, Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Sampsa Kurvinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Jukka Ottelin, Kati Parmanen, Terhi Raittila, Tommi Tauriainen, Tommi Tikka, Sari Valli-neva: **Otavan matematiikka MAY1. Luvut ja lukujonot.** 168 s. Otava 2016. *Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Paavo Heiskanen, Katariina Hemmo, Päivi Kaakinen, Jorma Tahvanainen, Timo Taskinen*: **Yhteinen tekijä. Lukion matematiikka 1.** 228 s. Sanoma Pro 2016. Molempien kirjojen hinta eri verkkokaupoissa 16,95–22 euroa.



Kymmenisen vuotta sitten tarkastelin Solmussa lukion pitkän matematiikan oppikirjoja matemaatikon silmin. Toiveeni oli herättää keskusteluakin näistä opetuksen keskeisistä työkaluista, joiden julkinen esittely ja arviointi oli mielestäni suotta jäänyt unohduksiin. Epäonnistuin: sain vain yhden kommentin, senkin kustannustoimittajalta. Silloin kilpailevia kirjasarjoja oli useita, mutta kustannustoiminta on nyttemmin keskittynyt. Uusien, vuonna 2016 käyttöön tulleiden opetussuunnitelmien mukaisia oppikirjasarjoja näyttävät julkaisevan vain Otava ja Sanoma Pro.

Kurssi **MAY1** on pakollinen sekä pitkän että lyhyen oppimäärän suorittaville. Filosofia lienee se, että yhteinen kurssi siirtää opiskelijan valintaa eritasoisten oppimäärien välillä hiukan myöhempään ja ehkä sitten hiukan kasvattaa pitkän oppimäärän valitsevien osuutta. Varsin ilahduttava on opetussuunnitelmassa ilmaistu tavoite herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaan mm. ”*tutustuttamalla hänet – – matematiikan ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana*”.

Kirjat päällisin puolin

Kirjasarjan nimen on oltava iskevä mutta myös jotenkin matematiikan sisältöä välittävä nimi. Sanoma käyttää monitulkintaista nimeä **Tekijä** ja erottaa vain alaotsikolla lyhyen ja pitkän matematiikan. Otava on nimennyt sarjansa jotenkin käänteisesti **Juureksi** (pitkä) ja **Huipuksi** (lyhyt). Sanoma on nyt voinut ottaa yhteisen kurssin kirjan nimeksi **Yhteinen tekijä**. Otava näyttää kiireen synnyttämältä: kirja on saanut nimekseen kurssin nimilyhenteen **MAY1**, varustettuna alaotsikolla **Luvut ja lukujonot**.

Kustantajia ei ole pelottanut kansanviisaus, joka väittää sopan laadun ja kokkien määrän olevan kääntäen verrannollisia. Yhteisessä tekijässä on seitsemän kirjoittajaa, MAY1:ssä peräti 12. Nimisivujen kääntöpuolilta voi vielä lukea, että Yhteistä tekijää on ollut teknisesti avustamassa kymmenen eri toimittajaa, MAY1:tä kahdeksan. Ilmeisesti kirjasarjojen haarautuminen yhteisen kurssin jälkeen selittää osaltaan suurta tekijämäärää. Arkijärki sanoo, että näin isot ryhmät voivat toimia vain jotenkin strukturoituina. Lieneekö tekijäryhmillä ollut johtajaa tai johtoryhmää, kirjoilla päätoimittajaa?

Molemmat kirjat ovat ulkomitoiltaan samat, Yhteinen tekijä suuremman sivumääränsä vuoksi reilusti painavampi. Leveähköjä marginaalejaan Yhteinen tekijä käyttää harjoitustehtävien ja esimerkkien reaalisisältöön liittyvien pikku kuvien (kun harjoitustehtävä koskee taksikyydin hintaa, marginaalissa on kuva taksin katolla vilkkuvasta kilvestä) lisäksi pieniin tietolaatikkoihin, joita on toista sataa. MAY1 sirottelee vastaavanlaisia laatikoita tekstin sekaan. Niitä on vähemmän, alle 40. Molemmissa kirjoissa on asiahakemisto. Yhteisessä tekijässä hakusanoja on 78, MAY1:ssä 43.

Kumpikin kirja seuraa matematiikan oppikirjoihin pesiytynyttä käytäntöä, jonka mukaan kielen säännöt eivät kaikin osin niitä koske. Välimerkkejä käytetään säästellen, peräkkäiset sievennysvaiheet kirjoitetaan ikään kuin taululle ja niitä koskevat kommentit erillisiksi marginaaliin tai tietolaatikkoihin. Kyllä matematiikkaa voisi yhä kirjoittaa niin kuin juoksevaa tekstiä, kaavat lauseenjäseninä. Taululle kirjoittavakin yleensä ja toivottavasti säestää tuotostaan puheella, jonka osaa on se kaavamuotoinen teksti. Äidinkielen taidon rapautumisesta on moni huolissaan. Myös matematiikan kirjojen omalaatuinen ”suomi” on huolenaihe.

Yhteinen tekijä jakautuu viiteen päälukuun, 16 alalukuun ja 36 ala-alalukuun. MAY1:n jaottelu on vain kaksiportainen: kuusi päälukua ja 14 alalukua. Tekstissä käsiteltyjä esimerkkejä on Yhteisessä tekijässä 72, MAY1:ssä 51. Tekstiin liittyviä harjoitustehtäviä on molemmissa kirjoissa likimain yhtä monta, noin 360. MAY1 luokittelee tehtävänsä kolmeen kategoriaan, ”luo perusta”, ”vahvista osaamista” ja ”syvennä ymmärrystä”. Noin puolet tehtävistä kuuluu keskimmäiseen osastoon, viimeiseen hiukan enemmän kuin ensimmäiseen. Yhteinen tekijä tyytyy kahteen tasoon, ”perustehtävät”, lähes kaksi kolmasosaa kaikista, ja ”syventävät tehtävät”. Molempien kirjojen lopussa on lisäksi useita kymmeniä kertaustehtäviä. Yhteinen tekijä osoittaa usean harjoitustehtävän kohdalla eksplisiittisesti, minkä tekstissä olevan esimerkin mukaan ratkaisu syntyy.

Useimmat tehtävät tuottavat vastauksekseen luvun tai lausekkeen, ja kaikkiin tällaisiin tehtäviin kummassakin kirjassa on vastaus. Sen sijaan niihin harvoihin tehtäviin, joissa opiskelijan olisi jotain pääteltävä, ei ratkaisuja ole. Antaako tämä hiljaisen viestin siitä, että tällaiset tehtävät ovat vähemmän tärkeitä? MAY1 antaa myös osaan tehtävistä ratkaisuvihjeitä. Satunnaisesti tarkastamani vastaukset näyttivät yleensä olevan oikein. MAY1:n tehtävään 277 on ilmeisesti painovirhe tuottanut virheellisen vastauksen.

Otava näyttää ottaneen Sanomaa vakavammin puheet digiloikasta. Monia MAY1:n sivuja koristaa merkki, joka kertoo Otavan verkkosivujen kautta löytyvästä ”appletista” (olisiko se suomeksi *sovelle*?). Nämä ovat usein Geogebra-ohjelmalla tuotettuja, käsitteitä selventämään tarkoitettuja pikkuohjelmia. Kaikki ei mene kuin Strömsössä. Esimerkiksi sivulla 122 viitataan ympyrän pinta-alaa $A = A(r)$ säteen r funktiona demonstroivaan applettiin, jolla onnistuin tuottamaan parin $r = 1, A = 2{,}9$! Yhteinen tekijä puolestaan käyttää värikoodeja ja merkkejä osoittamaan, milloin tehtävä on tarkoitettu ilman apuvälineitä ratkaistavaksi. Myös tekstin esimerkit on varustettu symbolein, jotka viittaavat laskulaitteen käyttöön tai käyttämättömyyteen. Tällainen merkintä on noin 200 harjoitustehtävässä. MAY1 tyytyy kertomaan tehtävän tekstissä, toivooko se suoritusta ilman elektroniikan tukea.

Opetussuunnitelmasta oppikirjaksi

Opetussuunnitelman mukaan lukion matematiikan aloituskurssin tehtävänä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan, paitsi kertomalla matematiikan omasta olemuksesta, myös ja etusijaisesti ”*tutustuttamalla hänet matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle*”. Yhteinen tekijä on ottanut tämän huomioon laittamalla heti kirjan alkuun 11 etunimellä mainitun eri aloilla toimivan henkilön (seitsemän miestä ja neljä naista) lyhyet kertomukset siitä, mihin he tarvitsevat matematiikkaa. Useimmille tuntuu syntyvän talousasioihin liittyvän laskemisen tarvetta.

Opetussuunnitelma paaluttaa kurssin sisällön kahdeksankohtaisella luettelolla. Ensimmäinen kohta on *reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta*. Yhteinen tekijä on muodostanut näistä kirjan kolme ensimmäistä päälukua, Luvut ja laskutoimitukset, Potenssi ja Prosenttilasku, yhteensä 88 sivua eli melko tasan puolet kirjan sisältösivuista. MAY1 puolestaan jakaa tämän tiedon ensimmäiseen lukuun Luvut ja lukualueet ja kolmannen luvun Prosentti ja geometrinen lukujono alkuun, yhteensä 37 sivulle. Määrä kattaa noin neljänneksen kirjan sisällöstä. Yhteisen tekijän melko laajasti käsittelemät aiheet kuten ensimmäisen asteen yhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen ja kokonaislukupotenssien laskusäännöt MAY1 kuittaa yhdellä sivulla olevalla luettelolla tarvittaessa kerrattavista asioista. Etenkin MAY1 käyttää erityistä huomiota kiinnittämättä monia käsitteitä, joiden määrittelyä ja tarkempaa rajausta saattaisi kaivata. Tällaisia ovat esimerkiksi tekijä, lukusuora, etäisyys, erotus, etumerkki, supistaminen, keskiarvo, sekaluku ja neliöjuurimerkki.

Toinen opetussuunnitelman sisältökohta on *funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta*. Yhteinen tekijä on tälle aiheelle omistanut neljännen pääluvun, MAY1 puolestaan jättää aiheen viimeiseen lukuunsa. Yhteinen tekijä esittelee funktion ensin koneena, joka valmistaa luvuista toisia lukuja ja siirtyy sitten määrittelemään funktion sääntönä, joka liittää määrittelyjoukon lukuihin lukuja. MAY1 ei kerro mitään määrittelyjoukosta: sen funktio on sääntö, joka ilmaisee, miten lähtöarvosta saadaan loppuarvo. Lähtöarvo ja loppuarvo jäävät määrittelemättömiksi. Funktion kuvaajan tulkinta on kummankin kirjan mukaan sen ymmärtämistä, milloin funktion arvot ovat positiivisia, nollia tai negatiivisia. Sen yksinkertaisen havainnon, että kuvaajasta saattaa nähdä funktion kasvu- tai vähenemisominaisuuksia, kumpikin kirja jättää tuonnemmaksi.

Opetussuunnitelman kolmas, neljäs, viides ja kahdeksas sisältökohta ovat *lukujono, rekursiivinen lukujono, aritmeettinen jono ja summa* sekä *geometrinen jono ja summa*. Tässä näyttää tehdyn periaatteellinen muutos entiseen: edellisissä opetussuunnitelmissa lukujonot tulivat vastaan pitkän matematiikan kurssissa 9, *Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Muutoksen tarkoitus on saattanut olla pitkän matematiikan "mainostaminen" valinnastaan epävarmoille oppilaille. "Liian vaikeuden" välttäminen on ilmeisesti vienyt siihen, että lukujonojen käsittelyn keskeinen työkalu, induktioperiaate, on jätetty pois.

Yhteinen tekijä esittelee lukujonoihin liittyvät asiat viidennessä eli viimeisessä pääluvussaan, noin 70 sivulla. MAY1 ottaa lukujonot esiin aikaisemmin, toisessa pääluvussa. Kolmannessa pääluvussa teemana on prosenttilaskun yhteydessä geometrinen jono ja neljäs pääluku puolestaan käsittelee lukujonojen summia. Kaikkiaan aiheeseen käytetään kuutisenkymmentä sivua.

Mikä on lukujono? Yhteisen tekijän määritelmä on lähes tautologinen: "Lukujen muodostamaa jonoa kutsutaan *lukujonoksi*", ja se "voi olla *päättyvä* eli *äärellinen*". MAY1:n mukaan taas "Lukujono on järjestetty ja päättymätön luettelo reaalilukuja". Kun jokainen jollain tavalla konkreettinen lukujono on välttämättä äärellinen, Yhteisen tekijän kanta tuntuu paremmalta. Toisaalta Yhteisen tekijän määritelmässä lukujonoon liittyvä järjestys näkyy vain sanaan *jono* peitettynä. Yhteinen tekijä olisi mainiosti voinut hyödyntää edellisessä pääluvussa esittelemäänsä funktiokäsitettä ja kertoa, että lukujono on luonnollisten lukujen joukossa tai lukujen $1, 2, \ldots, n$ joukossa määritelty funktio. Hiukan samanlainen kytkentöjen muodostamisen laiminlyönti tapahtuu molemmissa kirjoissa. Opetussuunnitelma mainitsee eksplisiittisesti rekursiivisen lukujonon ja sen jälkeen aritmeettisen ja geometrisen jonon. Kumpikin kirja esittelee rekursiivisen jonon käsitteen, muttei kiinnitä mitään huomiota siihen, että sekä aritmeettinen että geometrinen lukujono ovat rekursiivisia.

Kun opetussuunnitelmassa mainitaan sana *summa*, molemmat kirjat esittelevät summamerkinnän $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Kumpikaan kirja ei käytä hyväksi sitä, että summamerkinkin avulla ilmaistu summa noudattaa osittelu- ja vaihdantalakeja. Summamerkistä ei näin ollen näytä olevan juuri hyötyä vaikkapa aritmeettisen summan laskemisessa. Ehkäpä se onkin esitetty symbolisissa laskimissa olevan summatoiminnon pohjustukseksi. Kumpikaan kirja ei näytä määrittävän yksinkertaisinta aritmeettista summaa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{1}$$

Aritmeettisen ja geometrisen summan lausekkeet on yleensä mielletty kuuluviksi koulumatematiikan yleissivistykseen. Lausekkeiden varsin yksinkertainen johto tehdään kirjojen esimerkeissä useassakin erikoistapauksessa, mutta yleiset johdot on piilotettu harjoitustehtäviin, eikä aina niihinkään. Menettely saattaa pohjautua opetussuunnitelman tavoiteosaan: sen mukaan opiskelijan tulisi saada "*havainnollinen käsitys lukujonon summan määrittämisestä*". Jos (1) olisi käytössä, aritmeettisen summan lauseke olisi mukava esimerkki summakaavan hyödyllisyydestä laskulakeihin yhdistettynä.

Ehkä suurimman haasteen opettajalle ja kirjantekijöille muodostaa opetussuunnitelman kuudes keskeinen sisältö: logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys. Logaritmi- ja eksponenttifunktiot ovat toistensa käänteisfunktioita, joten potensseista on lähdettävä. Yhteinen tekijä esittelee laajahkosti potensseja, joiden eksponentti on kokonaisluku, MAY1 rajoittuu positiivisiin kokonaislukueksponentteihin. Sitten jostain vedetään esiin desimaalilukuja ja potensseja, joissa nämä desimaaliluvut ovat eksponentteina, kertomatta sanallakaan, mistä on kysymys. Menettelyn ei oikein voi ajatella tutustuttavan opiskelijaa "matematiikan ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen". Rationaalilukueksponenttien mielekkyys ja merkitys olisi edes voitu mainita ja kuvailla! Nyt matematiikka palautuu empiiriseksi tai havaitsevaksi tieteeksi, havaitsemisen kohteena laskulaite. Logaritmi puolestaan otetaan kummassakin kirjassa käyttöön vain eksponenttiyhtälön ratkaisun merkintätapana, ilman niitä ominaisuuksia, jotka logaritmista käyttökelpoisen tekevät.

Kirjasarjojen ensimmäisten osien vertailu ei tuota mitään paremmuusjärjestystä. Pikemminkin syntyy surullinen mieli siitä, että se, mikä matematiikasta matematiikan tekee, rakenteellisuus, täsmällisyys ja asian looginen eteneminen, tuntuu jääneen piiloon. En näiden perusteella voisi saada kokemusta matematiikasta kiehtovana ja ainutlaatuisena tieteenalana. Mutta kokemuksethan ovat yksilökohtaisia.