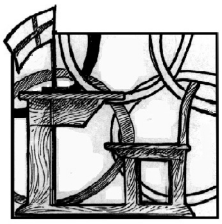


IMO 2017

Lauri Hallila

Matkakertomus

Vuoden 2017 matematiikkaolympialaiset pidettiin 12.7.–23.7. Rio de Janeirossa Brasiliassa. Suomen joukkuetta edustivat Hermanni Huhtamäki, Olli Järviniemi, Joose Lehtinen, Jesse Nieminen, Antti Röyskö ja Tarmo Taipale. Kaikki joukkueemme kuusi jäsentä saivat kunniamaininnan.

Ennen kilpailua viisi joukkueemme jäsentä osallistui nyt jo perinteeksi tulleeseen yhteispohjoismaiseen valmennusleiriin Sorøssä Tanskassa. Suomen valmentajien osalta opettamassa oli Joni Teräväinen. Kuudes jäsen, Hermanni Huhtamäki, oli edustamassa Suomea bridgen nuorten EM-kilpailussa Slovakiassa, mutta liittyi Tanskassa muun joukkueen seuraan. Varajohtajamme Otte Heinävaara haki joukkueen Tanskasta ja toi heidät Brasiliaan.

Majoitus Rio de Janeirossa oli järjestetty rannoistaan tunnetulla Barran alueella hienoissa viiden tähden hotelleissa. Kilpailijat viettivät aikaansa hotellin pelitilassa, uima-altaalla ja uimarannalla. Pelitilassa oli kilpailijoille tarjolla mm. pöytätennistä, pöytäjalkapalloa, shakkia, lautapelejä ja karaokehuone.

Itse saavuin paikalle muutamaa päivää joukkuetta aiemmin; ennen kilpailua joukkueen johtajat tutustuvat ehdolla oleviin tehtäviin, arvioivat niiden vaikeustasoa ja sopivuutta, hiovat valittujen tehtävien ulkoasua, kääntävät ne omille kielilleen, tarkistavat ja hyväksyvät käännökset ja keskustelevat koordinaattoreiden ehdottamista pisteytysskeemoista ja hyväksyvät ne. Tähän kaikkeen menee useampi päivä aikaa. Tulin saapumispäivänä aikaisin ja hyödynsin ohjelmavapaan päivän lähtemällä vaellukselle Cristo Redentorille. Käveltyäni tunnin Barran ostoskeskukselle otin bussin erään puiston luo, jonka takanurkasta lähti polku ylös kukkulalle. Kopissa oleva poliisi pyysi puhelinnumeroni ja allekirjoitukseni ja kertoi, että ylös olisi kahden tunnin matka.

Lähdin kipuamaan ylös 780 metrin korkeuteen; ympärilläni oli enimmäkseen viidakkoa, eikä kovin monesta paikasta pystynyt ihailemaan maisemia. Reitti oli silti miellyttävä. Yhdessä kohtaa oli otettava ketjuista kiinni ja kiivettävä kallioon porattuja askelmia pitkin ylös; pieni apina tuli katselemaan, miten pärjään. Lopulta pääsin ylös ja ostin lipun 30-metriselle patsaalle. Merimaisema ja kukkulat eri puolilla kaupunkia olivat upeita silloin, kun eivät olleet pilvien peitossa. Myös sokeritoppavuori, Pão de Açúcar, näkyi kaukaisuudessa meren rannassa jyrkkänä, mutta täältä katsottuna matalana kukkulana. Hetken odotettuani myös patsas tuli pilvien takaa kokonaisuudessaan näkyviin. Patsaasta on tullut suosittu turistikohde viimeistään sen jälkeen, kun se äänestettiin yhdeksi ”maailman seitsemästä uudesta ihmeestä”. Jatkoin matkaani mäkeä alas menevällä junalla ja otin bussin, joka näytti kulkevan oikeaan suuntaan. Pian se kuitenkin kääntyi toiseen suuntaan pitkään tunneliin suuntaan, joka alkoi huolestuttamaan; kaupungissa on näet alueita, jonne turistien ei suositella menevän edes päiväsaikaan. Päädyin muutaman kilometrin päähän tuosta alueesta. Tunsin oloni hieman turvattomaksi, joten etsin pikaisesti lähimmän metroaseman ja jatkoin matkaa metrolla, bussilla ja kävellen takaisin hotellille.

Ennen kilpailun alkua tuli surullinen tieto; Iranista kotoisin oleva Maryam Mirzakhani, joka oli ensimmäinen Fieldsin mitalin saanut nainen, menehtyi syöpään vain 40-vuotiaana. Hän oli ollut IMO:ssa kilpailijana vuosina 1994 ja 1995. Pidimme avajaisseremoniassa minuutin hiljaisuuden, ja erityinen viidelle eniten joukkueensa tulokseen vaikuttaneelle tytölle annettu palkinto annettiin myös hänen kunniakseen.

Kumpanakin kahtena kilpailupäivänä oppilaat saavat kolme tehtävää, joita heillä on neljä ja puoli tuntia aikaa ratkoa. Ensimmäisenä päivänä sen jälkeen, kun olimme vastanneet oppilaille tehtävänantoja koskeviin kysymyksiin, meillä oli harvinaista vapaa-aikaa. Joukko muiden maiden johtajia oli myös kiinnostuneita vaelluksesta Cristo Redentorille, joten päätin lähteä heille oppaaksi. Osa oli jo tuttuja aiemmista Baltian Tie -kilpailuista. Mukaan lähti Islannin, Tanskan, Latvian, Tšekin, Slovakian, Kanadan, Botswanan ja Ghanan johtajat, joista viimeisin oli amerikkalainen, joka oli matkustamassa heti kilpailujen jälkeen Ghanaan opettamaan heille kilpamatematiikkaa. Taksi tuli otettua hieman väärän puiston luokse, mutta kävellessämme oikeaan suuntaan saimme ostettua hieman eväitä ja juotavaa.

Tällä kertaa tuli huomattua kyltit, joissa varoitettiin isosta ryöstetyksi tulemisen vaarasta ja mainittiin, että reitillä ryöstetään vuosittain ainakin 150 henkilöä. No, onneksi aiemmalla kerralla ei tullut ketään vastaan, ja olin kuitenkin varonut ottamasta mukaan mitään erityisen arvokasta. Nyt meitä oli isompi joukko ja sää oli sateinen, joten riski, että mitään tapahtuisi, oli aiempaakin pienempi. Vaellus oli jälleen miellyttävä, vaikka jossakin kohtaa sade yltyi sen verran, että hieman kastuimme. Päästyämme ylös meille kieltäydyttiin myymästä lippuja; ilmeisesti sateisen sään vuoksi niitä myydään vain alempana vierailijakeskuksessa. No, kun sää hieman hellitti, saimme yhteisselfien, jossa Kristus-patsaan selkä häämötti taustalla. Saimme ilmaisen kyydin alas vierailijakeskukseen, mutta olimme vielä aika ylhäällä; seuraava haaste olisi saada kyyti alas.

Paikalla oli minibusseja, mutta kukaan ei näyttänyt valmiilta antamaan meille kyytiä; ehkä ne oli varattu muille turisteille. Osa niistä taas kuului Tijucan kansallispuistolle, joka on yksi maailman suurimmista kaupungin sisällä sijaitsevista metsistä. Onneksi Latvian johtaja osasi Angolassa vähän aikaa asuneena hieman Portugalia; eräs paikallinen lupasi lähteä hakemaan mopollansa meille taksia. Lopulta hän palasi ja saimme myös taksin, mutta istuimille mahtui kuljettajan lisäksi vain neljä henkeä. Koska osa meistä halusi takaisin hotellille ja osa halusi jatkaa matkaa pihviravintolaan, päätimme jakautua kahteen osaan. Taksi lähti takaisin hotellille viiden kollegani kanssa, joista yksi ahtautui takakonttiin. Kuulin myöhemmin, että he juuttuivat yli tunniksi liikenteeseen. Me muut saimme pian toisen kyydin alas kukkulan juurelle, josta jatkoimme Uberilla ravintolaan, jossa tuodaan kiinteää hintaa vastaan pöytään erilaisia lihoja niin kauan, kuin niitä jaksaa syödä. Lyhyen Copacabanalla kävelyn jälkeen palasimme takaisin hotellille.

Kilpailun jälkeen minä ja Otte pääsimme koordinaattoreiden kanssa yhteisymmärrykseen pisteistä jo ensimmäisenä koordinointipäivänä ja menimme kilpailijoiden hotellille kertomaan tulokset; oppilaamme olivat innokkaita tietämään, miten he pärjäsivät. Olli Järviniemi sai 15 pistettä, Jesse Nieminen 9 pistettä ja Hermanni Huhtamäki, Joose Lehtinen, Antti Röyskö ja Tarmo Taipale kukin 8 pistettä. Mitalirajojen selviämistä joutuisimme odottamaan seuraavaan päivään.

Toisena koordinointipäivänä veimme oppilaamme Sokeritoppavuorelle. Vaelsimme yli tunnin matkan Morro da Urcan kukkulalle 220 metrin korkeuteen, jossa jäimme ihailemaan maisemia. Pohjoisessa ja lännessä näkyivät Rion monituiset kukkulat, joista yhdellä siinsi kaukana Cristo Redentor -patsas. Kukkuloiden välisissä laaksoissa näkyivät kaupungin kerrostalot. Vierestä nousi helikopteri muutama turisti mukanaan maisemia katselemaan. Hieman levähdettyämme me jatkoimme matkaa köysiradalla Sokeritoppavuoren huipulle lisää maisemia ihastelemaan. Jotkut urheat kiipeilivät köysillä lähes pystysuoraa seinämää ylöspäin. Etelässä ja idässä siinsi meri, jossa oli paikoin merestä saarena nousevia kukkuloita. Juteltuamme paikalla tapaamamme Kosovon joukkueen kanssa ja ihailtuamme tarpeeksi maisemia suuntasimme takaisin alas ja sitten hotellille, jossa eräs Fields-mitalisti oli pitämässä puhetta.

Illalla selvisivät mitalirajat; pronssimitalin rajaksi tuli 16 pistettä, joten tänä vuonna ei Suomelle tullut mitaleja. Brasilian matematiikkakilpailuissa on perinteenä, että kilpailijat antavat kilpailun jälkeen tehtäviä kilpailun järjestäjille, johon Brasilian joukkue oli kysellyt apua Art of Problem Solving -sivustolta. Saimme neljä tehtävää, joita voi ratkoa viiden tunnin ajan iltakymmenen ja aamukuuden välillä. Minä ja muutama muu joukkueen johtaja liityimme kuitenkin brasilialaisten koordinaattoreiden kutsusta juhlimaan työn saamista päätökseen heidän kanssaan Rion kaduille Lapanimiselle alueelle suurimmaksi osaksi yötä.

Ennen päättäjäisseremoniaa yritimme lähteä muutaman joukkueen jäsenen kanssa Cristo Redentorille. Valitettavasti ylös kukkulalle kulkevaan junaan oli liian pitkä jonotusaika, ja joukkueen kanssa ylös vaeltaminen olisi ollut liian vaarallista rinteillä olevan favelan vuoksi, joten jouduimme jättämään tämän kaupungin maamerkin väliin. Itse tosin olin ehtinyt käydä siellä aiemmin. Nyt matkasimme Ipaneman rannan lähellä oleville rantakallioille, josta jatkoimme matkaa Barran ostoskeskukseen ennen hotelleillemme palaamista. Päättäjäisseremonian jälkeen meille oli tarjolla eri alueille tyypillisiä ruokalajeja ja tanssiesitys. Kyseessä oli urbaani versio Brasilian maaseudulla tähän aikaan vuodesta pidetystä juhlasta.

Joukkueemme oli Math Revenge -tyyliin myös järjestänyt minulle ja Otelle tehtäviä paluulennolle. Olin hieman epäurheilijamaisesti kaikesta valvomisesta liian väsynyt tehtäviä miettimään, mutta Otelle niissä riitti puuhaa. Kaiken kaikkiaan tämän vuoden kilpailu oli hyvin onnistunut, miellyttävä ja lämminhenkinen tapahtuma.

Kilpatehtävät

Ensimmäisen päivän tehtävistä ensimmäinen oli melko helppo, ja Suomi saikin siitä melkein täydet pisteet. Toinen tehtävä oli vaativa funktionaaliyhtälötehtävä ja kolmas tehtävä oli hyvin epätyypillinen, mutta mielenkiintoinen, kilpatehtävä. Joukkueemme parhaiten pärjännyt jäsen, Olli Järviniemi, sai toisen tehtävän ensimmäisen osan ratkaistua. Kolmostehtävän osasi ratkaista täysin vain kaksi yli 600 osallistujasta ja vain seitsemän osallistujaa sai siitä ollenkaan pisteitä, joten se osoittautui huomattavasti odotettua hankalammaksi tehtäväksi. Jotkut tosin olettivat, että haastava kakkostehtävä olisi aiheuttanut sen, että monella osallistujalla ei olisi ollut paljon aikaa sen ratkaisemiseen.

Tehtävä 1. Määritellään jokaista kokonaislukua $a_0 > 1$ kohti sarja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ seuraavasti:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{jos } \sqrt{a_n} \text{ on kokonaisluku,} \\ a_n + 3 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

kaikille $n \geqslant 0$. Määritä kaikki sellaiset luvun a_0 arvot, joita kohti on olemassa sellainen luku A, että $a_n = A$ äärettömän monella luvun n arvolla.

Vastaus: Kaikki kolmella jaolliset positiiviset kokonaisluvut.

Ratkaisu. Koska luvun a_{n+1} arvo riippuu ainoastaan luvun a_n arvosta, niin jos $a_n = a_m$ kahdelle eri positiiviselle kokonaisluvulle m ja n, muuttuu sarja jossain vaiheessa jaksolliseksi. Tämän vuoksi riittää etsiä lukuja a_0, joille sarja muuttuu lopulta jaksolliseksi.

Väite 1. Jos $a_n \equiv -1 \pmod 3$, niin a_m ei ole neliöluku millekään $m > n$. Tästä seuraa, että sarja muuttuu jossain vaiheessa aidosti kasvavaksi, joten se ei muutu jaksolliseksi.

Todistus. Neliöluku ei voi olla muotoa $-1 \pmod 3$, joten ehdosta $a_n \equiv -1 \pmod 3$ seuraa, että a_n ei ole neliöluku, joten $a_{n+1} = a_n + 3 > a_n$. Tämän vuoksi $a_{n+1} \equiv a_n \equiv -1 \pmod 3$, joten a_{n+1} ei ole myöskään neliöluku. Toistamalla väitettä saamme todistettua, että luvusta a_n eteenpäin mikään sarjan luku ei ole neliöluku ja jokainen termi on suurempi kuin edellinen, joten väite pätee. □

Väite 2. Jos $a_n \not\equiv -1 \pmod 3$ ja $a_n > 9$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $m > n$, että $a_m < a_n$.

Todistus. Olkoon t^2 suurin neliöluku, joka on pienempi kuin a_n. Koska $a_n > 9$, niin $t \geq 3$. Ensimmäinen neliöluku sarjassa $a_n, a_n + 3, a_n + 6, \ldots$ on $(t+1)^2$, $(t+2)^2$ tai $(t+3)^2$. Siten on olemassa sellainen kokonaisluku $m > n$, että $a_m \leq t + 3 < t^2 < a_n$. □

Väite 3. Jos $a_n \equiv 0 \pmod 3$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $m > n$, että $a_m = 3$.

Todistus. Ensin huomaamme, että sarjan määritelmän perusteella kolmella jaollista lukua seuraa aina kolmella jaollinen luku. Jos $a_n \in \{3, 6, 9\}$, niin sarja lopulta seuraa jaksoa $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$ Olkoon nyt $a_n > 9$ ja j sellainen positiivinen kokonaisluku, että a_j:n arvo on pienin joukon $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ arvo. Nyt on oltava $a_j \leq 9$, sillä muutoin voimme käyttää väitettä 2 lukuun a_j ja saada ristiriidan luvun minimaalisuuden kanssa. Tästä seuraa, että $a_j \in \{3, 6, 9\}$ ja todistus on valmis. □

Väite 4. Jos $a_n \equiv 1 \pmod 3$, niin on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku $m > n$, että $a_m \equiv -1 \pmod 3$.

Todistus. Sarjassa lukua 4 seuraa aina luku $2 \equiv -1 \pmod 3$, joten väite on tosi, kun $a_n = 4$. Jos $a_n = 7$, niin seuraavat luvut ovat $10, 13, 16, 4, 2, \ldots$ ja väite on myös tosi. Kun $a_n \geq 10$, valitsemme sellaisen positiivisen kokonaisluvun $j > n$, että a_j:n arvo on joukon $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ pienin arvo, joka sarjan määritelmän perusteella koostuu luvuista, jotka eivät ole kolmella jaollisia. Oletetaan, että $a_j \equiv 1 \pmod 3$. Tällöin väitteen 2 ja luvun a_j minimaalisuuden perusteella on oltava $a_j \leq 9$. Tästä seuraa, että $a_j \in \{4, 7\}$, joten $a_m = 2 < a_j$ jollekin $m > j$, mikä on ristiriidassa luvun a_j minimaalisuuden kanssa. Siten on oltava $a_j \equiv -1 \pmod 3$. □

Edellä olevista väitteistä seuraa, että jos a_0 on luvun 3 monikerta, niin sarja lopulta päätyy jaksoon $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$ Jos $a_0 \equiv -1 \pmod 3$, niin sarja on aidosti kasvava. Jos taas $a_0 \equiv 1 \pmod 3$, niin sarjasta tulee lopulta aidosti kasvava. Siten sarja on lopulta jaksollinen, jos ja vain jos a_0 on luvun 3 monikerta.

Tehtävä 2. Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki sellaiset funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että kaikille reaaliluvuille x ja y pätee

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Vastaus: On olemassa kolme ratkaisua: $f(x) \equiv 0$, $f(x) = x - 1$ ja $f(x) = 1 - x$.

Ratkaisu. Tarkistamalla huomaamme helposti, että ylläolevat funktiot toteuttavat tehtävän ehdot. Näyttääksemme, että nämä ovat ainoat ratkaisut, huomataan ensin, että jos $f(x)$ on tehtävän ratkaisu, niin myös $-f(x)$ on ratkaisu. Siten voimme olettaa, että $f(0) \leq 0$. Osoitamme, että joko f on nollafunktio tai $f(x) = x - 1$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Kiinnitettyä lukua $x \neq 1$ kohden voimme valita sellaisen luvun $y \in \mathbb{R}$, että $x + y = xy \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1}$, jolloin saamme alkuperäisen yhtälön muotoon

$$f\left(f(x) \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0 \quad (x \neq 1). \tag{1}$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön $x = 0$ päättelemme, että yhtälöllä on ainakin yksi nollakohta, $f(0)^2$:

$$f\left(f(0)^2\right) = 0. \tag{2}$$

Tarkastelemme kahta eri vaihtoehtoa (muistetaan, että $f(0) \leq 0$):

Tapaus 1: $f(0) = 0$. Sijoittamalla $y = 0$ alkuperäiseen yhtälöön saamme ratkaisun

$$f(f(x)f(0)) + f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) = 0 \text{ kaikille } x \in \mathbb{R}.$$

Tapaus 2: $f(0) < 0$. Aloitamme seuraavalla väitteellä:

Väite 1.

$$f(1) = 0, f(a) = 0 \Rightarrow a = 1, f(0) = -1.$$

Todistus. Meidän on osoitettava, että 1 on funktion f ainoa nollakohta. Ensin todetaan, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta ehdon (2) nojalla. Jos $a \neq 1$, niin sijoittamalla $x = a$ yhtälöön (1) saamme $f(0) = 0$, mikä on ristiriidassa oletuksemme kanssa. Siten ehdosta (2) seuraa, että $(f(0))^2 = 1$. Koska oletimme, että $f(0) < 0$, niin on oltava $f(0) = -1$.

Sijoittamalla $y = 1$ alkuperäiseen yhtälöön saamme

$$\begin{aligned} & f(f(x)f(1)) + f(x+1) = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(0) + f(x+1) = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(x+1) = f(x) + 1 \ (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Induktiolla saamme helposti todistettua, että

$$f(x+n) = f(x) + n \ (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}). \tag{3}$$

Nyt esitämme seuraavan väitteen.

Väite 2. f on injektio.

Todistus. Oletetaan, että $f(a) = f(b)$, missä $a \neq b$. Tällöin ehdon (3) nojalla kaikille $N \in \mathbb{Z}$ pätee

$$f(a + N + 1) = f(b + N) + 1.$$

Valitaan mikä tahansa kokonaisluku $N < -b$; tällöin on olemassa $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, joille $x_0 + y_0 = a + N + 1$, $x_0 y_0 = b + N$. Koska $a \neq b$, niin $x_0 \neq 1$ ja $y_0 \neq 1$. Sijoittamalla x_0 ja y_0 alkuperäiseen yhtälöön saamme ehdon (3) ja väitteen 1 avulla

$$\begin{aligned} & f(f(x_0)f(y_0)) + f(a + N + 1) = f(b + N) \\ \Leftrightarrow\ & f(f(x_0)f(y_0)) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(f(x_0)f(y_0) + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x_0)f(y_0) = 0. \end{aligned}$$

Väitteen 1 nojalla $f(x_0) \neq 0$ ja $f(y_0) \neq 0$, sillä $x_0 \neq 1$ ja $y_0 \neq 1$, mikä on ristiriita. □

Nyt loppu on jo lähellä. Mille tahansa $t \in \mathbb{R}$ sijoitetaan $(x, y) = (t, -t)$ alkuperäiseen yhtälöön, jolloin väitteestä 1 ja ehdosta (3) saadaan

$$\begin{aligned} & f(f(t)f(-t)) + f(0) = f(-t^2) \\ \Leftrightarrow\ & f(f(t)f(-t)) = f(-t^2) + 1 \\ \Leftrightarrow\ & f(f(t)f(-t)) = f(-t^2 + 1) \\ \Leftrightarrow\ & f(t)f(-t) = -t^2 + 1, \end{aligned}$$

sillä f on injektio.

Samoin sijoittamalla $(x, y) = (t, 1 - t)$ alkuperäiseen yhtälöön saamme väitteen 1 ja funktion f injektiivisyyden avulla yhtälön

$$\begin{aligned} & f(f(t)f(1-t)) + f(1) = f(t(1-t)) \\ \Leftrightarrow\ & f(f(t)f(1-t)) = f(t(1-t)) \\ \Leftrightarrow\ & f(t)f(1-t) = t(1-t). \end{aligned}$$

Koska ehdon (3) nojalla $f(1 - t) = 1 + f(-t)$, niin

$$\begin{aligned} & f(t)f(1-t) = t(1-t) \\ \Leftrightarrow\ & f(t)(1 + f(-t)) = t(1-t) \\ \Leftrightarrow\ & f(t) + (-t^2 + 1) = t(1-t) \\ \Leftrightarrow\ & f(t) = t - 1, \end{aligned}$$

minkä halusimmekin todistaa.

Tehtävä 3. Metsästäjä ja näkymätön jänis pelaavat peliä euklidisella tasolla. Jäniksen aloituspiste A_0 ja metsästäjän aloituspiste B_0 ovat samat. Kun peliä on pelattu $n - 1$ kierrosta, jänis on pisteessä A_{n-1} ja metsästäjä on pisteessä B_{n-1}. Pelin n. kierroksella tapahtuu kolme asiaa seuraavassa järjestyksessä:

(i) Jänis siirtyy näkymättömänä johonkin pisteeseen A_n, jolle etäisyys pisteiden A_{n-1} ja A_n välillä on tasan 1.

(ii) Jäljityslaite raportoi pisteen P_n metsästäjälle. Ainoa asia, minkä jäljityslaite takaa metsästäjälle, on että etäisyys pisteiden P_n ja A_n välillä on korkeintaan 1.

(iii) Metsästäjä siirtyy näkyvästi johonkin pisteeseen B_n, jolle etäisyys pisteiden B_{n-1} ja B_n välillä on tasan 1.

Onko metsästäjän aina mahdollista valita siirtonsa siten, että riippumatta siitä, miten jänis liikkuu, ja siitä, mitkä pisteet jäljityslaite raportoi, hän voi 10^9 kierroksen jälkeen olla varma, että etäisyys hänen ja jäniksen välillä on korkeintaan 100?

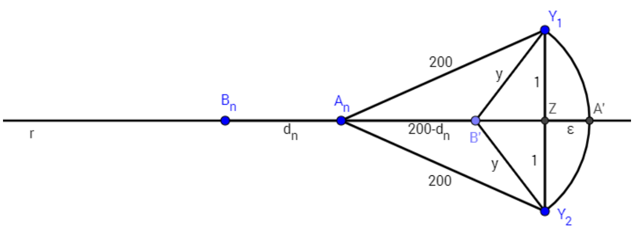
Vastaus: Metsästäjälle ei ole olemassa toimivaa strategiaa. Jänis ”voittaa”.

Ratkaisu. Jos vastaus olisi ”kyllä”, niin metsästäjällä olisi strategia, joka ”toimisi” riippumatta siitä, miten jänis liikkuu tai missä jäljityslaitteen pisteet P_n esiintyvät. Osoitamme, että jos jäljityslaite antaa tarpeeksi huonoja sijainteja, niin metsästäjällä ei ole strategiaa, joka takaisi, että hänen ja jäniksen etäisyys pysyisi pienempänä kuin 100, kun peliä pelataan 10^9 kierrosta.

Olkoon d_n etäisyys metsästäjän ja jäniksen välillä, kun peliä on pelattu n kierrosta. Jos $d_n \geq 100$ mille tahansa $n < 10^9$, niin jänis on tietysti jo voittanut; sen tarvitsee vain kulkea suoraan poispäin metsästäjästä, ja etäisyys pysyy vähintään 100 yksikössä siitä lähtien.

Osoitamme nyt, että kun $d_n < 100$, niin riippumatta metsästäjän strategiasta, jänis pystyy lisäämään lukua d_n^2 ainakin $\frac{1}{2}$ verran jokaisen 200 kierroksen jälkeen (jos vain jäljityslaitteen pisteet ovat tarpeeksi hyviä jänikselle). Näin d_n^2 saavuttaa luvun 10^4 korkeintaan $2 \cdot 10^4 \cdot 200 = 4 \cdot 10^6 < 10^9$ kierroksen kuluessa ja jänis voittaa.

Oletetaan, että metsästäjä on pisteessä B_n ja jänis pisteessä A_n. Oletetaan jopa, että jänis paljastaa sijaintinsa tällä hetkellä metsästäjälle (tämän oletuksen perusteella voimme sivuuttaa jäljityslaitteen aiempien pisteiden historian). Olkoon r pisteiden B_n ja A_n kautta kulkeva suora ja Y_1 ja Y_2 pisteitä, jotka ovat tasan etäisyyden 1 päässä suorasta r ja 200 yksikköä pisteestä A_n, kuten alla olevassa kuvassa.



Jäniksen suunnitelma on yksinkertaisesti valita toinen pisteistä Y_1 ja Y_2 ja hyppiä 200 kierrosta suoraan sitä kohti. Koska kaikki hypyt sijaitsevat korkeintaan etäisyydellä 1 suorasta r, on mahdollista, että kaikki jäljityslaitteen antamat sijainnit ovat suoralla r. Erityisesti metsästäjällä ei ole menetelmää tässä tapauksessa päätellä, valitsiko jänis pisteen Y_1 vai Y_2.

Tarkastelemalla näitä jäljityslaitteen pisteitä, mitä tekee metsästäjä? Jos metsästäjän strategia kehottaa häntä menemään suoraan oikealle, hän päätyy pisteeseen B' kuvassa. Metsästäjällä ei ole parempaakaan vaihtoehtoa. 200 kierroksen jälkeen hän päätyy aina pisteen B' vasemmalle puolelle. Jos hänen strategiansa vie hänet suoran r yläpuolelle, hän päätyy kauemmas pisteestä Y_2; jos hän päätyy suoran r alapuolelle, hän päätyy kauemmas pisteestä Y_1. Toisin sanottuna riippumatta metsästäjän valitsemasta strategiasta hän ei voi koskaan varmistaa, että hänen etäisyytensä jäniksestä 200 kierroksen jälkeen olisi pienempi kuin $y = B'Y_1 = B'Y_2$.

Arvioidaksemme lukua y^2 valitsemme pisteen Z, joka on janan Y_1Y_2 keskipiste ja pisteen A', joka on 200 yksikköä oikealle pisteestä A_n ja määritämme $\epsilon = ZA'$ (huomaa, että $B'A' = d_n$). Tällöin

$$y^2 = 1 + (B'Z)^2 = 1 + (d_n - \epsilon)^2,$$

missä

$$\begin{aligned}\epsilon = 200 - A_nZ &= 200 - \sqrt{200^2 - 1} \\ &= \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.\end{aligned}$$

Erityisesti $\epsilon^2 + 1 = 400\epsilon$, joten

$$y^2 = d_n^2 - 2\epsilon d_n + \epsilon^2 + 1 = d_n^2 + \epsilon(400 - 2d_n).$$

Koska $\epsilon > \frac{1}{400}$ ja oletimme, että $d_n < 100$, niin tämä osoittaa, että $y^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. Siten, kuten väitimmekin, näillä jäljityslaitteen pisteillä jänis voi saavuttaa etäisyyden $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$ metsästäjästä riippumatta. Jänis voittaa. $\square$

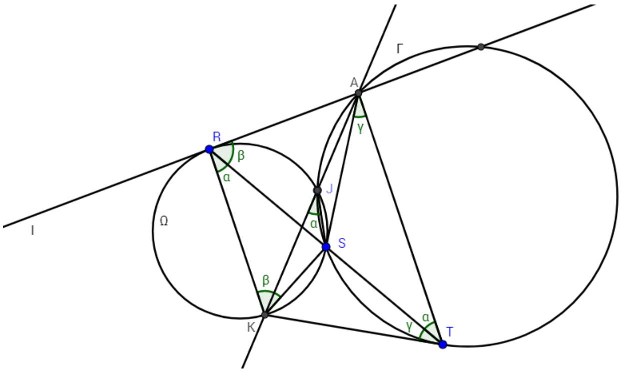
Toisen päivän tehtävistä nelostehtävä oli kohtuullisen helppo geometrian tehtävä, jonka Olli Järviniemi sai ratkaistua. Osa muista Suomen edustajista sai siitä irtopisteitä. Koordinaattorit löysivät tähän tehtävään runsaan määrän erilaisia ratkaisuja. Viides ja kuudes tehtävä olivat kumpikin haastavia. Eräs kollega yritti viittä tai kuutta erilaista induktiotodistusta viidenteen tehtävään, jotka melkein toimivat, mutta eivät kuitenkaan johtaneet tulokseen. Vaikutti siltä, että monen maan kilpailijat menivät samaan ”ansaan”, eivätkä tulleet yrittäneeksi epäonnistuneiden induktiotodistusten jälkeen muita lähestymistapoja.

Tehtävä 4. Olkoot R ja S sellaisia ympyrän Ω eri pisteitä, että RS ei ole ympyrän Ω halkaisija. Olkoon ℓ ympyrän Ω tangenttisuora pisteessä R. Piste T on sellainen, että S on janan RT keskipiste. Piste J valitaan ympyrän Ω lyhyemmältä kaarelta RS siten, että kolmion JST ympäri piirretty ympyrä Γ leikkaa suoran ℓ kahdessa eri pisteessä. Olkoon A ympyrän Γ ja suoran ℓ se leikkauspiste, joka on lähempänä pistettä R. Olkoon K suoran AJ ja ympyrän Ω toinen leikkauspiste. Todista, että suora KT on ympyrän Γ tangentti.

Ratkaisu. Ympyröissä Ω ja Γ pätee $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$. Toisaalta koska RA on ympyrän Ω tangentti, niin $\angle SKR = \angle SRA$. Siten kolmiot ART ja SKR ovat yhdenmuotoiset ja

$$\frac{TR}{RK} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}.$$

Viimeinen yhtälö yhdessä yhtälön $\angle ATS = \angle KRT$ osoittaa, että $\triangle AST \sim \triangle TKR$, joten $\angle SAT = \angle RTK$. Tästä seuraa, että KT on ympyrän Γ tangentti pisteessä T.



Tehtävä 5. Olkoon kokonaisluku $N \geqslant 2$ annettu. $N(N+1)$ jalkapallon pelaajaa, joista mitkään kaksi eivät ole yhtä pitkiä, seisovat rivissä. Sir Alex haluaa poistaa tästä rivistä $N(N-1)$ pelaajaa siten, että jäljelle jäävien $2N$ pelaajan suhteen seuraavat N ehtoa pitävät:

(1) kukaan ei seiso kahden pisimmän pelaajan välissä,

(2) kukaan ei seiso 3. ja 4. pisimpien pelaajien välissä,

$\vdots$

(N) kukaan ei seiso kahden lyhimmän pelaajan välissä.

Osoita, että tämä on aina mahdollista.

Ratkaisu. Jaetaan rivi N osioon, joissa jokaisessa on $N+1$ vierekkäistä pelaajaa. Näytämme, miten jokaisesta osiosta poistetaan $N-1$ pelaajaa siten, että tehtävän ehto toteutuu.

Ensin muodostamme $(N+1)\times N$ -matriisin, jossa $x_{i,j}$ on i:nneksi pisin pelaaja j:nnessä osiossa. Siten jokainen matriisin sarake listaa pituudet yhden osion sisällä järjestettynä alenevaan järjestykseen ylhäältä alas.

Järjestämme tämän matriisin uudelleen vaihtamalla kokonaisia sarakkeita keskenään. Ensin varmistamme sarakkeita vaihtamalla, että $x_{2,1} = \max\{x_{2,i} : i = 1,2,\ldots,N\}$ (ensimmäinen sarake sisältää *toisen* rivin korkeimman pituuden. Kun ensimmäinen sarake on kiinnitetty, tehdään sellainen vaihto, että $x_{3,2} = \max\{x_{3,i} : i = 2,\ldots,N\}$ (toinen sarake sisältää *kolmannen* rivin pisimmän henkilön, poisluettuna ensimmäinen sarake). Askeleella k ($k = 1,2,\ldots,N-1$) vaihdamme sarakkeilta luvusta k lukuun N siten, että $x_{k+1,k} = \max\{x_{i,k} : i = k, k+1, \ldots, N\}$ ja päädymme allaolevan muotoiseen järjestykseen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{x_{1,1}} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & \cdots & x_{1,N-1} & & x_{1,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\mathbf{x_{2,1}} & > & \mathbf{x_{2,2}} & & x_{2,3} & \cdots & x_{2,N-1} & & x_{2,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{3,1} & & \mathbf{x_{3,2}} & > & \mathbf{x_{2,3}} & \cdots & x_{3,N-1} & & x_{3,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N,1} & & x_{N,2} & & x_{N,3} & \cdots & \mathbf{x_{N,N-1}} & > & \mathbf{x_{N,N}} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N+1,1} & & x_{N+1,2} & & x_{N+1,3} & \cdots & x_{N+1,N-1} & & x_{N+1,N}
\end{array}$$

Nyt teemme rohkean valinnan: poistetaan alkuperäisestä rivistä kaikki paitsi ne, joiden pituudet ovat

$$x_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > x_{3,2} > \cdots \\ > x_{N,N-1} > x_{N,N} > x_{N+1,N}.$$

Tietysti pelaajat eivät välttämättä ole rivissä juuri tässä järjestyksessä. Meidän on vielä tarkistettava, että jokainen pari $(x_{k,k}; x_{k+1,k})$ pysyy vierekkäin tässä uudessa rivissä. Henkilöt $x_{k,k}$ ja $x_{k+1,k}$ kuuluvat kuitenkin samaan peräkkäisen $N+1$ henkilön sarakkeeseen, ja kaikki henkilöt, jotka voisivat seistä näiden kahden välissä, on jo poistettu rivistä.

Tehtävä 6. Järjestetty kokonaislukupari (x,y) on *primitiivinen piste*, jos lukujen x ja y suurin yhteinen tekijä on 1. Olkoon S annettu äärellinen primitiivisten pisteiden joukko. Todista, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku n ja sellaiset kokonaisluvut $a_0, a_1, \ldots, a_n$, että jokaiselle pisteelle $(x,y) \in S$ pätee

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Ratkaisu. *Määritelmä*: Astetta n oleva *homogeeninen polynomi* on polynomi, joka ei ole identtisesti nolla ja on muotoa

$$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots \\ + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n.$$

Aluksi toteamme, että riittää löytää polynomi $f(x,y)$, jolle $f(x,y) = \pm 1$, sillä tällöin $f^2(x,y) = 1$. Merkitään primitiivisiä pisteitä luvuilla $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$. Jos jotkut kaksi primitiivistä pistettä (x_i,y_i) ja (x_j,y_j) kulkevat saman origon kautta kulkevan suoran kautta, niin $(x_j,y_j) = (-x_i,-y_i)$, sillä kummallakaan parilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Tällöin $f(x_j,y_j) = \pm f(x_i,y_i)$, joten voimme olettaa, että mitkään kaksi pistettä eivät ole samalla origon kautta kulkevalla suoralla.

Tarkastellaan tehtävän ehdon toteuttavia polynomeja $l_i(x,y) = y_ix - x_iy$ ja määritellään

$$g_i(x,y) = \prod_{j\neq i} l_j(x,y).$$

Nyt $l_i(x_j, y_j) = 0$, jos ja vain jos $j = i$, koska jokaisella origon kautta kulkevalla suoralla on vain yksi primitiivinen piste. Siten $g_i(x_j, y_j) = 0$ kaikille $j \neq i$. Määritellään $a_i = g_i(x_i, y_i)$ ja huomataan, että $a_i \neq 0$.

Huomataan, että $g_i(x, y)$ on astetta $n-1$ oleva polynomi, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $g_i(x_j, y_j) = 0$, jos $j \neq i$.

2. $g_i(x_i, y_i) = a_i$.

Mitä tahansa $N \geq n-1$ kohti on olemassa astetta N oleva polynomi, joka toteuttaa nämä ominaisuudet. Olkoon erityisesti $I_i(x, y)$ astetta 1 oleva homogeeninen polynomi, jolle $I_i(x_i, y_i) = 1$, joka on olemassa, koska $s.y.t.(x_i, y_i) = 1$. Tällöin $I_i(x, y)^{N-(n-1)} g_i(x, y)$ toteuttaa molemmat edellä mainitut ominaisuudet ja on astetta N.

Nyt tehtävän väite voidaan muokata seuraavaan muotoon:

Väite: Mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle a on olemassa homogeeninen kokonaislukukertoiminen polynomi $f_a(x, y)$, joka on vähintään astetta 1 ja jolle $f_a(x, y) \equiv 1 \pmod{a}$ kaikille pareille (x, y), joille $s.y.t.(x, y) = 1$.

Tarkistaaksemme, että tämä väite todistaa tehtävän, valitaan sellainen a, joka on pienin yhteinen tekijä luvuille a_i $(1 \leq i \leq n)$. Valitaan f_a samoin kuin väitteessä, valitaan jokin aste $f_a(x, y)^k$, jonka aste on vähintään $n-1$, ja vähennetään tarvittavat luvun g_i monikerrat, jotta saamme halutun polynomin.

Todistamme väitteen jakamalla luvun a tekijöihin. Jos a on alkuluvun potenssi $(a = p^k)$, niin voimme valita joko:

- $f_a(x, y) = (x^{p-1} + y^{p-1})^{\theta(a)}$, jos p on pariton;

- $f_a(x, y) = (x^2 + xy + y^2)^{\theta(a)}$, jos $p = 2$.

Oletetaan nyt, että a on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, jolle $a = q_1 q_2 \cdots q_k$, missä luvut q_i ovat keskenään yhteistekijättömiä alkulukujen potensseja. Olkoot f_{q_i} juuri muodostetut polynomit ja F_{q_i} näiden potenssit, joilla on kaikilla sama aste. Huomataan, että

$$\frac{a}{q_i} F_{q_i}(x, y) \equiv \frac{a}{q_i} \pmod{a}$$

kaikille (x, y), joille $s.y.t.(x, y) = 1$. Bézout'n lemman perusteella luvuille $\frac{a}{q_i}$ on olemassa kokonaislukukertoiminen lineaarinen yhdistelmä, jonka summa on 1. Siten on olemassa lineaarinen yhdistelmä funktioita F_{q_i} siten, että $F_{q_i}(x, y) \equiv 1 \pmod{a}$ kaikille (x, y), joille $s.y.t.(x, y) = 1$; tämä polynomi on homogeeninen, sillä kaikilla funktioilla F_{q_i} on sama aste.

Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html`

Sanakirjassa selitetään käsitteitä ja annetaan niiden yhteyksiä sekä käännökset englanniksi. Sanakirjan sisältöä ja tekniikkaa koskevia kommentteja voi lähettää osoitteeseen

toimitus at matematiikkalehtisolmu piste fi