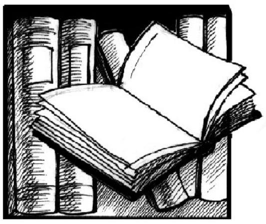
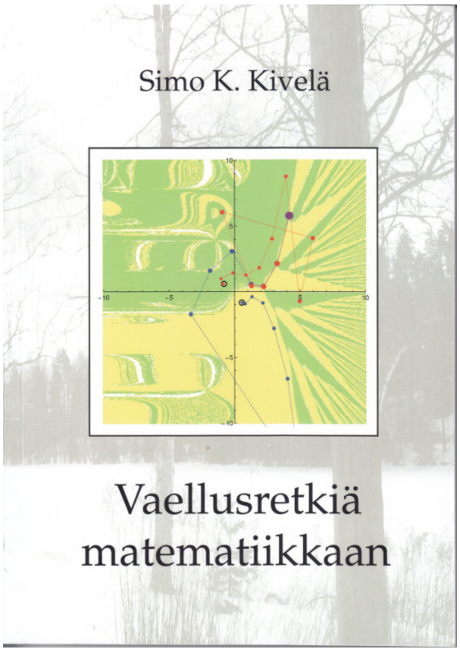


Kirja-arvio: Retkeilyllä matematiikan maisemissa

Matti Lehtinen

Simo K. Kivelä: Vaellusretkiä matematiikkaan. *Omakustanne. Espoo 2017. 210 sivua. Hinta eri verkkokaupoissa 29,92–37,35 euroa.*



Jos matematiikasta kirjoittaa muuten kuin oppikirjan mielessä, on keksittävä sopivasti kuvaileva nimi. Hyllyssäni on Teuvo Aittokallion mainio *Patikkaretkiä matematiikan maisemaan* (tuon kirjan kustantajakin on nimeltään *Matikkaretket*) ja monikansallinen tuote nimeltä Lukujen taikaa; sen selkämyksessä on kuitenkin isoin kirjaimin *Löytöretki*. Samaa retkiteemaa olen itsekin tapaillut parikymmentä vuotta sitten Solmussa julkaistuissa *Turistina matematiikassa* -kirjoituksissa, jotka olin alaotsikoinut tyyliin ”n:s retki”.

Teknillisen korkeakoulun pitkäaikainen opettaja, monin tavoin matematiikan opetukseen yleisemminkin vaikuttanut ja Solmua paljon avustanut **Simo K. Kivelä** on nyt liittynyt matematiikan retkeilijöihin. Kivelän aikaisempia projekteja on esimerkiksi lukiotasoisen matematiikan tietosanakirja *M niin kuin matematiikka*.

Kivelän kirjassa on 25 lukua, kukin noin 5–10 sivun pituinen. Jokaista näistä voi pitää omana retkenään matematiikan maisemaan. Retkien kohteet vaihtelevat, mutta muutamat suuntautuvat samanlaisille seuduille. Kirjoitukset käsittelevät sekä matematiikan rakennetta että sen soveltamista. Ne voi lukea pitkälti toisistaan riippumatta, mutta jonkinlainen punainen lanka ja pedagoginen tavoite on kuitenkin mukana. Koulumatematiikka on aika ahdas aitaus ja moni joutuu elämään elämänsä tietämättä juuri mitään aidan ulkopuolella leviävästä matematiikan maailmasta. Kaikki Kivelän retket tehtyään lukija on kartoittanut itselleen melkoisen alueen matematiikan maastoa, koulumatematiikan liepeiltä ja vähän kauempaakin.

Kirja lähtee liikkeelle matematiikan olemuksen ytimen, aksioomien pohtimisesta. *Eukleideen* ja *Hilbertin* geometristen järjestelmien jälkeen esitellään vielä tyypillinen nykyaikainen aksiomaattinen rakenne, ryhmä. Toisellakin retkellä tavataan Eukleides, sillä nyt tarkastellaan piirroksia harpilla ja viivoittimella. Kaikkea niillä ei voi tehdä, mutta jos hiukan lisäapua sallitaan, niin kulman voi jakaa kolmia. (Sivun 22 kuvassa näytetään eräs kulman kolmijako ns. *neysis*-menetelmällä. Sen sanotaan olevan peräisin *François Vièteltä* 1500-luvulta, mutta konstruktio näyttää kyllä samalta, jota jo *Arkhimedeen* sanotaan käyttäneen. Ensi kerran muuten näin Vièteställä käytettävän nimitystä ”harrastajamatemaatikko”. Totta toki on, ettei matematiikka hänelle elantoa suonut, niin kuin ei esimerkiksi *Pierre de Fermat'llekaan.*) Kolmannella retkellä määritetään ympyrän alan ylä- ja alalikiarvot keinona ympyrän jakaminen samankeskisiksi renkaiksi, joiden alaa approksimoidaan suorakulmiona. Pallon tilavuudelle tehdään sama käyttämällä viipalointia ja viipaleen tilavuuden vertaamista lieriöön. Neljännen retken aiheena ovat koordinaatistot. Viides retki käsittelee erityistä ääriarvo-ongelmaa, n:n pisteen asettamista pallon pinnalle niin, että pienin pisteiden välisistä etäisyyksistä maksimoituu. Yllättävän hankala ongelma antaa aiheen tarkastella ääriarvotehtävän olemusta yleisemmin.

Kuudennessa retkessä palataan taas matematiikan perusteisiin: aiheena ovat luonnolliset luvut, Peanon aksioomat ja induktio. Ilokseni huomaan, että Kivelä aloittaa luonnollisten lukujen joukon ykkösestä eikä nollasta. Seuraava luku esittelee irrationaalisuuden lähinnä päättymättömien desimaalilukujen kautta ja näyttää, miten reaaliluvut määritellään aksiomaattisesti. Sitä pientä ongelmaa, jonka tuottaa ”päättymätön jakolasku” rationaalilukujen maailmassa, ennen kuin reaaliluvut on jollain tavalla määritelty, ei tuoda esiin. Desimaaliluvut ovat isossa asemassa sitten seuraavalla retkellä, joka käsittelee luvun π desimaaliesityksen määrittämistä. Samassa yhteydessä esitetään todistus π:n irrationaalisuudelle; suunnilleen sama löytyy vuoden 2001 Solmusta.

Kompleksilukuja käsittelevä 9. luku antaa yleisen kolmannen asteen yhtälön ratkaisun *Mathematica*-ohjelmiston tarjoamassa muodossa. Tässä yhteydessä esitetty johtopäätös, jonka mukaan reaalistenkin juurten määrityksessä tulisi aina kulkea kompleksilukujen kautta, on hiukan liian pessimistinen. Kymmenennen retken aiheena ovat vektorit ja yleisemminkin vektoriavaruudet. Niiden aksiomaattinen määritelmä esitetään, samoin yleinen sisätulo. Hiukan oikoen saadaan jopa *Eulerin* johtama kaava kokonaislukujen neliöiden käänteislukujen summalle. Vektoreita sovelletaan seuraavassa retkessä konkreettiseen retkiongelmaan: maapallon isoympyrän kaaren pituuden määrittämiseen. Esimerkkinä on suorin tie Helsingistä Tokioon. Vektorien pistetulon kautta päädytään lausekkeeseen, joka on pallotrigonometrian kosinilause. Mihin suuntaan on lähdettävä? Sen Kivelä ratkaisee etsimällä Helsingin ja Tokion kautta kulkevan isoympyrän tangenttivektorin. Ehkä helpommalla pääsisi käyttämällä pallotrigonometrian kosinilausetta uudelleen Helsinki–Tokio–pohjoisnapa -pallokolmioon, nyt sen Helsingin-kärkeen.

Seuraavat kolme retkeä käsittelevät perspektiivistä, deskriptiivistä ja projektiivista geometriaa. Tässä liikutaan alueilla, jotka epäilemättä liittyvät Kivelän virkatyöhön teekkarien opettajana, ja myös hänen vuonna 2008 julkaisemaansa kirjaan *Perspektiivikuvan geometriset perusteet.*

Retket numero 15–17 on omistettu ”matematiikan tärkeimmälle käsitteelle”, funktiolle, ja sen jatkuvuudelle. Jatkuvuus sekä ϵ, δ -mielessä että topologisessa merkityksessä tulevat esitellyiksi. Retki 18 palaa geometrian ja topologian pariin: esittelyssä ovat Platonin monitahokkaat ja yleisemmät pinnat. Pienenä omituisuutena voi pitää sitä, että Kivelä nimeää Platonin kappaleiksi tetraedrin jne., kun kyse kuitenkin on nimenomaan säännöllisistä monitahokkaista. Retkellä 19 tavataan joukko eri tavoin määriteltyjä käyriä ja pintoja. Esitellään myös *splinit* ja *Bézierin* käyrät, jotka usein täyttävät hyvin kaksi eri suuntiin vetävää vaatimusta: ne saadaan kulkemaan haluttujen pisteiden kautta ja olemaan riittävän sileitä.

Retki 20 on jälleen analyysiä: integraalin historiaa valotetaan aina Arkhimedeen oivalluksista alkaen. Retkillä 21 ja 22 kohdataan differentiaaliyhtälöitä konkreettisissa mutta epätriviaaleissa yhteyksissä. Viimeisillä retkillä simuloidaan planeettaliikettä, sovitetaan käyriä empiiriseen aineistoon ja viimein esitellään hiukan todennäköisyyttä. Kirja on ajankohtainen: lottoa käsitellään sen nykyisessä, 40 pallon muodossa.

Jokaisen retken lopussa on joukko täydentäviä huomautuksia ja lisätiedon luo ohjaavia viitteitä, yleensä tietoverkkoon osoittavia. Laskin, että eri verkkosivuja luetellaan melkein 150 kappaletta. Lisäksi Kivelä ehdottaa monia hakukoneen käyttötapoja. Etupäässä viitataan englanninkielisiin sivustoihin. Joissakin tapauksissa olisi saattanut löytyä suomenkielisiäkin tietolähteitä, vaikkapa Solmusta tai matematiikan kilpailuvalmennuksen aineistoista.

Kivelän kirja on huolella toimitettu. Hyvälaatuisia kuvia on runsaasti. Varsinaisia lipsahduksia ei sattunut silmään. Joistakin puhtaasti makuasioista voisi olla toistakin mieltä. Kivelä kirjoittaa desimaaliluvut anglosaksiseen tapaan pisteellä, ja käyttää uudempien suositusten mukaista mutta ainakin minun silmääni epäesteettistä tapaa kirjoittaa muutamat perinteisesti kaavoissa kursivoitavat symbolit kuten e ja i versaalikirjaimin.

Kivelän teos on omakustanne. Kyllä se komeasti ylittäisi kustantamojen laatukriteerit, mutta sellaista aikaa nyt vain eletään, että tämänlaatuinen tietokirja ei ole suosiossa. Niin matematiikkaan suuntautuvan nuoren kuin matematiikan opettajankin kannattaa hankkia Kivelän kirja. Hakukoneen avulla löytyy useita verkkokauppoja, joiden valikoimiin *Vaellusretket* kuuluu. Takakansi lupaa, että kirja pyrkii täydentämään koulun antamaa mielikuvaa matematiikan rakenteista ja niiden hyödyntämisestä eri yhteyksissä. Tämän lupauksen kirja loistavasti täyttää.