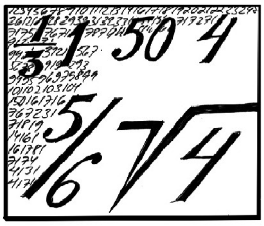


Vaihtojännitteen ja -virran tehollisarvo

Vesa Linja-aho
autoelektroniikan lehtori, Metropolia-ammattikorkeakoulu
etunimi.sukunimi@metropolia.fi

Johdanto

Edellisessä Solmun numerossa (1/2017) ilmestyneessä artikkelissani *Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla* tutustuttiin sinimuotoisen vaihtojännitteen ja -virran käsittelyyn osoittimien avulla.

Artikkelissa laskettiin huippuarvon osoittimilla, koska (jo muutenkin teoreettisesti melko haastavaa asiaa käsittelevä) artikkeli olisi paisunut liian laajaksi, jos siihen olisi sisällyttänyt myös vaihtosähkötehon ja tehollisarvon käsitteet.

Huippuarvoilla laskeminen on täysin oikein sekin, mutta käytännön sähkötekniikassa vaihtojännitteistä ja -virroista puhuttaessa käytetään kuitenkin lähes aina jännitteiden ja virtojen tehollisarvoja.

Esimerkiksi tavallisessa kotitalouspistorasiassa on sinimuotoinen vaihtojännite, jonka huippuarvo eli amplitudi on noin 325 volttia ja taajuus 50 hertsiä, eli

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t) = \hat{u}\sin(2\pi f t) = 325\,\mathrm{V}\sin(2\pi \cdot 50t).$$

Kuitenkin kaikki tietävät, että Suomessa verkkojännite on 230 volttia. Mikä arvo tämä on, jos kerran verkkojännitteen amplitudi on 325 volttia? 230 volttia on verkkojännitteen **tehollisarvo**. 230 voltin tehollisarvo tarkoittaa, että kyseiseen vaihtojännitteeseen kytketty sähkövastus kuumenee samalla teholla kuin 230 voltin tasajännitteeseen kytketty vastus. Voidaan osoittaa, että sinimuotoisella vaihtojännitteellä huippuarvon ($\hat{u}$) ja tehollisarvon (U) välinen suhde on $\sqrt{2}$ eli verkkojännitteelle:

$$\frac{\hat{u}}{U} = \sqrt{2} \Rightarrow U_{\text{verkko}} = \frac{\hat{u}_{\text{verkko}}}{\sqrt{2}} = \frac{325\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \approx 230\,\mathrm{V}.$$

Tarkastellaan asiaa yksityiskohtaisemmin.

Sähköteho

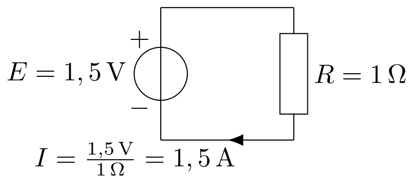
Mikäli piirielementin yli vaikuttaa jännite u ja sen läpi kulkee virta i,[1] sähköteho p elementissä on jännitteen ja virran tulo

$$p = ui.$$

Esimerkiksi jos 1,5 voltin paristoon[2] kytketään 1 ohmin suuruinen vastus, kulkee vastuksen läpi Ohmin lain mukaan $I = \frac{1{,}5\,\mathrm{V}}{1\,\Omega} = 1{,}5\,\mathrm{A}$ sähkövirta:

[1] Jos hämmentää, miksi nyt käytetään pieniä kirjaimia jännitteelle ja virralle, katso artikkelin viimeiseltä sivulta otsikko **merkinnöistä**.

[2] Kaupasta saatava 1,5 voltin jännitteen tuottava esine on – jos viilataan pilkkua – *sähköpari*, ja jos näitä kytketään useita sarjaan, saadaan esimerkiksi 4,5 voltin tai 9 voltin *paristo*. Arkikielessä sana paristo on kuitenkin vakiintunut tarkoittamaan niin sähköparia kuin paristoakin (tavallista kuluttajaa ei kiinnosta, koostuuko kaukosäätimen tai leikkikalun voimanlähde useista sähkökemiallisista pareista vai yhdestä).



Tällöin vastus kuumenee teholla

$$P = UI = 1{,}5\,\mathrm{V} \cdot 1{,}5\,\mathrm{A} = 2{,}25\,\mathrm{W}.$$

Usein ei ole tarkoituksenmukaista laskea vastuksen jännitettä tai virtaa välitulokseksi, kun vain teho kiinnostaa. Sijoittamalla Ohmin laki tehon lausekkeeseen saadaan kätevät kaavat:

$$P = UI = (RI)I = RI^2 \qquad P = UI = U\frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}.$$

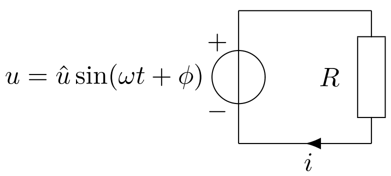
Teho on siis verrannollinen jännitteen tai virran neliöön. Esimerkiksi jos johtimen virta kaksinkertaistuu, sen häviöt nelinkertaistuvat.[3] Tai jos virta saadaan puolitettua, häviöt vähenevät 75 prosenttia. Juuri tähän perustuu korkeiden jännitteiden käyttö sähkön siirrossa: kun voimalinjassa käytetään korkeaa jännitettä, saadaan sama teho siirrettyä pienemmällä virralla, jolloin häviöt pienenevät.

Vastus ja vaihtojännite

Ohmin lain mukaan virta vastuksessa on jännitteen ja resistanssin osamäärä, eli

$$i = \frac{u}{R},$$

joten seuraavassa virtapiirissä



$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u}\sin(\omega t + \phi)}{R} = \frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t + \phi).$$

Vastusarvon muuttaminen ei siis vaikuta taajuuteen eikä vaihekulmaan, vaan ainoastaan virran amplitudiin, joka on siis $\frac{\hat{u}}{R}$. Tehoksi vastuksessa saadaan:

$$p = ui = \hat{u}\sin(\omega t+\phi)\cdot\frac{\hat{u}}{R}\sin(\omega t+\phi) = \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(\omega t+\phi).$$

Sijoittamalla yllä olevaan lausekkeeseen lukuarvot voidaan laskea teho tietyllä ajanhetkellä. Tämä ei kuitenkaan ole usein tavoiteltavaa: sähkötekniikassa kiinnostavia arvoja ovat keskimääräinen teho sekä joskus myös huipputeho.

Huipputeho vastuksessa on helppo laskea: koska sinifunktio saa arvoja välillä $[-1, 1]$, saa sen neliö arvoja välillä $[0, 1]$, joten huipputeho $\hat{p}$ on yksinkertaisesti sinin neliön kerroin

$$\hat{p} = \frac{\hat{u}^2}{R},$$

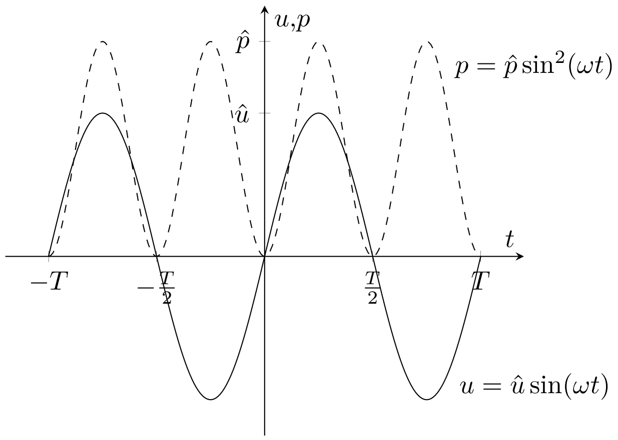
joka ei poikkea tasajännitteen tehon kaavasta. Aiemmassa esimerkkilaskussa 1 ohmin vastus kytkettiin 1,5 voltin tasajännitelähteeseen, jolloin teho oli

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(1{,}5\,\mathrm{V})^2}{1\,\Omega} = \frac{(1{,}5\,\mathrm{V})^2}{1\,\Omega} = 2{,}25\,\mathrm{W}.$$

Jos tasajännitelähteen tilalle vaihdetaan vaihtojännitelähde, jonka huippuarvo on 1,5 volttia, saadaan vastuksen huipputehoksi sama

$$\hat{p} = \frac{(1{,}5\,\mathrm{V})^2}{1\,\Omega} = 2{,}25\,\mathrm{W}.$$

Tämä teho saavutetaan kaksi kertaa vaihtojännitteen jakson aikana: sinin saavuttaessa huippunsa sekä miniminsä. Tällä välillä teho vaihtelee sinifunktion neliön mukaisesti:



Koska teho ainoastaan käväisee huippuarvossaan kahdesti yhden jännitteen/virran jakson aikana, on selvää, että 1,5 voltin huippuarvoinen vaihtojännite ei lämmitä vastusta yhtä paljon kun 1,5 voltin tasajännite, joka syöttää jatkuvasti vastukseen 2,25 watin tehon. Kuinka suuren tehon vaihtojännite sitten keskimäärin syöttää vastukseen?

Keskimääräinen teho P saadaan laskettua laskemalla vastuksen kuluttama energia yhden jakson aikana ja jakamalla se jaksonajalla. Koska teho muuttuu koko

[3] Lisäksi: metallijohtimen resistanssi kasvaa lämpötilan noustessa, joten häviöt hieman enemmän kuin nelinkertaistuvat. Resistanssin lämpötilariippuvuudesta johtuu myös se, että käyttöikänsä lopussa oleva hehkulamppu palaa rikki lähes aina sitä sytytettäessä: silloin sen läpi kulkee suurin virta, joka sulattaa langan heikoimman kohdan poikki.

ajan, energiamäärä on laskettava määrättynä integraalina yhden jakson ajalta:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t.$$

Valitaan $\omega = 1$, jolloin jännitteen jaksonaika on 2π. Koska sinin neliön jakson pituus on π, riittää että laskemme integraalin väliltä $[0,\pi]$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Siirretään vakiot integrointimerkin eteen:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{R\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sinin neliö on kätevintä integroida käyttämällä identiteettiä $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{R\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi}\int_0^\pi 1-\cos(2t)\,\mathrm{d}t,$$

jolloin integraali voidaan laskea

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \Big/_0^\pi\; t - \frac{1}{2}\sin(2t).$$

Lopputulos on erittäin sievä, koska sini sekä nollasta että kulmasta 2π on nolla:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin(2\pi) - 0 + \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) = \frac{\hat{u}^2}{2R}.$$

Tehollisarvo

Edellä todistettiin, että jos vastukseen kytketään sinimuotoinen vaihtojännite, jonka huippuarvo on $\hat{u}$, vastuksessa kuluu teho

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R}.$$

Kuten artikkelin alussa mainittiin, verkkojännitteen 230 voltin tehollisarvo tarkoittaa, että kyseiseen vaihtojännitteeseen kytketty sähkövastus kuumenee samalla teholla kuin 230 voltin tasajännitteeseen kytketty vastus. Kun nyt on todistettu, kuinka teho lasketaan sinimuotoisen jännitteen huippuarvosta, voidaan tehollisarvo selvittää helposti. Tehollisarvo on se jännite U, joka vastuksen tehon kaavaan $P = \frac{U^2}{R}$ sijoitettuna antaa saman tuloksen kuin äsken todistettu kaava $P = \frac{\hat{u}^2}{2R}$, eli

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\hat{u}^2}{2R} \Rightarrow U = \pm\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}.$$

Negatiivinen vastaus voidaan hylätä turhana, koska jännitteen tai virran suunnalla ei ole tehon kannalta merkitystä, joten

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}.$$

Tehollisarvon määritelmiä

Tehollisarvon määritelmän sisältö on yksiselitteinen, mutta koska käsite on välillä hankala hahmottaa, kannattaa lukea eri määritelmät läpi ja valita niistä se, joka kolahtaa.

Itse suosin opetuksessa pragmaattista määritelmää: tehollisarvo vastaa kysymykseen *minkäsuuruiseen tasajännitteeseen hehkulamppu tulee kytkeä, jotta se palaa yhtä kirkkaasti kuin tässä vaihtojännitteessä?*

Suomenkielisessä Wikipediassa tehollisarvo määritellään seuraavasti: *Vaihtojännite syöttää kuormaan saman tehon kuin sen tehollisarvon suuruinen tasajännite.*

Yliopistonlehtori Kimmo Silvonen muotoilee kirjassaan *Sähkötekniikka ja piiriteoria* määritelmän *vaihtovirran keskimääräinen lämmittävä vaikutus vastuksessa on yhtä suuri kuin tehollisarvoltaan samansuuruisen tasavirran.*

Lukiofysiikan oppikirja Galilei 7:n mukaan *vaihtovirran ja jännitteen teholliset arvot on määritelty siten, että niiden suuruiset tasavirta ja tasajännite aiheuttavat vastuksessa saman keskimääräisen tehonkulutuksen.*

Toinen tapa laskea integraali

Martti Valtosen ja Anu Lehtovuoren kirjassa Piirianalyysi 1 (s. 116) integraali lasketaan näppärällä tavalla. Kun lasketaan integraali koko jakson ajalta $[0,2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

ja koska $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t)$, voidaan kirjoittaa

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1-\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

eli

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

josta edelleen

$$\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Symmetrian nojalla koko jakson ajalta sinin ja kosinin neliöiden integraalit ovat yhtä suuret, joten

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \pi,$$

ja kun teho integroidaan koko jakson ajalta $[0, 2\pi]$, saadaan:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\hat{u}^2}{2R\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ja sijoittamalla äsken laskettu integraalin arvo:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi}\pi = \frac{\hat{u}^2}{2R},$$

kuten toisellakin laskutavalla.

Merkinnöistä

Jos ei erikseen toisin mainita, sähkötekniikassa isot kirjaimet U ja I tarkoittavat tasajännitettä tai vaihtojännitteen tehollisarvoa. Pienet kirjaimet tarkoittavat hetkellisarvoa. Jos halutaan erikseen korostaa, että kyseessä on tehollisarvo, voidaan ison kirjaimen kanssa käyttää alaindeksiä eff tai rms[4]:

$$U = U_{\text{eff}} = U_{\text{rms}}.$$

Osoitinlaskentaa voi suorittaa niin huippu- kuin tehollisarvoilla: Jos lähtöarvot ovat huippuarvoja, lopputuloksetkin ovat huippuarvoja. Jos lähtöarvot ovat tehollisarvoja, lopputuloksetkin ovat tehollisarvoja.

Koska tehollisarvoilla on enemmän konkreettista merkitystä sähkötekniikassa, käytännössä aina lasketaan tehollisarvoilla.

Vaihe-ero tekee tilanteen monimutkaisemmaksi

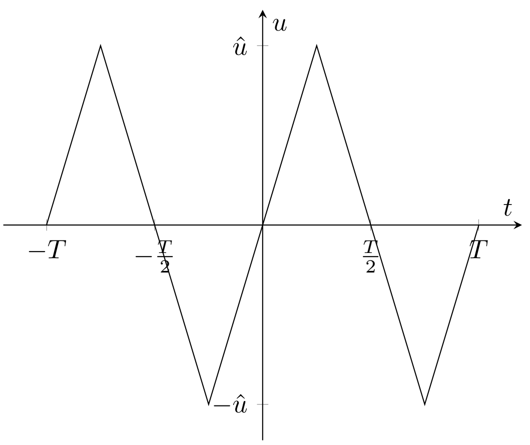
Tässä artikkelissa tutkittiin tehollisarvoa jännitteen kautta. Samanlainen tarkastelu olisi voitu tehdä vaihtovirralle. Kun vastuksen virran tehollisarvo ja jännitteen tehollisarvo kerrotaan keskenään, saadaan komponentin kuluttama teho.

Vastuksessa jännite ja virta ovat samassa vaiheessa. Jos jännitteen ja virran välillä on vaihe-eroa, tilanne muuttuu monimutkaisemmaksi: voidaan osoittaa esimerkiksi, että mikäli jännitteen ja virran välillä on 90 asteen vaihe-ero, komponentti ei kuluta keskimäärin tehoa ollenkaan, mistä päästään käsitteisiin pätöteho, loisteho ja näennäisteho – joita käsitellään seuraavassa Solmun numerossa.

Tämän takia ensimmäisellä sivulla käytettiin merkintää $p = ui$, koska se on yleispätevä hetkelliselle teholle. $P = UI$ pitää paikkansa vain tasasähköpiirissä sekä sellaisessa vaihtosähköpiirissä, jossa jännite ja virta ovat samassa vaiheessa. Mikäli jännitteen ja virran välillä on vaihe-eroa, $P < UI$, mutta tästä lisää ensi numerossa.

Kokeile itse!

Edellä johdettiin kerroin $\sqrt{2}$ sinimuotoisen vaihtojännitteen huippuarvon ja tehollisarvon suhteelle. Osoita, että kolmiomuotoiselle vaihtojännitteelle huippuarvon ja tehollisarvon välinen suhde on $\sqrt{3}$:



Lähteitä ja lisälukemista

Martti Valtonen, Anu Lehtovuori: Piirianalyysi 1. 1. painos. Unigrafia. Helsinki 2011.

Kimmo Silvonen: Sähkötekniikka ja piiriteoria. 1. painos. Otatieto. Helsinki 2009.

Lavonen, Kurki-Suonio, Hakulinen: Galilei 7 – Sähkömagnetismi. 1. painos. Weilin+Göös. Porvoo 1996.

[4]Rms on lyhenne sanoista root mean square, eli neliöllinen keskiarvo tai neliökeskiarvo.