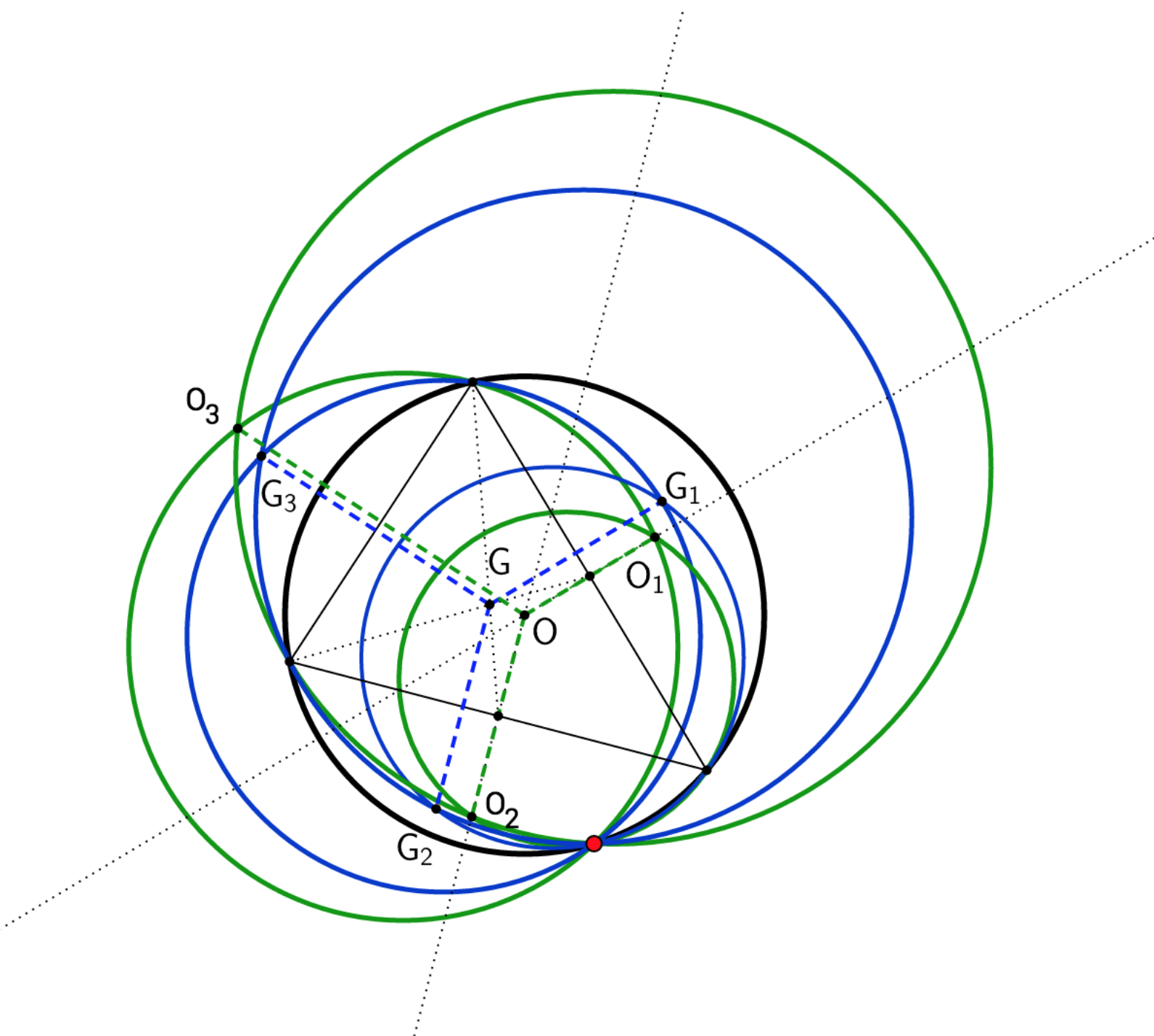


Solmu

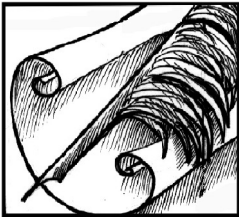
Matematiikkalehti
2/2017

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Ratkaisuja, aivan käsittämätön määrä ratkaisuja (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailut 2017 (Neea Palojärvi)	5
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset kilpailijoiden silmin (Pinja Pessi ja Essi Vilhonen)	7
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset koordinaattorin silmin (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	9
Vaihtelevia summia (Pekka Alestalo)	12
Vertikaalisesti suunnikkaasta (Lehtori K.)	15
Kirja-arvio: Retkeilyllä matematiikan maisemissa (Matti Lehtinen)	18
Collatzin konjektuuri ja algoritmien analysointi (Antti Laaksonen)	20
Kolikonheiton todennäköisyys (Jukka Liukkonen)	24
Opetusideoiden tarjoilupöytä: Kirjan Matikkanälkä arvio ja Laura Tuohilammen haastattelu (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	28
Vaihtojännitteen ja -virran tehollisarvo (Vesa Linja-aho)	31
Solmun ongelmapalsta	35
Katastrofin lyhyt valmistusohje (Aatos Lahtinen)	38
Miksi kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen? (Esa V. Vesalainen)	41



Ratkaisuja, aivan käsittämätön määrä ratkaisuja

Pääkirjoitus

Huhtikuussa ei paljon vapaa-ajan ongelmia ollut: kaikki vapaa-aika (ja osin yöunetkin) menivät tarkastaessa ratkaisuja. Olen ylioppilastutkintolautakunnan sensori. Nautin siis useamman sadan kokelaan ratkaisuista. Lisäksi olin Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailussa (EGMO) koordinaattorina, tein alustavan tarkastuksen pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa Suomen kilpailijoiden geometrian ratkaisuille sekä olin mukana tarkastamassa seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun finaaliratkaisuja Helsingissä ja Turussa.

Käytännössä urakat olivat hyvin erilaisia: kilpailuratkaisuja ei ollut tarkistettavana kovinkaan montaa. Ylioppilaskilpailuratkaisujen määrä taas oli suuri. Seitsemäsluokkalaisten finaaliratkaisut piti tarkistaa hyvin tiukalla aikataululla, EGMO:n ratkaisut piti hoitaa parissa päivässä, pohjoismaisen ja ylioppilaspaperien kanssa oli enemmän aikaa, ylioppilaspaperien kanssa peräti koko kuukausi.

Suuria määriä ratkaisuja lukiessa ratkaisun selkeyden merkitys kasvoi. Sen huomasi hyvin myös, jos edessä oli ratkaisu, joka oli kirjoitettu kielellä, jota itse en puhu. Olin lievällä kauhulla ajatellut Saudi-Arabian ratkaisujen koordinoitua. Jos aakkoston hahmottaa, voi tarpeen tullen kokeilla kaikenlaisia verkkosanakirjoja tai muita verkkokääntimiä. Lisäksi matematiikan sanasto on monessa kielessä niin samankaltainen, että jotain voi arvatakin. Siinä vaiheessa, kun edes aakkostoa ei käsitä, menevät kaikki tällaiset vaihtoehdot kovin hankaliksi. Iloisesti yllätyin: Saudi-Arabian ratkaisut olivat nopeita ja selkeitä lukea. Osa kilpailijoista oli peräti kirjoittanut selitykset englanniksi, tai vähintään

kriittiset sanat. Kaikilla oli ratkaisun rakenne kunnossa, kaikki välttämätön, eikä mitään turhaa paperissa. Sellaisella ratkaisulla saa koordinaattorin kovin iloiseksi.

Ylioppilaspapereita lukiessa ei kieliongelmiä tullut, mutta ratkaisujen selkeyden ja esityksen tasossa oli valtavia eroja. Välillä edessä oli erinomainen paperi, jossa suurin osa ratkaisuista oli matemaattisesti kunnossa, mutta esitys tuskallinen. Välillä taas paperi, jossa matematiikka oli pielessä, mutta kokelas oli päättänyt pitää huolen siitä, että sensori ei ainakaan tipu kärryiltä. Korrelaatiota mihinkään suuntaan esityksen ja matemaattisen tason välillä en havainnut.

Pahimmilta tapauksilta olen selvästi tarkistusurallani välttynyt: kuulin EGMO:ssa kuinka jonkun vuoden kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa joku kilpailija oli kirjoittanut suttupaperit itse kehittämällään kielellä. Siis täysin omin sanoin. Suttupaperit eivät ole ensisijaisesti arvostelussa mukana, mutta niitä usein käytetään tukena, ja irtopisteitä niistä myös voidaan usein kaivaa. Kyseisessä tapauksessa ei kilpailija ollut onnistunut tuottamaan varsinaisille arkeille mitään fiksumaa jossain tehtävässä, mutta sen sijaan suttupapereilla olisi ollut jotain pisteiden arvoista, paitsi että ne oli kirjoitettu kielellä, jota ei ole olemassakaan.

Hyvä esitystapa on yleensäkin matematiikassa tärkeä, mutta myös epätriviaali asia. Hyvä esitys voi tarkoittaa useita asioita. Yksityiskohtia on oltava riittävästi, mutta ei liikaa (kuten professori Jutila asian totesi ”yksityiskohdat häiritsevät asiantuntijoita”). Suorasa-

naista tekstiä on oltava matemaattisten kaavojen välissä, mutta hankala sellaistakin ratkaisua on lukea, jossa ei yhtään kaavaa ole, vaan kaikki on vain selitetty sanallisesti. Kansainvälisissä kilpailuissa tämä on erityisen kriittistä: niitä suomenkielisiä pitkiä selityksiä harvoin muut kuin omat joukkueenjohtajat ymmärtävät. Koordinoitavina sellaiset ratkaisut ovat hankalia. Usein myös matemaattinen täsmällisyys kärsii kaavatomuudesta.

Olin ehkä odottanut näkeväni EGMO:ssa paljon erilaisia ratkaisuja. Kuitenkin koordinoimani tehtävän luonne oli sellainen, että yhtä vaille jokainen toimiva ratkaisu noudatti samaa kaavaa. Vaihtoehtoisia ratkaisuja olisi ollut, mutta ei helposti tyrkällä olevaa. Tämä yksi ratkaisu puolestaan nojautui vähän epätavallisempaan konstruktion ja tulokseen. Ylioppilaspapereissa suurin osa toimivista ratkaisuista meni tiettyjen yleisten linjojen mukaan. Eniten hihkuin innosta lukiessani pitkän matematiikan tehtävää 12. Siinä piti selvittää tietyn neliön ja kolmion pinta-alojen suhde. Kolmio sattui olemaan suorakulmainen, mutta sitä tehtävässä ei kerrottu, jolloin osa ratkaisua oli tämän verifioiminen, paitsi jos keksi tavan, jossa sitä ei tarvittu. Tähän oli kaksi vaihtoehtoa: kosinilauseen käyttö, jolloin ratkaisu oli suoraviivainen ja toimiva, mutta ei erityisen elegantti. Toinen vaihtoehto oli Heronin kaavan käyttö, ja omaa silmääni tämä miellytti valtavasti: kaikki tarkistelut saattoi sivuuttaa. Koko tehtävä ratkesi oleellisesti ottaen yhdellä laskulla.

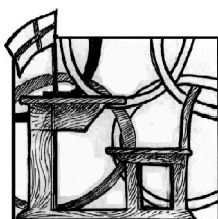
Seitsemäsluokkalaisten finaaaleissa tyypillisesti näkee valtavasti erilaisia ratkaisuja. Teoriaosaamista ei ole valtavasti, mikä heijastuu tehtävävalinnoissa, eli tehtävätkään eivät valtavasti teoriaa vaadi, mutta mones-

ta tehtävästä löytyy joku ongelmakomponentti. Standardiratkaisutapaa ei siis välttämättä ainakaan seitsemäsluokkalaisten silmissä ole, vaikka joissakin tehtävissä sellainen ehkä omiin silmiini olisikin. Viimeisenä tehtävänä Helsingin finaalissa oli geometriaa. Tehtävässä piti laskea tiettyjen kulmien koot. Kilpailukoulutuksen läpikäynyt (tai minkä tahansa tavallisen geometrian monisteen läpilukanut) aikuinen ryhtyy siinä vaiheessa laskemaan kulmia eksplisiittisesti kulma kerrallaan, ja kunhan homman tekee huolellisesti, pääsee oikeaan ratkaisuun. Osa seitsemäsluokkalaistakin toimi näin. Epätavallisempaa ratkaisutapana osa oli huomannut, että kuvassa oli kulmia, joita ikäänkuin siirrettiin kolmiosta toiseen, jolloin koko tehtävän ratkaisuksi riitti laskea ensin kolmen siirron kontribuutio (joka oli triviaali lasku), ja sen jälkeen jakaa tämä kolmella, jonka jälkeen yhden ja kahden siirron kontribuutiot tipahtivat suoraan käteen.

Harmillista tässä kaikessa on se, että usein standardiratkaisut on helpompi kirjoittaa kuin poikkeukselliset tai kekseliäät ratkaisut. Jotta tämä olisi vielä pahempaa, on kekseliäiden ratkaisujen esitystavan tyypillisesti oltava parempi, koska sama ratkaisu ei tule vastaan joka toisessa paperissa, jolloin jo pelkkä ratkaisun hahmottaminen voi olla haastavaa (saati sitten, jos siinä on pieni virhe). Mutta silloin, silloin kun saa eteensä epätavallisen ratkaisun, jonka esitys on kunnossa... Ne hetket tekevät kaikesta tarkastamisesta vaivan arvoista.

Mukavaa kesää!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailut 2017

Neea Palojärvi
Åbo Akademi

Helsingissä, Oulussa ja Turussa järjestettiin seitsemäsluokkalaisten alueelliset matematiikkakilpailut. Kilpailuiden tarkoituksena on kannustaa matematiikkaharrastuksen pariin. Tänä vuonna lähes 2500 oppilasta 76:sta eri koulusta ratkoi alkukilpailuiden monivalintatehtäviä.

Alkukilpailuiden parhaat kutsuttiin loppukilpailuun ja peruskoululaisten matematiikan kirjevalmennukseen. Valmennuksen tarkoituksena on tutustua matematiikkaan ja tarjota haasteita kilpamatematiikan parissa. Pidemmän tähtäimen tavoitteena on harjoitella kansainvälisiin matematiikkakilpailuihin, jopa matematiikkaolympialaisiin. Valmennus on kaikille peruskoululaisille avointa ja siihen pääsee mukaan ilmaisella kiinnostuksensa Esa Vesalaiselle osoitteeseen esavesalainen@gmail.com. Rohkeasti vain kaikki innokkaat mukaan!

Loppukilpailuissa vuorossa oli avoimiin tehtäviin vastaamista. Ratkottavana oli viisi tehtävää. Loppukilpailun kolmen kärki kussakin kaupungissa näytti seuraavalta:

Helsinki

1. Juho Arala, Mankkaan koulu
2. Chen Shen, Helsingin suomalainen yhteiskoulu
3. Into Almiola, Olarin koulu

Oulu

1. Eerika Koskelo, Kuulammen koulu
2. Iikka Holmi, Lumijoen peruskoulu

2. Jaakko Ojala, Haukiputaan koulu

Turku

1. Aarne Heikkilä, Rieskalähteen koulu
2. Eeli Heikkilä, Vasaramäen yläkoulu
2. Maria Leistevuo, Rieskalähteen koulu

Kaikki kilpailutehtävät ratkaisuihin löytyvät osoitteesta <http://matematiikkakilpailut.fi/seiskat/tehtavat.html>. Alla on muutamia esimerkkitehtäviä kilpailuista. Hauskoja ratkaisuhetkiä!

Alkukilpailutehtäviä

1. Laske $7 \cdot 6 - 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1$.
a) 16 b) 20 c) 24 d) 28 e) 32
2. Käytettävissä on 10 litran ämpäri ja 100 litran saavi. Mitkä seuraavista vesilitramääristä voidaan mitata näitä mittoja käyttämällä?
a) 1, 15 ja 20 b) 5 ja 10 c) 62 d) 20 ja 60 e) Kaikki vaihtoehdoista.
3. Aluksi jogurtin litrahinta on 1,00 euroa. Vuoden kuluessa suhdanteiden muuttuessa litrahinta nousee 10 %, kaksi vuotta myöhemmin litrahinta laskee 20 %, ja kolme vuotta myöhemmin litrahinta nousee 50 %. Kuinka paljon litra jogurtia tämän jälkeen maksaa?

- a) 0,77 euroa b) 1,32 euroa c) 1,13 euroa
d) 1,54 euroa e) 1,98 euroa

4. Olkoon N erään neliön pinta-ala. Olkoon K sellaisen suorakulmaisen kolmion pinta-ala, jonka toinen kateetti on yhtä pitkä kuin edellisen neliön sivu ja toinen kateetti kaksi kertaa neliön sivun mittainen. Mitä voidaan sanoa pinta-alojen N ja K keskinäisestä suuruusjärjestyksestä?

- a) $N = K$ b) $N > K$ c) $N < K$
d) Vastaus riippuu neliön sivun pituudesta.
e) Tehtävää ei voi ratkaista annetuin tiedoin.

5. Määritellään uusi laskutoimitus tavallisen yhteen- ja kertolaskun avulla: $a \oplus b = 3a - b$. Esimerkiksi $5 \oplus 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Laske

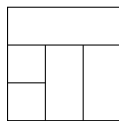
$$(1 \oplus 1) + (2 \oplus 2) + (3 \oplus 3).$$

- a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

6. Päiväkotiryhmässä on 21 lasta, joista kukin puhuu vähintään yhtä kieltä. Tiedetään, että viisi lasta puhuu ainakin suomea ja venäjää, kuusi lasta puhuu ainakin suomea ja ruotsia, ja kolme lapsista puhuu ainakin ruotsia ja venäjää. Lisäksi tiedetään, että kaksi lasta puhuu suomea, ruotsia ja venäjää, sekä että kukaan ei puhu muita kieliä. Miten moni lapsista puhuu täsmälleen yhtä kieltä?

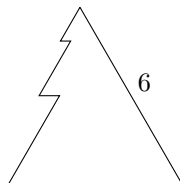
- a) tehtävä ei ratkea annetuilla tiedoilla
b) ei kukaan c) 10 d) 8 e) 11

7. Väritetään alla olevan kuvion alueet siten, että käytössä on sininen, punainen, keltainen ja vihreä väri ja mitkään kaksi vierekkäistä aluetta kuviossa eivät saa olla samanvärisiä. Monellako eri tavalla kuvion voi värittää?



- a) 84 b) 88 c) 92 d) 96 e) 100

8. Mikä on seuraavan kuvion piiri (eli reunan pituus)? Kaikki siinä esiintyvät kulmat ovat joko 60° tai 300° .



- a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 19

Loppukilpailutehtäviä

1. Viisi matemaatikkoa tapaa toisensa ravintolassa. Kukin heistä kättelee jokaisen muun kanssa täsmälleen kerran. Montako kättelyä tapahtuu yhteensä? Entä jos matemaatikoita on 100?

2. Pöydällä on rivissä kolme samannäköistä suklaakonvehdia, joissa on kaikissa eri täyte. Yksi konvehdeista sisältää pähkinää, yksi toffeeta ja yksi hilloa. Yksi seuraavista väitteistä on tosi ja kaksi muuta on valletta.

A: Ensimmäisen konvehdin sisällä on toffeeta.

B: Toisen konvehdin sisällä ei ole pähkinää.

C: Kolmannen konvehdin sisällä ei ole toffeeta.

Mitä toisen konvehdin sisällä on?

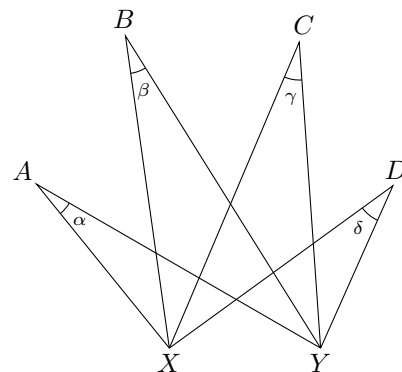
3. Alkuluku on positiivinen kokonaisluku, joka on suurempi kuin 1 ja jaollinen vain itsellään ja luvulla 1. Esimerkiksi luvut 2 ja 3 ovat alkulukuja, kun taas 6 ja 1 eivät ole. Onko luku 2017 kahden alkuluvun summa?

4. Olkoon $E(x)$ jokin lauseke, joka on määritelty kaikille kokonaisluvuille x ja jolle pätee

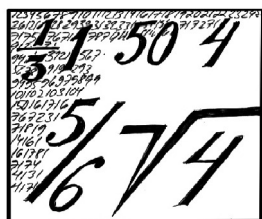
$$E(x) + 2 \cdot E(-x) = 3 \cdot x,$$

niin ikään kaikille kokonaisluvuille x . Laske $E(1)$. (Esim. jos $F(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$, niin $F(-x) = 2 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 3$ ja $F(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3$.)

5. Laske β ja γ , kun $\alpha = 21^\circ$, $\delta = 30^\circ$, $\angle BXA = \angle CXB = \angle DXC$ ja $\angle BYA = \angle CYB = \angle DYC$.



Kilpailun järjestivät yhteistyönä Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaos, Summamutikka-luokka, OuLUMA-keskus, Åbo Akademi sekä Helsingin, Oulun ja Turun yliopistot.



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset kilpailijoiden silmin

Pinja Pessi ja Essi Vilhonen

Lähdimme kohti Zürichiä torstai-iltapäivällä 6.4. Paikallisella lentokentällä meitä odotti oppaamme, joka oli myös Ukrainan joukkueen opas. Matkustimme oppaan kanssa junalla hostellille, missä jaoimme huoneen luxemburgilaisten kanssa.

Perjantaina ohjelmassa oli vanhassa kaupungissa kiertelyä pieniä tehtäviä ratkoen ja muihin kilpailijoihin tutustuen. Illalla ETH-yliopistolla pidettiin avajaissemonia, jossa saimme kuulla muun muassa perinteistä sveitsiläistä musiikkia ja innostavia puheita.

Neljä ja puoli tuntia kestäneet kokeet pidettiin kahtena päivänä, ja niiden jälkeen järjestettiin mukavaa ja liikunnallistakin ohjelmaa. Lauantaina tarjolla oli erilaisia sisä- ja ulkopelejä. Sunnuntaina vaelsimme Zürichin ylle kohoavalle Uetlibergille nauttien lämpimästä säästä ja hienoista maisemista, minkä jälkeen saimme valita tanssituntien ja IMOsta kertovan elokuvan välillä.

Kokeiden jälkeen oli aikaa tutustua kaupunkiin lisää. Maanantaina kävimme veneretkellä Zürich-järvellä sekä paikallisessa eläintarhassa ihmettelemässä muiden muassa intiannorsuja ja kameleontteja. Illalla majapaikassamme järjestettiin paneelikeskustelu, jossa matematiikan parissa uraa tehneet naiset kertoivat kokemuksistaan.

Tiistaina matkasimme Rigi-vuorelle, jonka menimme ylös vanhalla ratasjunalla. Maisemien katselun kannalta epäonnekasta oli tosin hyvin sumuinen ja koleahko

sää. Iltapäivällä vuorossa oli vielä arvokas päättäjäissemonia ja illallinen Zürichin yliopistolla. Haastava matematiikka, mukavat ihmiset ja hienot tapahtumat tekivät EGMO-matkastamme unohtumattoman viikon.

Tehtävät

Tehtävien käännökset englannista on laatinut joukkueenjohtaja Neea Palojarvi.

Tehtävä 1. Olkoon $ABCD$ konvekssi nelikulmio, jolle $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ja $\angle ABC > \angle CDA$. Olkoot Q ja R janojen BC ja CD pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora QR leikkaa suorat AB ja AD pisteissä P ja S , tässä järjestyksessä. Lisäksi $PQ = RS$. Olkoon janan BD keskipiste M ja janan QR keskipiste N . Osoita, että pisteet M , N , A ja C ovat samalla ympyrällä.

Tehtävä 2. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku k , jota kohti on olemassa positiivisten kokonaislukujen $\mathbb{Z}_{>0}$ k -värin väritys ja funktio $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$, joka toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:

- (i) Kaikille positiivisille kokonaisluvuille m, n , jotka ovat samanväriset, pätee $f(m + n) = f(m) + f(n)$.
- (ii) On olemassa positiiviset kokonaisluvut m, n , joille $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$.

Joukon $\mathbb{Z}_{>0}$ k -värin värityksessä jokainen kokonaisluku väritetään täsmälleen yhdellä k :sta väristä. Positiiviset kokonaisluvut m, n eivät ole välttämättä erisuuret kummassakaan ehdoista (i) tai (ii).

Tehtävä 3. Tasossa on 2017 suoraa, joista mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Turbo-etana istuu täsmälleen yhdellä näistä suorista ja alkaa liukua suoraa pitkin seuraavalla tavalla: se liikkuu annetulla suoralla, kunnes se saavuttaa kahden suoran leikkauspisteen. Leikkauspisteessä se päättää jatkaa matkaa toiselle suoralle kääntymällä oikealle tai vasemmalle ja vaihtaa kääntösuuntaansa jokaisessa leikkauspisteessä. Se voi vaihtaa suuntaansa vain leikkauspisteissä. Voiko olla olemassa jana, jonka se kulkee molempiin suuntiin matkansa aikana?

Tehtävä 4. Olkoon $n \geq 1$ kokonaisluku, ja olkoot $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ positiivisia kokonaislukuja. $t_n + 1$ ihmisen ryhmässä pelataan jokin määrä shakkipelejä. Kaksi henkilöä voivat pelata toisiaan vastaan enintään kerran. Osoita, että seuraavat kaksi ehtoa voivat olla voimassa samanaikaisesti:

- (i) Jokainen on pelannut jonkin luvuista $t_1, t_2, \dots, t_n$ määrän pelejä.
- (ii) Jokaista indeksia i , $1 \leq i \leq n$, kohti joku on pelannut täsmälleen t_i shakkipeliä.

Tehtävä 5. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku. Ei välttämättä erisuurten positiivisten kokonaislukujen n -tupla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ on kallis, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku k , jolla

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

- a) Etsi kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kallis n -tupla.
- b) Osoita, että jokaista paritonta positiivista kokonaislukua m kohti on olemassa kokonaisluku $n \geq 2$, jolla m kuuluu kalliiseen n -tuplaan.

Yhtälön vasemmalla puolella on täsmälleen n tekijää.

Tehtävä 6. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jonka mitkään kaksi sivua eivät ole yhtä pitkät. Kolmion ABC painopisteen G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen O peilaukset sivujen BC, CA, AB suhteen ovat G_1, G_2, G_3 ja O_1, O_2, O_3 , vastaavasti. Osoita, että kolmioiden $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A$ ja ABC ympäri piirretyillä ympyröillä on yhteinen piste.

Kolmion painopiste on sen kolmen mediaanin leikkauspiste. Mediaani on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen.

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

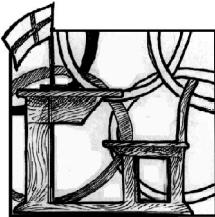
on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

Maapallo
Suomen historia
Terveys ja ravinto
Talous
Todennäköisyys
Matematiikka ja taide (2 tasoa)
Mittaaminen (2 tasoa)
Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyyntö voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen@at.yahoo.piste.com



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset koordinaattorin silmin

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

”Sinulla on sitten tehtävä 1,” minulle kerrottiin ja ojennettiin käteen Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävät. Katsoin tehtäväpaperia, ja järkytyin. Tehtävän yksi kohdalla oli seuraava teksti (englanniksi kirjoitettuna – suomennos on joukkueenjohtaja Neea Palojärven myöhemmin samana päivänä kilpailutilannetta varten tekemä):

Olkoon $ABCD$ konvekksi nelikulmio, jolle $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ja $\angle ABC > \angle CDA$. Olkoot Q ja R janojen BC ja CD pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora QR leikkaa suorat AB ja AD pisteissä P ja S , tässä järjestyksessä. Lisäksi $PQ = RS$. Olkoon janan BD keskipiste M ja janan QR keskipiste N . Osoita, että pisteet M , N , A ja C ovat samalla ympyrällä.

En ole koskaan ollut hyvä geometriassa. Kilpailuajikoinani käytin aikaa lukuteoriaan ja algebraan. Suomen joukkueelle olen opettanut lähinnä lukuteoriaa ja algebraa. Olin toivonut pääseväni koordinoimaan lukuteoriaa tai algebraa, mutta niin olivat lähes kaikki muutkin. Päädyin siis geometriaan.

Tätä tarinaa voisin jatkaa tästä pisteestä kahteen suuntaan, ensinnäkin siihen mitä tämän jälkeen tapahtui, ja toisaalta siihen, miten ylipäätään päädyin Zürichin Irchelin kampukselle geometrian tehtävä kätösissäni. Aloitetaan siis alusta, eli tammikuusta.

Kuinka koordinaattoriksi päädyin ja mitä ihmettä koordinaattorit oikein tekevät

Tammikuun puolenvälin tietämällä sähköpostiini ilmestyi viesti yhdeltä tämän vuoden Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten pääjärjestäjistä, ja hän kysyi halukkuuttani ryhtyä koordinaattoriksi kilpailuun. Koska kyseessä oli omalla asteikollani suuri kunnia ja mielenkiintoinen tehtävä, oli ehdotus tietenkin hyväksyttävä.

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin tänä vuonna kuudennen kerran, ja mukana oli jo 43 maata. Koska kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa on kovin vähän naispuolisia osallistujia, on tyttöjen olympialaisten tarkoitus kannustaa tyttöjä ja näyttää heille, että he eivät ole yksin kilpaillessaan matematiikassa.

Koordinaattorit ovat vastuussa tehtävien arvostelusta yhdessä joukkueenjohtajien kanssa. Kilpailun jälkeen ratkaisupaperit monistetaan, kopiot annetaan koordinaattoreille, alkuperäiset joukkueenjohtajille. Jokaisella tehtävällä on oma koordinaattorijoukkonsa, eli yksi koordinaattori lukee yleisesti ottaen vain yhden tehtävän ratkaisuja. Tälle pienelle koordinaattorijoukolle muodostuu siis hyvä käsitys siitä, mitä kaikkea yksittäisessä tehtävässä voi tapahtua, ja mikä on oikeudenmukainen tapa arvostella tehtävä. Joukkueenjohtajat

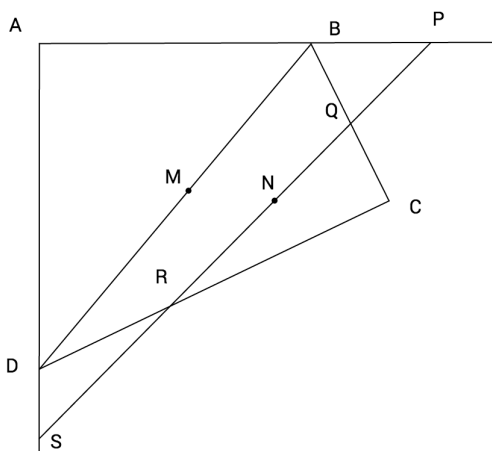
ja varajohtajat ovat puolestaan vastuussa oman maansa kaikista ratkaisuista. Koordinaattorit ja joukkueenjohtajat arvostelevat tahoillaan tehtävät, ja sitten pisteistä keskustellaan. Keskustelun tarkoitus on toisaalta varmistaa, että kaikki maat on arvosteltu samoin kriteerein, ja toisaalta varmistaa, että koordinaattorit ovat ymmärtäneet kaiken kriittisen. Suuri osa kilpailijoista kirjoittaa omalla kielellään, jolloin koordinaattoreilla voi olla enemmän tai vähemmän mahdoton työ yrittää ymmärtää jokainen ratkaisu pilkulleen.

Olin aina pohtinut, miten koordinaattorit suuriin kansainvälisiin kilpailuihin valitaan, ja tämä jäi minulle yhä mysteeriksi. Kohtuullisen paljon koordinaattoreita haalitaan lähiseudulta kasaan. Tämä on monessa suhteessa näppärää ja varmasti myös alentaa kilpailun järjestämisen kustannuksia. Sitä en sen sijaan tiedä, miten päätetään keille kauempana oleville lähetetään kutsu. Hommasta ei saa palkkaa (toki Sveitsissä tietenkin suklaalevyn kiitokseksi), mutta lennot maksetaan ja ruokailut ja majoitus hoidetaan. Tällä kertaa koordinaattorit majoitettiin hyvin tasokkaaseen Swisotelin Oerlikonin rautatieaseman viereen. Myös joukkueenjohtajat majoitettiin samaan paikkaan.

Pisteytysjärjestelmän luominen

Saatuani tiedon, että koordinoi geometriaa, ensimmäinen tehtävä oli yrittää pohtia mahdollisimman monta erilaista ratkaisua alussa kuvattuun ongelmaan, jotta jokaiselle erilaiselle ratkaisutavalle voitaisiin kehittää pisteytysjärjestelmä. Kovin paljon erilaisia variantteja ei ennen kilpailua tullut: Tietyt identiteetit saattoi todistaa vähän eri tavoin, mutta oleellisia eroja ei ollut. Myös joukkueenjohtajat pohtivat toisaalta samoja tehtäviä, neuvottelivat niistä, käänsivät niitä omille kielilleen ja pohtivat ratkaisuja. Heiltä tulikin täysin erilainen ratkaisuehdotus tehtäväämme, vain kymmenisen minuuttia ennen kuin meidän piti esittää lopullinen pisteytysjärjestelmä.

Tyypillinen ratkaisu tehtävään etenee seuraavasti: Piirretään ensin kuva:



Väite on siis, että pisteet A , M , N ja C ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalausetta käyttäen tämän väitteen voi muuttaa muotoon, että $\angle AMC = \angle ANC$ (jos tämä väitteen uudelleenmuotoilu ei ole lukijalle ihan peruskauraa, kannattanee se paperilla läpi pohtia).

Kehäkulmalausetta tai suorakulmaisten kolmioiden ominaisuuksia tai yhdenmuotoisia kolmioita käyttäen todistetaan seuraavaksi, että

$$\angle AMC = 2\angle ADC$$

ja vastaavasti toiselle kulmalle

$$\angle ANC = 2\angle CRQ + 2\angle PSA.$$

Tämän jälkeen pitääkin vain ristikulmia käyttäen todeta, että $\angle CRQ = \angle SRD$, kolmion kulmien summan avulla huomata, että $\angle CRQ + \angle PSA = 180^\circ - \angle CDS$, ja viimeistellä todistus havainnolla $180^\circ - \angle CDS = \angle CDA$.

Todistuksessa on siis jossain mielessä kaksi osaa: yksinkertaisten kulmaidentiteettien käyttö, jotta kulmat $\angle AMC$ ja $\angle ANC$ saadaan esitettyä yhteistyökykyisessä muodossa, ja tämän jälkeen näiden muotoilujen yhtäsuuriksi osoittaminen. Kun pisteytysjärjestelmää luotiin, oli lisäksi myös huomioitava, että kyseessä on ensimmäinen tehtävä kilpailussa, jolloin olisi kiva voida antaa mahdollisimman monelle kilpailijalle edes yksi piste.

Päädymme seuraavaan pisteytysjärjestelmään:

PROBLEM 1, DAY 1

MARKING SCHEME

INCOMPLETE SOLUTIONS

The points for statements within boxes are not additive.

N is the midpoint of PS and/or M is the center of the circle around $ABCD$	1pt
Applying the inscribed angle relations to the triangles QRC and/or PSA and/or equivalent relation using isosceles triangles	1pt
Applying the inscribed angle relations to $ABCD$ and/or equivalent relation using isosceles triangles	1pt

Alternative marking scheme:

doing the shrinking	1pt
using inscribed angle	1pt
using parallel lines	1pt

At most 3pt for incomplete solutions.

COMPLETE SOLUTIONS

Complete solutions are awarded 7pt. We do not deduct points for

- not stating explicitly that N is the midpoint of PS
- not stating explicitly that M is the midpoint of the circle around $ABCD$
- minor typos

Up to 2pt can be deducted from full solutions for small mistakes unless explicitly listed above in the list of no deductions.

COMPUTATIONAL SOLUTIONS

Up to 3pt for incomplete solutions for explicitly stating the geometrical relations. See the general marking scheme.

No partial points for computations that are not complete.

Pointtina on siis se, että jos ratkaisu on kesken, ei siitä voi saada kuin kolme pistettä maksimissaan. Tämä on tyypillistä kilpailuissa: jos ratkaisu ei ole loppuun asti vedetty, siitä kärsii kunnolla. Logiikkana tässä on se, että tyypillisesti ratkaisun loppupuolella vaaditaan jokin hyvin kriittinen oivallus, joka itsessään sisältää valtavan osan ratkaisusta. Pikkuvirheet ovat oma lukunsa, eli niistä emme luonnollisestikaan kokeneet tarpeelliseksi paljonkaan pisteitä viedä.

Pisteet jakautuivat niin, että luonnollinen ensimmäinen havainto on yhden pisteen arvoinen: Piste N on janan PS keskipiste tai piste M on nelikulmion $ABCD$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Molemmista ei voi pistettä saada. Havainto on hyvin helppo tehdä, ja äärimmäisen kriittinen ratkaisulle. Muut pisteet on jaossa kriittisistä kulmaidentiteeteistä, eli esimerkiksi siitä, että käyttää kehäkulmalausesta todistaakseen $\angle AMC = 2\angle ADC$ ja $\angle ANC = 2\angle CRQ + 2\angle PSA$.

Loppuosa ratkaisua on näiden asioiden yhteenvetäminen, eli käytännössä todistus, että nämä kulmat todella ovat yhtä suuria.

Vaihtoehtoinen pisteytysjärjestelmä koskee viime tipassa joukkueenjohtajilta saamaamme ratkaisuehdotusta, jossa tehtiin sopiva kutistus, käytettiin kehäkulmaa, ja yhdensuuntaisia suoria, ja käytännössä saatiin tuulos näillä.

Laskennalliset ratkaisut viittaavat analyyttiseen geometriaan, vaikkapa kompleksiluvuilla tehtävän ratkaisemiseen. Standardi yleensä on, että laskuista on joko saatava geometrisia tärkeitä välituloksia irti, tai laskut vietyä loppuun ja tehtävä todistetuksi ennen kuin pisteitä saa, eli pelkkä kahdeksan sivua innokasta koordinaattilaskentaa ei tuota pisteitä.

Pisteistä keskusteleminen

Lopulta päästiin keskustelemaan pisteistä joukkueenjohtajien kanssa. Jokaisella maalla oli oma slottinsa,

eli oma kohtansa aikataulussa, jolloin heidän piti kustakin tehtävästä tulla keskustelemaan. Me koordinaattorit olimme puolestamme jakautuneet ensin tehtäväkohtaisesti ja tehtävien sisällä vielä eri pöytiin. Jaoin pöydän Ukrainasta alun perin kotoisin olevan saksalaistuneen matematiikan opettajan kanssa. Hänellä oli pitkä kokemus koordinoinnista, hyvä taju geometriasta, sekä omaani hyvin täydentävä kielitaito: itäeurooppalaiset kielet sujuivat häneltä loistavasti. Suurin osa pisteneuvotteluista meni sujuvasti ja nopeasti. Joukkueenjohtajat olivat selvästi sisäistäneet pisteytysjärjestelmän, ja ilmeisestikin pitivät sitä reiluna, sillä tyytyväisiltä he vaikuttivat. Virallisesti joukkueenjohtajat olivat kokouksessa kaikkien tehtävien pisteytysjärjestelmät hyväksyneet, mutta käytännössä olen joukkueenjohtajana usein kokenut, etten ole täysin tyytyväinen järjestelmään ollut, tai että käytännön tilanteessa todellisiin ratkaisuihin sovellettuna järjestelmä on tuntunut kovin erilaiselta kuin silloin, kun sitä on alun perin esitelty.

Viimeinen koordinoitavamme oli hieman haastavampi: ratkaisu oli äärimmäisen epätavallinen, sisälsi valtavasti tekstiä, hyvin vähän kaavoja, ja kieli oli sellainen, jota kumpikaan meistä ei ymmärtänyt. Kielen hankaluus ei sinänsä ole paha juttu, koska aina voi pyytää joukkueenjohtajaa kääntämään, mutta se vaikuttaa siihen, miten hyvin voi valmistautua. Kyseisessä ratkaisussa konstruointiin uusi kolmio, jolloin väite muuttui muotoon, että pisteet sijaitsevat sen kolmion yhdeksän pisteen ympyrällä. Yhtä pistettä vaille väite oli itse asiassa selvä kolmion konstruktion jälkeen. Tämäkin ratkaisu saatiin käsiteltyä, jonka jälkeen tehtävämme koordinaattoreilla alkoi hetkellinen vapaus ennen kilpailun viimeistä kokousta, jossa joukkueenjohtajat päättivät mitalirajat.

Kaiken kaikkiaan kilpailu koordinaattorina oli oikein miellyttävä kokemus, mutta tietyn kieroutuneen mielenlaadun se vaatii: jos ei nauti siitä, kun saa kasan ratkaisuja luettavaksi mitä eksoottisimmilla kielillä, niin kilpailumatkasta voi tulla aika kurja.

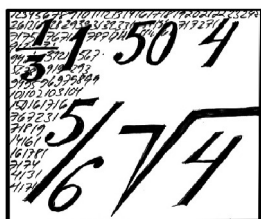
Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html>

Sekä sisältöä että tekniikkaa koskevat kokemukset ovat meille arvokkaita ja kaikenlaiset parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita. Palautetta voi lähettää osoitteeseen

toimitus at matematiikkalehtisolmu piste fi



Vaihtelevia summia

Pekka Alestalo

Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
matematiikan ja systeemianalyysin laitos
pekka.alestalo@aalto.fi

Summaa sarja

Käsittelin aikaisemmassa kirjoituksessani [1] harmonisen sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

hajaantumista, johon liittyy myös viite [2]. Tässä jatko-osassa tutkitaan, mitä tapahtuu, kun joihinkin sarjan termeihin vaihdetaan miinus-merkit ja termien järjestyksestä vaihdellaan.

Vaikka monille sarjoille voidaan tehdä aivan samoja operaatioita kuin äärellisille summille, niin toisinaan täytyy olla valppaana. Esimerkiksi yksi helpoimmista "0 = 1-todistuksista" näyttää seuraavalta:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots \\ &= 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tämä kyseenalainen päättely liittyy myös siihen, mitä sarjan suppeneminen oikeastaan tarkoittaa. Ainakaan se ei tarkoita sitä, että "kaikki sarjan termit lasketaan kerralla yhteen", koska tämä ei ole käytännössä mahdollista. Asiaa täytyykin tutkia raja-arvona äärellisten

osasummien kautta. Jokaisesta sarjasta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

voidaan muodostaa sen osasummien jono (s_n) laske-
malla yhteen n ensimmäistä termiä:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

Sanotaan, että sarja (1) *suppenee*, jos osasummien jono on (äärellinen) raja-arvo s :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Tämä luku s on sarjan (1) *summa*.

Tässä yhteydessä ei ole syytä käydä läpi kaikkia sarjojen ominaisuuksia ja laskusääntöjä, koska ne löytyvät kaikista aiheesta käsittelevistä kirjoista (kuten [3] ja [4]) eikä niitä juurikaan tarvita tässä kirjoituksessa. Totean kuitenkin, että 0 = 1-laskun ongelma piilee toisen ja kolmannen rivin yhtäsuuruudessa, jota ei voi

perustella sarjojen laskusäännöillä, sillä taustalla oleva geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

suhdelukuna $q = -1$ hajaantuu. Sen sijaan suppenevaan sarjaan voidaan lisätä ylimääräisiä sulkuja mihin tahansa kohtiin ilman, että sarjan summa muuttuu¹.

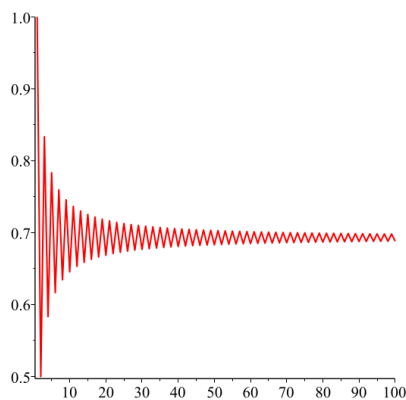
Vuorottelevasti harmoninen

Harmonisesta sarjasta saadaan *vuorotteleva*, kun joka toisen termin etumerkki vaihdetaan vastakkaiseksi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (2)$$

Perinteisistä syistä sarja alkaa positiivisella termillä $+1$; pelkkä $(-1)^k/k$ tuottaa tapauksessa $k = 1$ ensimmäiseksi termiksi -1 .

Toisin kuin tavallinen harmoninen sarja, vuorotteleva harmoninen sarja suppenee. Tämä tarkoittaa mm. sitä, ettei sarjan suppeneminen riipu pelkästään siitä, kuinka nopeasti sen yleinen termi lähestyy nollaa.



Sarjan 100 ensimmäistä osasummaa.

Suppeneminen näyttää hyvin uskottavalta yllä olevan kuvion perusteella, johon on piirretty sarjan 100 ensimmäistä osasummaa; havainnollisuuden vuoksi peräkkäiset pisteet on yhdistetty janoilla. Lisäksi kuvion perusteella sarjan summa näyttää olevan hieman alle 0,7. Myös intuitiivinen perustelu suppenemiselle on kuvion perusteella helppo keksiä: Sarjan termien etumerkkien vuorottelu aiheuttaa kuvaajan sahalaitaisuuden, ja koska jono $(1/k)$ on vähenevä ja lähestyy nollaa, kun $k \rightarrow \infty$, niin osasummien heilahtelu vaimenee ja niillä on raja-arvo. Tarkempi perustelu liittyy siihen, että parillisia indeksejä vastaavien osasummien jono (s_{2n}) on kasvava ja parittomia indeksejä vastaavien

osasummien jono (s_{2n-1}) vähenevä. Sivuutan kuitenkin nämä päättelyt², koska sarjan summakin voidaan laskea tarkasti alla esitetyllä tavalla!

Tehtävä 1. Perustele yllä mainitut ominaisuudet ja osoita, että sarja suppenee.

Kun geometrisen sarjan summakaavaan sijoitetaan suhdeluvuksi $q = -x$, niin se tulee muotoon

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x}.$$

Integroimalla yhtälön molemmat puolet välillä $0 \leq x \leq 1$ saadaan tuloksena vuorottelevan harmonisen sarjan summaksi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Päättely on kuitenkin hieman epäilyttävä, sillä vasemmalla puolella tehty *sarjan integroiminen termeittäin* pitäisi perustella tarkemmin; erityisesti sen vuoksi, ettei sarja edes suppene integroimisvälin toisessa päätepisteessä $x = 1$. Asia voidaan korjata integroimalla äärellisen geometrisen summan kaava ja tutkimalla sen raja-arvoa. Jätän sen harjoitustehtäväksi lukijalle.

Tehtävä 2. a) Millainen yhtälö saadaan, kun kaavan

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-x)^{n-1} &= \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \\ &= \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x} \end{aligned}$$

eri osat integroidaan välillä $0 \leq x \leq 1$?

b) Osoita, että

$$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx < \frac{1}{n+1}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

c) Perustele tarkasti a- ja b-kohtien avulla vuorottelevan harmonisen sarjan summa $\ln 2$.

Sekoitellaan termejä

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun vuorottelevan harmonisen sarjan termejä yhdistellään seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{10} &= \frac{1}{10}, \\ \frac{1}{7} - \frac{1}{14} &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

¹Hienosti sanottuna uudelleen sulutetun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon *osajono*, joten sillä on sama raja-arvo.

²Vastaava yleinen tulos on Leibnizin vuorottelevia sarjoja koskeva suppenemistesti.

jne. Tällöin kaikki parittoman nimittäjän termit häviävät sarjasta, mutta muotoa $-1/4, -1/8, -1/12, \dots$ olevat termit jäävät käyttämättä. Tulos voidaan tiivistää seuraavaan kaavaan:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) \\ = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Systemaattisemmin selitettynä sarjan (2) termien järjestystä on muutettu niin, että yhden positiivisen termin jälkeen vähennetään seuraavat kaksi negatiivista termiä, joita ei vielä ole käytetty. Sen jälkeen sama toistetaan aloittamalla ensimmäisestä positiivisesta termistä, jota ei ole aikaisemmin käytetty. Kokeilemalla huomataan, että yleinen muoto kolmelle peräkkäiselle termille on

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k},$$

kun $k = 1, 2, 3, \dots$. Tätä ryhmittelyä toistetaan loputomiin, jolloin tuloksena on kaava

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Mitä tämä tarkoittaa? Yksinkertaisesti sitä, että yllä kuvatulla uudelleenjärjestelyllä vuorottelevan harmonisen sarjan summa puolittuu, vaikka kokonaisuudessa ovat mukana täsmälleen samat summattavat termit³!

Saatua tulosta voidaan käyttää myös toisenlaiseen uudelleenjärjestelyyn. Koska yllä olevan perusteella

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln 2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \\ &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \dots, \end{aligned}$$

niin laskemalla tämä yhteen⁴ vuorottelevan harmonisen sarjan (2) kanssa saadaan

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \ln 2 &= (1 + 0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + 0\right) + \\ &\quad \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + 0\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

Tässä siis kahden positiivisen termin jälkeen otetaan seuraava aikaisemmin käyttämätön negatiivinen termi jne.

Todetaan vielä lopuksi, että toistamalla sääntöä ”yksi positiivinen ja neljä seuraavaa negatiivista” saadaan uudelleenjärjestely, jonka summa on 0; ts.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{8k-6} - \frac{1}{8k-4} - \frac{1}{8k-2} - \frac{1}{8k} \right) = 0.$$

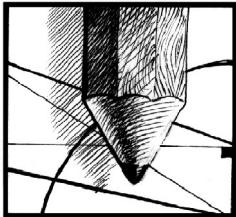
Tämän voi perustella tutkimalla erikseen kunkin viiden summan asymptootista käyttäytymistä Eulerin ja Mascheronin vakion (viite [5]) avulla, mutta jääköön se (huomattavasti edellisiä hankalammaksi) harjoitustekäväksi. Toinen systemaattisempi tapa on käyttää ns. residylaskentaa viitteen [6] kohdan Example 2 tapaan, mutta tämä menee jo kokonaan lukiomatematiikan ulkopuolelle.

Viitteet

- [1] Pekka Alestalo: Harmoninen sarja. Matematiikkalehti Solmu 3/2014, s. 10–11.
<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2014/3/harmsarja.pdf>
- [2] Anne-Maria Ernvall-Hytönen: Summien arviointi integraalien avulla. Matematiikkalehti Solmu 1/2015, s. 16–20.
http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/1/summien_arviointi_integraaleilla.pdf
- [3] P. Harjulehto, R. Klén, M. Koskenoja: Analyysia reaali-luvuilla. Korjattu 3. painos. Unigrafia, 2014.
- [4] Juhani Pitkäranta: Calculus Fennicus.
<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/calculus-fennicus>
- [5] https://fi.wikipedia.org/wiki/Eulerin-Mascheronin_vakio
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem

³Yleisemmin voidaan osoittaa, että kun kiinnitetään ensin reaali-luku r , niin vuorottelevan harmonisen sarjan termit voidaan järjestää niin, että uusi sarja suppenee kohti lukua r . Tämä on erikoistapaus ns. Riemannin uudelleenjärjestelylauseesta, joka pätee monille muillekin sarjoille.

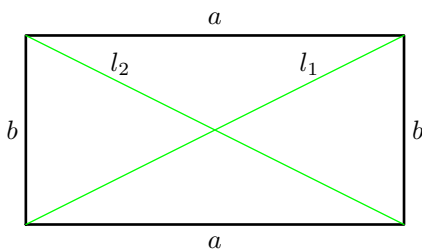
⁴Nollien lisääminen ei vaikuta sarjan summaan, mutta niiden avulla yhteenlaskettavat termit osuvat kohdalleen.



Vertikaalisesti suunnikkaasta

Lehtori K.

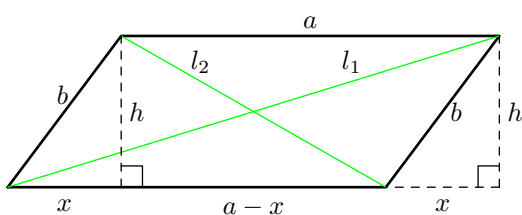
Suorakulmiossa lävistäjien neliöiden summa on sivujen



neliöiden summa:

$$l_1^2 + l_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Luonnollisesti lävistäjät ovat yhtä pitkät ja väite seuraa välittömästi Pythagoraan lauseesta. Mitä tapahtuu, jos suorakulmio tönäistään lyttyyn suunnikkaaksi? Sivujen pituudet tietenkin säilyvät ja vastakkaiset sivut pysyvät yhdensuuntaisina. Toinen lävistäjä kasvaa ja toinen lyhenee. Muuttuuko niiden neliöiden summa? Pythagoraan lausetta soveltaen saamme kuvion



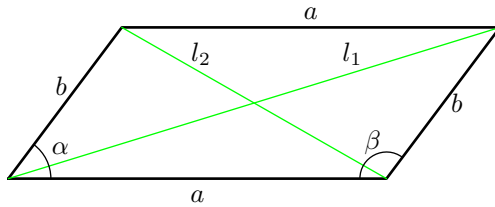
merkinnöillä

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= (a+x)^2 + h^2 + (a-x)^2 + h^2 \\ &= a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + 2h^2 \\ &= 2a^2 + 2x^2 + 2h^2 \\ &= 2a^2 + 2(x^2 + h^2) = 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

Summa pysyy samana, vaikka suorakulmio voidaan äärettömän monella eri tavalla litistää suunnikkaaksi. Olemme siis todistaneet lauseen: *Suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on yhtäsuuri kuin sen sivujen neliöiden summa.* Tällaista matematiikkaa vanha lukion lehtori toivoisi yläkoulussa käsiteltävän. Lauseella ei sinänsä ole mitään käyttöä koulumatematiikassa, mutta se on mainio esimerkki eksaktista matemaattisesta totuudesta. Se on mielipiteistä riippumaton fakta, jota ei voi kumota ”vaihtoehtoisia totuuksia” twiittaillemalla. Matemaattiset totuudet ovat pysyviä. Vaikka koulumatematiikassa ei väitteitä yleensä voi sitovasti todistaa, olisi kuitenkin peruskoulun opetuksessa oltava tällaisia esimerkkejä, jotta eksaktiin ajatteluun kykenevät oppilaat saisivat oikean käsityksen matematiikan ainutlaatuisesta, muista oppiaineista poikkeavasta luonteesta. Pelkkä laskeminen ei kehitä ajattelua.

Katsomme seuraavaksi, miten suunnikaslause todistetaan lukion matematiikassa. Geometrian kurssilla laajennetaan trigonometrinen funktioiden määrittelyalue käsittämään myös tylpät kulmat, mikä on edellytyksenä sini- ja kosinilauseiden käsittelylle. Tuolloin todetaan mm. että suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastalukuja. Kosinilause sopiikin täydellisesti suun-

nikaslauseen todistamiseen, sillä suunnikkaan vierekkäiset kulmat ovat toistensa supplementtikulmia. Kuvion



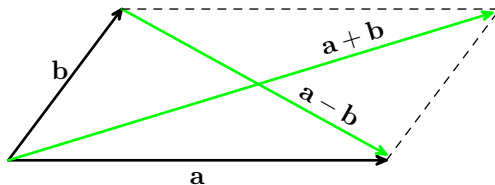
merkinnöillä saamme

$$l_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad \text{ja} \\ l_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

mistä yhteenlaskemalla seuraa

$$l_1^2 + l_2^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cos \alpha - 2ab \cos \beta \\ = 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos \alpha + \cos \beta) \\ = 2a^2 + 2b^2.$$

Mielenkiintoisin suunnikaslauseen todistus nähdään kuitenkin lukion pitkän matematiikan vektorikurssilla. Siellä vektoreita käsitellään kaksi- tai kolmiulotteisessa avaruudessa koordinaatistoa käyttäen tai ilman koordinaatistoa. Vektorit, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät suunnikkaan



jonka lävistäjinä ovat vektorien summa ja erotus.

Vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaaritulo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma$, missä γ on vektorien välinen kulma. Sen ominaisuuksia

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad (1)$$

$$\mathbf{a} \cdot t\mathbf{b} = t\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (3)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2, \quad (5)$$

jotka pätevät kaikille vektoreille $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sekä kaikille $t \in \mathbb{R}$, käyttäen saamme lävistäjien neliöt

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2,$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2,$$

ja niiden summan

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2.$$

Tarkkaavainen lukija havaitsee, että tässä tarvittiin ainoastaan vektorien laskutoimituksia ja skalaaritulon ominaisuuksia. Emme missään kohdassa vedonneet siihen, että vektorit olisivat kaksi- tai kolmiulotteisen avaruuden suunnattuja janoja. Siten $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ saavat olla mitä tahansa olioita, joille on määritelty yhteenlasku, reaaliluvulla kertominen ja skalaaritulo niin, että vektoriopin kurssilla opitut laskusäännöt ja skalaaritulon ominaisuudet (1)–(5) ovat voimassa. Katsomme esimerkin eräästä tällaisesta oliojoukosta. Tutkitaan päättymättömiä reaalilukujonoja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, joille sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

suppenee. Tällaisten lukujonojen joukkoa merkitään symbolilla l^2 ; nimen etymologia selviää matematiikasta kiinnostuneille yliopisto-opinnoissa. Jos $\mathbf{x} \in l^2$ ja $\mathbf{y} \in l^2$ ja $t \in \mathbb{R}$, niin määritellään

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots) \quad \text{ja} \\ t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, tx_3, \dots).$$

Voidaan todistaa, että sarjat

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (tx_i)^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

suppenevat, joten $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in l^2$ ja $t\mathbf{x} \in l^2$. Todistukset ovat osin varsin syvällistä yliopistomatematiikkaa, joten niitä ei voi esittää tässä. Lisäksi voidaan todistaa, että summa ja reaaliluvulla kertominen noudattavat lukiossa opittuja vektorien laskusääntöjä ja

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

toteuttaa skalaaritulon ominaisuudet (1)–(4). Voimme siis hyvällä syyllä kutsua näitä lukujonoja vektoreiksi. Nollavektorikin joukosta l^2 löytyy; se on pelkistä nollista muodostuva jono. Vektorin $\mathbf{x}$ pituus määritellään skalaaritulon avulla:

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2.$$

Joukko l^2 on rakenteeltaan analoginen xy -tason vektorijoukon kanssa. Kaksiulotteisessa xy -tasossa voidaan kantavektoreiksi valita vektorit $\mathbf{i} = (1, 0)$ ja $\mathbf{j} = (0, 1)$, ja vektori $\mathbf{a} = (x, y)$ voidaan esittää niiden lineaarikombinaationa:

$$\mathbf{a} = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Joukossa l^2 voimme vastaavalla tavalla valita kantavektoreiksi yksikkövektorit

$$\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots),$$

missä $i = 1, 2, 3, \dots$. Vektori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ voidaan esittää kantavektorien lineaarikombinaationa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots) \\ &= x_1(1, 0, 0, \dots) + x_2(0, 1, 0, \dots) + \dots \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_i\mathbf{e}_i + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i\mathbf{e}_i.\end{aligned}$$

Selvästi $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, kun $i \neq j$, joten voimme ajatella, että vektorit $\mathbf{e}_i$ ovat pareittain toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kantavektorien lukumäärä ilmoittaa vektorijoukon dimension. Täten xy -taso on kaksiulotteinen, mikä ei ole yllätys. Sen sijaan l^2 on ääretönulotteinen vektorijoukko, mikä ehkä tuntuu hieman eksoottiselta.

Viitteessä [1] mainitut ominaisuudet omaavaa epätyhjää joukkoa sanotaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita vektoreiksi. Joukon l^2 vektoreilla on nämä ominaisuudet, joten se on vektoriavaruus. Jos vektoreille on määritelty ominaisuudet (1)–(4) toteuttava skalaaritulo, niin vektoriavaruutta kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*. Sisätulo on skalaaritulon vaihtoehtoinen nimitys. Jos sisätuloavaruus toteuttaa ns. *täydellisyys ehdon*, jonka sisältöä ei tässä kirjoituksessa voi selittää, niin sitä kutsutaan *Hilbertin¹ avaruudeksi*. Voidaan osoittaa, että l^2 toteuttaa myös täydellisyys ehdon, joten se on Hilbertin avaruus. On olemassa ääretön määrä oliojoukkoja, joiden alkioille voidaan määritellä Hilbertin avaruuden aksioomat toteuttavat laskulait. Hilbertin avaruus on siis yleisnimitys kaikille tuollaisille oliojoukoille, se on abstraktiotasoltaan niitä korkeampi matemaattinen abstraktio. Pelkästään vektorien laskutoimituksia, sisätulon ominaisuuksia ja täydellisyysominaisuutta käyttäen voidaan johtaa yleisiä Hilbertin avaruuden ominaisuuksia, joilla on omat ominaisuudet

ilmenemismuotonsa kussakin Hilbertin avaruuden aksioomat toteuttavassa joukossa. Myös suunnikaslause on voimassa ja se osoittautuukin varsin tärkeäksi työkaluksi Hilbertin avaruuden ominaisuuksien selvittämisessä. Siksi tällaista korkeamman matematiikan helmeä ei kannattaisi jättää käsittelemättä peruskoulun matematiikassa, kun sen todistamiseksi on olemassa kaikki valmiudet. Hilbertin avaruuksien sovelluksista mainittakoon kvanttimekaniikan ilmiöiden matemaattinen mallintaminen, ks. [2], ja signaalinkäsittelytekniikan tärkein matemaattinen työkalu, Fourier²-analyysi, ks. [3]. Näin siis suunnikaslause, paitsi että se antoi aiheen tähän kirjoitukseen, mahdollisti myös osaltaan sen kirjoittamisen puolijohdetekniikkaan perustuvalla läppärillä ja lähettämisen langattomasti Solmun toimituksen arvioitavaksi. Mainittakoon lopuksi, että Hilbert suoritti tähän alaan liittyvät tutkimuksensa aikana, jolloin kvanttifysiikka oli vasta alkutekijöissään. Ei siis ollut aavistustakaan siitä, että atomitason ilmiöitä voidaan kuvata matemaattisesti ääretönulotteisilla vektoriavaruuksilla. Siinäpä pohtimista niille, joiden mielestä ai-noastaan välitöntä hyötyä tuottavaa tutkimusta kannattaa rahoittaa.

Viitteet

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space#Definition
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_formulation_of_quantum_mechanics
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space#Fourier_analysis

¹David Hilbert (1862–1943), saksalainen matemaatikko.

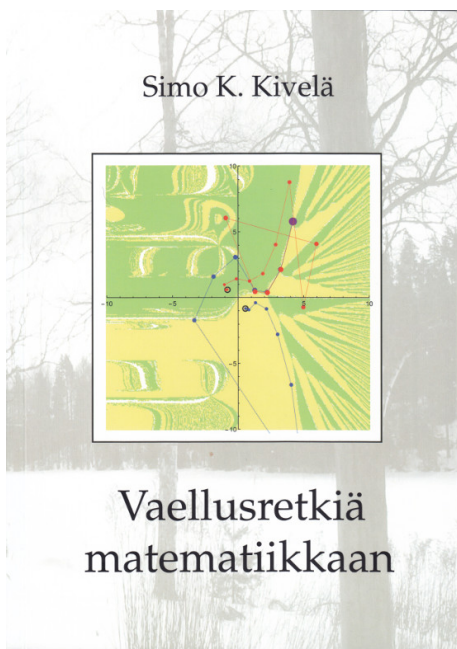
²Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), ranskalainen matemaatikko.



Kirja-arvio: Retkeilyllä matematiikan maisemissa

Matti Lehtinen

Simo K. Kivelä: Vaellusretkiä matematiikkaan. Omakustanne. Espoo 2017. 210 sivua. Hinta eri verkko-kaupoissa 29,92–37,35 euroa.



Jos matematiikasta kirjoittaa muuten kuin oppikirjan mielessä, on keksittävä sopivasti kuvaileva nimi. Hyllysäni on Teuvo Aittokallion mainio *Patikkaretkiä matematiikan maisemaan* (tuon kirjan kustantajakin on nimeltään *Matikkaretket*) ja monikansallinen tuote nimeltä Lukujen taikaa; sen selkämyksessä on kuitenkin isoin kirjaimin *Löytöretki*. Samaa retkiteemaa olen itsekin tapaillut parikymmentä vuotta sitten Solmussa

julkaistuissa *Turistina matematiikassa* -kirjoituksissa, jotka olin alaotsikoinut tyyliin ”*n:s retki*”.

Teknillisen korkeakoulun pitkäaikainen opettaja, monin tavoin matematiikan opetukseen yleisemminkin vaikuttanut ja Solmua paljon avustanut **Simo K. Kivelä** on nyt liittynyt matematiikan retkeilijöihin. Kivelän aikaisempia projekteja on esimerkiksi lukiotasoisien matematiikan tietosanakirja *M niin kuin matematiikka*.

Kivelän kirjassa on 25 lukua, kukin noin 5–10 sivun pituinen. Jokaista näistä voi pitää omana retkenään matematiikan maisemaan. Retkien kohteet vaihtelevat, mutta muutamat suuntautuvat samanlaisille seuduille. Kirjoitukset käsittelevät sekä matematiikan rakennetta että sen soveltamista. Ne voi lukea pitkälti toisistaan riippumatta, mutta jonkinlainen punainen lanka ja pedagoginen tavoite on kuitenkin mukana. Koulumatematiikka on aika ahdas aita ja moni joutuu elämään elämänsä tietämättä juuri mitään aidan ulkopuolella leviävästä matematiikan maailmasta. Kaikki Kivelän retket tehtyään lukija on kartoittanut itselleen melkoi- sen alueen matematiikan maastoa, koulumatematiikan liepeiltä ja vähän kauempaakin.

Kirja lähtee liikkeelle matematiikan olemuksen ytimen, aksioomien pohtimisesta. *Eukleideen* ja *Hilbertin* geometristen järjestelmien jälkeen esitellään vielä tyyppillinen nykyaikainen aksiomaattinen rakenne, ryhmä. Toisellakin retkellä tavataan Eukleides, sillä nyt tarkastellaan piirroksia harpilla ja viivoittimella. Kaikkea niillä ei voi tehdä, mutta jos hiukan lisääpua sallitaan, niin kulman voi jakaa kolmiksi. (Sivun 22 kuvassa näy-

tetään eräs kulman kolmijako ns. *neysis*-menetelmällä. Sen sanotaan olevan peräisin *François Viète*ltä 1500-luvulta, mutta konstruktio näyttää kyllä samalta, jota jo *Arkhimedeen* sanotaan käyttäneen. Ensi kerran muuten näin Viètestä käytettävän nimitystä ”harrastaja-matemaatikko”. Totta toki on, ettei matematiikka hänelle elantoa suonut, niin kuin ei esimerkiksi *Pierre de Fermat*llekaan.) Kolmannella retkellä määritetään ympyrän alan ylä- ja alalikiarvot keinona ympyrän jakaminen samankeskeisiksi renkaiksi, joiden alaa approksimoidaan suorakulmiona. Pallon tilavuudelle tehdään sama käyttämällä viipaloitinta ja viipaleen tilavuuden vertaamista lieriöön. Neljännen retken aiheena ovat koordinaatistot. Viides retki käsittelee erityistä ääriarvongelmaa, $n:n$ pisteen asettamista pallon pinnalle niin, että pienin pisteiden välisistä etäisyyksistä maksimoi-tuu. Yllättävän hankala ongelma antaa aiheen tarkas-tella ääriarvotehtävän olemusta yleisemmin.

Kuudennessa retkessä palataan taas matematiikan perusteisiin: aiheena ovat luonnolliset luvut, Peanon aksioomat ja induktio. Ilokseni huomaa, että Kivelä aloittaa luonnollisten lukujen joukon ykkösestä eikä nolasta. Seuraava luku esittelee irrationaalisuuden lähinnä päättymättömien desimaalilukujen kautta ja näyttää, miten reaalityluvut määritellään aksiomaattisesti. Sitä pientä ongelmaa, jonka tuottaa ”päättymättömän jakolasku” rationaalilukujen maailmassa, ennen kuin reaalityluvut on jollain tavalla määritelty, ei tuoda esiin. Desimaaliluvut ovat isossa asemassa sitten seuraavalla retkellä, joka käsittelee luvun π desimaaliesityksen määrittämistä. Samassa yhteydessä esitetään todistus $\pi:n$ irrationaalisuudelle; suunnilleen sama löytötyy vuoden 2001 Solmusta.

Kompleksilukuja käsittelevä 9. luku antaa yleisen kolmannen asteen yhtälön ratkaisun *Mathematica*-ohjelmiston tarjoamassa muodossa. Tässä yhteydessä esitetty johtopäätös, jonka mukaan reaalityluvun juurten määrittämisessä tulisi aina kulkea kompleksilukujen kautta, on hiukan liian pessimistinen. Kymmenennen retken aiheena ovat vektorit ja yleisemminkin vektoriavaruudet. Niiden aksiomaattinen määrittelmä esitetään, samoin yleinen sisätulo. Hiukan oikoen saadaan jopa *Eulerin* johtama kaava kokonaislukujen neliöiden käänteislukujen summalle. Vektoreita sovelletaan seuraavassa retkessä konkreettiseen retkiongelmaan: maapallon isoympyrän kaaren pituuden määrittämiseen. Esimerkkinä on suorin tie Helsingistä Tokioon. Vektorien pistetulon kautta päädytään lausekkeeseen, joka on pallotrigonometrian kosinilause. Mihin suuntaan on lähdeittävä? Sen Kivelä ratkaisee etsimällä Helsingin ja Tokion kautta kulkevan isoympyrän tangenttivektorin. Ehkä helpommalla pääsisi käyttämällä pallotrigonometrian kosinilauseetta uudelleen Helsinki–Tokio-pohjoisnapa -pallokolmioon, nyt sen Helsingin-kärkeen.

Seuraavat kolme retkeä käsittelevät perspektiivistä, deskriptiivistä ja projektiivista geometriaa. Tässä lii-

kutaan alueilla, jotka epäilemättä liittyvät Kivelän virkatyöhön teekkarien opettajana, ja myös hänen vuonna 2008 julkaisemaansa kirjaan *Perspektiivikuvan geometriset perusteet*.

Retket numero 15–17 on omistettu ”matematiikan tärkeimmälle käsitteelle”, funktiolle, ja sen jatkuvuudelle. Jatkuvuus sekä ϵ, δ -mielessä että topologisessa merkityksessä tulevat esitellyiksi. Retki 18 palaa geometrian ja topologian pariin: esittelystä ovat Platonin monitahokkaat ja yleisemmät pinnat. Pienenä omituisuutena voi pitää sitä, että Kivelä nimeää Platonin kappaleiksi tetraedrin jne., kun kyse kuitenkin on nimenomaan säännöllisistä monitahokkaista. Retkellä 19 tavataan joukko eri tavoin määriteltyjä käyriä ja pintoja. Esitellään myös *splinit* ja *Bézierin* käyrät, jotka usein täyttävät hyvin kaksi eri suuntiin vetävää vaatimusta: ne saadaan kulkemaan haluttujen pisteiden kautta ja olemaan riittävän sileitä.

Retki 20 on jälleen analyysiä: integraalin historiaa valotetaan aina Arkhimedeen oivalluksista alkaen. Retkillä 21 ja 22 kohdataan differentiaaliyhtälöitä konkreettisesti mutta epätriviaaleissa yhteyksissä. Viimeisillä retkilä simuloidaan planeettaliikettä, sovitetaan käyriä empiiriseen aineistoon ja viimein esitellään hiukan todennäköisyyttä. Kirja on ajankohtainen: lottoa käsitellään sen nykyisessä, 40 pallon muodossa.

Jokaisen retken lopussa on joukko täydentäviä huomautuksia ja lisätiedon luo ohjaavia viitteitä, yleensä tietoverkkoon osoittavia. Laskin, että eri verkkosivuja luetellaan melkein 150 kappaletta. Lisäksi Kivelä ehdottaa monia hakukoneen käyttötapoja. Etupäässä viitataan englanninkielisiin sivustoihin. Joissakin tapauksissa olisi saattanut löytyä suomenkielisiäkin tietolähteitä, vaikkapa Solmusta tai matematiikan kilpailuvalmennuksen aineistoista.

Kivelän kirja on huolella toimitettu. Hyvälaatuisia kuvia on runsaasti. Varsinaisia lipsahduksia ei sattunut silmään. Joistakin puhtaasti makuasioista voisi olla toistakin mieltä. Kivelä kirjoittaa desimaaliluvut anglosaksiseen tapaan pisteellä, ja käyttää uudempien suositusten mukaista mutta ainakin minun silmäni epäesteettistä tapaa kirjoittaa muutamat perinteisesti kaavoissa kursivoitavat symbolit kuten e ja i versaalikirjaimin.

Kivelän teos on omakustanne. Kyllä se komeasti ylittäisi kustantamojen laatukriteerit, mutta sellaista aikaa nyt vain eletään, että tämänlaatuinen tietokirja ei ole suosiossa. Niin matematiikkaan suuntautuvan nuoren kuin matematiikan opettajankin kannattaa hankkia Kivelän kirja. Hakukoneen avulla löytyy useita verkkokauppoja, joiden valikoimiin *Vaellusretket* kuuluu. Takakansi lupaa, että kirja pyrkii täydentämään koulun antamaa mielikuvaa matematiikan rakenteista ja niiden hyödyntämisestä eri yhteyksissä. Tämän lupauksen kirja loistavasti täyttää.



Collatzin konjektuuri ja algoritmien analysointi

Antti Laaksonen

Aalto-yliopisto ja Helsingin yliopisto
ahslaaks@cs.helsinki.fi

Jokaiselle tietokoneen käyttäjälle ovat tuttuja erilaiset ongelmat ohjelmien kanssa, kuten jumiutuminen ja virheellinen toiminta. Ohjelmien virheitä korjataan pikkuhiljaa, mutta aina löytyy myös uusia. Herää kysymys, miksi tällaisia ongelmia ei korjata järjestelmällisesti. Eikö olisi hyvä idea ottaa avuksi matematiikka ja *todistaa* ennen ohjelman julkaisua, että ohjelma toimii aina halutulla tavalla?

Tämä on hieno tavoite, mutta tehtävä on vaikeampi kuin voisi kuvitella. Itse asiassa osoittautuu, että yleisessä tapauksessa on *mahdotonta* analysoida automaattisesti ohjelmien toimintaa. Tässä kirjoituksessa tutustumme aiheeseen sekä teorian että käytännön kautta.

Collatzin konjektuuri

Collatzin konjektuuri vuodelta 1937 liittyy seuraavaan algoritmiin: Valitaan aluksi positiivinen kokonaisluku n . Jos n on parillinen, se jaetaan kahdella, ja jos n on pariton, se kerrotaan kolmella ja tulokseen lisätään yksi. Tätä jatketaan, kunnes n on 1. Esimerkiksi valinta $n = 6$ tuottaa seuraavan ketjun:

$$6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Collatzin konjektuurin mukaan millä tahansa n :n valinnalla algoritmin tuottama ketju päättyy lukuun 1 eli algoritmi *pysähtyy* aina.

Algoritmin voi toteuttaa käytännössä esimerkiksi seuraavasti Python-kielellä:

```
def collatz(n):
    while n > 1:
        if n%2 == 0:
            n = n/2
        else:
            n = 3*n+1
```

On helppoa varmistaa, että Collatzin algoritmi pysähtyy pienillä n :n arvoilla, mutta voisiko olla jokin suuri n :n arvo, jolla näin ei tapahdu?

Suoraviivainen tapa tutkia algoritmin toimintaa on antaa sille järjestyksessä n :n arvoja 1, 2, 3, ... ja katsoa, mitä tapahtuu. Yksi kiinnostava tieto algoritmiin liittyen on *askelten määrä* ketjussa tietyllä n :n arvolla. Voimme laskea tämän muuttamalla algoritmia näin:

```
def collatz(n):
    c = 0
    while n > 1:
        c += 1
        if n%2 == 0:
            n = n/2
        else:
            n = 3*n+1
    return c
```

Nyt esimerkiksi funktiokutsu `collatz(6)` palauttaa arvon 8, koska tapauksessa $n = 6$ ketjussa on 8 askelta.

Voimme laskea lämmittelynä vaikkapa askelten määrät, kun alkuarvo n on välillä $1 \dots 10$:

alkuarvo n	askelten määrä
1	0
2	1
3	7
4	2
5	5
6	8
7	16
8	3
9	19
10	6

Taulukosta voi havaita, ettei askelten määrälle ole ainaakaan kovin yksinkertaista sääntöä, joka pistäisi silmään heti ensimmäisistä taulukon arvoista.

Nyt on aika ottaa järeämmät keinot käyttöön ja tutkia algoritmia suuremmilla n :n arvoilla. Seuraava taulukko kertoo suurimman askelten määrän, kun algoritmia testataan kaikilla n :n arvoilla tiettyyn rajaan asti.

suurin n :n arvo	suurin askelten määrä
10	19, kun $n = 9$
10^2	118, kun $n = 97$
10^3	178, kun $n = 871$
10^4	261, kun $n = 6171$
10^5	350, kun $n = 77031$
10^6	524, kun $n = 837799$

Tiedämme nyt, että algoritmi pysähtyy ainakin alkuarvoon $n = 10^6$ asti ja suorittaa enimmillään 524 askelta tapauksessa $n = 837799$ ennen pysähtymistä. Näyttää siltä, että n :n kasvaessa löytyy aina uusia tapauksia, joissa askelten määrä on aiempaa suurempi, mutta askelten määrä kasvaa hitaasti verrattuna n :n kokoon.

Voisimme jatkaa algoritmin tutkimista vielä suuremmilla n :n arvoilla, joskin ennen pitkää laskenta alkaisi viedä paljon aikaa. Kokeilemalla kaikkia arvoja on selvitetty [3], että algoritmi pysähtyy ainakin aina, kun n on korkeintaan $5 \cdot 2^{60}$. Tämän laskeminen vaatii hyvin optimoidun algoritmin ja useita vuosia aikaa.

Tämän aineiston perusteella vaikuttaa siltä, että algoritmi pysähtyy aina. Kukaan ei kuitenkaan tiedä tapaa *todistaa*, että näin olisi, vaikka lukuisat matemaatikot ovat pohtineet ongelmaa.

On helppoa keksiä erilaisia muunnelmia algoritmista. Esimerkiksi Solmun numerossa 1/2017 Juhani Fiskaali esitti seuraavan algoritmin [1]:

```
def fiskaali(n):
    while n > 1:
        if n%3 == 0:
            n = n/3
        elif n%3 == 1:
            n = 4*n-1
```

```
else:
    n = 5*n-7
```

Tämän algoritmin analysointi on huomattavasti helpompaa, koska arvolla $n = 1352$ algoritmi ei pysähdy koskaan, vaan ketju on muotoa

$1352 \rightarrow 6753 \rightarrow 2251 \rightarrow 9003 \rightarrow \dots \rightarrow 9003 \rightarrow \dots$,

missä luvusta 9003 alkaa 194 askeleen ketju, joka palaa takaisin lukuun 9003.

Collatzin konjektuuri antaa näytteen siitä, miten vaikeaa voi olla selvittää, pysähtyykö algoritmi. Vaikka algoritmista on vain muutama rivi koodia, kukaan ei osaa sanoa varmasti, pysähtyykö se. Vertailun vuoksi tietokoneen käyttöjärjestelmässä voi olla miljoonia rivejä koodia. Ei ihme, että tietokone voi jäädä jumiin, eikä kukaan osaa selittää asiaa.

Pysähtymisongelma

Pysähtymisongelmassa on tehtävänä selvittää, pysähtyykö annettu algoritmi. Esimerkiksi seuraava algoritmi laskee summan $1 + 2 + \dots + n$ ja selvästi pysähtyy kaikilla n :n arvoilla:

```
def summa(n):
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        s += i
    return s
```

Seuraava algoritmi taas ei pysähdy syötteellä $n = 13$, koska algoritmi tulostaa silloin loputtomasti rivejä, joissa lukee "Heippa!":

```
def hassu(n)
    if n == 13:
        while True:
            print "Heippa!"
```

Pysähtymisongelma on varmasti vaikea ongelma, koska Collatzin konjektuuri on vain yksi ongelman erikoistapaus. Itse asiassa jos meillä olisi varma keino selvittää, pysähtyykö annettu algoritmi aina, voisimme ratkaista saman tien monia matematiikan avoimia ongelmia. Esimerkiksi lukuteorian suuria kysymyksiä on, onko olemassa äärettömästi alkulukupareja eli pareja muotoa $(p, p+2)$, missä p ja $p+2$ ovat alkulukuja. Esimerkiksi $(5, 7)$, $(11, 13)$ ja $(17, 19)$ ovat tällaisia pareja. Voimme tutkia ongelmaa seuraavalla algoritmilla:

```
def haku(n):
    while True:
        if alkuluku(n) and alkuluku(n+2):
            break
        n += 1
```

Algoritmille annetaan luku n ja se alkaa etsiä paria $(p, p+2)$, jossa $p \geq n$ ja p ja $p+2$ ovat alkulukuja.

Heti jos tällainen pari löytyy, algoritmi pysähtyy, mutta jos paria ei löydy koskaan, haku jatkuu ikuisesti. Alkulukupareja on äärettömästi tarkalleen silloin, kun algoritmi pysähtyy millä tahansa syötteellä, joten on yhtä vaikeaa selvittää algoritmin pysähtyminen kuin ratkaista alkulukuparien ongelma.

Vuonna 1936 Alan Turing osoitti, että pysähtymisongelmaa ei ole mahdollista ratkaista: ei ole olemassa algoritmia, joka pystyisi tutkimaan luotettavasti ohjelman koodista, pysähtyykö se vai ei. Tällaista algoritmia ei ole mahdollista toteuttaa, koska voimme aina löytää tilanteen, jossa algoritmi erehtyisi. Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa funktiota, joka *yrittää* tutkia ohjelman pysähtymistä:

```
def pysahtyy(x, y):
    ...
```

Parametri x on tutkittavan ohjelman koodi, parametri y on ohjelman syöte ja funktion tulisi palauttaa `True`, jos ohjelma pysähtyy, ja `False`, jos ohjelma ei pysähdy. Emme tiedä tarkalleen, miten funktio toimisi, joten funktion sisältönä on vain kolme pistettä. Voimme kuitenkin laatia seuraavan ohjelman, jonka tarkoituksena on harhauttaa funktiota:

```
def huijaus(x):
    if pysahtyy(x, x):
        while True:
            print "Enkä pysähdy!"
    else:
        print "Pysähdynpäs!"
```

Harhautus onnistuu silloin, kun parametrina x on ohjelman oma koodi. Ideana on, että ohjelma kysyy ensin, pitäisikö sen pysähtyä tässä tilanteessa vai ei, ja toimii sitten täsmälleen päinvastoin. Jos funktion `pysahtyy` mukaan ohjelman pitäisi pysähtyä, se jää silmukkaan, ja jos taas ohjelman pitäisi jäädä silmukkaan, se pysähtyy. Niinpä funktio `pysahtyy` antaa väärää tietoa pysähtymisestä riippumatta siitä, miten se on toteutettu, eli ei voi olla olemassa toimivaa funktiota ohjelman pysähtymisen tarkastamiseen.

Tässä on kysymys suunnilleen samasta asiasta kuin vanhassa vitsissä, jossa henkilö sanoo ”Minä valehtelen”. Jos henkilö puhuu totta, hän kuitenkin valehtelee, ja jos taas henkilö valehtelee, hän puhuukin totta.

Ricen lause

Pysähtyminen ei ole ainoa vaikeasti selvitettävä asia ohjelmasta, vaan sama koskee *kaikkia* muitakin ohjelman ominaisuuksia. Esimerkiksi yhtä vaikeaa tehtävä on selvittää, tulostaako ohjelma kirjainta ”a”. Tämä tulos tunnetaan nimellä Ricen lause.

Esimerkiksi jos voisimme selvittää ohjelman koodista, tulostaako se aina kirjaimen ”a”, voisimme ratkaista Collatzin konjektuurin yhtä helposti kuin ennenkin. Riittää muuttaa ohjelmaa niin, että se tulostaa pysähtyessään kirjaimen ”a”:

```
def collatz(n):
    while n > 1:
        if n%2 == 0:
            n = n/2
        else:
            n = 3*n+1
    print "a"
```

Tämän ansiosta kirjaimen ”a” tulostaminen ilmaisee meille, milloin ohjelma pysähtyy. Koska pysähtymisongelmaa ei ole mahdollista ratkaista, ei ole myöskään mahdollista ratkaista, tulostaako ohjelma kirjainta ”a”.

Voimme tietenkin korvata kirjaimen ”a” tulostamisen millä tahansa koodilla. Esimerkiksi seuraava ohjelma soittaa Tapio Rautavaaran *Isoisän olkihattu* -kappaleen tarkalleen silloin, kun algoritmi pysähtyy:

```
def collatz(n):
    while n > 1:
        if n%2 == 0:
            n = n/2
        else:
            n = 3*n+1
    soita("olkihattu.mp3")
```

Emme pysty siis edes selvittämään ohjelmasta, soittaa se Isoisän olkihatun.

Entä käytännössä?

Tässä vaiheessa tavoitteemme todistaa algoritmien toimivuus matemaattisesti vaikuttaa jäävän haaveeksi, koska näyttää olevan mahdotonta tarkastaa *mitään* ohjelman ominaisuutta automaattisesti. Mutta onko asia todella näin?

Tässä täytyy kuitenkin muistaa, että äskeisten tulosten mukaan ohjelman analysointia yrittävä algoritmi erehtyy ainakin *yhdellä* syötteellä. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että algoritmi olisi välttämättä täysin käyttökelvoton. Hieman vastaava tilanne on jakolaskun laskeminen. Tunnetusti jakolasku ei ole mahdollinen, jos jakajana on nolla, mutta tämä ei tarkoita, ettei jakolaskua voisi käyttää missään tilanteessa.

Käytännössä voi olla hyvinkin mahdollista varmistaa monista ohjelmista, että ne toimivat oikealla tavalla. Esimerkiksi Microsoftin tutkimusyksikössä oli joitakin vuosia sitten käynnissä Terminator-projekti, jonka tavoitteena oli tutkia ohjelmien pysähtymistä. Tehtävä on kuitenkin vaikea ja olemassa olevat työkalut soveltuvat lähinnä lyhyiden algoritmien tutkimiseen.

Vuonna 2015 tutkijat koettivat todistaa harjoituksen vuoksi, että Java-kielen standardikirjaston järjestämis-algoritmi toimii oikein. Todistaminen ei kuitenkaan ot-tanut onnistuakseen, ja lopulta tutkijat tekivät yllättä-vän havainnon: Javan algoritmi on *virheellinen*, minkä vuoksi ei olekaan mahdollista todistaa, että se toimisi oikein [2]. Kukaan Javan käyttäjä ei ollut huomannut asiaa, koska virhe on hyvin harvinainen: taulukko, jos-sa virhe esiintyy, sisältää 67108864 alkia. Tämä osoit-ti, että jo nykyisillä menetelmillä on mahdollista saada tuloksia, joilla on merkitystä käytännössä.

Ei näytä kuitenkaan siltä, että kokonaisten ohjelmien analysointi olisi mahdollista vielä pitkään aikaan. Mit-tava haaste on pelkästään se, että ennen analyysia täytyy kuvata matemaattisesti, mikä ohjelman halut-tu toiminta on missäkin tilanteessa. Tämä on helppoa tarkasti määritellyille algoritmeille mutta hyvin vaikeaa vaikkapa nettiselaimelle tai tekstinkäsittelyohjelmalle.

Lopuksi

Yllättävää kyllä, on olemassa algoritmi, joka kertoo, päteekö Collatzin konjektuuri vai ei. Kyseinen algorit-mi on jompikumpi seuraavista:

```
def totuus1():  
    print "Collatzin konjektuuri pätee"  
  
def totuus2():  
    print "Collatzin konjektuuri ei päde"
```

Huonona puolena on vain se, että emme tiedä, *kumpi* algoritmeista toimii oikein.

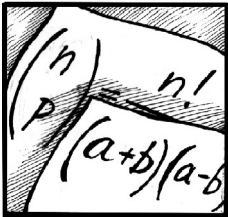
Viitteet

- [1] J. Fiskaali: Eräs Collatz-Kakutanin otaksuman analogia. *Solmu* 1/2017. <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/1/otaksuma.pdf>
- [2] S. de Gouw, J. Rot, F. S. de Boer, R. Bubel ja R. Hähnle: OpenJDK's java.util.Collection.sort() is broken: The good, the bad and the worst case. *27th International Conference on Computer Aided Verification*, 2015.
- [3] T. O. e Silva: Computational verification of the $3x+1$ conjecture. <http://sweet.ua.pt/tos/3x+1.html>, 2009.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

Suppeaa suhteellisuusteoriaa alusta alkaen (Lasse Pantsar)
Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)
Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)
Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)
Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)
Geometria (K. Väisälä)
Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)
Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)
Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)
Algebra (K. Väisälä)
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)
Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)
Matematiikan historia (Matti Lehtinen)
Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Kolikonheiton todennäköisyys

Jukka Liukkonen

Mat. yo. evp.

Todennäköisyyslaskennan oppikirjoissa kolikonheitto on vakioesimerkki. Symmetristä tai epäsymmetristä kolikkoa heitetään n kertaa ja kysytään, millä todennäköisyydellä saadaan tasan k kruunaa. Sen jälkeen aletaan puhua binomijakaumasta. Mutta onko kukaan heittänyt kolikkoa äärettömän monta kertaa? Onko kukaan toistanut tätä äärettömän pitkää heittosarjaa riittävän monta kertaa niin, että suurten lukujen lain vaikutus alkaisi näkyä, ja satunnaiskokeesta lasketut suhteelliset frekvenssit olisivat edes summittaisia approksimaatioita niille oikeille, pyhille todennäköisyyksille? Veikkaan, että vain harvalla kärsivällisyys riittää tällaisiin suorituksiin. Ensimmäisessä äärettömän pitkässä heittosarjassa ei luulisi olevan vaikeuksia. Olen itse suorittamassa sitä parhaillaan. Varmaan toinenkin sujuu vielä, mutta kolmas äärettömän pitkä kolikonheitto saattaa jo alkaa tuntua puuduttavalta. Sitäpaitsi: mitä ovat ne oikeat, pyhät todennäköisyydet päättymättömän kolikonheiton yhteydessä? Kirjoitelmassa pohjustetaan asian miettimistä. Tekstin ymmärtäminen valittavasti edellyttää todennäköisyyslaskennan käsitteiden tuntemista lukion kurssin laajuudessa – tai avointa mieltä ja ahkeraa hakukoneella ajelua netissä. Älä ihmettele pientä mustaa kolmiota: se tarkoittaa, että esimerkki, sääntö tms. päättyy juuri sillä kohtaa.

Otosavaruus ja todennäköisyys

Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että heitetyt kolikot ovat symmetrisiä, eivät jää pystyyn, eikä varis

kaappaa kolikkoa sen ilmalennon aikana. Silloin kruuna tulee todennäköisyydellä $1/2$, ja samaten klaava. Eräs tärkeä oletus on, että eri heittokertoilla saadut tulokset ovat toisistaan riippumattomat. Tuntuu luonnolliselta, että riippumattomuusoletus pätee reaali maailman kolikonheitossa – varmuuden vuoksi mainittakoon, että riittävällä tarkkuudella. Kolikonheittosarjat koodataan bittijonoiksi, joissa 1 edustaa kruunaa ja 0 klaavaa. Bittillä tarkoitetaan asiayhteydestä riippuen joko muutujan arvo, jonka arvo voi olla 1 tai 0, tai tällaisen muuttujan arvoa. Päättymättömän kolikonheiton tulos näyttää tältä:

$$(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \\ 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots),$$

yleisessä muodossa

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots), \quad a_i \in \{0, 1\}$$

kaikilla $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Alkio a on **alkeistapaus**, ja yksiö $\{a\}$ on **alkeistapahtuma** kaikkien päättymättömien bittijonojen muodostamassa **perusjoukossa** eli **otosavaruudessa** Ω . Kun kolikkoa heitetään n kertaa, tietyn yksittäisen tulosjonon todennäköisyys on 2^{-n} . Heittokertojen lukumäärän n kasvaessa rajatta 2^{-n} lähestyy nollaa. On siis luontevaa sopia, että yhden alkeistapahtuman todennäköisyys päättymättömässä kolikonheitossa on nolla:

$$\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(\{a\}) = 0 \quad \text{kaikilla } a \in \Omega.$$

Silloin perusjoukon Ω jokaisen äärellisen tai numeroituvasti äärettömän osajoukon todennäköisyys on nolla. Tämä voidaan perustella todennäköisyyden aksioomilla (aksiooma Tn3), joista on perusteelliset esitykset Solmun numeroissa 1/2003 (T. Kaarakka) ja 2/2004 (T. Sottinen):

Tn1 $\mathbb{P}(A) \geq 0$ kaikilla tapahtumilla A .

Tn2 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Tn3 Jos $A_1, A_2, A_3, \dots$ ovat tapahtumia ja $A_i \cap A_{i+j} = \emptyset$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, niin

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

On syytä palauttaa mieliin, että **tapahtuman** käsitteellä on todennäköisyyslaskennassa aivan erityinen merkitys. Yleisessä todennäköisyyden teoriassa kaikki perusjoukon osajoukot eivät välttämättä ole tapahtumia. Tapahtumiksi kutsutaan niitä osajoukkoja, joille voidaan määrittää todennäköisyys. Tapahtumien joukko on yhtä kuin todennäköisyysfunktion $\mathbb{P}$ määrittelyjoukko. Sitä merkitään usein symbolilla $\mathcal{F}$, ja sen alkiot ovat otosavaruuden osajoukkoja. Edellä esitetyn mukaisesti äärelliset ja numeroituvat kolikonheiton perusjoukon Ω osajoukot ovat tapahtumia, ja niiden todennäköisyys on nolla. Tämä ei ole ristiriidassa aksiooman Tn2 kanssa, sillä **Cantorin lävistäjämenetelmällä** (engl. *Cantor's diagonal argument*) nähdään, että päättymättömiä bittijonoja on ylinumeroituva määrä.¹

Kun kolikkoa heitetään vain n kertaa, otosavaruutena on joukko Ω_n , joka koostuu kaikista bittijonoista $(a_1, \dots, a_n)$. Näin yksinkertaisessa tilanteessa tapahtumia ovat kaikki joukon Ω_n osajoukot U . Tapahtuman U todennäköisyys on

$$\mathbb{P}_n(U) = \frac{|U|}{|\Omega_n|} = \frac{|U|}{2^n}.$$

Yleisen tavan mukaisesti joukon U alkioden lukumäärää merkitään $|U|$. Vektorin itseisarvo ilmoittaa vektorin suuruuden, joukon "itseisarvo" ilmoittaa joukon suuruuden.

Eräs yksinkertainen tapahtumatyyppi päättymättömissä kolikonheitossa, äärellisten ja numeroituvien tapahtumien lisäksi, on muotoa

$$U^* = \{(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \in \Omega \mid (a_1, \dots, a_n) \in U\}$$

olevat tapahtumat, missä $n \in \mathbb{N}$ ja $U \subset \Omega_n$, toisin sanoen U on tuttuun n -kertaiseen kolikonheittoon liittyvä tapahtuma. Tapahtumaan U^* kuuluvat siis tasan ne päättymättömät bittijonot, joissa jonon alkupää $(a_1, \dots, a_n)$ kuuluu tapahtumaan U , ja loppupää

saa olla mitä tahansa, "häntä saa heilua vapaasti" kuin Mustin häntä. Tapahtuman U^* tapahtuminen tai tapahtumatta jääminen ratkeaa täysin jo n ensimmäisen heiton aikana, ja myöhempien heittojen tuloksilla ei ole väliä. Tapahtuman U^* todennäköisyydeksi asetetaan luonnollisesti $\mathbb{P}(U^*) = \mathbb{P}_n(U)$. Edistyneemmät todennäköisyyslaskijat samaistavat tapahtumat U ja U^* , mutta asioita ensi kertaa opiskellessa on ehkä hyvä korostaa niiden eroa.

Esimerkki

(a) Jos $U = \{\text{tulee kruuna}\} \subset \Omega_1$, on

$$U^* = \{\text{ensimmäisellä heitolla tulee kruuna}\} \\ = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) \in \Omega \mid a_1 = 1\},$$

$$\text{ja } \mathbb{P}(U^*) = 1/2.$$

(b) Jos $V = \{\text{kolmella heitolla tulee tasan 2 klaavaa}\} \subset \Omega_3$, on

$$V^* = \{\text{kolmella ensimmäisellä heitolla tulee tasan 2 klaavaa}\} \\ = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \in \Omega \mid a_1 + a_2 + a_3 = 1\},$$

$$\text{ja } \mathbb{P}(V^*) = 3/8. \blacktriangle$$

Mitä muita tapahtumia on olemassa? Kuten jo todettiin, päättävien heittosarjojen tapauksessa kaikki perusjoukon Ω_n osajoukot U ovat tapahtumia. Tästä ei sovi vetää hätäisiä johtopäätöksiä päättymättömiä heittosarjoille. **Vitalin joukko** (engl. *Vitali set*) on tunnettu esimerkki ei-mitallisesta joukosta. Se on välin $[0, 1]$ osajoukko, jolla ei ole Lebesguen mitta. Seuraavassa yritetään matkia Vitalin joukon yhteydessä normaalisti esitettyä päättelyä sen tutkimiseksi, ovatko päättymättömien heittosarjojen perusjoukon Ω kaikki osajoukot tapahtumia.

Bitit nurin

Olkoon A tapahtuma, jolloin $A \subset \Omega$, ja olkoon k positiivinen kokonaisluku. Jos jokaisen jonon $a \in A$ bitti a_k käännetään nurin, so. nolla korvataan ykkösellä ja ykkönen nolalla, saadaan tapahtuma A' , jolla on sama todennäköisyys kuin A :lla, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A')$. Asia voidaan ajatella niin, että jokaisen heittosarjan heitto numero k ja vain se tehdään sellaisella kolikolla, johon on tussilla piirretty kruunapuolelle klaava ja klaavapuolelle kruuna. Jos yhdessä satunnaiskokeessa tulokset tulkitaan kolikon alkuperäisten merkintöjen mukaan ja toisessa kokeessa tussimerkintöjen mukaan, niin ei kai se todennäköisyyksiin vaikuta, vai mitä. Monta bittiä voidaan kääntää nurin yksi kerrallaan. Jos ja kun jokaisessa vaiheessa todennäköisyys säilyy, saadaan seuraava sääntö:

¹Kun ilman selostusta mainitsen nimeltä Cantorin menetelmän tai jonkin muun yleisesti tunnetun asian, oletan siitä kiinnostuneen lukijan katsovan taustat netistä. Tämän artikkelin lukemista voidaan huoletta jatkaa ilman tällaisten yksityiskohtien selvittämistäkin.

Sääntö

Olkoon $m \in \Omega$ bittijono, jossa on vain äärellinen määrä ykkösbittejä. Tällaista bittijonoa sanotaan **maskiksi**. Jos A' saadaan tapahtumasta A kääntämällä jokaisen alkeistapauksen $a \in A$ bitit nurin maskin m ykkösbittien ja vain niiden kohdalla, joukko A' on tapahtuma ja $\mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(A)$. ▲

Esimerkki

Olkoon $U = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\} \subset \Omega_4$ ja $m = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \dots) \in \Omega$. Maskin m bitit kuudennessa eteenpäin ovat nollia. Kun tapahtumalle $A = U^*$ tehdään maskin m mukainen bittien nurinkääntö, saadaan tapahtuma $A' = V^*$, missä $V = \{(0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \subset \Omega_4$. Mieti miksi. Huomaa, että maski käskee kääntämään nurin myös viidennen bitin, mutta joukon U jonoissa on vain neljä bittiä. Selvästi $\mathbb{P}(A) = 3/16 = \mathbb{P}(A')$. ▲

Päättymättömiä bittijonoja $a = (a_1, a_2, \dots)$ ja $b = (b_1, b_2, \dots)$ sanotaan **melkein samoiksi**, jos ne poikkeavat toisistaan vain äärellisen monen bitin kohdalla. Tällöin voidaan jopa kirjoittaa $a \approx b$. Samanlaisesta merkintään käytetään luvuillekin siinä tapauksessa, että ne ovat suunnilleen yhtäsuuria, esimerkiksi $\pi \approx 3,14$. Tässä on kuitenkin se oleellinen ero, että π ja $3,14 = 3,14000\dots$ poikkeavat toisistaan äärettömän monen desimaalin osalta. Päättymättömien bittijonojen melkeinsamuus $\approx$ toteuttaa seuraavat ehdot ($a, b, c \in \Omega$):

E1 $a \approx a$.

E2 Jos $a \approx b$, niin $b \approx a$.

E3 Jos $a \approx b$ ja $b \approx c$, niin $a \approx c$.

Lukiossa on saatettu opettaa, että tällaiset ehdot toteuttavaa relaatiota sanotaan **ekvivalenssirelaatioksi**. Matematiikassa ja normaalielämässäkkin ekvivalenssirelaatiot ovat erittäin yleisiä. Mieti ehtojen E1–E3 toteutumista vaikka sellaisessa tapauksessa, jossa $a \approx b$ tarkoittaa, että henkilöillä a ja b on samat vanhemmat. Henkilön a **ekvivalenssiluokka**

$$[a] = \{b \mid b \approx a\}$$

koostuu kaikista niistä henkilöistä, joilla on samat vanhemmat kuin henkilöllä a . Luokka $[a]$ on siis henkilön a koko (täys)sisarusparvi a itse mukaan lukien. On selvää, että joukkojen $[a]$ yhdiste kattaa kaikki ihmiset, ja ekvivalenssiluokille $[a]$ ja $[b]$ pätee aina joko $[a] = [b]$ tai $[a] \cap [b] = \emptyset$, muita vaihtoehtoja ei ole. Silloin ihmisten joukko voidaan esittää toisiaan leikkaamattomien sisarusparvien $[a]$ yhdisteenä. Tämä on ekvivalenssirelaatioiden ominaispiirre yleisestikin, eikä sitä ole kovin vaikeaa todistaa (voit kokeilla tai katsoa netistä).

Luokkayhteiskunnan ihmisvilinästä palataan takaisin rauhallisten bittijonojen pariin. Päättymättömien bittijonojen avaruus Ω voidaan, kuten tuli todettua, esittää toisiaan leikkaamattomien joukkojen $[r]$ yhdisteenä

$$\Omega = \bigcup_{r \in \Gamma} [r], \quad [r] = \{a \in \Omega \mid a \approx r\},$$

missä joukko $\Gamma \subset \Omega$ on muodostettu valitsemalla siihen tasan yksi edustaja jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Äskeiseen havainnollistukseen liittyen voit ajatella vaikka, että edustaja r on sisarusparven $[r]$ vanhin, joka vastaa koko sisarusparven edesottamuksista. Äkkiä ajatellen tuntuu ilmiselvältä, että jokaisesta ekvivalenssiluokasta voidaan poimia yksikäsitteinen edustaja edustamaan koko luokkaa. Äärettömien joukkoperheiden yhteydessä edustajiston Γ olemassaolo on kuitenkin kaikkea muuta kuin itsestään selvä asia. Olemassaoloa ei pystytä todistamaan tavanomaisista joukko-opin aksioomista, ellei mukaan oteta ns. **valinta-aksioomaa** (engl. *axiom of choice*, *AC*). Siinä edustajisto yksinkertaisesti oletetaan olemassaolevaksi.

Jotain vialla?

Ennen loppurutistusta ja sitä seuraavaa hämmennystä muistutetaan, että nurinkäännettävät äärellisen monta bittiä ilmoitetaan maskin avulla. Maskissa on käännettävien bittien kohdalla ykkönen, ja muualla pelkkiä nollia. Kaikkien maskien joukkoa merkitään M . Se koostuu nollajonon lisäksi niistä bittijonoista, joissa on vain äärellisen monta ykköstä. Sellaiset voidaan samastaa positiivisten kokonaislukujen binääriesitysten kanssa (luettelemalla maskin kaikki bitit viimeisestä ykkösbitistä taaksepäin). Siis M on numeroituva joukko. Olkoot m ja m' kaksi maskia, $m \neq m'$. Olkoon $m\Gamma$ (vastaavasti $m'\Gamma$) niiden bittijonojen joukko, jotka on saatu edustajistoon Γ kuuluvista bittijonoista kääntämällä maskin m (vastaavasti m') ilmoittamat bitit nurin. Melko vähällä päänvaivaimisella havaitaan, että $m\Gamma \cap m'\Gamma = \emptyset$. Perustele tämä! Näin ollen kaikkien päättymättömien bittijonojen joukko, perusjoukko Ω , voidaan lausua toisiaan leikkaamattomien joukkojen $m\Gamma$ yhdisteenä

$$\Omega = \bigcup_{m \in M} m\Gamma.$$

Edustajisto Γ on otosavaruuden Ω osajoukko. Aikaisemmin perustellun säännön mukaan bitinkääntö ei vaikuta todennäköisyyksiin. Jos Γ on tapahtuma, mainitun säännön nojalla yhtälö $\mathbb{P}(m\Gamma) = \mathbb{P}(\Gamma)$ on voimassa kaikilla maskeilla m , jolloin aksiooman Tn3 perusteella

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{m \in M} m\Gamma\right) = \sum_{m \in M} \mathbb{P}(m\Gamma) = \sum_{m \in M} \mathbb{P}(\Gamma) \\ &= \mathbb{P}(\Gamma) + \mathbb{P}(\Gamma) + \mathbb{P}(\Gamma) + \dots \end{aligned}$$

Aksiooman Th1 nojalla $\mathbb{P}(\Gamma) \geq 0$. Jos $\mathbb{P}(\Gamma) > 0$, viimeisin päättymätön summa on arvoltaan ääretön. Jos $\mathbb{P}(\Gamma) = 0$, päättymättömästä summasta tulee nolla. Aksiooman Th2 mukaan $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Missä vika?

Loppuhämmennys

Johtopäätös kaikesta edellisestä on, että päättymättömän kolikonheiton tapauksessa todennäköisyysfunktioita $\mathbb{P}$ ei voida laajentaa kaikille perusjoukon osajoukoille ainakaan siten, että laajennos toteuttaisi luonnollisen vaatimuksen ”nurinkääntöinvarianssista”, siis yhtälön $\mathbb{P}(mA) = \mathbb{P}(A)$, $m \in M$, $A \subset \Omega$. Tässä mA tarkoittaa niiden bittijonojen joukkoa, jotka on saatu joukkoon A kuuluvista bittijonoista kääntämällä maskin m ilmoittamat bitit nurin. Kuten edellä nähtiin, otosavaruuden Ω osajoukon Γ oletaminen tapahtumaksi johtaa sovitamattomaan ristiriitaan. Edustajisto Γ ei sovellu tapahtumaksi, toisin sanoen otosavaruuden Ω osajoukolle Γ ei ole todennäköisyyttä. Kumma juttu! Kuitenkin Γ on aika iso joukko, sen kopioita tai paremminkin osittain nurinkäännettyjä peilikuvia $m\Gamma$ tarvitaan vain numeroituva määrä täyttämään koko perusjoukko. Tulosjono välttämättä osuu aina yhteen näistä kopioista. Jos tiettyyn kopioon tuleville osumille laskeaan suhteellista frekvenssiä, onko sillä suurten lukujen lain raja-arvon kaltaista rajaa toistojen määrän kasvaessa rajatta? Voidaanko yleensä testata, osuuko tulosjono kyseiseen kopioon? Joukkoa Γ ei missään vaiheessa konstruoitu, se vain oletettiin olemassaolevaksi valinta-aksioomaan vedoten!

Lukijan oman harrastuksen varaan jätetään sen selvittäminen, mitkä kaikki perusjoukon osajoukot lopulta ovat tapahtumia. Tosin se on aika turhaa, sillä kaikki vähänkin tavanomaiset joukko-opilliset konstruktiot ilman valinta-aksiooman käyttöä johtavat tapahtumiin. Käytännön todennäköisyyslaskuissa esiintyvillä bittijonojen otosavaruuden Ω osajoukoilla on aina todennäköisyys. Todennäköisyyslaskennan ja stokastisten pro-

sessien yliopistokursseja suorittamaan aikovalle mainittakoon vihjeeksi, että päätyviin kolikonheittosarjoihin liittyvät **todennäköisyysavaruudet** (engl. *probability space*) voidaan laajentaa päättymättömien heittosarjojen avaruudeksi **Carathéodoryn laajennuslauseen** (engl. *Carathéodory's extension theorem*) avulla.

Harjoitustehtäviä

Kolikkoa heitetään äärettömän monta kertaa, ja heiton tulos koodataan loppumattomaksi bittijonoksi $a = (a_1, a_2, \dots)$.

- 1) Millä todennäköisyydellä saadaan äärettömän monta kruunaa?
- 2) Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin kerran miljoona kruunaa peräjälkeen?
- 3) Tietokoneohjelma on lopulta vain äärellinen bittijono. Ajattele jotain tiettyä tietokoneohjelmaa. Olkoon sen pituus n bittiä. Millä todennäköisyydellä kyseinen n bitin pätkä esiintyy ainakin kerran heitotuloksessa?

- 4) Millä todennäköisyydellä $\frac{1}{4} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} < \frac{1}{2}$?

- 5) **Häntätapahtuma** on sellainen tapahtuma, jonka tapahtumiselle tai tapahtumatta jäämiselle on täysin yhdentekevää, mitä kolikonheiton alkupäässä tapahtuu, otettiinpa tuo (äärellinen) alkupää miten pitkäksi tahansa. On olemassa nk. **Kolmogorovin 0-1-laki** (engl. *Kolmogorov's zero-one law*), jonka mukaan häntätapahtuman todennäköisyys on aina joko 0 tai 1. Perustele, miksi

$$A = \{a \in \Omega \mid \text{on olemassa } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$$

on häntätapahtuma. Määritä $\mathbb{P}(A)$.

Jos et saa juonesta kiinni, katso Wikipediasta *infinite monkey theorem*.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.

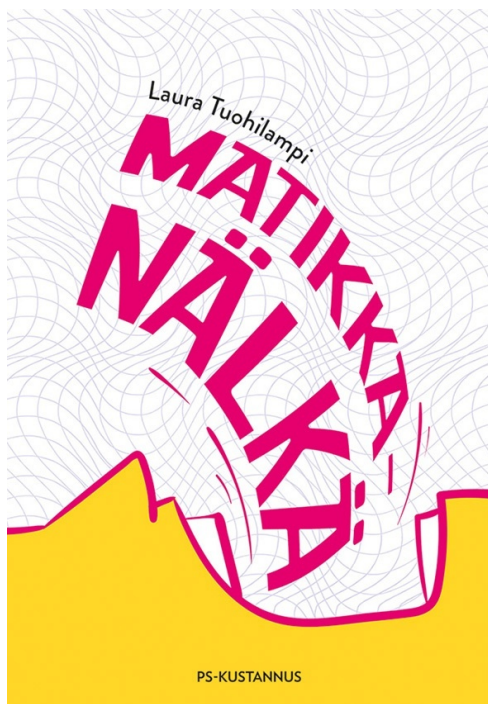


Opetusideoiden tarjoilupöytä: Kirjan Matikkanälkä arvio ja Laura Tuohilammen haastattelu

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Laura Tuohilampi: Matikkanälkä. PS-kustannus, 2017. 187 sivua. Hinta eri verkkokaupoissa 31,70–40,95 euroa.



Kuultuani Laura Tuohilammen Matikkanälkä-kirjasta päätin heti, että se on hankittava ja luettava. Iloni ja

yllätykseni olikin suuri, kun Educa-messuille aamulla saapuessani minua odotti Solmun ständillä kappale kirjaa ystävällisin terveisin varustettuna. Opettajan Tietopalvelun ständi oli aivan meidän vieressämme, ja he olivat ajatelleet, että meille jätetty ilmaiskappale voisi mennä hyvään osoitteeseen.

Tuohilammen kirjan päämäärä on kunnianhimoinen: saada ihmiset innostumaan matematiikasta, jopa rakastumaan matematiikkaan. Matikkanälkä ei missään nimessä ole matematiikan kirja. Matematiikkaa se sisältää, mutta matematiikan oppikirjaksi sitä ei kannata hankkia. Sen sijaan se on perusteellinen kokoelma ideoita matematiikan opetukseen tutkimustuloksilla höystettynä.

Laura Tuohilampi on tehnyt väitöskirjansa *Deepening mathematics related affect research into social and cultural: Decline, measurement and significance of students' multi-level affect in Finland and Chile* matematiikan opetuksesta, ennen kaikkea matematiikkaan liittyvistä affektiivisistä tekijöistä, eli niistä tekijöistä, jotka vaikuttavat esimerkiksi tunteisiin ja motivaatioon. Tuohilammen valtava tietämys opetukseen liittyvästä tutkimuksesta heijastuu joka paikassa kirjan sivuilla. Ideoita matematiikan opetuksen mielenkiintoistamiseen ei esitetä vain hauskoina pieninä juttuina, vaan niille esitetään perusteet kirjallisuudessa.

Tietokirjaksi Matikkanälkä on helppolukuinen. Olen it-

se lukenut sitä lounastauoilla sekä esimerkiksi bussissa. Tieteelliset tulokset on esitetty kevyessä muodossa, teoreettisemman käsittelyn löytää vaikka Tuohilammen väitöskirjasta. Ratkaisu on mielestäni hyvä, sillä näin teksti pysyy ahmittavana. Alaviitteinä löytyy viitteitä varsinkin oleellisimpiin tutkimuksiin, mutta ei kaikkiin mahdollisiin, joita kirjailija on uransa aikana lukenut, ja jotka epäilemättä ovat vaikuttaneet tekstin sisältöön. Kirjan tarkoitus on kuitenkin olla tietojaa ideapaketti matematiikan opetuksesta kaikille, ei ainoastaan aiheeseen jo syventyneille.

Tuohilampi on kirjoittanut vain johdannon, jälkisanat ja lyhyehkön Matikkaa lautaselle -luvun kirjan lopussa yksin. Kaikissa muissa luvuissa on mukana toinen kirjoittaja. Nämä toiset kirjoittajat on valittu tukemaan juuri sen luvun aihepiiriä ja tuomaan omaa asiantuntemustaan. Joukossa on opettajia, printtien suunnittelijoita, sovelletun matematiikan tutkijoita, lastentarhan opettajia, matematiikan didaktiikan professori Markku Hannula ja vaikka mitä.

Yksittäinen asia, jota kirjaa lukiessani pidin hyvin arvokkaana, oli se, miten Tuohilampi kyseenalaisti matematiikan tuntien kiireen. Hän totesi, että oppikirjojen ja opetussuunnitelman vastaavuus ei ole mitenkään täydellinen, jolloin oppikirjaa orjallisesti seuraamalla voidaan kyllä täyttää opetussuunnitelman vaatimukset, mutta kiire voi tulla, ja mihinkään kokeilevaan lähestymistapaan tai kirjan raameista poikkeavaan ei tällöin välttämättä ole aikaa. Viesti on, että opettajien pitäisikin uskaltaa enemmän poiketa kirjasta ja noudattaa vain opetussuunnitelmaa ohjenuorana siitä, mitä oikeasti on opittava. Tuohilampi tunnustaa toki sen, että oman materiaalin tai omien opetusmenetelmien luominen voi aluksi olla todella työlästä, mutta ratkaisuksi hän ehdottaa vuosi vuodelta pienen patkan tekemistä tai opettajien yhteen lyöttäytymistä, jolloin kaikki voivat hyötyä toistensa ideoista.

Opetan itse yliopistossa. Koetin kirjaa lukiessani miettiä, miten menetelmät ja ajatukset soveltuisivat yliopisto-opetukseen. Yliopistossa luentoja on kohtuullisen vähän materiaalin haastavuuteen nähden. Erillistä kurssien sisältöä käsittelevää opetussuunnitelmaa ei ole, jolloin opetussuunnitelmana usein toimii joko aikaisempien vuosien kuvaus tai oma käsitys siitä, mitä kurssilla pitäisi olla (kuitenkin seuraavien ja edeltävien kurssien sisällöt huomioiden). Osa menetelmistä on suoraan käytettynä sellaisia, että ne eivät suoraan yliopistoon kovin hyvin sovellu. Itse tulkitsisin tämän kuitenkin kirjan väärinluvaksi: pointti eivät ole ne yksittäiset ideat ja menetelmät, joita esitellään, vaikka tietysti niitä voi käyttää, jos ne omaan luokkaan sopivat. Pointti on se, että matematiikan opetuksessakin pitäisi olla vaihtelevuutta. Opiskelijat pysyvät paremmin hereillä, ja heillä on mukavampaa, kun on pientä vaihtelevuutta, ja ennen kaikkea, kun hekin pääsevät osallistumaan.

Menetelmät ovat näennäisen leppoisia. Kuitenkin Tuohilampi monessa kohdassa näyttää todellisen karvansa: työtä on tehtävä. Kyse on vain siitä, että työnteosta tehdään mielekäästä, ja menetelmiä vaihdellaan, ja välillä tehdään jotain kevyempää, koska kukaan ei jaksa koko ajan puurtaa. Hän myös kertoo työnteon merkityksestä itseluottamukselle. Psykologian pääsykoevalmennus ja painin Jouko Salomäki ovat esimerkkejä. Siinä missä Salomäki treenasi niin epäinhimillisen paljon, että saattoi olla varma, ettei kukaan muu ainaakaan ole treenannut enemmän, psykologian pääsykoevalmennuksessa Tuohilampi oli pistänyt opiskelijat laskemaan, laskemaan ja laskemaan, myös epämiellyttäviä tehtäviä, mutta aina tsempaten, jotta opiskelijat tunsivat tehneensä töitä ja uskoivat itseensä riittävästi selvittääkseen pääsykokeesta kunnialla.

Luvussa omatahtisuudesta Tuohilampi kertoo jotain melko karmivaa, mikä on mielestäni hyvä muistaa aina tasoryhmäkeskusteluissa: Kim Beswickin vuoden 2015 tutkimuksen *Raising attainment: What we might learn from teachers' beliefs about their best and worst mathematics students?* mukaan opettajat eivät näe hyviä ja huonoja oppilaita samalla oppimispolulla eri kohdissa, vaan oppilasprofiililtaan aidosti erilaisina. Tämän seurauksena huonoista opiskelijoista pyritään vain tekemään hiukan parempia huonoja opiskelijoita, ja älyllisiä haasteita ja monipuolisia tehtäviä annettiin vain hyville opiskelijoille, kun taas huonojen opiskelijoiden katsottiin tarvitsevan vain mekaanista puurtamista. Riippumatta siitä, missä itse opettaa, pitäisin hyvin tärkeänä, että jokainen matematiikan opetuksen kanssa missään tekemisissä oleva on tietoinen tästä tuloksesta, sillä on ainakin minusta täysin absurdi ajatus, että huonoille opiskelijoille pitäisi antaa mekaanista puurtamista, mutta silti tämä on asia, johon voisin hyvin helposti syyllistyä itsekin. Tällä saa kyllä helposti tapettua lopunkin innon matematiikkaan.

Kirjaa ei kuitenkaan ole kirjoitettu vain matematiikan opettajille, vaan aivan kaikille. Kirjassa kerrotaan, miten matematiikkaa voi lähestyä, ja missä kaikessa matematiikkaa itse asiassa on. Voin toki kuvitella, miten sellainen ihminen, joka kouluaikana on matematiikkaa vihannut, saattaa kirjaa lukiessaan turhautua: miksei tätä kirjaa ollut olemassa jo aiemmin? Miksei matematiikan tunneilla opiskeltu näin?

Jos tähän mennessä en vielä ole saanut viestiä selväksi, niin formuloidaan vielä kerran: Lue!

Laura Tuohilammen haastattelu

Laura Tuohilampi on kirjoittanut Matikkanälkä-kirjan, jolla on tarkoitus innostaa ihmisiä matematiikan pariin. Keskustellaan Tuohilammen kanssa hetki aiheesta:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen: Viime aikoina on ollut jonkin verran keskustelua siitä, vaikuttaako osaaminen innostukseen vai päinvastoin. Osan mielestä syyseuraus on ainoastaan osaamisesta innostukseen. Jos yhtään oikein olen kirjaasi tulkinut, ymmärrän sinun haluavan nimenomaan innostaa ihmisiä, että he oppisivat.

Laura Tuohilampi: Osaamisen ja asenteen suhde ei ole aivan niin yksioikoinen kuin moni luulee. Itse korostan ennen kaikkea eräänlaista hyötynäkökulmaa. Affektiivisen puolen negatiivisuus ei välttämättä estä oppimasta, mutta kylläkin käyttämästä osaamistaan. Jos osaamista ei käytetä mihinkään, on sen taso aivan yhdentekevä. Pitkittäistutkimus näyttää vahvemman kausaliteetin osaamisesta asenteisiin kuin päinvastoin ainakin Suomen datassa¹, mutta asiat eivät ole niin yksinkertaisia. Ensinnäkin, osaaminen selittää niin vahvasti tulevaa osaamista, ettei asenteelle jää paljoa selitettävää. Toisekseen, asioita voi oppia, vaikkei olisikaan motivoitunut, mutta kuitenkin on lukuisia kertoja vahvistettu, että parhaiten osaavat pitävät aineesta ja vastaavasti huonosti osaavat eivät pidä eivätkä halua matikan kanssa olla tekemisissä. Huono asenne saa sulkemaan matikan ulos omasta elämästä, jolloin opetusresurssi on mennyt hukkaan, joten oppiaineeseen innostaminen on välttämätöntä. Hyvä asenne auttaa opiskelemaan lujemmin ja syvemmin, joten se vaikuttaa myös osaamiseen. Oli muna-kana-asetelma kumpi vaan, on vaikea kuvitella, kuka haluaisi oppimistuloksen olevan se, että oppilaat eivät koe pystyvänsä työskentelemään matikan kanssa eivätkä pidä siitä.

Tavallaan koko keskustelu [innostuksen ja oppimisen suhteesta] on minun mielestäni täysin absurdi. ”Oppimisen ei kuulukaan olla kivaa”, sanovat ihmiset, jotka ovat koko elämänsä ajan nauttineet oppimisesta ja siihen liittyvästä ponnistelusta, ja älähtävät, jos oma työnkuva on merkityksetöntä tai huonosti järjestettyä. Eikö siis omalla kohdalla itseisarvoinen asioiden työläys ja vaikeus olekaan hyvä ja ihmisenä kehittävä asia?

A.-M. E.-H.: Minusta jotenkin se asenne, että pakotetaan oppilaat tekemään jotain tosi kurjaa siinä toivossa, että oppisi siitä tykkäämään, on aika absurdi.

L. T.: Koko jutunhan voisi kääntää niinkin päin, et-

tei koskaan ole missään osoitettu, että huonosta asenteesta matikkaa kohtaan olisi jotakin hyötyä. Huono asenne ehdottomasti ei ennusta parempaa osaamista. Onkin jännä, miten paljon sille löytyy puolestapuhujia. Kannatan kyllä haastamista, mutta siihen täytyy tukea ja auttaa sinne pääsemisessä, ei pakottaa. Ehkä matemaatikoissa on masokisteja tavallista enemmän, mutta ainakin perusopetuksessa toimitaan koko ikäluokan kanssa.

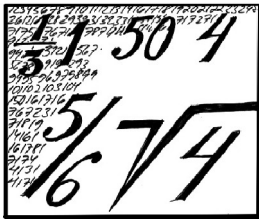
A.-M. E.-H.: Siinä missä alakoulun ekoilla luokilla matematiikkaa pidetään tosi kivana ja pienet lapset tykkäävät matematiikasta, niin yhtäkkiä innostus vaikuttaa häviävän yläkouluun mentäessä. En vain tajua, mitä ihmettä siinä kymmenen ikävuoden hujakoilla tapahtuu.

L. T.: Veikkaukseni on, että vaikka toistoa ja tylsää kirjan tahkoamista on alusta alkaen, niin jokusen vuoden oppilaat jaksavat pysyä optimisteina, mutta siinä kymppin kieppeillä he eivät voi enää valehdella itselleen. Olisi niin helppoa saada muutosta ihan vaan kohtuullisella vaihtelulla ja sillä, että välillä ei olisi kiire yhtään mihinkään! Aikaa tuhlataan jokaisen erikoistapauksen käsittelyyn ja harjoitteluun erikseen. Sen sijaan voisi käyttää kunnolla aikaa vaikka peruslaskutoimituksiin ja muihin opetussuunnitelmasta tuleviin perussisältöihin, minkä jälkeen oppilas osaisi ihan itse löytää työkalut kaikenlaisiin tapauksiin.

Kävin oppilaan kanssa läpi analyyttistä geometriaa. Oppilas on sinnikäs ja fiksu, ja tunnollisesti opetellut kaiken. Hän on saanut aivan käsittämättömiä oivalluksia, kun olemme työskennelleet ihan yläkoulutasoisten juttujen kautta syvälle menen. Laskimme esimerkiksi pisteiden välisiä etäisyyksiä. Sanoin ihan sivuhuomauksena, että olet laittanut luvut Pythagoraan lauseeseen. Oppilas sai ihan tajunnanräjäyttävän oivalluksen, kun hän näki sen. Oppilaalla vapautuu koko ajan muistikuormaa, kun ei tarvitse pinnistellä kirjassa kaavoina annettavia juttuja, vaan voi ymmärtää eri työvälineitä ja kokonaisuuksia ja oikeasti itse hyödyntää matikkaa eikä vain kopioida sitä.

Matikkaahan on mahdollista opettaa niin, että se on kivaa, innostavaa ja tuottaa hyviä oppimistuloksia. Mikä on se syy, miksi jonkun näistä haluaisi jättää pois?

¹Jari Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vv. 2005-2012, koulutuksen seurantaraportti v. 2013:4.



Vaihtojännitteen ja -virran tehollisarvo

Vesa Linja-aho

autoelektroniikan lehtori, Metropolia-ammattikorkeakoulu
etunimi.sukunimi@metropolia.fi

Johdanto

Edellisessä Solmun numerossa (1/2017) ilmestyneessä artikkelissani *Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla* tutustuttiin sinimuotoisen vaihtojännitteen ja -virran käsittelyyn osoittimien avulla.

Artikkelissa laskettiin huippuarvon osoittimilla, koska (jo muutenkin teoreettisesti melko haastavaa asiaa käsittelevä) artikkeli olisi paisunut liian laajaksi, jos siihen olisi sisällyttänyt myös vaihtosähkötehon ja tehollisarvon käsitteet.

Huippuarvoilla laskeminen on täysin oikein sekin, mutta käytännön sähkötekniikassa vaihtojännitteistä ja -virroista puhuttaessa käytetään kuitenkin lähes aina jännitteiden ja virtojen tehollisarvoja.

Esimerkiksi tavallisessa kotitalouspistorasiassa on sinimuotoinen vaihtojännite, jonka huippuarvo eli amplitudi on noin 325 voltia ja taajuus 50 hertsiä, eli

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) = \hat{u} \sin(2\pi f t) = 325 \text{ V} \sin(2\pi \cdot 50 t).$$

Kuitenkin kaikki tietävät, että Suomessa verkkojännite on 230 voltia. Mikä arvo tämä on, jos kerran verk-

kojännitteen amplitudi on 325 voltia? 230 voltia on verkkojännitteen **tehollisarvo**. 230 voltin tehollisarvo tarkoittaa, että kyseiseen vaihtojännitteeseen kytketty sähkövastus kuumenee samalla teholla kuin 230 voltin tasajännitteeseen kytketty vastus. Voidaan osoittaa, että sinimuotoisella vaihtojännitteellä huippuarvon ($\hat{u}$) ja tehollisarvon (U) välinen suhde on $\sqrt{2}$ eli verkkojännitteelle:

$$\frac{\hat{u}}{U} = \sqrt{2} \Rightarrow U_{\text{verkko}} = \frac{\hat{u}_{\text{verkko}}}{\sqrt{2}} = \frac{325 \text{ V}}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ V}.$$

Tarkastellaan asiaa yksityiskohtaisemmin.

Sähköteho

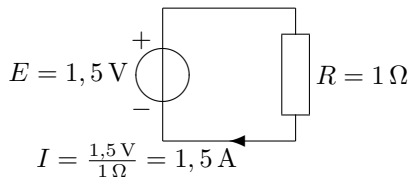
Mikäli piirielementin yli vaikuttaa jännite u ja sen läpi kulkee virta i ,¹ sähköteho p elementissä on jännitteen ja virran tulo

$$p = ui.$$

Esimerkiksi jos 1,5 voltin paristoon² kytketään 1 ohmin suuruisen vastus, kulkee vastuksen läpi Ohmin lain mukaan $I = \frac{1,5 \text{ V}}{1 \Omega} = 1,5 \text{ A}$ sähkövirta:

¹Jos hämmentää, miksi nyt käytetään pieniä kirjaimia jännitteelle ja virralle, katso artikkelin viimeiseltä sivulta otsikko **merkinnöistä**.

²Kaupasta saatava 1,5 voltin jännitteen tuottava esine on – jos viilataan pilkkua – *sähköpari*, ja jos näitä kytketään useita sarjaan, saadaan esimerkiksi 4,5 voltin tai 9 voltin *paristo*. Arkikielessä sana paristo on kuitenkin vakiintunut tarkoittamaan niin sähköparia kuin paristoakin (tavallista kuluttajaa ei kiinnosta, koostuuko kaukosäätimen tai leikkikalun voimanlähde useista sähkökemiallisista pareista vai yhdestä).



Tällöin vastus kuumenee teholla

$$P = UI = 1,5 \text{ V} \cdot 1,5 \text{ A} = 2,25 \text{ W}.$$

Usein ei ole tarkoituksenmukaista laskea vastuksen jännitettä tai virtaa välitulokseksi, kun vain teho kiinnostaa. Sijoittamalla Ohmin laki tehon lausekkeeseen saadaan kätevät kaavat:

$$P = UI = (RI)I = RI^2 \quad P = UI = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}.$$

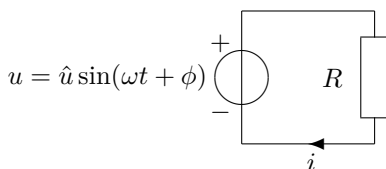
Teho on siis verrannollinen jännitteen tai virran neliöön. Esimerkiksi jos johtimen virta kaksinkertaistuu, sen häviöt nelinkertaistuvat.³ Tai jos virta saadaan puolitettua, häviöt vähenevät 75 prosenttia. Juuri tähän perustuu korkeiden jännitteiden käyttö sähkön siirrossa: kun voimalinjassa käytetään korkeaa jännitettä, saadaan sama teho siirrettyä pienemmällä virralla, jolloin häviöt pienenevät.

Vastus ja vaihtojännite

Ohmin lain mukaan virta vastuksessa on jännitteen ja resistanssin osamäärä, eli

$$i = \frac{u}{R},$$

joten seuraavassa virtapiirissä



$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u} \sin(\omega t + \phi)}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t + \phi).$$

Vastusarvon muuttaminen ei siis vaikuta taajuuteen eikä vaihekulmaan, vaan ainoastaan virran amplitudiin, joka on siis $\frac{\hat{u}}{R}$. Tehoksi vastuksessa saadaan:

$$p = ui = \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \cdot \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t + \phi) = \frac{\hat{u}^2}{R} \sin^2(\omega t + \phi).$$

³Lisäksi: metallijohtimen resistanssi kasvaa lämpötilan noustessa, joten häviöt hieman enemmän kuin nelinkertaistuvat. Resistanssin lämpötilariippuvuudesta johtuu myös se, että käyttöikänsä lopussa oleva hehkulamppu palaa rikki lähes aina sitä sytytettäessä: silloin sen läpi kulkee suurin virta, joka sulattaa langan heikoimman kohdan poikki.

Sijoittamalla yllä olevaan lausekkeeseen lukuarvot voidaan laskea teho tietyllä ajanhetkellä. Tämä ei kuitenkaan ole usein tavoiteltavaa: sähkötekniikassa kiinnostavia arvoja ovat keskimääräinen teho sekä joskus myös huipputeho.

Huipputeho vastuksessa on helppo laskea: koska sinifunktio saa arvoja välillä $[-1, 1]$, saa sen neliö arvoja välillä $[0, 1]$, joten huipputeho $\hat{p}$ on yksinkertaisesti sinin neliön kerroin

$$\hat{p} = \frac{\hat{u}^2}{R},$$

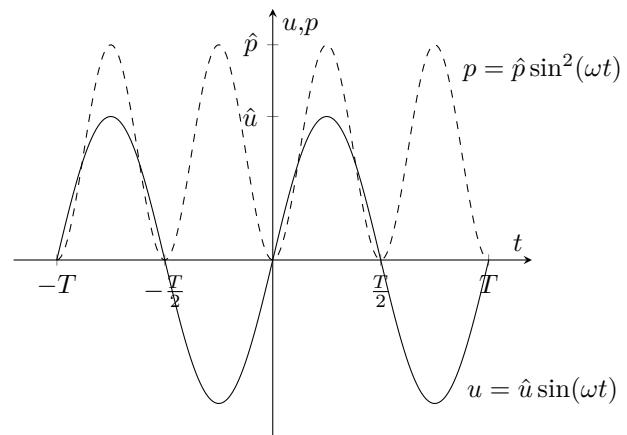
joka ei poikkea tasajännitteen tehon kaavasta. Aiemmassa esimerkkilaskussa 1 ohmin vastus kytkettiin 1,5 voltin tasajännitelähteeseen, jolloin teho oli

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(1,5 \text{ V})^2}{1 \Omega} = \frac{(1,5 \text{ V})^2}{1 \Omega} = 2,25 \text{ W}.$$

Jos tasajännitelähteen tilalle vaihdetaan vaihtojännitelähde, jonka huippuarvo on 1,5 voltia, saadaan vastuksen huipputehoksi sama

$$\hat{p} = \frac{(1,5 \text{ V})^2}{1 \Omega} = 2,25 \text{ W}.$$

Tämä teho saavutetaan kaksi kertaa vaihtojännitteen jakson aikana: sinin saavuttaessa huippunsa sekä miniminsä. Tällä välillä teho vaihtelee sinifunktion neliön mukaisesti:



Koska teho ainoastaan käärii huippuarvossaan kahdesti yhden jännitteen/virran jakson aikana, on selvää, että 1,5 voltin huippuarvoinen vaihtojännite ei lämmitä vastusta yhtä paljon kuin 1,5 voltin tasajännite, joka syöttää jatkuvasti vastukseen 2,25 watin tehon. Kuinka suuren tehon vaihtojännite sitten keskimäärin syöttää vastukseen?

Keskimääräinen teho P saadaan laskettua laskemalla vastuksen kuluttama energia yhden jakson aikana ja jakamalla se jaksonajalla. Koska teho muuttuu koko

ajan, energiamäärä on laskettava määrättyä integraalina yhden jakson ajalta:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt.$$

Valitaan $\omega = 1$, jolloin jännitteen jaksonaika on 2π . Koska sinin neliön jakson pituus on π , riittää että laskeamme integraalin väliltä $[0, \pi]$:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\hat{u}^2}{R} \sin^2(t) \, dt.$$

Siirretään vakiot integrointimerkin eteen:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{R\pi} \int_0^\pi \sin^2(t) \, dt.$$

Sinin neliö on kätevin integroida käyttämällä identiteettiä $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{R\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \, dt = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \int_0^\pi 1 - \cos(2t) \, dt,$$

jolloin integraali voidaan laskea

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^\pi.$$

Lopputuloks on erittäin sievä, koska sini sekä nollasta että kulmasta 2π on nolla:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin(2\pi) - 0 + \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) \right) = \frac{\hat{u}^2}{2R}.$$

Tehollisarvo

Edellä todistettiin, että jos vastukseen kytketään sinimuotoinen vaihtojännite, jonka huippuarvo on $\hat{u}$, vastuksessa kuluu teho

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R}.$$

Kuten artikkelin alussa mainittiin, verkkojännitteen 230 voltin tehollisarvo tarkoittaa, että kyseiseen vaihtojännitteeseen kytketty sähkövastus kuumenee samalla teholla kuin 230 voltin tasajännitteeseen kytketty vastus. Kun nyt on todistettu, kuinka teho lasketaan sinimuotoisen jännitteen huippuarvosta, voidaan tehollisarvo selvittää helposti. Tehollisarvo on se jännite U , joka vastuksen tehon kaavaan $P = \frac{U^2}{R}$ sijoitettuna antaa saman tuloksen kuin äsken todistettu kaava $P = \frac{\hat{u}^2}{2R}$, eli

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\hat{u}^2}{2R} \Rightarrow U = \pm \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}.$$

Negatiivinen vastaus voidaan hylätä turhana, koska jännitteen tai virran suunnalla ei ole tehon kannalta merkitystä, joten

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}.$$

Tehollisarvon määritelmiä

Tehollisarvon määritelmän sisältö on yksiselitteinen, mutta koska käsite on välillä hankala hahmottaa, kannattaa lukea eri määritelmät läpi ja valita niistä se, joka kolahtaa.

Itse suosin opetuksessa pragmaattista määritelmää: tehollisarvo vastaa kysymykseen *minkäsuuruiseen tasajännitteeseen hehkulamppu tulee kytkeä, jotta se palaa yhtä kirkkaasti kuin tässä vaihtojännitteessä?*

Suomenkielisessä Wikipediassa tehollisarvo määritellään seuraavasti: *Vaihtojännite syöttää kuormaan saman tehon kuin sen tehollisarvon suuruinen tasajännite.*

Yliopistonlehtori Kimmo Silvonen muotoilee kirjassaan *Sähkötekniikka ja piiriteoria* määritelmän *vaihtovirran keskimääräinen lämmittävä vaikutus vastuksessa on yhtä suuri kuin tehollisarvoltaan samansuuruisen tasavirran.*

Lukiofysiikan oppikirja Galilei 7:n mukaan *vaihtovirran ja jännitteen teholliset arvot on määriteltty siten, että niiden suuruiset tasavirta ja tasajännite aiheuttavat vastuksessa saman keskimääräisen tehonkulutuksen.*

Toinen tapa laskea integraali

Martti Valtosen ja Anu Lehtovuoren kirjassa *Piirianalyysi 1* (s. 116) integraali lasketaan näppärällä tavalla. Kun lasketaan integraali koko jakson ajalta $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt,$$

ja koska $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, voidaan kirjoittaa

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(t) \, dt$$

eli

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt - \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt,$$

josta edelleen

$$\int_0^{2\pi} 1 \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt.$$

Symmetrian nojalla koko jakson ajalta sinin ja kosinin neliöiden integraalit ovat yhtä suuret, joten

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi,$$

ja kun teho integroidaan koko jakson ajalta $[0, 2\pi]$, saadaan:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{u}^2}{R} \sin^2(t) dt \\ &= \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt. \end{aligned}$$

Ja sijoittamalla äsken laskettu integraalin arvo:

$$P = \frac{\hat{u}^2}{2R\pi} \pi = \frac{\hat{u}^2}{2R},$$

kuten toisellakin laskutavalla.

Merkinnöistä

Jos ei erikseen toisin mainita, sähkötekniikassa isot kirjaimet U ja I tarkoittavat tasajännitettä tai vaihtojännitteen tehollisarvoa. Pienet kirjaimet tarkoittavat hetkellisarvoa. Jos halutaan erikseen korostaa, että kyseessä on tehollisarvo, voidaan ison kirjaimen kanssa käyttää alaindeksiä eff tai rms ⁴:

$$U = U_{\text{eff}} = U_{\text{rms}}.$$

Osoitinlaskentaa voi suorittaa niin huippu- kuin tehollisarvoilla: Jos lähtöarvot ovat huippuarvoja, lopputuloksetkin ovat huippuarvoja. Jos lähtöarvot ovat tehollisarvoja, lopputuloksetkin ovat tehollisarvoja.

Koska tehollisarvoilla on enemmän konkreettista merkitystä sähkötekniikassa, käytännössä aina lasketaan tehollisarvoilla.

Vaihe-ero tekee tilanteen monimutkaisemmaksi

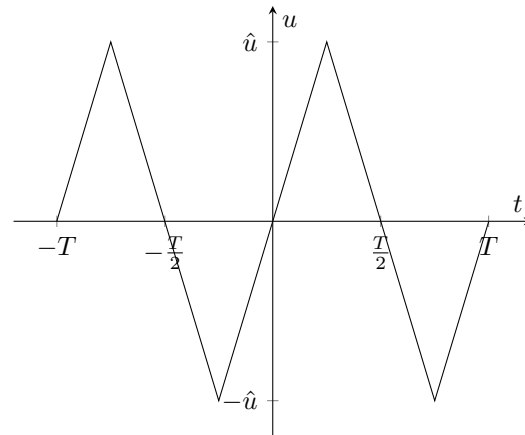
Tässä artikkelissa tutkittiin tehollisarvoa jännitteen kautta. Samanlainen tarkastelu olisi voitu tehdä vaihtovirralla. Kun vastuksen virran tehollisarvo ja jännitteen tehollisarvo kerrotaan keskenään, saadaan komponentin kuluttama teho.

Vastuksessa jännite ja virta ovat samassa vaiheessa. Jos jännitteen ja virran välillä on vaihe-eroa, tilanne muuttuu monimutkaisemmaksi: voidaan osoittaa esimerkiksi, että mikäli jännitteen ja virran välillä on 90 asteen vaihe-ero, komponentti ei kuluta keskimäärin tehoa ollenkaan, mistä päästään käsitteisiin pätöteho, loisteho ja näennäisteho – joita käsitellään seuraavassa Solmun numerossa.

Tämän takia ensimmäisellä sivulla käytettiin merkintää $p = ui$, koska se on yleispätevä hetkelliselle teholle. $P = UI$ pitää paikkansa vain tasasähköpiirissä sekä sellaisessa vaihtosähköpiirissä, jossa jännite ja virta ovat samassa vaiheessa. Mikäli jännitteen ja virran välillä on vaihe-eroa, $P < UI$, mutta tästä lisää ensi numerossa.

Kokeile itse!

Edellä johdettiin kerroin $\sqrt{2}$ sinimuotoisen vaihtojännitteen huippuarvon ja tehollisarvon suhteelle. Osoita, että kolmiomuotoiselle vaihtojännitteelle huippuarvon ja tehollisarvon välinen suhde on $\sqrt{3}$:



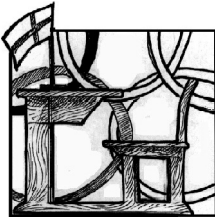
Lähteitä ja lisälukemista

Martti Valtonen, Anu Lehtovuori: Piirianalyysi 1. 1. painos. Unigrafia. Helsinki 2011.

Kimmo Silvonen: Sähkötekniikka ja piiriteoria. 1. painos. Otatieto. Helsinki 2009.

Lavonen, Kurki-Suonio, Hakulinen: Galilei 7 – Sähkömagnetismi. 1. painos. Weilin+Göös. Porvoo 1996.

⁴Rms on lyhenne sanoista root mean square, eli neliöllinen keskiarvo tai neliökeskiarvo.



Solmun ongelmapalsta

Lukijoilta on tullut ilahduttava määrä ratkaisuja ja tehtäväehdotuksia Solmuun. Tämänkertaisiin tehtäviin toivotaan ratkaisuja elokuun 2017 loppuun mennessä. Ratkaisut voi lähettää osoitteeseen aernvall@abo.fi. Myös tehtäväehdotukset ovat erittäin tervetulleita.

Jätetään vielä avoimiksi ne viime numeron tehtävät, joihin ei ole tullut lukijoilta ratkaisuehdotuksia, eli lisätehtäviä kaivatessa kannattaa kaivaa Solmu 1/2017 esille.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Timo Kärkkäinen) Ratkaise yhtälön

$$25x^4 + 100x^3 + 20x^2 + 40x + 4 = 0$$

kaikki juuret.

Tehtävä 2. (Ehdottanut Aki Halme) Kapteeni Jarmo Kerkkinen haluaa matkustaa maapallolta juhlimaan 4,3 valovuoden päähän Alpha Centaurille. Ikävä kylä poimua on vaurioitunut ja kykenee tekemään vain täsmälleen 10 valovuoden loikkia. Pääseekö Jarmo juhliin? Jos ei, miksi ei? Jos pääsee, montako loikkaa vähintään tarvitaan?

Entä silloin, jos loikkien välissä voi tehdä vain täsmälleen 90 asteen käännöksen?

Tehtävä 3. (Ehdottanut Aki Halme) Kuinka suuri on donitsin pinta-ala? Mitä donitsista kannattaa viivaimella mitata, jos voit tehdä

a) kaksi mittausta

b) vain yhden mittauksen?

(Ajatellaan tässä donitsi kaksiulotteisena otuksena, ei siis normaalina kolmiulotteisena.)

Tehtävä 4. (Brittiläinen kilpailutehtävä vuodelta 2011) Poistetaan yksi luku lukujoukosta, joka koostuu luvuista $1, 2, \dots, n$. Jäljelle jääneiden lukujen keskiarvo on $40\frac{3}{4}$. Mikä luku poistettiin?

Ratkaisut

Tehtävä 2, Solmu 3/2016. Vauvanruokapurkeista pinotaan pyramidi seinää vasten siten, että kerroksia on ainakin kaksi ja jokaisessa kerroksessa on yksi vähemmän kuin sen alla olevassa kerroksessa. Ylimmässä kerroksessa voi olla enemmän kuin yksi purkki.

a) Kuinka voisit pinota 100 purkkia?

b) Jos kerroksia on kuusi ja ylimmässä kerroksessa on kolme purkkia, montako purkkia on pinossa kaikkiaan?

c) Voiko joitakin purkkimääriä pinota useammalla eri tavalla?

d) Mikä on ainoa purkkimäärä välillä 1000000–2000000, josta ei voi tehdä pyramidia?

Ratkaisu. (toimitus) a) Sata purkkia voi pinota asettamalla ensimmäiseen kerrokseen 22 purkkia, toiseen 21, kolmanteen 20, neljänteen 19 ja viidenteen 18.

b) Pinossa on

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

purkkia.

c) Kyllä, esimerkiksi 15 voidaan pinota kahdella tavalla: kahdeksan purkkia alempaan ja seitsemään ylemmän kerrokseen tai kuusi alimpaan, viisi keskelle ja neljä ylimpään.

d) Osoitetaan, että 2^{20} on ainoa purkkimäärä välillä, josta ei voi tehdä pyramidia. Aloitetaan todistus osoitamalla, että kaikki muut purkkimäärät voidaan pinoita.

Jos purkkimäärä on pariton, vaikkapa $2k + 1$, niin pinoaminen on helppo tehdä: $k + 1$ alempaan ja k ylemmän kerrokseen.

Oletetaan nyt, että purkkimäärä n on parillinen, mutta ei kakkosen potenssi. Silloin luvulla on jokin jakaja, joka on ykköstä suurempi pariton luku. Olkoon $n = dh$, missä $d > 1$ on pariton.

Jos $h - 1 \leq \frac{d-1}{2}$, voidaan purkit pinota asettamalla $\frac{d-1}{2} - h + 1$ purkkia ylimpään kerrokseen, $\frac{d-1}{2} - h + 2$ toiseksi ylimpään ja niin edespäin, kunnes alimmassa kerroksessa on $\frac{d+1}{2} + h - 1$ purkkia.

Jos taas $h - 1 > \frac{d-1}{2}$, ei tämä pinoamistekniikka toimi, koska ylimmässä kerroksessa ei voi olla negatiivista määrää purkkeja. Tällöin pistetään alimpaan kerrokseen $h + \frac{d-1}{2}$ purkkia, toiseksi alimpaan $h - 1 + \frac{d-1}{2}$ purkkia, ja näin jatketaan d kerroksen verran, eli ylimmässä kerroksessa on $h - \frac{d-1}{2}$ purkkia.

Osoitetaan vielä, että jos purkkeja on 2^{20} , niin pinoaminen ei onnistu. Mikäli pinoaminen on mahdollista, on purkkimäärän oltava

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^M k &= \frac{M(M+1)}{2} - \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{M^2 - N^2 + M - N}{2} = \frac{(M-N)(M+N+1)}{2}. \end{aligned}$$

Molempien tekijöiden on oltava kakkosen potensseja. Toinen luvuista on parillinen, toinen pariton. Ainoa pariton luku, joka on kakkosen potenssi, on ykkönen, jolloin toisen luvuista on oltava yksi. Selvästi $M + N + 1 > 1$, jolloin on pädetävä $M - N = 1$, mutta tällöin kerroksia on vain yksi, mikä ei ole sallittua, joten pinoaminen ei onnistu.

Tehtävä 3, Solmu 3/2016. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Määritä kaikki kokonaislukuparit (a, b) , joilla

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

Ratkaisu. (toimitus) Jos vähintään toinen luvuista on nolla, pätee yhtäsuuruus varmasti. Voimme siis nyt olettaa, että sekä a että b ovat nollasta poikkeavia. Tapaus, jossa molemmat ovat negatiivisia, on täsmälleen samanlainen kuin tapaus, jossa molemmat ovat positiivisia. Riittää siis tarkastella tapaukset, joissa joko

molemmat ovat positiivisia, tai toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen.

Käsitellään aluksi tapaus, jossa molemmat ovat positiivisia. Voidaan olettaa, että $b \geq a$. Yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$a^4 + ba + b^4 + a^3b^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

kanssa. Tämä yhtälö supistuu muotoon

$$1 + a^2b^2 = 4a^2 + 6ab + 4b^2.$$

Nyt voidaan arvioida:

$$1 + a^2b^2 > a^2b^2$$

sekä

$$4a^2 + 6ab + 4b^2 \leq 14b^2.$$

Siispä $a^2b^2 < 14b^2$, joten $a \in \{1, 2, 3\}$. Käymällä tapaukset läpi löydetään ratkaisu $a = 3, b = 5$.

Siirrytään nyt tapaukseen, jossa toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen. Voidaan olettaa, että $a < 0 < b$. Kirjoitetaan $-a$ luvun a paikalle, jolloin voidaan jälleen tarkastella yhtälöä positiivisten lukujen joukossa. Yhtälö on nyt siis

$$(b - a^3)(b^3 - a) = (b - a)^4,$$

joka aukikerrottuna antaa

$$a^4 - a^3b^3 - ab + b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$$

josta supistamisen jälkeen saadaan

$$-1 - a^2b^2 = -4b^2 - 4a^2 + 6ab.$$

Voidaan jälleen arvioida:

$$-1 - a^2b^2 < -a^2b^2$$

sekä

$$-4b^2 - 4a^2 + 6ab > -4 \max\{a^2, b^2\},$$

joten

$$-4 \max\{a^2, b^2\} < -a^2b^2,$$

joten

$$\min\{a^2, b^2\} < 4,$$

eli $\min\{a, b\} = 1$.

Jos $a = 1$, niin $(b - 1)(b^3 - 1) = (b - 1)^4$, jolloin $b = 1$. Jos taas $b = 1$, niin $(-a + 1)(-a^3 + 1) = (1 - a)^4$, eli $a = 1$.

On siis löydetty ratkaisut $(0, b)$, $(a, 0)$, $(3, 5)$, $(-3, -5)$, $(5, 3)$, $(-5, -3)$, $(-1, 1)$ ja $(1, -1)$, sekä osoitettu, että muita ei ole.

Tehtävä 4, Solmu 3/2016. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Etsi yhtälön

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - x} \sqrt{4 - (x - 2) \sqrt{1 + (x - 5)(x - 7)}} \\ = \frac{5x - 6 - x^2}{2} \end{aligned}$$

reaalilukuratkaisut.

Ratkaisu. (Timo Kärkkäinen) Halutaan reaalilukuratkaisuja, joten yhtälön oikean puolen ja jokaisen juurrettavan on oltava epänegatiivinen. Yhtälön oikeaa puolta tarkastelemalla huomataan tekijöihin purkamalla

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x-2)(x-3).$$

Kun $x < 2$, lauseke on negatiivinen, samoin kun $x > 3$. Siispä yhtälöllä voi olla reaalisia ratkaisuja ainoastaan välillä $[2, 3]$.

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön vasenta puolta. Sisän juurrettava on $1 + (x-5)(x-7) = (x-6)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{4-x}\sqrt{4-(x-2)|x-6|} = \frac{1}{2}(5x-6-x^2).$$

Koska olemme kiinnostuneita vain välistä $[2, 3]$, voimme asettaa $|x-6| = -(x-6)$. Sisempi juurrettava on nyt $4 + (x-2)(x-6) = (x-4)^2 \geq 0$. Yhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{4-x|x-4|} = \frac{1}{2}(5x-6-x^2).$$

Jälleen koska etsimme ratkaisuja vain väliltä $[2, 3]$, asetamme $|x-4| = -(x-4)$. Uloin juurrettava on $4 + x(x-4) = (x-2)^2$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$2|x-2| = 5x-6-x^2.$$

Koska $x \in [2, 3]$, voidaan kirjoittaa $|x-2| = (x-2)$. Yhtälö saadaan muotoon $2(x-2) = 5x-6-x^2$, jonka ratkaisut ovat 1 ja 2. Ensimmäinen ratkaisu ei ole halutulla välillä. Toinen on. Ratkaisu on siis $x = 2$. Muita reaalisia ratkaisuja ei ole.

Tehtävä 4, Solmu 1/2017. (Ehdottanut Aki Halme) Tasan keskipäivällä kellon tunti-, minuutti- ja sekuntiosoitimet ovat täsmälleen päällekkäin. Hieman yli kello yksi iltapäivällä tunti- ja minuuttiosoitimet ovat jälleen täsmälleen päällekkäin. Minne sekuntiosoitin silloin osoittaa?

Ratkaisu. (Jarno Laiho) Ratkaistaan ensin tunti- ja minuuttiviisareiden kulmanopeudet ω_h ja ω_m :

$$\omega_h = \frac{1}{12} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{3600 \text{ s}} = \frac{\pi}{21600} \text{ rad/s}$$

ja

$$\omega_m = \frac{2\pi \text{ rad}}{3600 \text{ s}} = \frac{\pi}{1800} \text{ rad/s}.$$

Kello 1 olkoon ajanhetki $t_0 = 0$ s. Tuolloin viisareiden kulkema matka (kiertokulma) klo 12 nähden:

- tuntiviisari $\theta_{h_0} = \frac{2\pi \text{ rad}}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$,
- minuuttiviisari $\theta_{m_0} = 0 \text{ rad}$,
- sekuntiviisari $\theta_{s_0} = 0 \text{ rad}$.

Ajanhetkellä t_1 minuuttiviisari on saavuttanut tunti- viisarin ja ne ovat päällekkäin. Tuolloin molempien viisareiden kiertokulmat klo 12 nähden ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se parametrin t_1 suhteen:

$$\theta_{m_0} + \omega_m t_1 = \theta_{h_0} + \omega_h t_1,$$

joten

$$t_1 = \frac{\theta_{h_0} - \theta_{m_0}}{\omega_m - \omega_h} = \frac{\frac{\pi}{6} \text{ rad} - 0 \text{ rad}}{\frac{\pi \text{ rad}}{1800 \text{ s}} - \frac{\pi \text{ rad}}{21600 \text{ s}}} = \frac{3600}{11} \text{ s}.$$

Näin ollen $\frac{3600}{11} = 327\frac{3}{11}$ sekuntia kello 1 jälkeen (t_1) tunti- ja minuuttiviisarit ovat päällekkäin. Tässä ajassa sekuntiviisari on ehtinyt kiertää 5 täyttä kierrosta ($5 \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$) ja yhden vajaan kierroksen. Laskeaan mikä on tämän vajaan kierroksen suuruus:

$$327s - 300s = 27s$$

tai ilmoitettuna kulman suuruutena klo 12 nähden: $2\pi \left(\frac{27\frac{3}{11}}{60}\right) \text{ rad} = \frac{10}{11}\pi \text{ rad}$.

Vastaus: Tunti- ja minuuttiviisarin ollessa päällekkäin hieman klo 1 jälkeen on sekuntiviisari kiertänyt 27 sekuntia uutta kierrosta, eli kellotaululla se on klo 5 ja 6 välissä.

Tehtävä 6. (Lukijan ehdottama muunnos romania-laisesta koulutehtävästä) Olkoon

$$S_k = k + kk + kkk + \dots + \underbrace{kk \dots k}_{n \text{ kpl}},$$

kun $k = 1, 2, \dots, 9$. Laske summa

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_9.$$

Ratkaisu, Solmu 1/2017. (Timo Kärkkäinen) Koska

$$k = 10^0 k,$$

$$kk = (10^1 + 10^0)k,$$

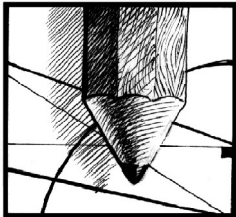
$$\underbrace{k \dots k}_{n \text{ kpl}} = (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^0)k = k \frac{10^n - 1}{9},$$

niin

$$\begin{aligned} S_k &= k + kk + \dots + \underbrace{k \dots k}_{n \text{ kpl}} = \frac{k}{9} \sum_{i=1}^n (10^i - 1) \\ &= \frac{k}{9} (10^1 + 10^2 + \dots + 10^n - n) \\ &= \frac{k}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n - 1 \right) = \frac{k}{9} \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^9 S_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9} \sum_{k=1}^9 k \\ &= \frac{5}{9} (10^{n+1} - 9n - 10). \end{aligned}$$



Katastrofin lyhyt valmistusohje

Aatos Lahtinen

Matematiikka on yhteiskunnan huomaamaton työntekijä, joka ei pidä melua itsestään. Hänen työtään ei kuitenkaan kannata väheksyä. Tämä tarina kertoo, millaisia tuhoisia seurauksia väheksynnällä voi olla.

Olipa kerran, kaukana täältä, mahtava valtakunta. Eräänä päivänä sen kuningas ilmoitti eroavansa. Viimeisenä hallitustoimenaan hän määräsi, että kansa saa valita uuden kuninkaan vapailla vaaleilla.

Kruunun tavoittelijoiksi ilmaantui useita siniverisiä aatelisia. Lisäksi eräs varakas porvari alkoi unelmoida valtaistuimesta. Hän ymmärsi, että voittaakseen paronit, kreivit ja markiisit hänen täytyi saada tavallinen kansa puolelleen. Niinpä hän alkoi pitää puheita toreilla ja turuilla. Hän haukkui kaikki kilpahakijansa pölkkypäiksi, jotka eivät tiedä mitään tavallisen kansan ongelmista. Hän kehui itseään ja menestyneitä liiketoimiaan. Puheen huipentuman muodostivat aina hänen lupauksensa paremmasta tulevaisuudesta, joka seuraisi hänen valinnastaan. Hän tekisi valtakunnasta entistä mahtavamman, hän siirtäisi verot valtion maksettavaksi, hän lopettaisi eliitin ylivallan, hän takaisi työtä kaikille. Lyhyesti sanottuna, hän keksi omasta päästään mitä vain, minkä hän ajatteli lisäävän kannatustaan.

Suureksi yllätykseksi porvarin parjaukset, liioittelut ja katteettomat lupaukset upposivat kansaan niin hyvin, että hän voitti vaalit ja nousi kuninkaaksi. Sitten koitti lupausten lunastamisen aika. Kuningas Porvari halusi panna heti tuulemaan, mutta niin sanotut asiantuntijat vastustivat hänen vero- ja muita lupauksiaan perusteilla, jotka tuntuivat jotenkin aina nojaavan matema-

tiikkaan. Samaan aikaan nuorin prinssi Porvari valitelti isälleen, että matematiikka on koulun tylsin aine. Koska kuningas oli koonnut omaisuutensa välittämättä mitään matematiikasta, hän pyysi luottoneuvonantajansa pohtimaan, voisiko matematiikasta saada kansaa miellyttävän hyökkäyskohteen.

Neuvonantaja inhosi itsekin matematiikkaa, joten hän ryhtyi innolla työhön. Lyhyessä ajassa hän kokosi kuninkaalle vaikuttavan listan matematiikan vahingollisuudesta. Jo koulussa matematiikan asema on ylikorostunut. Se on kaikille pakollinen aine, vaikka sitä ei lainkaan tarvita koulun jälkeen. Kaikenhan saa valmiina netistä. Turha matematiikan opiskelu vaatii liikaa työtä ja on turmiollista kouluviihtyvyydelle. Toisin sanoen, kansaa sorretaan matematiikan pakko-opiskelulla.

Erityisen huolestuttavana neuvonantaja piti matematiikan roolia eliitin kehittämässä tietotekniikassa. Hänen mukaansa eliitti on kahminut valtaa hankkimalla matematiikan avulla itselleen monopolin informaatioteknologiassa. Asian salaamiseksi matematiikka on kavalasti piilotettu prosesseissa ja laitteissa mystisiksi algoritmeiksi, joiden toimintaa ei ollut selitetty tavalliselle kansalle. Epäilyttävää oli myös se, että matemaattiset selostukset on kirjoitettu jollain salakielellä, jota tavallinen ihminen ei pystynyt ymmärtämään. Neuvonantajan mielestään kaikki tämä todisti, että matematiikka on yksi niistä salakavalista keinoista, joilla eliitti pitää valtaa hallussaan.

Kuningas ihastui neuvonantajan päätelmiin. Niinpä

hän julisti kansalle, että eliitti on jo kauan sortanut kansaa matematiikan avulla, mutta nyt hän tekee siitä lopun. Valta palaa takaisin kansalle, kun matematiikka otetaan eliitiltä pois. Tavallinen kansahan ei matematiikkaa tarvitse.

Kuningas ilmoitti päättäneensä, että matematiikan opetus lopetetaan, matematiikkaa ei saa käyttää muiden tieteiden alueella, eikä missään käytännön elämän prosesseissa. Erityisesti kaikki laitteiden avulla käytettävä matematiikka on kiellettyä. Matematiikan maahantuonti kiellettiin myös.

Kuningas velvoitti koko valtakuntaa toteuttamaan kieltopäätöksen välittömästi. Niin matematiikkaa ryhdyttiin ajamaan alas kansan hurratessa. Asiantuntijoiden protesteilla ei ollut vaikutusta. Täytäntöönpanoa ei kuitenkaan voitu tehdä välittömästi eikä edes pienellä viiveellä, sillä tehtävä osoittautui huomattavan laajaksi ja hankalaksi. Matemaatikot olivat kyllä jo pitkään väittäneet matematiikkaa käytettävän kaikkialla, mutta heidän oli kuviteltu vain kerskailevan. Kuningas ehti jo raivostua moneen kertaan ennen kuin alasajotyöryhmä lopulta ilmoitti, että kielto voidaan panna toimeen hänen valtaaanastumisensa kolmivuotispäivänä 1.1.4. (Kuningas Porvari oli heti kruunajaisten jälkeen ottanut käyttöön uuden ajanlaskun, jossa alkupisteenä, eli ensimmäisen kuukauden ensimmäisenä päivänä vuonna yksi, oli hänen kruunajaispäivänsä.)

Niinpä kielto astui voimaan päivämäärällä 1.1.4. kello 12.00. Kiellon vaikutuksia ei tarvinnut kauan odottaa. Niistä julkaisi aikanaan parlamentin asettama työryhmä yksityiskohtaisen raportin vähättelevältä nimeltään ”Eräitä seurauksia matematiikan käytön lopettamisesta”. Tiedotusvälineet julkistivat myös omia selontekojaan. Näiden lisäksi kerron nyt erään silminnäkijän havaintoja asiasta.

Olen sattumalta saanut käsiini kuninkaan luottoneuvonantajan päiväkirjamerkintöjä tuolta ajalta. Ne on jostain syystä kirjoitettu käsin tottumattomalla käsialalla. Tässä muutamia otteita neuvonantajan päiväkirjasta:

1.1.4

Seurasin palatsissa iloisena ja ylpeänä matematiikan lopettamisseremoniaa. Tasan kello 12 kuningas lähetti twiitin matematiikkakiellon voimaantulon merkiksi. Välittömästi sen jälkeen palatsin valot sammuiivat ja seremonia jouduttiin keskeyttämään. Se ei sinänsä haitannut, koska olin joka tapauksessa lähdössä sovitun tapaamiseen. Hissi oli yllättäen lakannut toimimasta, joten jouduin kävelemään portaat alas. Tuliterä virka-autoni ei jostain syystä käynnistynyt. Taksinkaan tilaaminen ei onnistunut, sillä älypuhelin oli mykistynyt. Menin lähimmälle pysäkillä, mutta yhtään bussia ei tullut. Jouduin kävelemään koko matkan tapaamiseen manaten huonoa onnea, joka pilaa tällaisen tärkeän päivän tunnelman.

2.1.4

Edelleen huonoa onnea. Älypuhelin on älytön, TV ei toimi, CD-soitin on mykkä, eikä WIFI-yhteyttä saa millään konstillä. Talon patterit ovat kylmiä. Huoltomies väitti, että energiayhtiö on lopettanut kaukolämmön toimituksen, mutta miksi se sellaista tekisi? Ruokaostoksetkaan eivät onnistuneet. Kun auto ei toiminut, kävelin lähimpään S-kauppaan, mutta se oli jonkun tietoliikennekatkoksen takia suljettu. Samoin oli läheinen T-kauppa. Ovatko eliitin sormet pelissä?

3.1.4

Kuninkaan sihteeri tuli huolestuneena käymään. Kuningas Porvari on raivoissaan, koska ei pysty twiittamaan netin totaalin romahduksen takia. Lisäksi palatsin sähköt ovat edelleen poissa, eikä lämmitys toimi. Kuninkaan vierailumatkakkin on peruuntumassa. Sihteerinkin kännykkä oli mykkä, joten hän oli pyöräillyt lentoasemalle. Siellä kerrottiin, ettei lentoa voida järjestää, koska sekä kuninkaan oma kone että kaikki muutkin ovat toimintakyvyttömiä. Rautatieasemalla kerrottiin, etteivät junatkaan kulje. Mikään kuninkaallinen auto ei toimi. Kuningas epäilee tämän olevan eliitin aikaansaamaa sabotaasiaaltoa.

4.1.4

Lisää huonoja uutisia. Naapurissa asuva toimitusjohtaja kertoi, että hänen tehtänsä toiminta oli pysähtynyt, kun teollisuusrobotit olivat tulleet toimintakyvyttömiksi. Hän oli myös kuullut huhun, että ydinvoimalat on jouduttu ajamaan alas järjestelmävikojen vuoksi. Kävelin palatsille, jossa kuningas ilmoitti julistavansa kansallisen hätätilan heti kun keksitään, miten julistus voidaan välittää kansalaisille, kun televisio, radio ja puhelimet ovat mykkiä eikä sanomalehtien tekeminen onnistu. Miten eliitti pystyy näin panemaan koko yhteiskunnan polvilleen?

Nämä päiväkirjaotteet riittävät osoittamaan, millaisissa alati synkkenevissä tunnelmissa elämä jatkui matematiikkakiellon toimeenpanopäivän jälkeen. Neuvonantaja joutui toteamaan, että koko kaupunki oli jostain selittämättömästä syystä täydellisesti lamaantunut. Muualta valtakunnasta vähitellen tihkuvat tiedot kertoivat samanlaisesta katastrofista. Tehtaat olivat hiljentyneet, energian ja sähkön tuotanto lakannut, elintarviketuotanto pysähtynyt, kuljetus- ja matkustusmahdollisuudet kadonneet, armeijan toimintakyky halvaantunut ja sähköinen viestintä vaiennut. Vaikka netin katoaminen oli tyrehtyttänyt twitterin ja muut some-viestimet, toinen toistaan villimmät huhut levisivät. Neuvonantajallekin kerrottiin varmana tietona ulkomaalaisten aloittamasta kyber-sodasta, alienien hyökkäyksestä ja maailmanlopun alkamisesta.

Kesti jonkin aikaa, ennen kuin neuvonantajalle valkeni se, minkä viisaammat olivat tienneet alusta alkaen. Valtakuntaa ei halvaannuttanut mikään ulkopuolinen voima, eivät edes ulkoavaruuden alienit. Kaaos aiheu-

tettiin aivan itse kuningas Porvarin julistamalla matematiikan käyttökiellolla.

Katastrofia pitkitti se, että kuninkaan mielestä hänen matematiikan kiellolla ei ollut mitään osuutta siihen. Hän väitti kaiken olevan eliitin salaliittoa, jolla se epätoivoisesti yritti pönkittää valtaansa. Lopulta parlamentti puuttui asiaan. Se katsoi tulleen toteennäytetyksi, että kuninkaan määräämä matematiikkakielto vaarantaa valtakunnan hyvinvoinnin ja turvallisuuden. Tällä perusteella parlamentti päätti yksimielisesti kumota kuningas Porvarin määräämän matematiikkakiellon kokonaisuudessaan. Lisäksi parlamentti antoi kuningastakin sitovan päätöksen matematiikan merkityksestä valtakunnalle.

Päätöksessä todettiin, että teollisen yhteiskunnan kaikki toiminnot ovat riippuvaisia matematiikasta. Lisäksi matematiikka on tieteiden korvaamaton työkalu. Näin ollen matematiikka on välttämätöntä valtakunnalle ja sen käyttöä pitää suosia. Päätöksessä määrättiin myös, että matematiikan tutkimusta on suosittava, sillä valtakunnan tarvitsema käytännön matematiikka saadaan teoreettisen matematiikan tuloksista. Näin siitä huolimatta, että teoreettisesta tutkimuksesta saatavalle hyödyllä ei yleensä pystytä asettamaan aikataulua. Lisäk-

si hyödyntämisprosessi eli ns. soveltava matematiikka saattaa olla hyvinkin vaativa ja on oikeastaan oma tieteenalansa, jota on päätöksen mukaan myös edistettävä.

Parlamentti perusti päätöksen seurauksena mittavan matematiikan kehitysohjelman. Siinä lisättiin matematiikan opetusta ja tutkimusta kaikilla tasoilla. Erityisesti ohjelmalla pyrittiin saattamaan kansalaiset tietoisiksi matematiikan merkityksestä valtakunnalle.

Matematiikkakiellon kumoamisen jälkeen valtakuntaa alettiin palauttaa normaalitilaan. Se oli, kuten arvaata saattaa, hidas ja hankala operaatio, jossa tarvittiin myös ulkomaista apua. Tämä muuten havahdutti jopa kuningas Porvarin huomaamaan kansainvälisen yhteistyön edut. Prosessin aikana matematiikan taitajat nousivat kerrankin ansaitsemaansa arvostukseen, jonka he säilyttivät jatkossakin.

Matematiikan käytön palauttamisen jälkeen valtakunta eli onnellisena matematiikan kehittämisohjelman jauhaessa modernina sampona lisää hyvinvointia kaikelle kansalle koko kuningas Porvarin loppuhallituskauden ajan. Mitä sen jälkeen tapahtui, on jo toinen tarina.

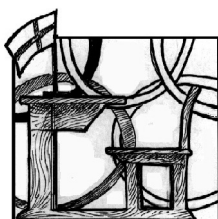
Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä

Nobelin fysiikan palkinnon saaja E. P. Wigner kirjoitti artikkelissa, jonka otsikko on Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä:

”Matematiikan kielen ihmeellinen sopivuus fysiikan lakien formulointiin on suurenmoinen lahja, jota emme ymmärrä emmekä ansaitse, meidän tulisi olla kiitollisia siitä ja toivoa, että se pysyy voimassa myös tulevaisuudessa ja että sitä voidaan laajentaa monille muillekin tieteen aloille, seurasi siitä sitten mielihyvää tai hämmennystä.”

N. Bourbakin artikkelissa ”Matematiikan arkkitehtuuri” sanotaan:

”Nykyfysiikan viimeiset keksinnöt näyttävät vahvistavan, mitä odottamattomimmalla tavalla, kokeellisesti havaittavien ilmiöiden ja matemaattisten struktuurien välisen läheisen yhteyden. Kuitenkaan emme tiedä yhtään mitään tämän tosiasian perusteista ja ehkä emme koskaan tule tietämäänkään.”



Miksi kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen?

Esa V. Vesalainen

Matematik och statistik, Åbo Akademi

Eräs lukiolainen esitti kirjoittajalle kerran erään varsin luonnollisen kysymyksen: Miksi kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen? Voisihan esimerkiksi ajatella, että niiden tulon olisi syytä olla vieläkin negatiivisempi!

Tämä kysymys on erinomainen, ja seuraavassa tavoitteemme on antaa tälle ymmärrettävä vastaus, joka samalla myös on matematiikassa usein toistuva teema.

Mikä on oikeasti tärkeää?

Laskutoimitukset eivät ole taivaalta pudonneita. Pikemminkin ne ovat sopimuskysymyksiä. Esimerkiksi, kun on olemassa jono otuksia, joiden nimiksi on syystä tai toisesta annettu 1, 2, 3, ..., niin ei ole mitään pakottavaa syytä sopia, että $2 + 3$ tarkoittaa samaa kuin 5 ja että $3 \cdot 7$ tarkoittaa samaa kuin 21. Kuitenkin näille luvuille on olemassa joitakin luonnollisia laskutoimituksia, jotka myös ovat sangen hyödyllisiä, ja niinpä ne on erityisesti nimetty summaksi ja tuloksi.

Tunnetusti aiemmin mainittua jonoa 1, 2, 3, ... on kätevää laajentaa lisäotuksilla myös vasemmalle päin niin, että saadaan jono

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Nyt, jos positiivistenkin lukujen laskutoimitukset olivat vain sopimuskysymyksiä, niin miten paljon mielevaltaisempaa laskutoimitusten määrittelystä tulee-
kaan, jos mukana on myös negatiivisia lukuja?! Mutta

osoittautuu, että nyt on erinomaisia syitä laajentaa aiemmat laskutoimitukset yksikäsitteisellä tavalla.

Tämä on oikeastaan asian ydin: laskutoimitukset luovat lukujen joukkoon *rakennetta*, jolla on hyviä ominaisuuksia. Jos a , b , c ja d ovat positiivisia kokonaislukuja, niin esimerkkejä tällaisista hyvistä ominaisuuksista ovat

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, \\ a \cdot b &= b \cdot a, \\ (a + b) \cdot (c + d) &= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d, \\ a + b = a + c &\implies b = c, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tällaiset ominaisuudet ovat sangen hyödyllisiä, kuten kaikki matematiikan parissa enemmän puuhastelleet tietävät. Olisi siis toivottavaa, että nämä ominaisuudet säilyisivät, kun negatiiviset luvut otetaan kuvioon mukaan. Tietenkään ei ole mitään syytä, miksi laskutoimituksia pitäisi voida tällaisella tavalla laajentaa, mutta ainahan sopii yrittää.

Osoittautuu, että on olemassa täsmälleen yksi laajennos, joka säilyttää yllä luetellut kivat ominaisuudet!

Tulon laajentamisesta

Oletamme nyt, että yhteen- ja vähennyslaskut on määritelty tutulla tavalla kaikille kokonaisluville ja että

kertolasku on määritelty tutulla tavalla positiivisille kokonaisluvuille. Lisäksi oletamme, että olemme jotenkin määritelleet kertolaskun myös nolalle ja jopa negatiivisille luvuille sellaisella tavalla, että aiemmin luetellut hyvät ominaisuudet pätevät. Tavoitteemme on tutkia, missä määrin nämä ehdot rajaavat tätä kertolaskun laajennosta.

Nollalla kertominen. Olkoon x kokonaisluku, mahdollisesti myös negatiivinen tai nolla. Tällöin on oltava

$$0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

ja siten ainoa järkevä mahdollisuus on, että $0 \cdot x = 0$.

Luvun ja vastaluvun tulo. Olkoot x ja y kokonaislukuja. Nyt

$$x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0,$$

ja

$$x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0.$$

Täten on siis oltava

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

Kahden vastaluvun tulo. Olkoot edelleen x ja y kokonaislukuja. Käyttämällä juuri johdettuja kaavoja saadaan

$$(-x) \cdot (-y) = -((-x) \cdot y) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y.$$

Erityisesti, jos x ja y ovat positiivisia, niin negatiivisten lukujen $-x$ ja $-y$ tulo $(-x) \cdot (-y)$ on välttämättä $x \cdot y$, ja siten positiivinen.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen@at.yahoo.piste.com

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät

Solmu 2/2017

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Petri Rosendahl, assistentti, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

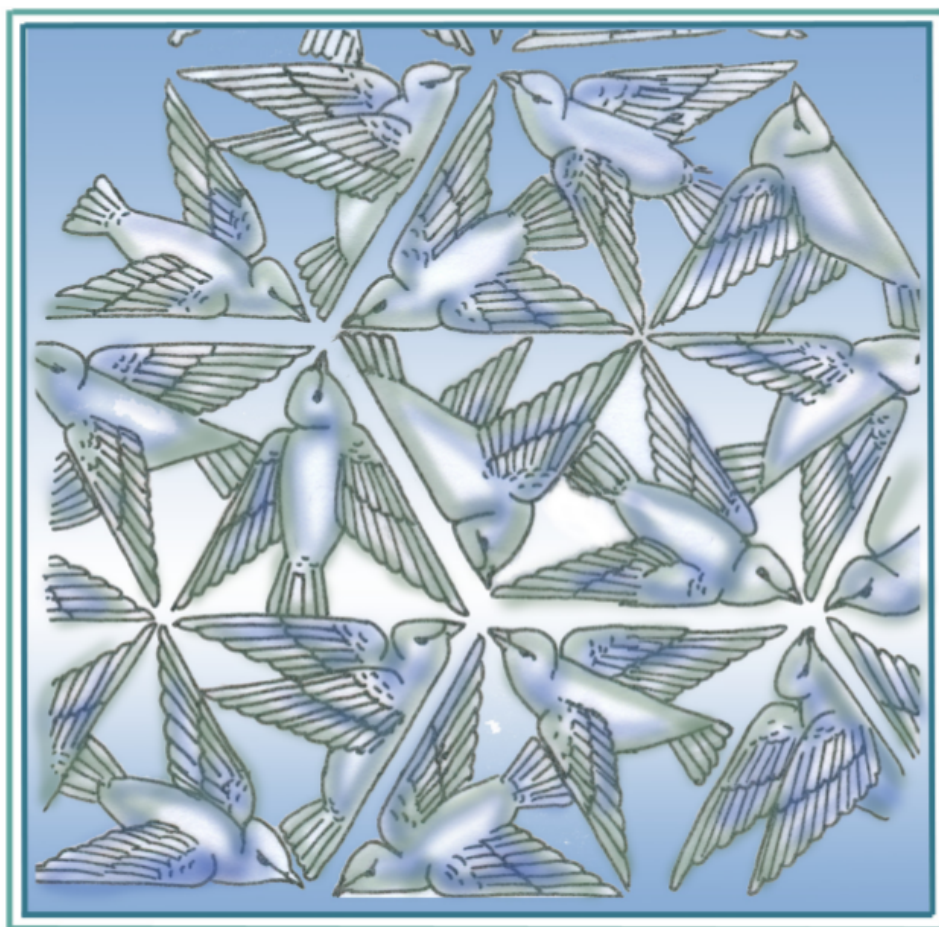
Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 3/2017 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 3.9.2017 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Kansikuva: Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten 2017 tehtävä 6, ks. artikkeli *Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset kilpailijoiden silmin*.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi