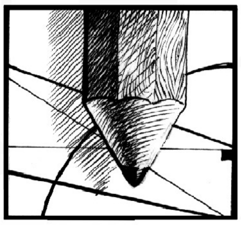
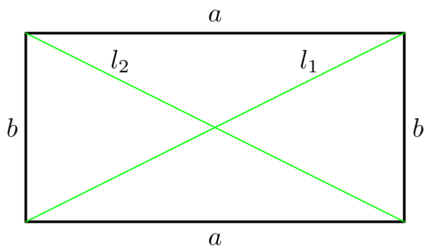


Vertikaalisesti suunnikkaasta

Lehtori K.

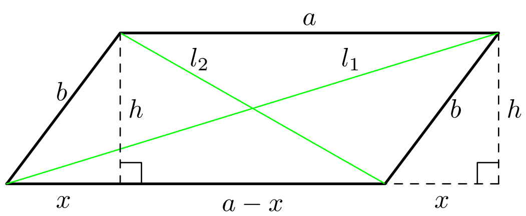
Suorakulmiossa lävistäjien neliöiden summa on sivujen



neliöiden summa:

$$l_1^2 + l_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Luonnollisesti lävistäjät ovat yhtä pitkät ja väite seuraa välittömästi Pythagoraan lauseesta. Mitä tapahtuu, jos suorakulmio tönäistään lyttyyn suunnikkaaksi? Sivujen pituudet tietenkin säilyvät ja vastakkaiset sivut pysyvät yhdensuuntaisina. Toinen lävistäjä kasvaa ja toinen lyhenee. Muuttuuko niiden neliöiden summa? Pythagoraan lausetta soveltaen saamme kuvion

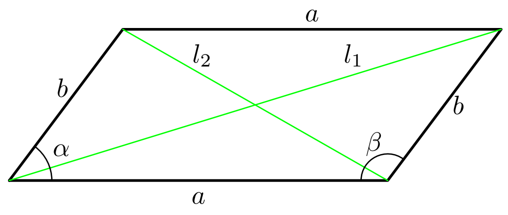


merkinnöillä

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= (a+x)^2 + h^2 + (a-x)^2 + h^2 \\ &= a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + 2h^2 \\ &= 2a^2 + 2x^2 + 2h^2 \\ &= 2a^2 + 2(x^2 + h^2) = 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

Summa pysyy samana, vaikka suorakulmio voidaan äärettömän monella eri tavalla litistää suunnikkaaksi. Olemme siis todistaneet lauseen: *Suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on yhtäsuuri kuin sen sivujen neliöiden summa.* Tällaistakin matematiikkaa vanha lukion lehtori toivoisi yläkoulussa käsiteltävän. Lauseella ei sinänsä ole mitään käyttöä koulumatematiikassa, mutta se on mainio esimerkki eksaktista matemaattisesta totuudesta. Se on mielipiteistä riippumaton fakta, jota ei voi kumota "vaihtoehtoisia totuuksia" twiittailemalla. Matemaattiset totuudet ovat pysyviä. Vaikka koulumatematiikassa ei väitteitä yleensä voi sitovasti todistaa, olisi kuitenkin peruskoulun opetuksessa oltava tällaisia esimerkkejä, jotta eksaktiin ajatteluun kykenevät oppilaat saisivat oikean käsityksen matematiikan ainutlaatuisesta, muista oppiaineista poikkeavasta luonteesta. Pelkkä laskeminen ei kehitä ajattelua.

Katsomme seuraavaksi, miten suunnikaslause todistetaan lukion matematiikassa. Geometrian kurssilla laajennetaan trigonometristen funktioiden määrittelyalue käsittämään myös tylpät kulmat, mikä on edellytyksenä sini- ja kosinilauseiden käsittelylle. Tuolloin todetaan mm. että suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastalukuja. Kosinilause sopiikin täydellisesti suunnikaslauseen todistamiseen, sillä suunnikkaan vierekkäiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia. Kuvion



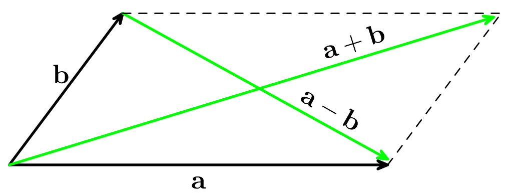
merkinnöillä saamme

$$\begin{aligned} l_1^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \quad \text{ja} \\ l_2^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \end{aligned}$$

mistä yhteenlaskemalla seuraa

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos\alpha - 2ab\cos\beta \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 2ab(\cos\alpha + \cos\beta) \\ &= 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

Mielenkiintoisin suunnikaslauseen todistus nähdään kuitenkin lukion pitkän matematiikan vektorikurssilla. Siellä vektoreita käsitellään kaksi- tai kolmiulotteisessa avaruudessa koordinaatistoa käyttäen tai ilman koordinaatistoa. Vektorit, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät suunnikkaan



jonka lävistäjinä ovat vektorien summa ja erotus.

Vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaaritulo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$, missä γ on vektorien välinen kulma. Sen ominaisuuksia

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \tag{1}$$

$$\mathbf{a}\cdot t\mathbf{b} = t\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \text{ kaikilla } t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \tag{3}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2, \tag{5}$$

jotka pätevät kaikille vektoreille $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sekä kaikille $t\in\mathbb{R}$, käyttäen saamme lävistäjien neliöt

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

ja niiden summan

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2\,|\mathbf{a}|^2 + 2\,|\mathbf{b}|^2.$$

Tarkkaavainen lukija havaitsee, että tässä tarvittiin ainoastaan vektorien laskutoimituksia ja skalaaritulon ominaisuuksia. Emme missään kohdassa vedonneet siihen, että vektorit olisivat kaksi- tai kolmiulotteisen avaruuden suunnattuja janoja. Siten $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ saavat olla mitä tahansa olioita, joille on määritelty yhteenlasku, reaaliluvulla kertominen ja skalaaritulo niin, että vektoriopin kurssilla opitut laskusäännöt ja skalaaritulon ominaisuudet (1)–(5) ovat voimassa. Katsomme esimerkin eräästä tällaisesta oliojoukosta. Tutkitaan päättymättömiä reaalilukujonoja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, joille sarja

$$\sum_{\imath=1}^{\infty} x_\imath^2$$

suppenee. Tällaisten lukujonojen joukkoa merkitään symbolilla l^2; nimen etymologia selviää matematiikasta kiinnostuneille yliopisto-opinnoissa. Jos $\mathbf{x}\in l^2$ ja $\mathbf{y}\in l^2$ ja $t\in\mathbb{R}$, niin määritellään

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \ldots) \quad \text{ja} \\ t\mathbf{x} &= (tx_1, tx_2, tx_3, \ldots). \end{aligned}$$

Voidaan todistaa, että sarjat

$$\sum_{\imath=1}^{\infty}(x_\imath+y_\imath)^2, \quad \sum_{\imath=1}^{\infty}(tx_\imath)^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{\imath=1}^{\infty}x_\imath y_\imath$$

suppenevat, joten $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in l^2$ ja $t\mathbf{x}\in l^2$. Todistukset ovat osin varsin syvällistä yliopistomatematiikkaa, joten niitä ei voi esittää tässä. Lisäksi voidaan todistaa, että summa ja reaaliluvulla kertominen noudattavat lukiossa opittuja vektorien laskusääntöjä ja

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{\imath=1}^{\infty} x_\imath y_\imath$$

toteuttaa skalaaritulon ominaisuudet (1)–(4). Voimme siis hyvällä syyllä kutsua näitä lukujonoja vektoreiksi. Nollavektorikin joukosta l^2 löytyy; se on pelkistä nollista muodostuva jono. Vektorin $\mathbf{x}$ pituus määritellään skalaaritulon avulla:

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum_{\imath=1}^{\infty} x_\imath x_\imath = \sum_{\imath=1}^{\infty} x_\imath^2.$$

Joukko l^2 on rakenteeltaan analoginen xy-tason vektorijoukon kanssa. Kaksiulotteisessa xy-tasossa voidaan kantavektoreiksi valita vektorit $\mathbf{i} = (1,0)$ ja $\mathbf{j} = (0,1)$, ja vektori $\mathbf{a} = (x,y)$ voidaan esittää niiden lineaarikombinaationa:

$$\mathbf{a} = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Joukossa l^2 voimme vastaavalla tavalla valita kantavektoreiksi yksikkövektorit

$$\mathbf{e}_\imath = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\imath-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, 0, \ldots),$$

missä $\imath = 1, 2, 3, \ldots$ Vektori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ voidaan esittää kantavektorien lineaarikombinaationa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\imath, \ldots)\\ &= x_1(1, 0, 0, \ldots) + x_2(0, 1, 0 \ldots) + \ldots\\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_\imath\mathbf{e}_\imath + \ldots\\ &= \sum_{\imath=1}^{\infty} x_\imath\mathbf{e}_\imath.\end{aligned}$$

Selvästi $\mathbf{e}_\imath \cdot \mathbf{e}_\jmath = 0$, kun $\imath \neq \jmath$, joten voimme ajatella, että vektorit $\mathbf{e}_\imath$ ovat pareittain toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kantavektorien lukumäärä ilmoittaa vektorijoukon dimension. Täten xy-taso on kaksiulotteinen, mikä ei ole yllätys. Sen sijaan l^2 on ääretönulotteinen vektorijoukko, mikä ehkä tuntuu hieman eksoottiselta.

Viitteessä [1] mainitut ominaisuudet omaavaa epätyhjää joukkoa sanotaan *vektoriavaruudeksi* ja sen alkioita vektoreiksi. Joukon l^2 vektoreilla on nämä ominaisuudet, joten se on vektoriavaruus. Jos vektoreille on määritelty ominaisuudet (1)–(4) toteuttava skalaaritulo, niin vektoriavaruutta kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*. Sisätulo on skalaaritulon vaihtoehtoinen nimitys. Jos sisätuloavaruus toteuttaa ns. *täydellisyysehdon*, jonka sisältöä ei tässä kirjoituksessa voi selittää, niin sitä kutsutaan *Hilbertin*[1] *avaruudeksi*. Voidaan osoittaa, että l^2 toteuttaa myös täydellisyysehdon, joten se on Hilbertin avaruus. On olemassa ääretön määrä oliojoukkoja, joiden alkioille voidaan määritellä Hilbertin avaruuden aksioomat toteuttavat laskulait. Hilbertin avaruus on siis yleisnimitys kaikille tuollaisille oliojoukoille, se on abstraktiotasoltaan niitä korkeampi matemaattinen abstraktio. Pelkästään vektorien laskutoimituksia, sisätulon ominaisuuksia ja täydellisyysominaisuutta käyttäen voidaan johtaa yleisiä Hilbertin avaruuden ominaisuuksia, joilla on omat ominaiset ilmenemismuotonsa kussakin Hilbertin avaruuden aksioomat toteuttavassa joukossa. Myös suunnikaslause on voimassa ja se osoittautuukin varsin tärkeäksi työkaluksi Hilbertin avaruuden ominaisuuksien selvittämisessä. Siksi tällaista korkeamman matematiikan helmeä ei kannattaisi jättää käsittelemättä peruskoulun matematiikassa, kun sen todistamiseksi on olemassa kaikki valmiudet. Hilbertin avaruuksien sovelluksista mainittakoon kvanttimekaniikan ilmiöiden matemaattinen mallintaminen, ks. [2], ja signaalinkäsittelytekniikan tärkein matemaattinen työkalu, Fourier[2]-analyysi, ks. [3]. Näin siis suunnikaslause, paitsi että se antoi aiheen tähän kirjoitukseen, mahdollisti myös osaltaan sen kirjoittamisen puolijohdetekniikkaan perustuvalla läppärillä ja lähettämisen langattomasti Solmun toimituksen arvioitavaksi. Mainittakoon lopuksi, että Hilbert suoritti tähän alaan liittyvät tutkimuksensa aikana, jolloin kvanttifysiikka oli vasta alkutekijöissään. Ei siis ollut aavistustakaan siitä, että atomitason ilmiöitä voidaan kuvata matemaattisesti ääretönulotteisilla vektoriavaruuksilla. Siinäpä pohtimista niille, joiden mielestä ainoastaan välitöntä hyötyä tuottavaa tutkimusta kannattaa rahoittaa.

Viitteet

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space#Definition`

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_formulation_of_quantum_mechanics`

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space#Fourier_analysis`

[1] David Hilbert (1862–1943), saksalainen matemaatikko.

[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), ranskalainen matemaatikko.