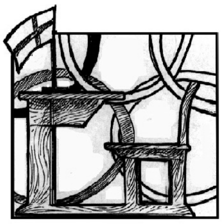


Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset koordinaattorin silmin

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

"Sinulla on sitten tehtävä 1," minulle kerrottiin ja ojennettiin käteen Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten tehtävät. Katsoin tehtäväpaperia, ja järkytyin. Tehtävän yksi kohdalla oli seuraava teksti (englanniksi kirjoitettuna – suomennos on joukkueenjohtaja Neea Palojärven myöhemmin samana päivänä kilpailutilannetta varten tekemä):

Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio, jolle $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ ja $\angle ABC > \angle CDA$. Olkoot Q ja R janojen BC ja CD pisteitä, tässä järjestyksessä, niin, että suora QR leikkaa suorat AB ja AD pisteissä P ja S, tässä järjestyksessä. Lisäksi $PQ = RS$. Olkoon janan BD keskipiste M ja janan QR keskipiste N. Osoita, että pisteet M, N, A ja C ovat samalla ympyrällä.

En ole koskaan ollut hyvä geometriassa. Kilpailuaikoinani käytin aikaa lukuteoriaan ja algebraan. Suomen joukkueelle olen opettanut lähinnä lukuteoriaa ja algebraa. Olin toivonut pääseväni koordinoimaan lukuteoriaa tai algebraa, mutta niin olivat lähes kaikki muutkin. Päädyin siis geometriaan.

Tätä tarinaa voisin jatkaa tästä pisteestä kahteen suuntaan, ensinnäkin siihen mitä tämän jälkeen tapahtui, ja toisaalta siihen, miten ylipäätään päädyin Zürichiin Irchelin kampukselle geometrian tehtävä kätösissäni. Aloitetaan siis alusta, eli tammikuusta.

Kuinka koordinaattoriksi päädyin ja mitä ihmettä koordinaattorit oikein tekevät

Tammikuun puolenvälin tietämillä sähköpostiini ilmestyi viesti yhdeltä tämän vuoden Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten pääjärjestäjistä, ja hän kysyi halukkuuttani ryhtyä koordinaattoriksi kilpailuun. Koska kyseessä oli omalla asteikollani suuri kunnia ja mielenkiintoinen tehtävä, oli ehdotus tietenkin hyväksyttävä.

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin tänä vuonna kuudennen kerran, ja mukana oli jo 43 maata. Koska kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa on kovin vähän naispuolisia osallistujia, on tyttöjen olympialaisten tarkoitus kannustaa tyttöjä ja näyttää heille, että he eivät ole yksin kilpaillessaan matematiikassa.

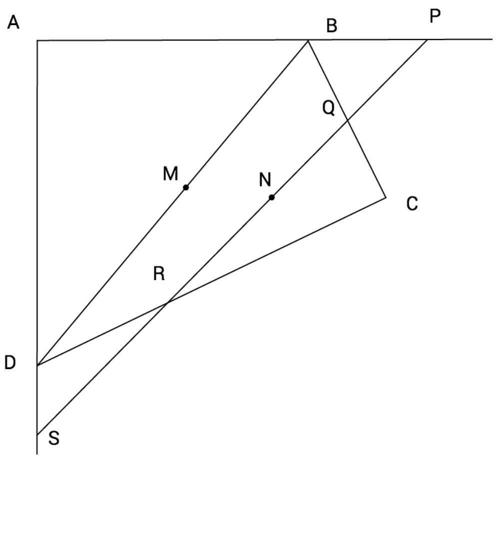
Koordinaattorit ovat vastuussa tehtävien arvostelusta yhdessä joukkueenjohtajien kanssa. Kilpailun jälkeen ratkaisupaperit monistetaan, kopiot annetaan koordinaattoreille, alkuperäiset joukkueenjohtajille. Jokaisella tehtävällä on oma koordinaattorijoukkonsa, eli yksi koordinaattori lukee yleisesti ottaen vain yhden tehtävän ratkaisuja. Tälle pienelle koordinaattorijoukolle muodostuu siis hyvä käsitys siitä, mitä kaikkea yksittäisessä tehtävässä voi tapahtua, ja mikä on oikeudenmukainen tapa arvostella tehtävä. Joukkueenjohtajat ja varajohtajat ovat puolestaan vastuussa oman maansa kaikista ratkaisuista. Koordinaattorit ja joukkueenjohtajat arvostelevat tahoillaan tehtävät, ja sitten pisteistä keskustellaan. Keskustelun tarkoitus on toisaalta varmistaa, että kaikki maat on arvosteltu samoin kriteerein, ja toisaalta varmistaa, että koordinaattorit ovat ymmärtäneet kaiken kriittisen. Suuri osa kilpailijoista kirjoittaa omalla kielellään, jolloin koordinaattoreilla voi olla enemmän tai vähemmän mahdoton työ yrittää ymmärtää jokainen ratkaisu pilkulleen.

Olin aina pohtinut, miten koordinaattorit suuriin kansainvälisiin kilpailuihin valitaan, ja tämä jäi minulle yhä mysteeriksi. Kohtuullisen paljon koordinaattoreita haalitaan lähiseuduilta kasaan. Tämä on monessa suhteessa näppärää ja varmasti myös alentaa kilpailun järjestämisen kustannuksia. Sitä en sen sijaan tiedä, miten päätetään keille kauempana oleville lähetetään kutsu. Hommasta ei saa palkkaa (toki Sveitsissä tietenkin suklaalevyn kiitokseksi), mutta lennot maksetaan ja ruokailut ja majoitus hoidetaan. Tällä kertaa koordinaattorit majoitettiin hyvin tasokkaaseen Swissoteliin Oerlikonin rautatieaseman viereen. Myös joukkueenjohtajat majoitettiin samaan paikkaan.

Pisteytysjärjestelmän luominen

Saatuani tiedon, että koordinoin geometriaa, ensimmäinen tehtävä oli yrittää pohtia mahdollisimman monta erilaista ratkaisua alussa kuvattuun ongelmaan, jotta jokaiselle erilaiselle ratkaisutavalle voitaisiin kehittää pisteytysjärjestelmä. Kovin paljon erilaisia variantteja ei ennen kilpailua tullut: Tietyt identiteetit saattoi todistaa vähän eri tavoin, mutta oleellisia eroja ei ollut. Myös joukkueenjohtajat pohtivat toisaalla samoja tehtäviä, neuvottelivat niistä, käänsivät niitä omille kielilleen ja pohtivat ratkaisuja. Heiltä tulikin täysin erilainen ratkaisuehdotus tehtäväämme, vain kymmenisen minuuttia ennen kuin meidän piti esittää lopullinen pisteytysjärjestelmä.

Tyypillinen ratkaisu tehtävään etenee seuraavasti: Piirretään ensin kuva:



Väite on siis, että pisteet A, M, N ja C ovat samalla ympyrällä. Kehäkulmalausetta käyttäen tämän väitteen voi muuttaa muotoon, että $\angle AMC = \angle ANC$ (jos tämä väitteen uudelleenmuotoilu ei ole lukijalle ihan peruskauraa, kannattanee se paperilla läpi pohtia).

Kehäkulmalausetta tai suorakulmaisten kolmioiden ominaisuuksia tai yhdenmuotoisia kolmioita käyttäen todistetaan seuraavaksi, että

$$\angle AMC = 2\angle ADC$$

ja vastaavasti toiselle kulmalle

$$\angle ANC = 2\angle CRQ + 2\angle PSA.$$

Tämän jälkeen pitääkin vain ristikulmia käyttäen todeta, että $\angle CRQ = \angle SRD$, kolmion kulmien summan avulla huomata, että $\angle CRQ + \angle PSA = 180° - \angle CDS$, ja viimeistellä todistus havainnolla $180° - \angle CDS = \angle CDA$.

Todistuksessa on siis jossain mielessä kaksi osaa: yksinkertaisten kulmaidentiteettien käyttö, jotta kulmat $\angle AMC$ ja $\angle ANC$ saadaan esitettyä yhteistyökykyisessä muodossa, ja tämän jälkeen näiden muotoilujen yhtäsuuriksi osoittaminen. Kun pisteytysjärjestelmää luotiin, oli lisäksi myös huomioitava, että kyseessä on ensimmäinen tehtävä kilpailussa, jolloin olisi kiva voida antaa mahdollisimman monelle kilpailijalle edes yksi piste.

Päädyimme seuraavaan pisteytysjärjestelmään:

PROBLEM 1, DAY 1

MARKING SCHEME

INCOMPLETE SOLUTIONS

The points for statements within boxes are not additive.

N is the midpoint of PS and/or M is the center of the circle around ABCD	1pt
Applying the inscribed angle relations to the triangles QRC and/or PSA and/or equivalent relation using isosceles triangles	1pt
Applying the inscribed angle relations to $ABCD$ and/or equivalent relation using isosceles triangles	1pt

Alternative marking scheme:

doing the shrinking	1pt
using inscribed angle	1pt
using parallel lines	1pt

At most 3pt for incomplete solutions.

COMPLETE SOLUTIONS

Complete solutions are awarded 7pt. We do not deduct points for

- not stating explicitly that N is the midpoint of PS
- not stating explicitly that M is the midpoint of the circle around $ABCD$
- minor typos

Up to 2pt can be deducted from full solutions for small mistakes unless explicitly listed above in the list of no deductions.

COMPUTATIONAL SOLUTIONS

Up to 3pt for incomplete solutions for explicitly stating the geometrical relations. See the general marking scheme.

No partial points for computations that are not complete.

Pointtina on siis se, että jos ratkaisu on kesken, ei siitä voi saada kuin kolme pistettä maksimissaan. Tämä on tyypillistä kilpailuissa: jos ratkaisu ei ole loppuun asti vedetty, siitä kärsii kunnolla. Logiikkana tässä on se, että tyypillisesti ratkaisun loppupuolella vaaditaan jokin hyvin kriittinen oivallus, joka itsessään sisältää valtavan osan ratkaisusta. Pikkuvirheet ovat oma lukunsa, eli niistä emme luonnollisestikaan kokeneet tarpeelliseksi paljonkaan pisteitä viedä.

Pisteet jakautuivat niin, että luonnollinen ensimmäinen havainto on yhden pisteen arvoinen: Piste N on janan PS keskipiste tai piste M on nelikulmion $ABCD$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Molemmista ei voi pistettä saada. Havainto on hyvin helppo tehdä, ja äärimmäisen kriittinen ratkaisulle. Muut pisteet on jaossa kriittisistä kulmaidentiteeteistä, eli esimerkiksi siitä, että käyttää kehäkulmalausetta todistaakseen $\angle AMC = 2\angle ADC$ ja $\angle ANC = 2\angle CRQ + 2\angle PSA$.

Loppuosa ratkaisua on näiden asioiden yhteenvetäminen, eli käytännössä todistus, että nämä kulmat todella ovat yhtä suuria.

Vaihtoehtoinen pisteytysjärjestelmä koskee viime tipassa joukkueenjohtajilta saamaamme ratkaisuehdotusta, jossa tehtiin sopiva kutistus, käytettiin kehäkulmaa, ja yhdensuuntaisia suoria, ja käytännössä saatiin tulos näillä.

Laskennalliset ratkaisut viittaavat analyyttiseen geometriaan, vaikkapa kompleksiluvuilla tehtävän ratkaisemiseen. Standardi yleensä on, että laskuista on joko saatava geometrisia tärkeitä välituloksia irti, tai laskut vietyä loppuun ja tehtävä todistetuksi ennen kuin pisteitä saa, eli pelkkä kahdeksan sivua innokasta koordinaattilaskentaa ei tuota pisteitä.

Pisteistä keskusteleminen

Lopulta päästiin keskustelemaan pisteistä joukkueenjohtajien kanssa. Jokaisella maalla oli oma slottinsa, eli oma kohtansa aikataulussa, jolloin heidän piti kustakin tehtävästä tulla keskustelemaan. Me koordinaattorit olimme puolestamme jakautuneet ensin tehtäväkohtaisesti ja tehtävien sisällä vielä eri pöytiin. Jaoin pöydän Ukrainasta alun perin kotoisin olevan saksalaistuneen matematiikan opettajan kanssa. Hänellä oli pitkä kokemus koordinoinnista, hyvä taju geometriasta, sekä omaani hyvin täydentävä kielitaito: itäeurooppalaiset kielet sujuivat häneltä loistavasti. Suurin osa pisteneuvotteluista meni sujuvasti ja nopeasti. Joukkueenjohtajat olivat selvästi sisäistäneet pisteytysjärjestelmän, ja ilmeisestikin pitivät sitä reiluna, sillä tyytyväisiltä he vaikuttivat. Virallisesti joukkueenjohtajat olivat kokouksessa kaikkien tehtävien pisteytysjärjestelmät hyväksyneet, mutta käytännössä olen joukkueenjohtajana usein kokenut, etten ole täysin tyytyväinen järjestelmään ollut, tai että käytännön tilanteessa todellisiin ratkaisuihin sovellettuna järjestelmä on tuntunut kovin erilaiselta kuin silloin, kun sitä on alun perin esitelty.

Viimeinen koordinoitavamme oli hieman haastavampi: ratkaisu oli äärimmäisen epätavallinen, sisälsi valtavasti tekstiä, hyvin vähän kaavoja, ja kieli oli sellainen, jota kumpikaan meistä ei ymmärtänyt. Kielen hankaluus ei sinänsä ole paha juttu, koska aina voi pyytää joukkueenjohtajaa kääntämään, mutta se vaikuttaa siihen, miten hyvin voi valmistautua. Kyseisessä ratkaisussa konstruoitiin uusi kolmio, jolloin väite muuttui muotoon, että pisteet sijaitsevat sen kolmion yhdeksän pisteen ympyrällä. Yhtä pistettä vaille väite oli itse asiassa selvä kolmion konstruktion jälkeen. Tämäkin ratkaisu saatiin käsiteltyä, jonka jälkeen tehtävämme koordinaattoreilla alkoi hetkellinen vapaus ennen kilpailun viimeistä kokousta, jossa joukkueenjohtajat päättivät mitalirajat.

Kaiken kaikkiaan kilpailu koordinaattorina oli oikein miellyttävä kokemus, mutta tietyn kieroutuneen mielenlaadun se vaatii: jos ei nauti siitä, kun saa kasan ratkaisuja luettavaksi mitä eksoottisimmilla kielillä, niin kilpailumatkasta voi tulla aika kurja.

Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html`

Sekä sisältöä että tekniikkaa koskevat kokemukset ovat meille arvokkaita ja kaikenlaiset parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita. Palautetta voi lähettää osoitteeseen

toimitus at matematiikkalehtisolmu piste fi