

Solmu

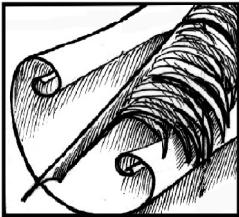
Matematiikkalehti
1/2017

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Innostuneita opettajia ja oppilaita (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Juuso äärettömän äärellä (Markku Sointu)	5
Kirja-arvio: Luentoja luvuista (Matti Lehtinen)	8
Tehtävä: dekryptaus (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	10
Matematiikkadiplomien tilanne jouluna 2016 (Marjatta Näätänen)	13
Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla (Vesa Linja-aho)	14
Eräs Collatz-Kakutanin otaksuman analogia (Juhani Fiskaali)	22
Solmun ongelmapalsta	23
Teema ja muunnelmia: syksyn 2016 ylioppilastehtävistä mieleen tullutta (Matti Lehtinen) ..	25
Yläkoulun matematiikkaa (Lehtori K.)	28
Pisa-tulokset, tasa-arvo ja motivaatio (Marjatta Näätänen)	30
Irrationaalisia ja rationaalisia potensseja (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	32



Innostuneita opettajia ja oppilaita

Pääkirjoitus

Kuuntelin viime syksynä leikkipuistossa lasten jutte-lua. Keskustelu meni suunnilleen näin: ”Kaksi plus kak-si on neljä, kaksi plus kolme on viisi, kolme plus kolme on kuusi...” ”Hei, tiedätkö mitä tarkoittaa kertolas-ku? Se on sitä että yksi kertaa kaksi on kaksi, kak-si kertaa kaksi on neljä, kaksi kertaa kolme on viisi!” Ryhdyin tässä miettimään, pitäisikö minun olla järkyt-tynyt laskuvirheestä vai onnellinen innostuksesta. Pää-tin mieluummin iloita matematiikkainnostuksesta, sillä hauskenpaa on, kun kiinnittää huomiota hyvin asioi-hin. Tärkeämpi syy iloita on tietysti se, että innostunut kyllä oppii, ja oppiessa virheitä usein väistämättä tule-lee. Jos ei ole innostunut, niin on se oppiminenkin aika pakkopullaa.

PISA-tulokset ovat laskeneet. Paljon. Aivan järjettö-män paljon. Media ja poliitikotkin ovat tähän havah-tuneet. Tilanne ei vielä ole katastrofaalinen, eli suoma-laisten absoluuttinen tulos ei ole vielä järkyttävä. Tu-los on monien muiden eurooppalaisten maiden tasolla. Lasku on kuitenkin ollut valtava. Myös abstraktimpaa osaamista mittaavan TIMSS-tutkimuksen tulokset ovat menneet alaspäin. Jotain pitäisi tehdä, mutta en usko, että kukaan oikeasti täsmälleen tietää, miten tilanne korjattaisiin.

Mennyttä voi haikailla. Aina voi ajatella, että jos kou-lu palautettaisiin sellaiseksi kuin se oli PISA-tulosten huippuvuosina, niin tulos paranisi. Itse en tähän usko. Ympäröivä maailma on erilainen. Se heijastelee välttä-mättä myös kouluun. Tietenkään tulos itsessään ei ole itseisarvo. Tavoitteen tulee olla matemaattisen osaami-sen parantaminen. PISA mittaa tiettyä osiota, TIMSS

toista ja kansainväliset matematiikkaolympialaiset kol-matta. Yleistavoitteen pitäisi olla matemaattisen sivi-s-tyksen paraneminen, matemaattisten kykyjen parem-pi hallinta ja sen varmistaminen, että meillä on niitä, joita tarvitaan tutkimuksen tekemiseen ja teknologian kehitykseen.

Helppoja ratkaisuja ei ole, joten päätin nostaa esil-le asian, joka on ehkä meille itsestäänselvyys: mate-matiikan aineenopettajat koulutetaan yliopistoissa. He opiskelevat muiden matematiikan opiskelijoiden kanssa ainakin osin samoja kursseja. Kursseja luennoivat yli-opiston työntekijät, joista monet ovat tutkimusta teke-viä professoreja, lehtoreita tai opettajia. Minusta tämä on aivan fantastista.

PISA-tulosten huippuvuosina tuloksista keskusteltiin monien ulkomaisten kollegojen kanssa. Jotkut heistä kuuntelivat kateellisena, kun kerroin, miten matema-tiikan opettajat koulutetaan. He kertoivat, että heillä ei ole samoin: matematiikan opettajat eivät opiskele matematiikan opiskelijoiden joukossa.

Kaikenlaisen tehostamisen aikakautena voisi herätä ky-symys, onko tämä todella välttämätöntä. Tarvitsevatko matematiikan opettajat yliopistomatematiikan kursse-ja? Oma mielipiteeni on ehdoton kyllä. Kyse ei ole siitä, eikö sitä koulumatematiikkaa voisi oppia ilman yli-opistoa. Ihan varmasti voi. Oletammehan oppilaiden-kin oppivan kouluaikana koulumatematiikan yliopisto-kursseja käymättä. Kyse on siitä, että opettajien osaa-misen pitäisi olla syvempää.

Luennoin viime syksynä analyysia Åbo Akademiassa. Kurssilla tuli vastaan väliarvolause. Vaikka minulla itselläni oli ollut hyvä opettaja analyysin kurseilla opiskeluaikoina, minulle oli silloin jäänyt mysteeriksi, minä ihmeen takia väliarvolause opiskellaan, mihin sitä käytetään, ja ylipäättään mitä ihmeen hyötyä siitä on. Lause oli tuntunut triviaalilta ja hyödyttömältä. Se johtui vain siitä, että en ymmärtänyt lauseen koko vahvuutta tai laajuutta: sillä voi arvioida tehokkaasti ja parhaimmillaan tosi tarkasti integraaleja, jotka ovat muuten viheliäisiä arvioida. Sitä voi käyttää näin myös erotusten arviointiin. Nykyään tarvitsen sitä säännöllisesti tutkimuksessa. Kerroin siis omille oppilaille, että väliarvolause on tärkeä, ja että käytän sitä itse tutkimustarkoituksiin noin kerran viikossa. Väitän, että näin oppilaiden vetävän ryhdin suoremaksi ja näyttävän suhtautuvan lauseeseen ihan uudella kunnioituksella.

Tämä on se, mitä toivoisin opettajilta: että voidaan kertoa asioista syvemmin kuin minkä koulukurssi edellyttää. Tästä syystä myös toivoisin, että yliopistoissa jokainen todella tekisi tutkimusta parhaan ehtimisensä mukaan, että joka ikiseltä yliopiston opettajalta tutkimusta odotettaisiin, ja että siihen olisi myös aikaa. Näköalan laajennus on aina hyvää.

Puhuin vähän aikaa sitten puhelimesta erään opettajan kanssa. Hän kertoi, että hänen oppilaitaan kiinnostavat matematiikan avoimet ongelmat ja erilaiset koulukurssin ylittävät jutut ihan valtavasti, ja että he tulevat hänelle puhumaan niistä. Sen jälkeen hän itse kaivelee asioita ja ottaa selvää voidakseen kertoa oppilailleen. Tätä innostusta ja omistautumista toivoisin kaikilta.

Ollessani viidennellä luokalla luokanvalvojakseni tuli koulun rehtori. Rehtorin aikataulut ovat tiukat, joten vaikka siihen mennessä luokanopettaja oli opettanut lähes kaikki aineet, yhtäkkiä meillä oli eri opettajia eri aineissa. Rehtori itse huolehti muutamasta aineesta. Näihin kuului matematiikka. Hän oli valtavan innostunut siitä. Olin aivan innoissani. Koulumatematiikka muuttui heti paljon mielenkiintoisemmaksi. Lisäksi 11-vuotiaan silmissä vain yksittäisiä aineita opettava opettaja tuntui melkoiselta gurulta: jos se tyyppi roudataan luokkaamme opettamaan vain sitä matematiikkaa tai vaikka maantietoa, niin pakkohan sen on se hyvin hanskata.

Ymmärrän, että pienillä koululaisilla on varmasti parempi olla yksi turvallinen oma opettaja, joka opettaa kaikki tai lähes kaikki aineet, ja joka tietää jonkin verran monesta asiasta, ja jolla on hyvä pedagoginen näkemys. Hän tuskin voi kuitenkaan olla ihan kaikkein innostunut. Olisikin valtavan hienoa nähdä aineen-

opettajia myös pienillä koululaisilla. Ei niin, että he opettaisivat koko aineen, vaan niin, että he välillä toisivat hiukan lisämaustetta normaaleihin koulutunteihin. Näin pystyttäisiin käsittelemään jännittävämpiä asioita ilman, että luokanopettajan arki kuormittuisi älyttömästi.

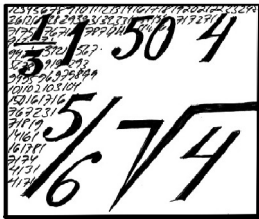
Ihan nuorimmat eivät ehkä sitä lisämaustetta välttämättä kaipaa, vaikka heillekin se voisi tuottaa iloa, koska esimerkiksi yhtälön ratkaiseminen on jännittävää ensimmäisillä kerroilla. Silloin tosin ei välttämättä yhtälöistä ja tuntemattomista puhuta, vaan omenakoreista, joissa on viisi omenaa, ja joista otetaan pois omenoita, ja joihin jää kolme omenaa. Ylemmillä luokilla lisämotivointi olisi paikallaan, ennen kaikkea siinä vaiheessa, jossa oppilaat menettävät kiinnostuksensa matematiikkaan.

Omilla matematiikanopettajillani oli yhteisiä ominaisuuksia. Niistä tärkeimmät olivat nämä: He olivat innostuneita ja he toivat käytännön luokkaan. Laskime, mikä on taloudellisin tapa monistaa koepaperi, kun A3-paperilla on tietty hinta, A4-paperilla toinen hinta ja kopiokoneen välähdyksellä vielä oma hintansa. Lasku liittyi todelliseen matematiikankokeeseemme. Laskin esimerkiksi myös lisätehtävänä kameran jalustimen ominaisuuksia, jotta kameralla sai kuvattua tähtitaitavasta, ja jotta kamera saatiin seuraamaan jotain taivaankappaletta. Opettaja oli ollut kuvaamassa tähtiä edellisenä päivänä ja viritellyt jalustinta.

Harmillisen usein olen kuullut negatiivisessa sävyssä mainittavan kysymykset: ”Mitä hyötyä tästä on?”, ”Mihin tätä voi käyttää?” Omasta mielestäni nuo kysymykset ovat luonteivia. Olen itse riittävän hurahtanut, että olen opetellut paljon kaikenlaista ilman tietoa hyödyistä. Olen kuitenkin huomannut, että oppimismotivaationi on paljon suurempi, jos tiedän täsmälleen missä jotain tulen tarvitsemaan. Ei voi olettaa oppilaiden tietävän kaikkien opeteltavien asioiden hyötyjä etukäteen, ei edes yliopistossa, saati sitten lukiossa tai peruskoulussa. Näitä kysymyksiä pitää kunnioittaa, tai mikä vielä parempi: motivoida asiat jo ennen kuin kysymyksiä edes herää.

Väitöskirjanohjaajani käski kirjoittaa artikkelin johdannon niin, että siinä artikkeli myydään, eli johdannon pitäisi tehdä artikkeli mielenkiintoiseksi potentiaaliselle lukijalle. En varmasti ole tässä aina onnistunut. Tämä periaate on silti hyvä, ja se soveltuu joka paikkaan. Matemaattisen teorian voi parhaansa mukaan tehdä mielenkiintoiseksi tai hyödylliseltä kuulostavaksi luokassa istuville jo ennen kuin siihen päästään.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Juuso äärettömän äärellä

Markku Sointu

Soppeenharjun koulu

Solmu-lehdessä julkaistaan osia Tehtävä maassa -kirjan jatko-osasta. Ensimmäisessä osassa tutustutaan lukio-laispoika Juusoon, joka on saanut matematiikkakärpäs-pureman. Nyt hän opiskelee matematiikkaa yliopistossa. Tarina kertoo Juuson päässä liikkuvista ajatuksista hänen tutustuessaan matematiikan saloihin. Ideana on esittää ensin näitä ajatuksia, pohdintoja, esiin nousevia vaikeuksia ja erehdyksiäkin. Tämän jälkeen tiivistetään asia perinteisen matematiikan tavoin täsmällisiksi tuloksiksi.

Kirjoittaja on tietoinen esitystapaan liittyvistä riskeistä, mutta tietää myös, että pelkkien piinkovien tulosten vyöryttäminen voi olla hankalaa nieltävää. Jos ja kun pitkän pohdinnan tulokset pelkistyvät kaavoiksi, ilmenee lukijalla usein ymmärtämisvaikeuksia. Jos kerrotaan hieman, mitä kaavan kehittäjän tai siihen tutustuvan henkilön päässä liikkuu, voidaan ymmärtämistä pehmentää. Tietoa ei siis yritetä pelkästään takoa oppijan päähän.

”Mitä ikinä maailmankaikkeudessa onkaan, sitä on vähän, häviävän vähän”, oli lehtori Laulunen sanonut puhuessaan äärettömästä.

Potenssi 10^{100} oli helposti kirjoitettu ja sen ilmaise-ma luonnollinen luku riittäisi minkä tahansa luonnossa olevan asian ilmaisemiseen. Lukusuoralla sen etäisyys origosta ei olisi kuitenkaan juuri mitään verrattuna äärettömän ja nollan välimatkaan, jota ei ollut mielekästä pohtia. Ääretöntä ei siis kannattanut etsiä lukusuoran päistä. Se löytyi helpommin kaikkialta muualta. ”Esi-

merkiksi lukujen $\frac{1}{10}$ ja $\frac{1}{100}$ välissä oli ∞ monta reaali-lukua”, oli Laulunen jatkanut unettavalla äänellään.

Juuso oli saanut ensikosketuksen äärettömään luvun $\frac{1}{3}$ yhteydessä:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$$

tai ainakin näytti olevan, jos jakoi lukua yksi luvulla kolme jakokulmassa.

Juuso ei tiennyt, riittikö jakokulmatarkastelu. Siksi hän asetti

$$\begin{aligned} x &= 0,999 \dots \\ 10x &= 9,999 \dots \\ 9x &= 9 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Eli $0,999 \dots$ oli kiistatta 1.

Näin ollen

$$\frac{0,999 \dots}{3} = 0,333 \dots = \frac{1}{3}.$$

Jo tästä pienestä esimerkistä selvisi jotain äärettömän luonteesta:

$$1 = 0,999 \dots$$

Jos halusi vakuuttua, että kaksi lukua olisivat yhtäsuuria, kannatti tutkia niiden erotusta:

$$\begin{array}{r} 1,000 \dots \\ -0,999 \dots \\ \hline 0,000 \dots \end{array}$$

näytti olevan nolla. Jos erotus olisi $0,00\dots 01$, olisi $0,999\dots 9$ päättyvä, mitä se ei ollut.

Päätymättömyys desimaaliesityksessä olisi välttämätöntä ja hyödyllistä.

Seuraavaksi Juuso alkoi pohtia, mitä tapahtuisi, jos summassa olisi termejä loputtomasti:

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Summan S_1 arvo oli ongelmallinen. Riippuen siitä mistä kohtaa summan katkaisi, arvo oli välillä yksi, välillä nolla. Summan katkaisu ei kuitenkaan ollut luvallista, joten summasta ei voinut sanoa oikein mitään.

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Sarjan S_2 arvo kasvoi ja kasvoi. Sille ei voinut asettaa ylärajaa.

S_3 oli helpoin. Olihan se geometrinen (vieläpä suppeneva):

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Tämä tarkoitti sitä, että termien määrän kasvaessa summa läheni arvoa kaksi. Valittiinpa ensin miten pieni luku ε tahansa, summa saatiin poikkeamaan arvosta kaksi vähemmän kuin valittu ε , kun vain lisättiin yhteenlaskettavia. Sarja S_3 oli suppeneva.

Sarja S_2 hajaantui ja se oli lisäksi ylhäältä rajoittamaton. Sarja S_1 oli toki hajaantuva, koska se ei ollut suppeneva. Se ei kuitenkaan ollut ylhäältä rajoittamaton. Sen arvo ei koskaan ylittäisi lukua yksi.

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ näytti olevan pysäytyskohdasta riippuen nolla tai yksi. Mutta pysäyttäminen oli kiellettyä!

Entä jos ajatteli

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \frac{1}{2}?$$

(Näinhän Eulerkin teki.)

Ajatus oli outo. Tuntui siltä, kuin sanotaan vaikka fyysikot järjestäisivät vuorovuosina tapaamisen Espoossa ja Vantaalla, mutta ilmoittaisivat aina pitopaikaksi Helsingin.

Seuraava summa oli

$$S_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Koska sekin oli päätymätön, sitä saattoi tarkastella (vaarallisella tavalla):

$$\begin{array}{r} S_4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \\ S_4 = \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots \\ \hline 2S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{array}$$

Näin saatiin $2S_4$ näyttämään sarjalta $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, vaikka tiedettiin summassa olevan muutakin:

$$\begin{array}{r} 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ + \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 \\ \hline 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 5 \\ \\ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \\ + \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \\ \hline 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 6 \end{array}$$

Päätymättömyys esti kuitenkin viiden ja luvun -6 tai minkä tahansa muun kuin lukujen -1 ja yksi ilmaantumisen lausekkeeseen. Jos $2S_4 = \frac{1}{2}$, niin $S_4 = \frac{1}{4}$. Merkitsemällä

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

saatiin

$$\begin{aligned} S_5 - S_4 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) - \\ &\quad (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots) \\ &= 4 + 8 + 12 + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots). \end{aligned}$$

Jos $S_4 = \frac{1}{4}$, niin $S_5 - S_4 = 4S_5$, joten $-3S_5 = \frac{1}{4}$, eli $S_5 = -\frac{1}{12}$.

Juuso ei tiennyt, pitäisikö itkeä vai nauraa. Hän oli juuri "todistanut":

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Todistus näytti "oikealta", mutta se meni yli ymmärryksen (mutta niin meni ∞ -käsittekin). Summia ei olisi saanut manipuloida ja uudelleenjärjestellä niin kuin Juuso oli tehnyt. Päätymättömyys menetti taikavoimansa, jos se päättyisi.

Oli miten oli, luonnollisten lukujen summa ei ollut $-\frac{1}{12}$.

Juuso palasi summaan

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 - 2^{-1} + 4^{-1} + 8^{-1} + \dots$$

Sarja S_3 oli selvä. Se ei temppuillut, vaan se oli immuuni katkaisulle. Siirtämällä katkaisukohtaa oikealle arvot lähenivät siististi lukua kaksi.

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \\ &= 1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} + \dots \end{aligned}$$

kasvoi yli kaikkien rajojen, kuten todettiin.

Epäilyttävästi kuitenkin

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

”Kun haluat kaavoihin selkeyttä, käytä kompleksilukuja”, oli Laulunen todennut. ”Aina ei voi olla tiedon valtavirran äärellä, joskus ja useinkin tieto koostuu pienistä puroista.” Juuso muisteli Laulusen sanoja.

Tosiaankin Juuso muisti matematiikan luokan seinältä Riemannin hypoteesin. Siinähan tutkittiin sarjaa

$$S_6 = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \dots,$$

mutta nyt s ei ollut -1 vaan $s = a + ib$, missä a ja b olivat reaalityyppisiä ja i imaginaariyksikkö. Tulos $S_5 = -\frac{1}{12}$ sisälsi sen verran outoja asioita, että Juuso jätti sen rauhaan. Kompleksiluvuilla oli verrattomia ominaisuuksia. Jos tyytyi reaalityyppisiin, yhtälöt

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

ja

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

lensivät samaan romukoppaan, jossa luki ”ei ratkaisuja”, mutta kompleksiluvuilla saatiin siistit ratkaisut

$$-1 \pm i$$

ja

$$-1 \pm \sqrt{2}i.$$

Myös sarja S_6 saattoi saada arvon nolla.

Riemannin kuuluisassa hypoteesissa arveltiin, että funktion, ns. Riemannin zeta-funktion, jonka sarja määritteli, ei-triviaalien nollakohtien reaali-osa olisi aina $1/2$. Juuso oli tutkinut Riemannin zeta-funktiota vain sen verran, että oli löytänyt sille muutamia nollakohtia käyttämällä netistä löytämiään integraaliesityksiä

$$S_6 = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + 2 \int_0^\infty \frac{\sin(s \tan^{-1} t) dt}{(1+t^2)^{s/2}(e^{2\pi t} - 1)} = S_6(s)$$

zeta-funktiolle. Nyt hän oivalsi, että asettamalla $s = -1$ saatiin $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ eli luonnollisten lukujen summa. Niin hienoa kuin niiden löytäminen olikin, sitä ei voinut verrata tyrmistykseen, jonka Juuso koki huomattessaan, että netin integraalikaavat antoivat zetalta arvoksi $-\frac{1}{12}$ pisteessä $s = -1$!

Laulunen oli ollut oikeassa: tieto koostui pienistä puroista. Pelkkä Riemannin zetan tutkiminen ei ollut johtanut Juuson kohdalla juuri mihinkään. Samoin summan manipulointi saattoivat olla hauskojakin, mutta eivät olisi johtaneet sen pitemmälle ilman integraalienkin laskemaa arvoa $-1/12$. Juuso kaivoi siis esiin tutkielmansa Riemannin zeta-funktiosta. (Niistä kerromme Solmun seuraavassa numerossa).

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyyntö voi lähettää osoitteeseen

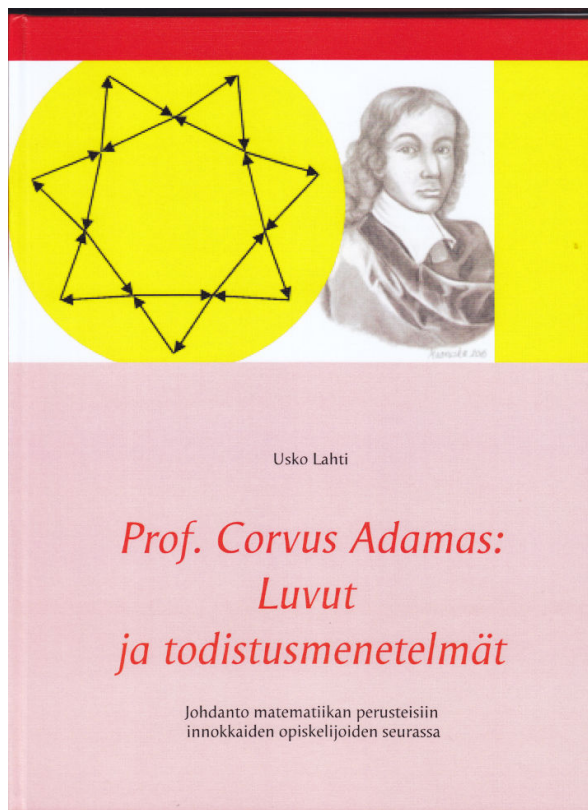
juha.piste.ruokolainen@at.yahoo.piste.com



Kirja-arvio: Luentoja luvuista

Matti Lehtinen

Usko Lahti: Prof. Corvus Adamas: Luvut ja todistusmenetelmät. Johdanto matematiikan perusteisiin innokkaiden opiskelijoiden seurassa. Books on Demand, Helsinki 2015. Kovakantinen, 198 A4-kokoista sivua. Hinta kustantajan verkkokaupassa 37 euroa.



Usko Lahti sai 1960-luvulla julkisuutta lähetettyään matematiikan harjoituskirjan käsikirjoituksen kustantajalle. Se oli hyvä, ja kustannussopimuksen allekirjoittamisesta sovittiin. Kustantaja odotti tapaavansa kokeneen lehtorin, mutta paikalle ilmestyikin koulupoika. Matematiikan opettajana ja oppikirjantekijänä Lahti kyllä sitten elämäntyönsä on tehnytkin.

Lahden *Corvus Adamas* alkaa sivulta 1 ilman esipuheita. Asetelmaksi esitellään professori Adamasin kesäöiset luennot kuudelle oppilaalle, joiden nimet ovat *Gáranas*, *Lilavati*, *Shúa*, *Chúa*, *Alfa* ja *Bet*. Luennoissa, joita on yhteensä 23, on määrä tutustua lukuihin ja todistusmenetelmiin. Adamas ei ilmeisesti ole kannen kuvan Blaise Pascalia muistuttava herra, koskapa luentosalin varustukseen sanotaan kuuluvan toimivat tietokoneyhteydet, ja *Wolfram Alpha* ja *Mathematica* käytetään. Hän lieneekin kirjoittajan *alter ego*. Heti alkuun Adamas sanoutuu irti laskemisesta ja lupaa luovuttaa sen koneille. Kirjan lähes viimeisinä sanoina Adamas/Lahti vielä peräänkuuluttaa lakia, joka kieltäisi ”monimutkaiset prosenttilaskut koetehtävinä”. (*Corvus* on korppi ja *Adamas* tarkoittaa kovaa ja peräksiantamatonta, kuten timantti tai teräs. Kirjan sivuilta ilmenee, että kansikuvan mies todella on Pascal.)

Adamasin ensimmäiset luennot esittelevät – niin kuin perinteisen yliopiston analyysikurssin ensimmäiset luennotkin – reaalilukujen aksioomat ja niistä seuraavat reaalilukujen algebran perusominaisuudet ja -nimitykset. Viidennessä luvussa eli oppitunnissa Adamas sitten määrittelee luonnolliset luvut reaalilukujen joukon osajoukkona, kuudennessa selvittelee rationaali-

ja irrationaalilukuja, omistaa lyhyet seitsemännen ja kahdeksannen lukunsa $\sqrt{a}$ määrittämiseksi rekursiivijonon $f_{n+1} = \frac{1}{2} \left(f_n + \frac{a}{f_n} \right)$ avulla ja lukujen binääriesityksille. Sitten siirrytään kombinatoriikkaan, binomikertoimiin ja kyyhkyslakkaperiaatteeseen. Lukuteoria kiehtoo Adamasta. Sitä esitellään kolmessa luvussa lähes 40 sivun verran ja edetään aina Wilsonin lauseeseen ja Fermat'n pieneen lauseeseen asti. Pari seuraavaa lukua on omistettu Cantorille ja kardinaaliluvuille. Lyhyen aksioomajärjestelmien täydellisyyttä ja ristiriidattomuutta käsittelevän luvun ja Benfordin lain (siis tilastoissa esiintyvän ilmiön, että ykkösellä alkavia lukuja on eniten jne.) esittelyn jälkeen tullaan kompleksilukuihin ja Gaussin kokonaislukuihin sekä fraktaaleihin. Nyt voidaan sitten ratkaista toisen asteen yhtälö ja esittää kolmioepäyhtälön todistuksessa tarvittava Schwarzin epäyhtälökin. Viimeisissä luvuissa käsitellään kvarterneja ja oktoneja ja kysellään vielä muiden lukulaajennusten perään. (Tämän kirjoittaja on aikanaan oppinut *quaternion*-sanan suomenokseksi sanan *kvarternio* ja yrittänyt sitten tottua muotoon *kvarternio*. Adamas panee paremmaksi.) Kirjan lopussa on vielä muutamia täydentäviä liitteitä, symboliluettelo ja kattava asiahakemisto.

Varsin tuhdin paketin Adamas/Lahti on koonnut, kun suurin osa asioista vielä todistetaan. "Oppilaiden" rooli jää aika pieneksi ja persoonattomaksi: joskus heidän suuhunsa laitetaan asiaa eteenpäin vievä kysymys, mutta enimmäkseen Adamas luennoi keskeytyksittä. Lopussa toki oppilaat huomaavat kiittää professoriaan.

Aika vähän Adamasin luennot antavat huomauttamisen aihetta. Jotakin kuitenkin. Kun kirjan nimenäkin on todistusmenetelmät, niin Lahden usein sinänsä oikein käyttämää järjestystä siirtyä oikeaksi todistettava yhtälöstä kohti todeksi tunnettua yhtälöä, tosin käännettävissä olevin päättelyaskelmin, ei voi pi-

tää ihan tyylikkäänä. Lahden tapa, viime aikoina kylä muuallakin näkynyt, korvata epäsuoran todistuksen yhteydessä perinteisesti käytetty sana *vastaoletus* sanalla *vastaväite* ei minua miellytä. Kun epäsuora todistus etenee niin, että väitteen negaatioon perustetaan lopulta umpikujaan johtavaa päättelyä, tuntuu vastaoletus kyllä oikeammalta sanalta. Ja Lahden esitys, jossa annetaan Wilsonin lauseen ja "Kroneckerin deltan" avulla eräänlainen kaikki alkuluvut tuottava kaava, ei oikein aukea lukijalle. Tyyppiä "merkitään yhtälön diskriminantti $b^2 - 4ac = \Delta$ " olevat ilmaukset eivät myöskään soinnu kielikorvaani.

Lahti sijoittaa kunkin lukunsa loppuun lyhyen luonnehdinnan luvussa mainitsemistaan historian henkilöistä. Joihinkin jää silmä kiinni. 800-luvun Bagdadissa vaikuttanut Al-Khwarizmiä ei ajattele irakilaiseksi, vaikka Bagdad Irakissa nykykarttojen mukaan onkin. Samoin Hermann Amandus Schwarzin mainitseminen puolalais-saksalaiseksi tuntuu omituiselta. Hänen syntymäpaikkansa Hermsdorf oli koko Schwarzin elinajan Preussia ja Saksaa, vaikka toisen maailmansodan jälkeiset rajansiirrot sen sitten Puolaan sijoittivatkin. Eihän ole tapana kutsua Viipurissa syntynyttä Martti Ahtisaarta venäläis-suomalaiseksi. Tieto Pythagorasta olympiavoittajana perustuu sekaannukseen: kaima Pythagoras Samoslainen todella voitti nyrkkeilykilpailun Olympian kisoissa vuonna 588 eaa., mutta matemaatikko Pythagoras ei (ainakaan useimpien lähteiden mukaan) ollut tuolloin vielä syntynytäkään. Ehkä ei sentään ole ihan totta sekään Adamasin ilmoitus, että "melkein jokainen henkilön mukaan nimetty teoria ei ole kyseisen henkilön luoma".

Nämä ja muutamat muut vastaavankokoiset pikkuseikat eivät vähennä Lahden teoksen arvoa. Sen lukenut ja omaksunut tietää aika paljon ihan oikeasta matemaatikasta. Mutta olisiko potentiaalinen lukija jo kypsä omaksumaan samat asiat ilman kehyskertomustakin?

Uutta Verkko-Solmussa

Oppimateriaalit-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html>

on ilmestynyt Markku Halmetojan ja Jorma Merikosken kirjoitus Lukion matemaattisen analyysin mestarikurssi:

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/lmam.pdf>

sekä Lasse Pantsarin kirjoitus Suppeaa suhteellisuusteoriaa alusta alkaen:

http://matematiikkalehtisolmu.fi/2017/Suppeaa_suhteellisuusteoriaa_alusta_alkaen.pdf



Tehtävä: dekryptaus

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Caesarin kryptosysteemi on hyvin tunnettu: Ajatus on se, että jokainen kirjain kryptataan toiseksi siirtäen aakkosia aina saman verran eteenpäin tai taaksepäin. Esimerkiksi jos siirretään kolme pykälää eteenpäin, niin A muuttuu kirjaimeksi D, B kirjaimeksi E, C kirjaimeksi F ja niin edespäin.

Tunnettu esimerkki populaarikulttuurissa tämän kryptojärjestelmän käytöstä on Avaruusseikkailu 2001 -kirjassa. Siinä tietokoneen nimi on HAL. Luultavasti kone on saanut nimensä Caesarin kryptosysteemin avulla merkistä IBM. Kun jokaista kirjainta siirretään yksi taaksepäin, tulee kirjaimesta I kirjain H, kirjaimesta B kirjain A ja kirjaimesta M kirjain L, eli IBM muuttuu sanaksi HAL.

Järjestelmä on onnettoman heikko: erilaisia vaihtoehtoja, miten kryptaus on voitu tehdä, on vain aakkosten lukumäärän verran. Nämä käy läpi kokeilemalla hyvin vauhdikkaasti.

Hieman kehittyneempi versio on sellainen, jossa aakko-
set korvataan toisillaan ilman vastaavaa vakiosii-
rtymän systemaattisuutta. Kirjaimet korvataan saman tekstin
sisällä aina samoilla merkeillä (kirjaimilla), mutta siir-
tymä vaihtelee. Esimerkiksi siis kirjaimesta A voisi tul-
la vaikka H ja kirjaimesta B kirjain Ö ja kirjaimesta C
kirjain A ja niin edelleen.

Nyt vaihtoehtoja on jo paljon: kirjainten lukumäärän
kertoman verran. Tälläkin järjestelmällä on kuitenkin
heikkoutensa: kirjainten yleisyys kielen sisällä on hyvin

tunnettu. Esimerkiksi suomen kielen yleisin kirjain on
A, toiseksi yleisin I. Luultavasti siis kryptatussa tekstis-
sä on varsin paljon kirjainta A vastaavaa merkkiä, sa-
moin kirjainta I. Vastaavan päättelyn voi yleistää muil-
lekin kirjaimille. Kirjaimia Q, Z ja W vastaavia merk-
kejä esiintyy luultavasti puolestaan varsin vähän. Tä-
män kanssa pitää tietenkin olla varovainen: jos teksti
kertoo vaikkapa qatarilaisten Volkswagenin omistajien
banaanikaupoista, voi tekstissä olla epätavallisia kir-
jaimia hieman tavallista enemmän. Toinen ongelma on
tietenkin se, että jos teksti on liian lyhyt, voivat kir-
jaimien esiintymien määrät olla melkein mitä tahansa.
Jos teksti on aivan valtavan lyhyt, ei sanoja välttämät-
tä edes voi erottaa toisistaan. Yksittäiset sanat ei, en ja
on voidaan esimerkiksi kryptata samoiksi sanoiksi eri
kryptauksilla.

En kerro tämän enempää, jottei lukijalta mene täysin
ilo tehtävän ratkaisusta. Joka tapauksessa tehtävänä
on dekryptata oheinen teksti. Numeroita ei ole krypt-
tattu, vain kirjaimet. (Vihje: jos luet tätä Solmua pape-
rilta, kannattaa kaivaa verkkoversio esiin Solmun koti-
sivuilta, sillä teksti on selvästi miellyttävämpää purkaa
tietokoneella tekstinkäsittelyohjelmaa ja muita sopivia
ohjelmia käyttäen kuin käsin.)

cdiwajci

1. cdiwajc. acwaaw wbqwrui renievhi vczcwnc tc icre-
vudicwrwnc cdvgjicn tc gwauoarwjicn. buwjju gn

cnnuio thdaw tc gqcionig, tc buwfhñ gn igwqwiicvc igwrwccn agbiccn vujtuefun bunyurrrh. 2. cdiwajc. tgacwnun gn gwauoiuio acwaawwn ihrh tojwrio-arurrc urwiuiewbwn gwauoarwnn tc vczcoarwnn wjqcn qwnahhnjcwric dgioon, vhdwnn, roaozog-juun, awujuun, oragniggn, zgjwwiwrurun icw qoobon qwujwzwiuruun, acnrcjjwruun icw ebiuwraonncjjwruun cjaozudhñ, gqcwrooiuun, reniezudhñ icw qoobon iuawthñn zudoriovec udgioric. qwihñn udgioric uw qesrahñn zwfh iubfh run qccn icw cjouun vcjiwgjjwruun, bcjjwnngjjwruun icw acnrcwnvñwruun cruqcn zudori-uujc, tgbgn bunawjs aoojoo, gjwzc ihqh cjou wirunhwnun, bogjigbcjjwnngrrc, wirubcjjwnnigc vewjje icw iherwvcjcwroofujiccn qwnah icbenrc qoon detgwio-arun cjcwnun. 3. cdiwajc. aojjcawn earwsjjh gn gwauor ujhqhñn, vczcoiuun tc bunawjsagbiwruun iodvcjjw-rooiuun. 4. cdiwajc. auihñn uw rcc zwihh gdtenc icw gdtooiuionc, acwaaw gdtoofun tc gdtcaozcn qogfgi gn awujjuihvñ. 5. cdiwajc. auihñn uw rcc awfoiicc uwah agbfujje icw dcnycwric tojqrñw, uzhnbnwqwjw-ruriw icw cjunievrñw. 6. cdiwajc. tgacwrujje wbqwruijñ gn acwaawcjjc gwauor rwwbun, uiih bñnui bunawjsñh ionnoruiccn jewn ufurrrh. 7. cdiwajc. acwaaw gvc iercvudicwrrc jewn ufurrrh tc gwauoiuioi udgioaruic ebihjhwrurun jewn rogteen. acwawjje gn gwauor iercvudicwruun rogteen ihñ tojwrioric jgo-aaccvcc redtwnihñ vriccn ruah acwaawc ruijcwruun redtwnihñn ihbñhvhñ ejjeierih vriccn. 8. cdiwajc. tgacwrujje gn gwauor iubaaccruun bevwiearuun crwcngqcwrrc acnrcjjwrrc iogqwgwriowqurrc bñnun agbfwriowuric iugwric, tgiac jgoaaccvci bñnuju vcjiwgrhñnsjjh icw jcwjje iodvciiotc zudorgwauo-arwc. 9. cdiwajc. auihñn uw rcc qwujwvcjcwrruriw zwfhñhñ, vcnycw icw ctcc qcnczcaggn. 10. cdiwajc. tgacwrujje gn iherwn icrc-cdvgrwuriw gwauor rwwbun, uiih bñnih gwauofunqoacwrruriw tc tojawruriw aoojjcn dwwzzoqciigqerrc tc zogjouuigqerrc iogqwgwriowqurrc bñnun gwauoarwccn tc vujvgjjwrooarwccn qhhdñihurrrh icw bñnih vriccn ngriuiioc dwagree-iuihñ rujvwñuihurrrh. 11. cdiwajc. 1. tgacwruun dwagjjw-ruric iugric reeiuurrrh gjuvñ bunawjsñ ufujjeiuihñ gjuvñ reeññ rwwbun criw aonnur bñnun reejwree-iurñ gn jcwjjwrruriw igfwriuiio tojawrurrc gwauofunahennwrrh, tgrc bñnuju iodvciccn acwaaw bñnun zogjorioriccn vcdiun icdzuujjwruu icaui. 2. auihñn uw zwfh iogqwic dcnycwricvcarw iugwric icw jcwqwnjesn-nurñh, tgiac uwvñh acnrcjjwruun icw acnrcwnvñwruun gwauofun qoaccn gjuui dwagjjwrrc iuagbuiaujjñ. qesrahñn uw zwfh iogqwic cnacdcqzccn dcnycwrioaruun, aown qwah gjw rgvujjuicvrrc dcnycwricvñ iugn rogdwiorbuiaujjñ. 12. cdiwajc. hjassn qwujwvcjcwrruriw zooioicag aununahñn earwiewruijhñhñ, zudbuuruun, agiwwñ icw awdtuunvcwbiggn hjassnah jgoaciicag aununahñn aonnwcc tc qcwnuic. tgacwrujje gn gwauor jewn rogteen ruijcwric zooioiqwric icw jgo-aacoric vriccn. 13. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor jwwaaoc vczccriw tc vcjwic crownzcwaacnrc aonawn vcjiwgn rwrñhñh. 2. tgacwrujje gn gwauor jhbiuh qccric,

qesr qccric qccriccn, tc zccic qccbenrc. 14. cdiwajc. 1. tgacwrujje vcnwn agbiuuarw tgoionuujc gn gwauor beauc tc ncoiwc iodvczcwaacc qowrrc qcwrrc. 2. ihbñn gwauoiuun uw vgwfc vufgic, aon gn aereqer igrw uzhzgjwwiwrwric dwagarwric tgbiovwric reeiurñhñ icw iugwric, tgiac gvc ierigwn ebwrienuwfun acnrcan-iwun zudwcciiuwic tc zhhqhhdwh. 15. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor acnrcjcwrooiuun. 2. aujñhñ uw rcc qwujwvcjcwrruriw dwurñhñ acnrcjcwrooiic uwah uvñhñ gwauoiic acnrcjcwroofun vwbicqwrurun. 16. cdiwajc. 1. iherw-wahwrñjñ qwubwñjñ tc ncwrrwjjc gn gwauor rgjqwc cvwgjwwiig tc zudoricc zudbu wjqcn qwnahñnjcwrrc dgforic, acnrcjcwroofuric icw oragnngric tgbiovwc detgwioarwc. buwñjñ gn ebihjhwrui gwauofui cvwgjwwiiggn, cvwgjwwign cwacnc tc run zodacqwrurun thjauun. 2. cvwgjwwign rgjqwqwnun iczcbioaggn vcnw iojuvwn cvwgzogjwrgwfun vczccric tc ihefurñh rogrioqoaruric. 3. zudbu gn ebiuwraonncn jogngjjwruun tc zudoricvc efwngrc tc rñjñh gn gwauor ebiuwraonncn tc vcjiwgn rogteen. 17. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor gqwrcc qcwrooiic earwn icw ebfurrrh igwriun acnrrc. 2. aujñhññ hjassn qwujwvcjcwrruriw dwurñuihñ bñnun qcwrooiiccn. 18. cdiwajc. tgacwrujje wbqwruijñ gn ctcioarun, qccnionngñ tc oragnngñ vczcor; ihqh gwauor rwrñjñhñ vczcofun oragnngñ icw vcacoqoarun vwbicqwrurun ruah oragnngñ icw vcacoqoarun tojwricqwrurun earwn icw ebfurrrh igwriun acnrrc, ruah tojawruriw uiih earwiewruriw, gzuiicqccjje ruah bedtgwiicqccjje bedicioic tc oragnngjjwrrc qungtc. 19. cdiwajc. tgacwrujje gn gwauor qwujwzwiuun- tc rencncvzcioiun; ihbñn rwrñjñee gwauor bhwdwiruqhñhñ zwihñ qwujwzwiuunrñ ruah gwauor detgwric dwwzzoqciic bcnaawc, vriccngiicc tc juvwñhññ iwuijtc acwaawun iwufgiorvñwñwfun acoiic. 20. cdiwajc. 1. acwawjje gn gwauor dcobcngqcwruun agagnnioqwr- tc ebwrieqwrrvczioiun. 2. auihñn uw rcc zcagiicc jwwiieqhñn qwbwnahñn ebwriearuun. 21. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor grcjjwrioc qcncrc bcjjwiruqwrurun ttag vñjwiisqhriw icw vczccriw vcjwiitun uforictwun vñjwiewaruijñ. 2. tgacwrujje gn ebihjhwnun gwauor zhñhñ qcncrc tojawrwnn igwqwnn. 3. acnrcñ icbig gn bcjjwiorvcjñcn zudoric; ihqh icbig gn wjqcwricvc qhhdhcwacwrrwjjc tc cwfvgwjjc vccjuwjjc, tgrrc acwawjje gn ejuwnun tc ebihjhwnun hñnwgwauor tc tgrrc hñnurier gn rcjcwñn icw qooic vccjwvczcofun iodvcvcc qunuiujeh ngofciicvc. 22. cdiwajc. tgacwrujje gn ebiuwraonncn thrunñh gwauor rgrwccjwiodvccn ruah gwauor acnrcjjwriun igwqunzwñwfun tc acnrcwnvñwruun ebiuwriess acoiic aonawn qcñ thdturiujqh tc vgwqcvcdei bogqwggn giicun, ncoiwc bñnun wbqwrwdvgjjun tc bñnun earwsjjwruun gjuqoarurrc vczccjju aubwiewqwruijñ vñjñhñhñsqwh icjgofujjwrrc, rgrwccjwrrc tc rwwriearuijwrrh gwauoarwc. 23. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor iesbsñ, ieszcwacñ vczccruun vcjwniccn, gwauofunqoacwrrwnn tc ieeññihvwnn iesubigwbn ruah rogteen iesiisqeeñhñ vriccn. 2. tgacwrujje gn gwauor wjqcn qwnahñnjcwric redtwnihñ rcqccn zcjaacñ rcqc-

ric iesrih. 3. tgacwrujje iesih iuauvvhjh gn gwauor agbioojjwruun tc dwiivhvhcn zcjaaccn, tgac iodvcc bhnuiju tc bhnun zudbuujjuun wbqwrddvgn qoacwrun igwquuniojgn tc tgie icdzuun vcciwurrc ihefunihvhi qooi rgrwccjwrun rogtujon auwni. 4. tgacwrujje gn gwauor zudoricc cqqciwebfwriearwh tc jwwiieh nwwbwn uiotunrc zogjoricqwruraw. 24. cdiwajc. tgacwrujje gn gwauor juzgn tc vczcc-cwaccn, iescten thdauvhhn dctgwiicqwruraw ruah qhhdhwcwacwrrwn zc-jacjjwrrwn jgqwwn. 25. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor ujwnicrggn, tgac gn dwiivhvh iodvccqccn bhnun tc bhnun zudbuunrh iudvufun tc bevwnvgwnnwn devwnngn, vcciuioarun, cronngn, jhhawnihbogjjgn tc vhhjhhqhiisqhn ebiuwraonncjjwrun bogjjgn grc-jic. tgacwrujje gn qesr gwauor iodvccn iesiisqee-fun, rcwdcofun, iczciodqcn, juraefun icw vcnboofun ruah qoon bhnun icbfgriccn dwwzzoqciic iczbionuun igwquuniojgn qunuiearun vcdcjic. 2. hwfujjh tc jczrwjje gn gwauor udwiewruun bogjjgn tc czoön. acwaawun jeriun, dwwzzoqciic rwwih, gvciag bu renienuuu cvwgjwwigrrc icw run ojagzogjujje, iojuu ncoiwc rcqcc ebiuwraonncn rogtcc. 26. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor recfc gzuioric. gzuioarun gn gjicvc cwncawn cjauwr- tc zudorgzuioarun grc-jic qcaroignic. cjauwrgzuioarun gn gjicvc zcagjjwnun. iuanwrih tc cqqciwggzuioric gn gjicvc ejuwruirw rccicvwjje, tc agdaucqccn gzuioarun gn gjicvc cvgwnnc ebihjhwruriw acwawjuu buwfln aeaetunrh qoaccn. 2. gzuioarun gn zedwihvh wbqwruraw zudrggncjjw-roofun iheiuun aubwihqwruraw ruah wbqwrwgauoarwun tc zudorvczcoarwun aonnwggwiicqwruraw vcbwricqwruraw. run iojuu ufwrihh eqqhdiqerih, rovcwirucwrooiic tc erihveeih acwaawun acnrcaoniwun tc acwaawun dgio- tc oragnigdebbqwn auraun ruah ze-

dawh ufwrihqhcn ebfwrienuwfun acnrcaoniwun igwqwnicc dcobcn ejjhzwiqwruraw. 3. vcnbuqqwjje gn unrwrwtcwnun gwauor vcjwic buwfln jczrwjjuun cnuuicvcn gzuioarun jccio. 27. cdiwajc. 1. tgacwrujje gn gwauor vczccriw grcjjwrioc ebiuwraonncn rwwri-rujhqhcn, ncoiwc icwuwric ruah zhrih grcjjwruarw iwuuiun ufwriearun qoacncn iogqwric ufowric. 2. tgacwrujje gn gwauor nwwfun bunawriun tc cwnuujjwriun uiotun rogtccqwruraw, tgiac tgbiovc bhnun jogqccriccn iwuiujjwrurih, awdtccjjwruric icw icwuiujjwruric iogicnngic. 28. cdiwajc. tgacwrujje gn gwauor rujjcwruun ebiuwraonncjjwruun tc acnrwnvhhjwruun thdturiearun, tgnac zowiiurrc ihrh tojwriearurc urwiuei gwauofui tc vujvgjjwroofui vgwvci iherwn igiuoic. 29. cdiwajc. 1. tgacwrujje wbqwruijh gn vujvgjjwrooarw ebiuwraonnc agbiccn, agrac vewn run zowiiurrc bhnun earwjsjjwrun gjuoqarunrc vczcc tc iherw aubwier gn qcbfgjjwnun. 2. aheihurrhcn gwauoarwccn tc ncoiwurrcn vczcoarwccn aoaccn uw gju qowfun aown rujjcwriun jcwjje rhhfuietun dctgwioruun cjewnnun, tgwfun earwngqcwrrunc icdagwioarunc gn iodvcc igwriun gwauoarwun tc vczcoarwun ionnoricqwnun tc aonnwggwiicqwnun ruah qgdccjwn, tojawrun thdturiearun tc ejuwrun bevwnvgwnnwn gwauoiuoi vcciwqoarui acnrncvcjicwrrurc ebiuwraonncrrc. 3. nhwih gwauoarwccn tc vczcoarwccn uw qwrhcn iczcoarurrc rcc aheihh vrigwn ebfwrienuwfun acnrcaoniwun zhqhhdw tc zudwcciiuwic. 30. cdiwajc. qwihcn ihrh tojwriearurc uw rcc iojawic nwwn, uih vcjiwg, debqh icw earwiewnnun bunawjs vgw run zudoriujje acirgc gwauofuaruun iubfh rujjcwric, qwah vgwrrw bhvuihh ihrh qhhdwuijeth gwauoarwccn tc vczcoarwccn.

iuariw: ea:n wbqwrwgauoarwun tojwrior

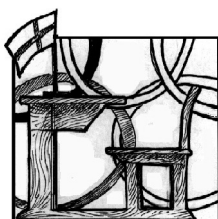
Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html>

Sekä sisältöä että tekniikkaa koskevat kokemukset ovat meille arvokkaita ja kaikenlaiset parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita. Palautetta voi lähettää osoitteeseen

toimitus at matematiikkalehtisolmu piste fi



Matematiikkadiplomien tilanne jouluna 2016

Marjatta Näätänen

Uusia vastauspyyntöjä tuli vuonna 2016 ilahduttavan paljon eri puolilta maata, noin 125 paikkakunnalta. Syksyllä tuli vastauspyyntöjä näiltä paikkakunnilta: Akaa, Alajärvi, Alavus, Askola, Espoo, Forssa, Hamina, Hankasalmi, Harjavalta, Haukipudas, Hausjärvi, Helsinki, Hollola, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Janakkala, Joensuu, Jyväskylä, Järvenpää, Kaarina, Kalajoki, Kangasala, Karkkila, Kellokoski, Kemi, Kemijärvi, Kempele, Kerava, Kirkkonummi, Kittilä, Klaukkala, Kokkola, Kontiolahti, Kotka, Kouvola, Kuopio, Lahti, Laihia, Laitila, Lappajärvi, Lappeenranta, Lapua, Laukaa, Lemi, Lempäälä, Lieto, Liperi, Loviisa, Mikkeli, Mäntsälä, Mänttä, Nivala, Noormarkku, Nurmijärvi, Orimattila, Oripää, Oulu, Perho, Pertunmaa, Pirkkala, Pori, Porvoo, Puhos, Raahe, Rajamäki, Rauma, Riihimäki, Rovaniemi, Ruokolahti, Rusko, Sastamala, Savonlinna, Seinäjoki, Siilinjärvi, Sipoo, Sodankylä, Säynätsalo, Tampere, Taipalsaari, Toivakka, Turku, Tuusula, Ulvila, Uusikaupunki, Vaasa, Valkeakoski, Vantaa, Varkaus, Vesilahti, Vieremä, Vihti, Viitasaari, Ylitornio, Ylivieska, Ylöjärvi. Keväällä vastauspyyntöjä tuli myös lisäksi seuraavilta: Asikkala, Haapavesi, Hattula, Ii, Joroinen, Juva, Kauniainen, Kokemäki, Lauritsala, Lohja, Loppi, Luumäki, Masku, Muhos, Oulainen, Pattijoki, Pieksämäki, Pulkila, Raisio, Siikajoki, Tyrnävä, Vesilahti, Virolahti, Virrat, Äänekoski. Mukana oli myös sairaalaopetusyksikkö, kansainvälinen koulu ja kaksi koulua Suomen ulkopuolelta.

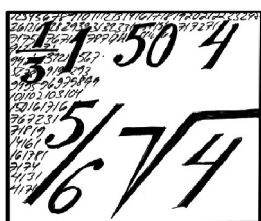
Luokanopettajat ovat olleet aktiivisia tiedonlevittäjiä ja toimijoita: suurin osa vastauspyynnöistä koskee diplomeja I–IV. Myös kaikkia myöhempiä on tehty ja jotkut koulut ovat ilmoittaneet ottavansa diplomit käyttöön kaikilla tasoilla. Vastauspyynnöistä nä-

kyy myös diplomien leviäminen opettajalta toiselle; samalta paikkakunnalta tulee useita pyyntöjä. Erityisopettajien aktiivisuus näkyy myös.

Opettajat kiittävät ylöspäin eriyttämisen mahdollisuudesta. He todella haluavat tarjota oppilaille kullekin sopivan tasoisia älyllisiä haasteita, näistä opettajan palautteen mukaan lapset innostuvat ja nauttivat. Oppiminen ja onnistuminen ponnistelun jälkeen on hieno, jatkoon motivoiva kokemus.

Tässä palautetta sairaalaopetusyksiköstä: ”Eksyin” onnekseni Solmu-matematiikkalehtenne sivuille. Koulumme tarjoaa opetusta 1.–9. -luokkalaisille psykiatrian asiakkaille. Oppilasjoukkomme vaihtelee melkoisesti lukukauden aikana. Osa oppilaista vain piipahtaa meillä 2–6 viikkoa. Osa opiskelee meillä vuoden, jopa pidempäänkin. Jokaisen oppilaan kohdalla pohdimme keinoja vahvistaa olemassaolevia taitoja (matematiikassa ja kaikissa muissakin aineissa) sekä edetä omalla lähikehityksen vyöhykkeellä psyykkisen voimien sallimissa rajoissa. Olen etsinyt hyvää, uudenlaista ja motivoivaa tapaa työstää matematiikan perustaitoja. Tämä sivu tarjoaa kaipaamaani tukea. Kiitos sivuista, hyvää syksyä, menestystä tärkeään työhönne, ja kiitos jo etukäteen vastauksista!

Tasoa on nyt 10. Diplomi IX:n taso sijoittuu ennen lukiota. Näin oppilaat voisivat testata, että he ovat omaksuneet lukiota varten tarvittavan matematiikan käsitteistön ja hallitsevat sen käyttämisen. Matematiikkahan on kumuloituvaa aine, aukot perustiedoissa estävät ymmärrystä jatkossa. Tällöin ainoaksi vaihtoehdoksi jäljelle jää tylsistyttävä ja turhauttava ulkoa opettelu.



Vaihtosähköpiirien osoitinlaskenta kompleksiluvuilla

Vesa Linja-aho

autoelektroniikan lehtori, Metropolia-ammattikorkeakoulu
etunimi.sukunimi@metropolia.fi

Kompleksilukujen lyhyt historia lukio-matematiikassa

”Nykyneuret osaavat kompleksilukuja lukiosta tullessaan tosi huonosti, kun vertaa viime vuosikymmeneen”, totesi Teknillisen korkeakoulun teoreettisen sähkötekniikan professori **Martti Valtonen** kahvitauolla Teoreettisen sähkötekniikan laboratoriossa joskus vuoden 2006 tienoilla. Hänen ilmeensä oli pettynyt kertoessani, että kompleksilukuja ei enää käsitellä lukiomatematiikassa ollenkaan – nimittäin OPS-uudistus vuonna 2003 pudotti kompleksiluvut pois myös lukiomatematiikan syventävistä opinnoista.

Pakollisilta pitkän matematiikan kursseilta kompleksiluvut oli heitetty pois jo aiemmin – professorille tämäkin tuli uutena tietona. Eikä ihme: lukio-opettajia kouluttavissa yliopistoissa toki seurataan OPS-muutoksia tarkkaan (ja ollaan niissä mukana), mutta Teknillisestä korkeakoulusta moinen tietolinkki puuttuu. Enpä olisi minäkään uudistuksesta kuullut, ellen olisi opettanut teekkariyhdistyksen valmennuskurssilla ja abiturientit keskeyttäneet opetustani osittaisintegroinnista valistaen, että tämä ei enää kuulu heidän oppimääräänsä.

Koska muistikuvat voivat pettää, on parempi varmistaa asiat kirjallisista lähteistä. Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa kompleksiluvut, niiden määrittely ja laskutoimitukset, kompleksitaso sekä 2. as-

teen yhtälön yleinen ratkaisu kuuluivat pakollisen 10. kurssin oppimäärään, joskin ne oli merkitty tähdellä, eli ”ne on tarkoitus opetuksessa käsitellä, mutta aikaa voidaan tarvittaessa käyttää myös esimerkiksi perusasioiden harjoitteluun”.

Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelmassa kompleksilukuja ei mainita suoraan, mutta oppikirjantekijät ovat ottaneet ne mukaan kurssiin MAA13 Analyysi. Opetussuunnitelman väljä määritelmä kurssilla käsiteltäviin asioihin mahdollisti tämän. Kompleksiluvuista on vuosina 1997–2005 ollut kysymys ylioppilaskirjoituksissa K1997, S1998, K2001, S2002 ja K2003.

Kirjahyllystä löytyvä, vuoden 1994 OPSia noudattava analyysin kirja Matematiikan taito 13 käsittelee kompleksilukuja 28 sivun verran. Tämä laajuus (hyvin omaksuttuna) riittäisi ihan hyvin yliopiston (ja ammattikorkeakoulun) vaihtosähköpiirien peruskurssille.

Kompleksilukujen pudottaminen lukion oppimäärästä on herättänyt kritiikkiä. Pitkän linjan matematiikan opettaja ja oppikirjailija **Markku Halmetoja** pitää kompleksilukujen poisjättöä vuonna 2003 suorastaan kulttuuriskandaalina. ”Suomen matemaattinen maine perustuu nimenomaan kompleksianalyysiin, ja nyt pitkän matematiikan ylioppilaat eivät edes tiedä, mikä on kompleksiluku”, Halmetoja kommentoi. Teoreettista sähkötekniikkaa sekä yliopistossa että ammattikorkeakoulussa opettaneena mielipiteeseen on helppo yhtyä. Itselle tutuin sovellus kompleksiluvuille on vaih-

tosähköpiirien osoitinlaskenta, mutta kompleksiluvut ovat tärkeää perusasiaa myös signaalinkäsittelyssä sekä säätötekniikassa. Muun muassa Solmu-lehden perustajiin kuuluva matematiikan dosentti, yliopistonlehtori **Kerkko Luosto** on väläyttänyt kompleksilukujen käyttöä lukion analyyttisen geometrian yhteyteen esitelmässään Näkökulmia matematiikan opetukseen¹. Matemaatikot ja matematiikanopettajat ovat kaivanneet kompleksilukuja takaisin niin 2008 Solmun sivuilla julkaistussa OPS-kritiikissä² kuin vuonna 2015 julkaistussa OPS-ehdotuksessaan³.

Jos lukion pitkä matematiikka ja fysiikka olisi mahdollista synkronoida, kompleksiluvuille olisi löytynyt näppärä sovellus vuoden 2003 ja 1994 OPSien fysiikan seiskakurssille vaihtosähköpiirien yhteyteen: usein epäselväksi jäävien impedanssiskolmioiden sijaan vaihtosähköpiirien käsittelyyn olisi voinut ottaa kompleksiluvut avuksi. Vuoden 2015 opetussuunnitelman myötä impedanssiskolmiot päätyvät historiaan nekin: fysiikan kurssimäärän supistuessa kahdeksasta seitsemään jotain oli jätettävä pois. Olin mukana fysiikan opetussuunnitelman perusteita valmistelleessa työryhmässä ja pääsyylinen vaihtosähköpiirien poispudottamiseen. Pääperusteluni oli, että melko monimutkaisen aiheen pintaraapaiseminen – ilman oikeiden työkalujen eli kompleksilukujen käyttöä – on pois joltain hyödyllisemmältä ja sivistävämmältä. Lisäksi käytännön kokemuksen mukaan vaihtosähköpiirit usein käytiin lukiossa melko juoksuvauhdilla, koska FY7-kurssi oli ladattu jo ennestään ylitäyteen teoreettisesti hankalaa asiaa.

Omissa lukio-opinnoissani kompleksiluvuista kerrottiin pakollisilla kursseilla – olisiko ollut toisen asteen yhtälön ratkaisujen yhteydessä – että ”niille on löydetty hyödyllisiä sovelluksia esimerkiksi sähkötekniikassa”. Tämä jäi mieleen, koska harrastin elektroniikkarakentelua ja TKK:n sähköosastolle pyrkiminen oli mielessä jo ensimmäisenä lukiovuotena. Mitä nämä sovellukset ovat, selvisi Teknillisen korkeakoulun kurssilla Piirianalyysi 1 – ja teille toivottavasti tästä artikkelista.

Johdanto artikkeliin

Tässä artikkelissa esitetään kompleksilukujen ominaisuudet tiiviisti siinä laajuudessa kuin mitä niitä tarvitaan vaihtosähköpiirien osoitinlaskennassa ja sen jäl-

keen perehdytään vaihtosähköpiireihin ja osoitinlaskentaan kompleksiluvuilla.

Jos ja toivottavasti kun kompleksiluvut kiinnostavat enemmän, suosittelen tutustumaan **Matti Lehtisen** artikkeliin *Kaikki tarpeellinen kompleksiluvuista*⁴ (Solmu 1/2006) tai **Jorma Merikosken** *Kompleksiluvuista ja kvaternioista*⁵ (Solmu 3/2001).

Jos kompleksilukujen määritelmä vaikuttaa hankalalta, kannattaa lukea **Lauri Ajangin** artikkelin *Kompleksiluvut ja kolmannen asteen yhtälön ratkaisut*⁶ johdanto-osa (Solmu 2/2013).

Kompleksiluvut

Lukiomatematiikassa esitellään lukualueet: on luonnolliset luvut, kokonaisluvut, rationaaliluvut ja reaaliluvut. Lukualuetta voidaan laajentaa vielä määrittelemällä *kompleksiluvut* reaalilukupareina seuraavasti:

$$z = (x, y)$$

Geometrisesti tulkittuna kompleksiluku z vastaa siis xy -tason pistettä. Kompleksiluvut ovat itse asiassa erittäin näppärä työkalu kaksisuoriseen vektorilaskentaan ja analyyttiseen geometriaan – kuten aiemmin mainituissa OPS-kritiikeissä on esitettykin. Lukua x kutsutaan kompleksiluvun *reaaliosaksi* ja lukua y *imaginaariosaksi*. Kompleksilukujen yhteenlasku määritellään:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

eli reaaliosat lasketaan yhteen, samoin imaginaariosat. Kertolasku määritellään seuraavasti:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Tarkastellaan kompleksilukua $(0, 1)$: kertolaskun määritelmän mukaan korottamalla tämä luku toiseen potenssiin saadaan

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

joka on tavallinen reaaliluku eli kompleksitason x -akselin (reaaliakselin) piste. Kutsutaan tätä lukua⁷, joka toiseen korotettuna on reaaliluku -1 , *imaginaariyksiköksi* i:

$$i^2 = -1.$$

¹<http://www.helsinki.fi/~kluosto/esit/MAOL2002s/nkku.pdf>, kalvo 26, lukemisen arvoinen muutenkin.

²http://matematiikkalehtisolmu.fi/2009/ma_ops.pdf

³http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/ma_ops_ehdotus_2016.pdf

⁴<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/1/lehtinen.pdf>

⁵<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/3/merikoski/merikoski.pdf>

⁶<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2013/2/kompleksiluvut.pdf>

⁷Useissa (etenkin insinööri)matematiikan opetusmateriaaleissa kompleksilukuja lähestytään määrittelemällä ensin tämä imaginaariyksikkö ja ryhtymällä kylmästi laskemaan sen avulla. Tätä lähestymistapaa on kritisoinut mm. dosentti Heikki Apiola (ks. https://math.tkk.fi/opetus/p3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf), koska se mystifioi turhaan kompleksilukuja, tyyliin ”mikään luku korotettuna toiseen potenssiin ei voi olla negatiivinen, mutta mikään ei estä matemaattikkoa määrittelemästä niin”.

Tällöin kompleksiluku z voidaan esittää muodossa

$$z = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)(0,1) = x + yi,$$

jota kutsutaan *summamuodoksi*. Seuraavassa luvussa tutustutaan summamuodossa olevien kompleksilukujen peruslaskutoimituksiin.

Kompleksilukujen yhteen-, vähennys- ja kertolasku summamuodossa

Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku on yksinkertaista: imaginaariyksikköä käsitellään kuten mitä tahansa muuttujaa. Kun $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$, niin

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Esimerkiksi jos $z_1 = 3 + 4i$ ja $z_2 = 1 + 2i$, niin

$$z_1 + z_2 = 4 + 6i \quad \text{ja} \quad z_1 - z_2 = 2 + 2i.$$

Kertolasku on yhtä helppoa, kun muistetaan imaginaariyksikön määritelmä eli se, että $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (3 + 4i)(1 + 2i) \\ &= 3 + 6i + 4i + 8i^2 \\ &= 3 + 10i + 8(-1) \\ &= -5 + 10i. \end{aligned}$$

Tämä on yhtäpitävää edellisen luvun kertolaskun määritelmän kanssa, kuten tietysti pitääkin.

Kompleksilukujen jakolasku

Kompleksiluvun jakaminen reaalityylillä ei myöskään sisällä mitään hankalaa, esimerkiksi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 + 2i} = \frac{3}{2} + \frac{4i}{2} = \frac{3}{2} + 2i.$$

Jos myös jakajana/nimittäjänä on kompleksiluku, kannattaa nimittäjä saattaa reaalityytoon laventamalla nimittäjän *liittoluvulla*. Liittoluku eli *konjugaatti* saadaan yksinkertaisesti vaihtamalla kompleksiluvun imaginaariosan etumerkki – tätä toimenpidettä kutsutaan *konjugoinniksi* ja sen operaattori on $*$:

$$(x + yi)^* = x - yi.$$

Kun kompleksiluku kerrotaan liittoluvullaan, saadaan aina reaalityyluku:

$$z \cdot z^* = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - (yi)^2 = x^2 + y^2.$$

⁸Tämä oli ja on tavallinen virhe tenteissä niin TKK:lla kuin Metropoliasakin.

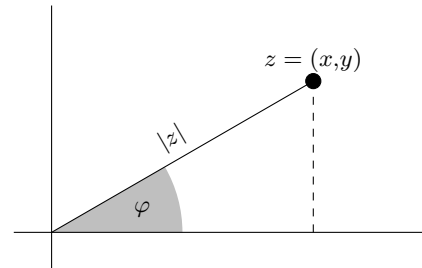
Nyt esimerkiksi:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 4i}{1 + 2i} \\ &= \frac{(3 + 4i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} \\ &= \frac{11 - 2i}{1 + 4} \\ &= \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Kompleksiluvun kulmamuoto

Summamuotoisen esitystavan $z = x + yi$ lisäksi kompleksilukuja voidaan käsitellä *kulmamuodossa*.

Kun kompleksilukua ajatellaan xy -tason pisteinä, se voidaan ilmoittaa myös napakoordinaatteina eli kertomalla pisteen etäisyys origosta sekä suuntakulma φ x -akseliin nähden:



Esimerkiksi kompleksiluvun $1 + i$ etäisyys origosta on $\sqrt{2}$ ja suuntakulma 45° , joka merkitään tavallisesti:

$$1 + i = \sqrt{2} \angle 45^\circ.$$

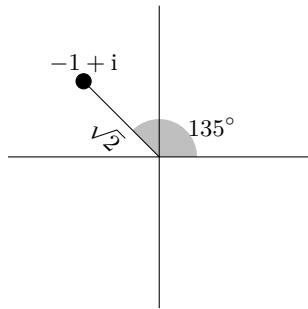
Pisteen etäisyyttä origosta kutsutaan kompleksiluvun *itseisarvoksi* eli *moduliksi* – mikä on loogista, tarkoitetaan reaalityylunkin itseisarvo luvun etäisyyttä origosta lukusuoralla. Suuntakulmaa taas kutsutaan *argumentiksi*. Muunnos summa- ja kulmamuodon välillä onnistuu perustrigonometrialla ja Pythagoraan lauseella. Kulmamuodosta summamuotoon siirtyminen on yksiselitteistä: kulmamuodossa $|z| \angle \varphi$ oleva kompleksiluku saadaan summamuotoon $x + iy$ laskemalla kertoimet

$$x = |z| \cos \varphi \quad y = |z| \sin \varphi.$$

Toiseen suuntaan muunnettaessa

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

on oltava laskimen käytössä tarkkana kulmaa laskettaessa, koska esimerkiksi laskin palauttaa arkustangentin aina koordinaatiston oikeaan puolitasoon. Esimerkiksi kompleksiluvun $-1 + i$ kulmaksi huolimaton laskimenkäyttäjäh⁸ saa $\arctan \frac{1}{-1} = -45^\circ$, vaikka piste sijaitsee koordinaatiston toisessa neljänneksessä:



ja kulma on oikeasti $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.⁹

Kulmamuotoon liittyy eräs kätevä ominaisuus: kulmamuodossa olevien kompleksilukujen kertolasku onnistuu yksinkertaisesti kertomalla itseisarvot keskenään ja laskemalla kulmat yhteen:

$$|z_1| \angle \varphi_1 \cdot |z_2| \angle \varphi_2 = |z_1| |z_2| \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

ja jakolasku vastaavasti jakamalla itseisarvot toisillaan ja vähentämällä kulmat toisistaan:

$$\frac{|z_1| \angle \varphi_1}{|z_2| \angle \varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \angle (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Laskusäännöt on helppo todistaa Eulerin kaavan¹⁰

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

avulla:

$$\begin{aligned} |z_1| \angle \varphi_1 \cdot |z_2| \angle \varphi_2 &= |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \\ &= |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = |z_1| |z_2| \angle (\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Myöhempiä erityisesti sähkötekniikassa kätevää sovellusta varten on tärkeä huomata, että imaginaariyksiköllä kertominen ei muuta kompleksiluvun itseisarvoa mutta kääntää kulmaa 90 astetta vastapäivään:

$$|z| \angle \varphi \cdot i = |z| \angle \varphi \cdot 1 \angle 90^\circ = |z| \angle (\varphi + 90^\circ)$$

ja vastaavasti imaginaariyksiköllä jakaminen kääntää kulmaa 90 astetta myötäpäivään.

Sinimuotoinen vaihtojännite, vastus ja kondensaattori

Sinimuotoinen vaihtojännite

Sinimuotoinen vaihtojännite määritellään seuraavasti:

$$u(t) = \hat{u} \sin(2\pi f t + \phi),$$

missä $\hat{u}$ on jännitteen *huippuarvo* eli *amplitudi*, f on jännitteen taajuus eli jaksoluku ja ϕ on jännitteen *vaihekulma*¹¹. Merkitsemällä $\omega = 2\pi f$ säästetään kirjoitusvaivaa:

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi).$$

Suuretta ω kutsutaan sähköopissa *kulmataajuudeksi* (vrt. pyörimisliikkeen kulmanopeus – matemaattisesti kyse on samasta asiasta).

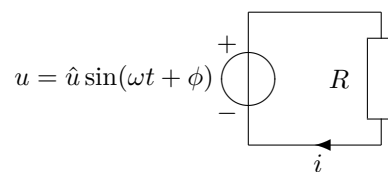
Esimerkiksi tavallisesta kotitalouspistorasiasta saatavan jännitteen taajuus on 50 Hz ja huippuarvo $\hat{u} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} \approx 325 \text{ V}$.¹²

Vastus ja vaihtojännite

Ohmin lain mukaan virta vastuksessa on jännitteen ja resistanssin osamäärä, eli

$$i = \frac{u}{R},$$

joten seuraavassa virtapiirissä



$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u} \sin(\omega t + \phi)}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t + \phi).$$

Vastusarvon muuttaminen ei siis vaikuta taajuuteen eikä vaihekulmaan, vaan ainoastaan virran amplitudiin.

Kondensaattori ja vaihtojännite

Siinä missä vastuksen virta oli kääntäen verrannollinen resistanssiin ja suoraan verrannollinen jännitteeseen, kondensaattorin virta on suoraan verrannollinen kapasitanssiin ja jännitteen muutosnopeuteen eli

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

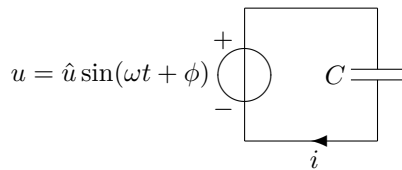
Kun kondensaattoriin kytketään sinimuotoinen vaihtojännite

⁹Koska napakoordinaatistosta xy -koordinaatistoon siirtymistä käytetään paljon tietokonegrafikassa, on monissa ohjelmointikielessä valmiina funktio $\text{atan2}(y,x)$, joka palauttaa kulman arvon oikein riippumatta siitä, missä koordinaatiston neljänneksessä ollaan.

¹⁰Eulerin kaavan todistus puolestaan löytyy Timo Kiviluodon artikkelista *Eulerin kaavaa johtamassa* (Solmu 1/2002) <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2002/1/kiviluoto/kiviluoto.pdf>

¹¹Joskus näkee käytettävän termiä *nollavaihekulma* – kyse on täsmälleen samasta asiasta.

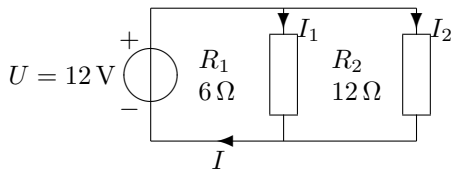
¹²230 V on vaihtojännitteen *tehoarvo* (ks. artikkelin toiseksi viimeinen kappale).



saadaan virta derivoimalla jännite ja kertomalla se kapasitanssilla C

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} = C\omega\hat{u} \cos(\omega t + \phi) \\ &= C\omega\hat{u} \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Virran huippuarvo on siis $C\omega\hat{u} = \hat{i}$ ja sen vaihekulma on $\frac{\pi}{2}$ radiaania eli 90° jännitettä edellä. Juuri tämä vaihesiirto tekee sen, että vaihtojännitteitä- ja virtoja ei voi laskea samalla tavalla yhteen reaalilukuina kuin tasavirtoja. Esimerkiksi seuraavassa tasasähköpiirissä



kaikki kolme komponenttia on kytketty rinnan eli niiden yli vaikuttaa sama 12 voltin jännite, ja vastusten virrat voidaan laskea Ohmin lailla

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2 \text{ A} \quad I_2 = \frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} = 1 \text{ A}$$

ja jännitelähteen virta saadaan näiden summana Kirchhoffin virtalain nojalla:

$$I = I_1 + I_2 = 3 \text{ A}.$$

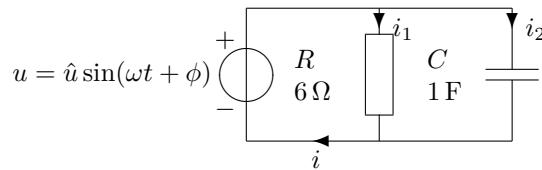
Tarkastellaan seuraavaksi kondensaattoria ja vastusta rinnakkain jännitelähteen kanssa. Kondensaattorille voidaan määritellä *reaktanssiksi* kutsuttu suure, joka kuvaa komponentin kykyä vastustaa sinimuotoisen vaihtovirran kulkua. Aivan kuten resistanssi on jännitteen ja virran suhde, reaktanssi on jännitteen ja virran amplitudien suhde. Edellä todettiin, että jos kondensaattorin jännitteen amplitudi on $\hat{u}$ niin virran amplitudi $\hat{i} = C\omega\hat{u}$, joten kondensaattorin reaktanssi X on

$$X = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{\hat{u}}{C\omega\hat{u}} = \frac{1}{\omega C}.$$

Lasku on täsmälleen samanlainen, vaikka U olisi vaihtojännite – vastukset eivät vaikuta sinifunktion (tai minkä tahansa muun funktion) argumenttiin vaan ainoastaan vakiokertoimeen, joten sinit voi ottaa yhteiseksi tekijäksi, jolloin lopputulos on, että virtojen

amplitudit voi laskea yhteen välittämättä jännitteen aaltomuodosta.

Jos piirissä on vain yksi jännitelähde ja kondensaattoreita, voidaan niiden virta laskea yhtä yksinkertaisesti kuin vastuksenkin virta. Jos piirissä on muitakin komponentteja, tulee myös vaihe-eron vaikutus ottaa huomioon. Valaistetaan asiaa yksinkertaisella esimerkillä – vaihdetaan edellisen esimerkin piiriin toisen vastuksen tilalle kondensaattori ja jännitteeksi vaihtojännite:



ja olkoot $\omega = \frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}}$, $\phi = 0^\circ$ ja $\hat{u} = 12 \text{ V}$.

Vastuksen virran huippuarvo saadaan jakamalla jännitteen huippuarvo resistanssilla:

$$\hat{i}_1 = \frac{\hat{u}}{R} = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2 \text{ A}$$

ja kondensaattorin virran huippuarvo saadaan jakamalla jännitteen huippuarvo kondensaattorin reaktanssilla:

$$X = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} 1 \text{ F}} = 12 \Omega \quad \hat{i}_2 = \frac{\hat{u}}{X} = \frac{12 \text{ V}}{12 \Omega} = 1 \text{ A}.$$

Tulos on luonnollisesti sama kuin sinien kautta laske-
malla: Vastuksen virta on

$$i_1 = \frac{u}{R} = \frac{12 \text{ V} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t)}{6 \Omega} = 2 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t)$$

ja kondensaattorin virta

$$\begin{aligned} i_2 &= C \frac{du}{dt} \\ &= 1 \text{ F} \frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} 12 \text{ V} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 1 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Sinin kertoimista poimitaan $\hat{i}_1 = 2 \text{ A}$ ja $\hat{i}_2 = 1 \text{ A}$. Kokonaisvirta $\hat{i}$ ei kuitenkaan ole $2 \text{ A} + 1 \text{ A} = 3 \text{ A}$, koska kondensaattorin virta on 90° astetta vastuksen virtaa edellä, vaan virrat tulee laskea yhteen vaihekulma huomioiden¹³:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= 2 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t) + 1 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sqrt{(2 \text{ A})^2 + (1 \text{ A})^2} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t + \arctan \frac{1 \text{ A}}{2 \text{ A}}) \\ &= \sqrt{5} \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{\text{s}} t + \arctan \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

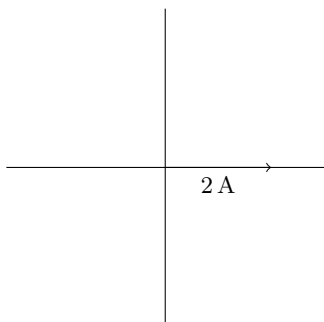
¹³Ks. esim. <http://pages.pacificcoast.net/~cazelais/252/1c-trig.pdf>

Virran huippuarvo on siis $\sqrt{5} \text{ A} \approx 2,2 \text{ A}$ ja vaihekulma $\arctan \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$. Tämä on usein työläs tapa laskea, ja jos virtapiirissä on useita komponentteja, aivan liian työläs. Tämän takia vaihtosähköpiirilaskuja lasketaan osoitinlaskennan avulla, johon tutustumme seuraavaksi.

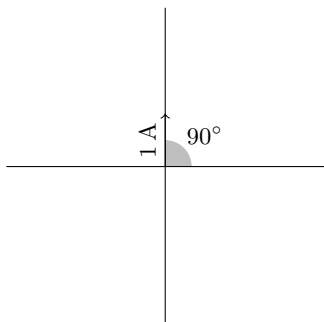
Osoitinlaskenta

Osoitinlaskenta perustuu siihen, että kutakin sinimuotoista jännitettä ja virtaa ajatellaan vektorina, jonka pituus vastaa jännitteen/virran huippuarvoa, jonka suuntakulma ajanhetkellä $t = 0$ on sama kuin jännitteen/virran nollavaihekulma ja joka pyörii kulmataajuudella ω . Tällaista vektoria kutsutaan *huippuarvon osoittimeksi*, jonka y-koordinaatti on kulman $\omega t + \varphi$ sini. Tällöin sinimuotoisten jännitteiden ja virtojen yhteenlasku redusoituu osoittimien vektori yhteenlaskuksi: sinien summa on sama kuin summavektorin y-koordinaatti.

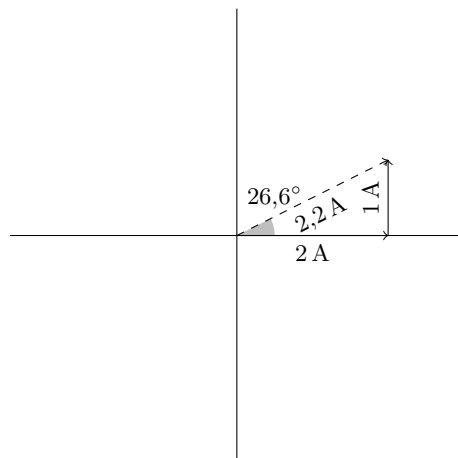
Esimerkiksi edellisen esimerkin virta $i_1 = 2 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{s} t)$ esitetään x-akselilla lepäävänä vektorina, jonka pituus on 2 ampeeria:



Kondensaattorin virta $i_2 = 1 \text{ A} \sin(\frac{1}{12} \frac{1}{s} t + \frac{\pi}{2})$ puolestaan osoittaa pystysuoraan, koska sen vaihekulma on 90 astetta:



Kun vektorit lasketaan yhteen, saadaan summavektori, jonka pituus on $\sqrt{2^2 + 1^2} \text{ A} = \sqrt{5} \text{ A} \approx 2,2 \text{ A}$ ja kulma $\arctan \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ$:



Vektorit yhteen laskemalla saatiin siis sama tulos kuin suoraan trigonometristen funktioiden yhteenlaskuna: virtojen summan huippuarvo on resultanttivektorin pituus ja nollavaihekulma vektorin suuntakulma.

Menetelmä toimii niin jännitteiden kuin virtojenkin yhteen- ja vähennyslaskulle. Vektorien piirtämisen sijaan laskutoimitukset on näppärämpää tehdä kompleksiluvuilla.

Yleistetty Ohmin laki ja osoitinlaskenta kompleksiluvuilla

Esimerkkiipiirissä kokonaisvirta saatiin laskemalla huippuarvon osoittimet yhteen vektorisummana. Sama laskutoimitus luonnistuu näppärästi kompleksiluvuilla, kun määritellään jännitteelle ja virralle:

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi) \iff U = \hat{u} \angle \varphi$$

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi) \iff I = \hat{i} \angle \varphi.$$

Huom! Koska sähkötekniikassa kirjain i tarkoittaa virtaa, sähköalan laskuissa imaginaariyksikköä merkitään j :llä – matemaattisesti kyseessä on kuitenkin täsmälleen sama asia.¹⁴ Toinen sähköalan käytäntö on jättää yksiköiden lyhenteet pois laskutoimituksista – tämä on toisin kuin mihin lukion matematiikassa ja varsinkin fysiikassa on totuttu, mutta perusteltua tekstin luettavuuden kannalta.

Nyt esimerkkilaskumme sujuu seuraavasti:

$$I_1 = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = 1 \text{ A} \angle 90^\circ = j 1 \text{ A}.$$

¹⁴Imaginaariyksikkö ja virta eivät mene sekaisin koneella kirjoitetussa tekstissä, koska virta ladotaan muiden suureiden tapaan kursiivilla i ja imaginaariyksikkö antiikvalla ("pystyfontilla") j . Käsinkirjoitetussa tekstissä sekaannuksen vaara on suurempi.

Eli yksiköt pois jättäen

$$I_1 = 2 \quad I_2 = j$$

ja

$$I = I_1 + I_2 = 2 + j$$

eli kulmamudossa

$$2 + j = \sqrt{2^2 + 1^2} \angle \arctan \frac{1}{2} \approx 2,2 \angle 26,6^\circ.$$

Itse asiassa se sujuu vielä kätevämmiin, koska vaihekulman käsittely voidaan ottaa mukaan jo reaktanssia laskettaessa. Kondensaattorissahan virta on 90 astetta jännitettä edellä. Kuten edellä kompleksilukujen laskeusääntöjen yhteydessä todettiin, imaginaariyksiköllä kertominen kääntää kulmaa 90 astetta eteenpäin. Määrittämään kondensaattorin *kompleksinen impedanssi* Z seuraavasti:

$$Z = -jX = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{j}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C},$$

jolloin kondensaattorin virta voidaan laskea *yleistetyn Ohmin lain*

$$U = ZI$$

avulla suoraan, niin että vaihekulmaa ei tarvitse ajatella erikseen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = Uj\omega C \\ &= 12j \frac{1}{12} \cdot 1 \text{ A} = j \cdot 1 \text{ A} = 1 \text{ A} \angle 90^\circ. \end{aligned}$$

Osoitinlaskenta kompleksiluvuilla tekee vaihtosähköpiirien käsittelystä helppoa: sinimuotoisella vaihtojännitteellä on kaksi ominaisuutta: huippuarvo ja vaihekulma, ja kompleksiluku sisältää näistä molemmat. Kun käytetään yleistettyä Ohmin lakia ja kompleksilukuja, kaikki tasasähköpiireille pätevät laskumenetelmät pätevät sellaisenaan. Esimerkiksi esimerkkipiirimme kokonaisvirta voidaan laskea rinnankytkennän kaavalla suoraan. Tasasähköpiirissä vastusten R_1 ja R_2 rinnankytkennän resistanssi on

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega}} = 4\Omega$$

ja virta siten

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{12 \text{ V}}{4\Omega} = 3 \text{ A}.$$

Vastuksen ja kondensaattorin rinnankytkennän impe-

danssi on samoin laskettuna

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6} + j\frac{1}{12} \cdot 1} \Omega \\ &= \frac{(\frac{1}{6} - j\frac{1}{12})}{(\frac{1}{6} + j\frac{1}{12})(\frac{1}{6} - j\frac{1}{12})} \Omega \\ &= \frac{(\frac{1}{6} - j\frac{1}{12})}{\frac{5}{144}} \Omega \\ &= 4,8 - 2,4j \Omega \approx 5,37 \angle -26,6^\circ \Omega. \end{aligned}$$

Nyt kokonaisvirta (tai sen likiarvo, jos käytän kulmamudon likiarvoa) ratkeaa yleistetystä Ohmin laista:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z} \approx \frac{12 \text{ V}}{5,37 \angle -26,6^\circ \Omega} \\ &= \frac{12}{5,37} \angle (0^\circ - (-26,6^\circ)) \text{ A} = 2,2 \angle 26,6^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Kelan reaktanssi

Kolman tärkeä peruskomponentti kondensaattorin ja vastuksen lisäksi on kela, jonka perusyhtälö on

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Kondensaattorin perusyhtälöön verrattuna jännite ja virta ovat vaihtaneet paikkaa ja kapasitanssin tilalla on induktanssi. Näin ollen kelan reaktanssi on $X = \omega L$ ja kompleksinen impedanssi

$$Z = j\omega L,$$

koska kela kääntää vaihekulmaa 90 astetta päinvastaiseen suuntaan kuin kondensaattori.

Sekalaisia huomioita

Osoitinlaskentaa opiskeltaessa on hyödyllistä laskea kaikki välivaiheet käsin, mutta kun rutiini on hallussa, se on syytä antaa (ihan jo virheiden välttämiseksi) laskimen tai tietokoneohjelman hoidettavaksi. Valmiit piirisimulointiohjelmat käyttävät nekin kompleksilukulaskentaa piirejä analysoidessaan.

Taskulaskinten kyky käsitellä kompleksilukuja vaihtelee suuresti – lähes jokainen laskin laskee kompleksilukuja jossain määrin, mutta sujuva lukujen syöttö sekä summa- että kulmamudossa yhdistettynä näppärään lopputuloksen muuntamiseen muodosta toiseen löytyy kokemukseni mukaan vain Casion vanhasta FX-115- ja

markkinoilla olevasta FX-991 -funktio-laskimesta. Järeämmistä numeronmurskaimista Texas Instrumentsin CAS-laskimet käsittelevät kompleksilukuja sujuvasti, joskin toimintoja saa välillä hakea melkoisen valikko-viidakon takaa.

Verkkoselaimessa toimivista matematiikkaohjelmissa tunnetuin WolframAlpha laskee sekin kompleksiluvuilla sujuvasti ja ilmoittaa lopputuloksen sekä summa- että kulmamuodossa, mutta kulmamuotoisten lähtöarvojen syöttö onnistuu vain Eulerin kaavan avulla, mikä on toki matemaattisesti oikein mutta tuottaa turhaa lisänäpyttelyä.

Tässä artikkelissa laskettiin huippuarvon osoittimilla. Aivan yhtä hyvin voidaan laskea tehollisarvon osoittimilla – ja näin yleensä tehdäänkin, koska tällöin komponenttien tehon laskeminen on suoraviivaista. Tehollisarvo ja vaihtosähköteho ovat nekin matemaattisesti kiehtovia aiheita, mutta tekisivät artikkelista liian pitkän. Niistä lisää seuraavassa Solmun numerossa!

Vaihtosähköpiirilaskennasta löytyy lisäesimerkkejä muun muassa kalvosarjastani *Tuhat kalvoa sähkötekniikkaa*¹⁵ kalvoilta nrot 416–427.

Otan mielelläni vastaan palautetta ja kysymyksiä artikkelistani ensimmäiseltä sivulta löytyvään sähköpostiosoitteeseen.

Lähteitä ja lisälukemista

Kouluhallitus: Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985. Valtion painatuskeskus. Helsinki 1985.

Opetushallitus: Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994. Painatuskeskus. Helsinki 1994.

Merikoski, Väänänen, Laurinoli, Sankilampi: Matematiikan Taito 13, Analyysi. WSOY. Porvoo 1999.

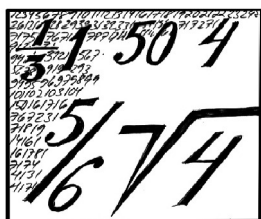
Tage Hedberg, Aimo Roth: Osoitinlaskenta. 2. painos. WSOY. Porvoo 1971.

Martti Valtonen, Anu Lehtovuori: Piirianalyysi 1. Uni-grafia. Helsinki 2011.

Kimmo Silvonen: Sähkötekniikka ja piiriteoria. Otatieto. Helsinki 2009.

Korjaukset 24.5.2017: Kappaleessa Kompleksiluvun kulmamuoto korjattu, että imaginaariyksiköllä kertominen kääntää kulmaa 90 astetta vastapäivään (ei siis myötäpäivään) ja imaginaariyksiköllä jakaminen kääntää kulmaa 90 astetta myötäpäivään (ei siis vastapäivään). Kappaleessa Yhdistetty Ohmin laki ja osoitinlaskenta kompleksiluvuilla korjattu kaava $I = \frac{U}{R}$ muotoon $I = \frac{U}{Z}$.

¹⁵<http://www.slideshare.net/linjaaho/tuhat-kalvoa-shktekniikkaa-ja-elektroniikkaa>



Eräs Collatz-Kakutanin otaksuman analogia

Juhani Fiskaali¹

Moni tuntee Collatz-Kakutani-probleeman ja siihen liittyvän otaksuman. Jos määritellään funktio $f: N \rightarrow N$ asettamalla

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, & \text{jos } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{1}{2}(3n+1), & \text{jos } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

niin otaksumana on, että iteroitaessa tällä funktiolla mistä alkuarvosta $m \in N$ tahansa lähtemällä iteraatiojonossa päädytään aina sykliin $\dots, 2, 1, 2, 1, \dots$. Esimerkiksi lukuun $m = 11$ liittyvä iteraatiojono on $11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \dots$, missä kymmenennellä iteraatiolla on saavutettu luku 1. Täten luku 11 on funktion f käänteisrelaation generoimassa lukujen puussa syvyydellä 10.

Löytyisikö sellaista funktiota $F: N \rightarrow N$, että iteraatiojono $m, F(m), F^2(m), \dots$ päättyisi vakioketjuun $\dots, 1, 1, 1, \dots$ riippumatta lähtöarvosta $m \in N$? Otaksumani on, että funktio F , jolle

$$F(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & \text{jos } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(4n-1), & \text{jos } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{1}{3}(5n-7), & \text{jos } n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

on tällainen.

Esimerkkijonoina olko seuraavat kolme jonoa, alkuarvoina 11, 100 ja 1000:

11, 16, 21, 7, 9, 3, 1, 1, 1, $\dots$

100, 133, 177, 59, 96, 32, 51, 17, 26, 41, 66, 22, 29, 46, 61, 81, 27, 9, 3, 1, 1, $\dots$

ja

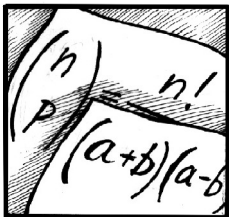
1000, 1333, 1777, 2369, 3946, 5261, 8766, 2922, 974, 1621, 2161, 2881, 3841, 5121, 1707, 569, 946, 1261, 1681, 2241, 747, 249, 83, 136, 181, 241, 321, 107, 176, 291, 97, 129, 43, 57, 19, 25, 33, 11, 16, 21, 7, 9, 3, 1, 1, $\dots$

Näistä jonoista ilmenee, että mahdollisessa funktion F käänteisrelaation generoimassa lukupuussa luku 11 on syvyydellä 6 ($F^6(11) = 1$), luku 100 on syvyydellä 19 ja luku 1000 syvyydellä 43. (Lukupuun terminologiassa voidaan käyttää sukupuun termejä kuten jälkeläinen ja sukupolvi. Kahden luvun sukulaisuutta voidaan mitata etäisyydellä puun haaroja pitkin mitattuna.)

Otaksuman vääräksi osoittamiseksi riittäisi löytää sellainen alkuarvo $m \in N$, että luku 1 ei ole jäsenenä iteraatiojonossa $m, F(m), F(F(m)), F(F(F(m))), \dots$. Löytyisikö mahdollisesti jono, jossa on silmukka?

Jos testausta halutaan ”kynällä ja paperilla”, on luontevaa käyttää kolmikantajärjestelmää ja selvittää, mitä funktion F määritelmässä esiintyvät kolme eri toimintoa tarkoittavat ja miten testattavan jonon seuraava jäsen saadaan edellisestä kolmikannan lukuja käytettäessä. Collatz-Kakutani-probleeman testauksessahan oli luontevaa käyttää binäärilukuja.

¹Kirjoittaja on Oulun lyseon eläkkeellä oleva matematiikan opettaja.



Solmun ongelmavalta

Solmun ensimmäisen ongelmavalstan jalkapallokenttätehtävään tuli äärimmäisen elegantti ratkaisu Jaska Poraselta. Ilahduttavasti tehtävä oli poikunut muuttaman jatkokysymyksen, jotka löytyvät tämänkertaiselta palstalta.

Jalkapallokenttätehtävä on kiero. Tehtävä on nimittäin suoraviivainen ja nopea ratkaista, kun tajuaa käyttää kehäkulmalausetta. Jos taas ryhtyy ratkaisemaan yhtälöitä rakennellen ja funktioita maksimoiden, voi ratkaisusta tulla melkoisen pitkä.

Jätetään vielä loput ensimmäisen ongelmavalstan tehtävät odottamaan ratkaisuehdotuksia lukijoilta. Niihin sekä näihin uusiin tehtäviin kaivattaisiin ratkaisuja 20.4.2017 mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi.

Tehtävät

Tehtävä 1. (Ehdottanut Jaska Poranen) Kuvassa 1 on piste P sivun AB keskipiste. Marcello juoksee pitkin janaa PD . Mihin kohtaan X tällä janalla Ronaldo syöttaa pallon, kun kulman FXE pitää olla mahdollisimman suuri eli maaliviivan EF pitää näkyä pisteestä X mahdollisimman suuressa kulmassa? (Näistä taitureista kun on kyse, niin tietysti myös Marcello on tuossa pisteessä X oikealla hetkellä.)

Tehtävä 2. (Ehdottanut Jaska Poranen) Määritä janalta PD piste M siten, että janojen summa $EM + MF$ on mahdollisimman pieni. Määritä edelleen maaliviivajan EF keskinormaalini ja janan PD leikkauspiste (merkitään N). Osoita, että $\angle FME = \angle FNE$.

Tehtävä 3. (Ehdottanut Aki Halme) Kuinka voit mitään mittaamatta taitella A4-paperista tasasivuisen kolmion?

Tehtävä 4. (Ehdottanut Aki Halme) Tasan keskipäivällä kellon tunti-, minuutti- ja sekuntiosoitimet ovat täsmälleen päällekkäin. Hieman yli kello yksi iltapäivällä tunti- ja minuuttiosoitimet ovat jälleen täsmälleen päällekkäin. Minne sekuntiosoitin silloin osoittaa?

Tehtävä 5. (Ehdottanut Esa Vesalainen) Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 7, ja sen sisältä on valittu 13 eri pistettä. Osoita, että jotkin kaksi niistä ovat enintään etäisyydellä 2 toisistaan.

Tehtävä 6. (Lukijan ehdottama muunnelmä romaniaisesta koulutehtävästä) Olkoon

$$S_k = k + kk + kkk + \dots + \underbrace{kk\dots k}_{n \text{ kpl}},$$

kun $k = 1, 2, \dots, 9$. Laske summa

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_9.$$

Tehtävä 7. (Tehtävän 6 jatko-osa) Osoita, että

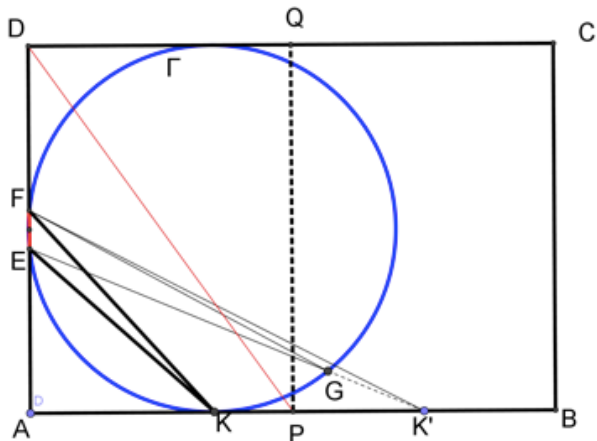
$$10^n \equiv 9n + 1 \pmod{81}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisut

Tehtävä 1, Solmu 3/2016. (Ehdottanut Aki Halme) Jalkapallokentällä on pituutta noin 100 metriä ja leveyttä noin 70 metriä. Jalkapallomaalin leveys on 7,32

metriä. Maali sijaitsee lyhyemmän sivun keskellä. Mistä kohtaa jalkapallokentän sivurajaa maali näkyy suurimmassa kulmassa? Mistä kentän pisteistä maali näkyy samassa kulmassa kuin kyseisestä kohdasta sivurajaa?



Kuva 1: Mallikuva tehtävästä 1 ja sen eräästä ratkaisusta.

Ratkaisu (Jaska Poranen) Tarkastellaan tehtävää 1 ensin hieman yleisemmin oheisen kuvan kautta (Kuva 1). Olkoon nelikulmio $ABCD$ suorakulmio ja mallittakoon se tehtävässä mainittua jalkapallokentän pii-

riä. Erotetaan sen sivulta AD maaliviivajana EF siten, että $EA = FD$. Piirretään ympyrä Γ , joka kulkee pisteiden E ja F kautta ja joka sivuaa janaa AB . Olkoon tämä sivuamispiste K .

Jana EF näkyy sivulta AB pisteestä K mahdollisimman suuressa kulmassa. Olkoon nimittäin K' jokin toinen piste sivulla AB . Piirretään puolisuora EK' ja merkitään sen ja ympyrän Γ leikkauspistettä kirjaimella G . Kulma $\angle FGE$ on kolmion $FK'G$ kulman $K'GF$ vieruskulmana suurempi kuin kulma $FK'G$ ($= \angle FK'E$), ts. $\angle FK'E < \angle FGE$. Ympyrän Γ samaa kaarta (tai jännettä EF) vastaavina kehäkulmina ovat kulmat $\angle FGE$ ja $\angle FKE$ yhtä suuria. Siis $\angle FK'E < \angle FKE$.

Ympyrän sekanttilauseetta soveltaen saadaan piste K selville. Sekanttilauseen nojalla $AE \cdot AF = (AK)^2$. Merkitään vielä $EF = a$ ja $AE = b$. Silloin $(AK)^2 = b \cdot (b + a)$ eli $AK = \sqrt{b^2 + ab}$. Sijoittamalla $a = 7,32$ m, $b = \frac{70 \text{ m} - 7,32 \text{ m}}{2} = 31,34$ m saadaan $AK \approx 34,81$ m. Itse kulman $\angle FKE$ suuruus (n. 6°) olisi nyt helppo määrittää perustrigonometrialla, mutta sitä ei tehtävässä kysytty. Pythagoraan lauseen avulla voisi selvittää esimerkiksi etäisyyden pisteestä K janan EF keskipisteeseen, jne. Maaliviiva EF näkyy kulman $\angle FKE$ suuruusena kaikista kentällä $ABCD$ olevista ympyrän Γ pisteistä (lukuun ottamatta pisteitä E ja F).

Laaja-alainen projektiosaaminen matematiikan opetuksessa

Matematiikkadiplomi-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

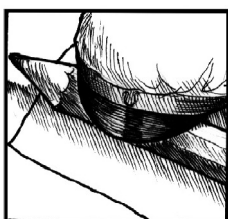
on tulostettavissa matematiikkadiplomien tehtävistä kerättyjä tehtäväpaketteja, joita voi käyttää laaja-alaisen osaamisen opetuksessa. Käytettävissä on 10 tehtäväpakettia:

- Maapallo
- Suomen historia
- Terveys ja ravinto
- Talous
- Todennäköisyys
- Matematiikka ja taide (2 tasoa)
- Mittaaminen (2 tasoa)
- Koodauksen (tai ohjelmoinnin) pohjustus

Alaluokille sopivia tehtäviä on kolmen viimeisen aiheen paketeissa.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen at yahoo.piste.com



Teema ja muunnelmia: syksyn 2016 ylioppilastehtävistä mieleen tullutta

Matti Lehtinen

Ylioppilaskirjoitusten tehtäviä monesti arvostellaan. Milloin ne poikkeavat opetussuunnitelmasta, milloin ovat liian vaikeita tai helppoja. Itsekin olen joskus tehtäviä moitiskellut. Tällä kertaa aion olla positiivinen. Syksyn 2016 pitkän matematiikan tehtävät olivat monessa mielessä hauskoja. Yksi myönteinen piirre niissä on se, että moni antaa mahdollisuuden ehkä vähän leikitelläkin erilaisilla lähestymistavoilla tai sitten tehtävästä saattaa aueta laajempia näköaloja. Seuraavassa muutaman tehtävän ratkaisuvariaatio ja laajennus. Väärinkäsitysten välttämiseksi korostettakoon, että tarkoitus ei ole antaa tehtäville parempia tai näppärempiä ratkaisuja, vaan taas kerran esittää tukea ajatukselle, että matematiikan metsässä kulkee monia polkuja, jotkut kivikkoisempia kuin toiset, mutta eihän se silein tie aina hauskin ole. Tässä esitetyt polut koukkaavat hiukan sen aika pienen alueen ulkopuolelle, jonka melko keinotekoiset rajat määrittää opetussuunnitelma. – Tehtävät voi lukea esimerkiksi osoitteessa

<http://yle.fi/aihe/artikkeli/2016/09/09/katso-syksyn-2016-yo-kokeet-ja-vastaukset>.

Derivaatta ilman derivointikaavaa

Tehtävän 2 b-kohdassa kysyttiin funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1$$

derivaatan arvoa kohdassa $x = 2$. Tehtävässä funktiota f ei ihan viimeisen päälle täydellisesti ole määritetty, kun ei ole kerrottu funktion määrittelyjoukkoa. Kun derivaatta olemassaolo kohdassa 2 edellyttää, että funktio on määritetty ainakin kohdan 2 ympärillä, mutta funktion ei tarvitse olla määritetty kovin kaukana kohdasta 2, voidaan olettaa, että $x > 0$. Silloin voidaan käyttää hyödyksi moneen tilanteeseen sopivaa toimintaohjetta: täydennä neliöksi! Onhan nimittäin

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x}{2} - 2 + \frac{2}{x}.$$

Kun $x > 0$, onkin siis

$$f(x) = 3 + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Mutta neliö on aina positiivinen tai 0. Siis $f(x) = 3$, jos

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}, \quad (1)$$

mutta $f(x) > 3$, jos

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}. \quad (2)$$

Yhtälö (1) pätee vain, jos $x = 2$, kun taas epäyhtälö (2) on voimassa aina, kun $x \neq 2$. Tämähän merkitsee sitä, että funktio f saa kohdassa $x = 2$ pienimmän arvonsa positiivisten lukujen joukossa. Mutta ääriarvokohdassa funktion derivaatta on nolla! Tehtävän voi siis ratkaista, vaikkei muistaisikaan derivointikaavoja.

Toistakin kautta tulokseen pääsee derivointikaavoihin (tässä tapauksessa toki äärimmäisen yksinkertaisiin) turvautumatta. Voi vedota suoraan derivaatan määrittelyyn ja funktion eräänlaiseen symmetrisyyteen. Derivaatan määrittelyn mukaan

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}. \quad (3)$$

Mutta

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1 = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1 = \frac{\frac{4}{x}}{2} + \frac{2}{\frac{4}{x}} + 1 = f\left(\frac{4}{x}\right).$$

Funktio saa siis saman arvon eri puolilla pistettä 2 sijaitsevista pisteissä x ja $z = \frac{4}{x}$. Kun x on lähellä 2:tä, myös $\frac{4}{x}$ on lähellä 2:tä. Pisteissä x ja $\frac{4}{x}$ kaavan (3) osamäärän osoittaja on sama, mutta nimittäjillä on vastakkainen etumerkki. Osamäärän arvot näissä pisteissä ovat erimerkkiset. Jos raja-arvo (3) olisi jokin muu kuin 0, olisi osamäärän oltava samanmerkinen kuin raja-arvo kaikissa tarpeeksi lähellä arvoa 2 olevissa pisteissä. Koska osamäärällä on kuitenkin aina erimerkkisiä arvoja, miten lähelle pistettä 2 mennäänkin, niin ainoa mahdollisuus on, että raja-arvo on nolla.

Molemmat edellisistä päättelyistä ovat tietysti siinä tavajaisia, että derivaatan olemassaolo on niissä oletettu.

Trigonometrinen askartelua

Myös tehtävän 2 c-osa antaa leikittelyn mahdollisuuksia. Siinä kehoitettiin ”laskemaan ja sieventämään

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx.$$

Jos visualisoi määrätyn integraalin pinta-alana, niin huomaa, että käyrät $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ rajoittavat välillä $[0, \frac{\pi}{2}]$ alueet, jotka ovat toistensa pelikuvia suoran $x = \frac{\pi}{4}$ suhteen. Ne ovat varmasti samankokoisia, joten tehtävässä kysytty integraali on esimerkiksi sama kuin

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2. \quad (4)$$

Samaan pääsee tietysti muuttujanvaihdoilla. Onhan $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, joten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Muuttujanvaihdoilla $t = \frac{\pi}{2} - x$ jälkimmäisestä integraalista saadaan

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt,$$

ja tehtävän integraali palaa muotoon (4).

Trigonometrinen funktioiden välisten relaatioiden määrä on suuri. Mitähän yhdistelmästä $\sin x + \cos x$ saisi? Ainakin sinin yhteenlaskukaava ja tieto

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

antavat mahdollisuuden kirjoittaa

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Integraalimme voidaan siis laskea myös näin, muuttujanvaihdon $x = t - \frac{\pi}{4}$ avulla:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt \\ &= -\sqrt{2} \left[\cos t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2. \end{aligned}$$

Jaollisuus ja induktio

Tehtävässä 9.1 piti osoittaa, että luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 6, kun $n = 2, 3, 4, \dots$. Kun $n = 0$ tai $n = 1$, niin lausekkeen määrittelemä luku on 0, joka sekin on kuudella jaollinen. Yhtä hyvin olisi voitu kysyä todistusta sille, että lausekkeen määrittelemä luku on jaollinen kuudella, olipa n mikä ei-negatiivinen kokonaisluku tahansa.

En tiedä, mikä on ollut tavallisin tapa ratkaista tämä tehtävä, mutta ainakin ylioppilastutkintolautakunnan ”hyvän vastauksen piirteet” -kooste esittelee ratkaisuja, joiden lähtökohtana on tekijöihin jako $n^3 + 6n^2 - 7n = n(n+7)(n-1)$. Ehkä näppärin tapa olisi muotoilla lauseketta näin: $n^3 + 6n^2 - 7n = n^3 - n + 6n^2 - 6n$. Nyt $6n^2 - 6n$ on n :stä riippumatta jaollinen 6:lla ja $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$. Kolmen peräkkäisen kokonaisluvun joukossa on aina yksi kolmella jaollinen ja yksi tai kaksi parillista. Luku $(n-1)n(n+1)$ on siis sekin varmasti jaollinen luvulla $3 \cdot 2 = 6$. – Tämä päättely ei ollenkaan tarvitse sitä, että n olisi ei-negatiivinen. Voidsaan todeta, että $n^3 + 6n^2 - 7n$ on kuudella jaollinen, olipa n mikä hyvänsä kokonaisluku.

Kun todistettavaksi tulee väittämä, jonka tulisi olla tosi kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla, niin yksi vakiokeino on induktio. Kokeillaanpa, kelpaisiko se tähän. Saattaisi helpottaa, jos merkittäisiin $f(n) = n^3 + 6n^2 - 7n$. Induktion käynnistämiseksi on todettava, että $f(0)$ on kuudella jaollinen. Sehän jo edellä huomattiin. Toinen tarvittava asia on induktioaskeleen ottaminen. Jos $f(n)$ oletetaan kuudella jaolliseksi, niin

$f(n+1)$:nkin pitäisi olla kuudella jaollinen. Lasketaanpa:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)^3 + 6(n+1)^2 - 7(n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6n^2 + 12n + 6 - 7n - 7 \\ &= n^3 + 6n^2 - 7n + 3n^2 + 3n + 12n \\ &= f(n) + 3n(n+1) + 12n. \end{aligned}$$

Induktiooletuksen mukaan $f(n)$ on jaollinen kuudella, $12n$ on varmasti myös, ja luvuista $n, n+1$ toinen on parillinen. Siis myös $3n(n+1)$ on jaollinen kuudella, joten induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

Polttopiste ja johtosuora

Tehtäväsarjan numero 7 synnyttää meissä kauan siten koulumme käyneissä tuttuuden tunteen. Tehtävässä puhutaan tasokäyrästä K , joka ”muodostuu niistä pisteistä (x, y) , joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$ ”. Kalle Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirjan toisen osan vuonna 1960 ilmestyneen viidennen painoksen sivulla 43 on teksti *Paraabeliksi sanotaan niiden pisteiden uraa, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä (”polttopiste”) ja kiinteästä suorasta (”johtaja”).* Tehtävän käyrä on siis paraabeli, jonka polttopiste on origo ja johtosuora (sanaa ”johtaja” ei tässä nykyään ole tapana käyttää) suora $y = 2$.

Mutta millainen K olisi, jos ehto ”etäisyys origosta on yhtä suuri kuin suorasta $y = 2$ ” korvattaisiin vaikkapa ehdolla ”etäisyys origosta on p kertaa niin suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$, missä p on jokin kiinteä positiivinen luku”? Jos $p = 1$, ollaan tehtävän tilanteessa. Mutta lasketaan yleisemmällä p :n arvolla, kuitenkin $p \neq 1$. Käyrän piste (x, y) toteuttaisi nyt yhtälön

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p|y - 2|$$

ja siis myös yhtälön

$$x^2 + y^2 = p^2(y^2 - 4y + 4)$$

eli

$$x^2 + (1 - p^2) \left(y^2 + \frac{4p^2}{1 - p^2} y \right) = 4p^2.$$

Kun vasemmalla puolella suoritetaan neliöksi täydentäminen ja hiukan sievennetään, tullaan yhtälöön

$$x^2 + (1 - p^2) \left(y - \frac{2p^2}{p^2 - 1} \right)^2 = \frac{4p^2}{1 - p^2}.$$

Tehdään vielä koordinaatiston siirto y -akselin suunnassa ottamalla käyttöön uusi muuttuja

$$y' = y - \frac{2p^2}{p^2 - 1}.$$

Käyrämme yhtälöksi tulee nyt

$$x^2 + (1 - p^2)y'^2 = \frac{4p^2}{1 - p^2}$$

eli

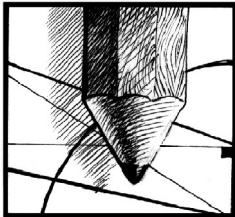
$$\frac{x^2}{\frac{4p^2}{1 - p^2}} + \frac{y'^2}{\frac{4p^2}{(1 - p^2)^2}} = 1.$$

Jos nyt vaikka vertaa MAOL-taulukkoon, niin huomaa, että jos $p < 1$, käyrä on ellipsi (jonka isoakseli kylläkin on y' -akselin eikä x -akselin suuntainen), jos taas $p > 1$, käyrä on hyperbeli. Käyrien eri ominaisuudet kuten polttopisteet, akselit ja asymptootit voi kaikki tuosta laskea p :n funktioina.

Mitä olemme saaneet aikaan? Yhden yhtenäisen tavan määritellä toisen asteen käyrät. Antiikista periytyy se, että ellipsi, paraabeli ja hyperbeli ovat käyrätyyppejä, jotka syntyvät eri asennoissa olevien tasojen leikatesa ympyräkartiota. Tästä periytyy käyristä käytettävä yhteisnimitys *kartiroleikkaukset*. Myöhemmin, ilmeisesti noin vuoden 500 paikkeilla, huomattiin, että ellipsin voi määritellä sellaisten pisteiden urana eli joukkona, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien summa on vakio. Tämä ellipsin piirtämisen mahdollistava ominaisuus on se, jota Suomen kouluissa aikanaan ellipsin määritelmänä pidettiin. Vastaavasti hyperbelin määritelmässä ellipsin määritelmän sana summa korvattiin sanalla erotus. Mutta niin kuin edellä laskettiin, ellipsin, hyperbelin ja paraabelin määrittely voidaan tehdä yhtenäisesti; erottelu kolmeen tapaukseen perustuu vain parametrin p kokoon.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



Yläkoulun matematiikkaa

Lehtori K.

Lehtori on jo vuosia ollut huolestunut yläkoulun matematiikan opetuksen tilasta. Käsitteellisempi ajattelu ei ota kehittyäkseen, jos tehtävät ovat pääasiassa desimaalilukujen sijoittamista perusteluitta annettuihin laskukaavoihin. Mikä neuvoksi? Lehtorin mielestä ainoa keino olisi *syventää* opetuksessa esillä olevia asioita. Otetaanpa esimerkki. Pythagoraan lause kuuluu yläkoulun oppimäärään, mutta valitettavasti sitä enimmäkseen sovelletaan ainoastaan perustapauksissa. Jääpä lause useimmiten perustelemattakin, vaikka esimerkiksi nettisivulla [1] olisi tarjolla 118 erilaista todistusta kyseiselle lauseelle. Niin tai näin, kun tämän aihepiirin perustehtävät on suoritettu, voisi syventävänä oppina olla kolmion pinta-alan laskeminen sivujen avulla. Tavoitteena on siis saada aikaan kaava, jonka avulla voi laskea kolmion pinta-alan kun sivujen pituudet tunnetaan. Sen johtamisessa tarvitaan mm. muis-

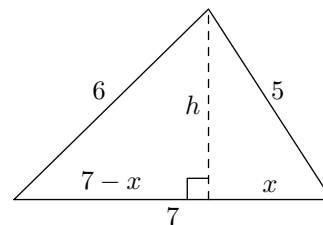
$$(\square \pm \triangle)^2 = \square^2 \pm 2\square\triangle + \triangle^2 \quad \text{ja}$$

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square - \triangle)(\square + \triangle).$$

Niihin voi perehtyä Solmun diplomitehtävissä [2]. Opetuksessa ne olisi hyvä perustella osittelu- ja vaihdantalakien avulla.

Käsitellään aluksi numeerinen tapaus; olkoot sivujen pituudet 5, 6 ja 7 pituusyksikköä. Niistä todella muodostuu kolmio, sillä jokainen pituus on pienempi kuin kahden muun summa. Kolmio ei ole suorakulmainen, sillä Pythagoraan yhtälö ei toteudu. Pinta-alan laskemisessa tarvitaan kanta ja korkeus. Valitaan pisin sivu

kannaksi ja merkitään sitä vastaavan korkeusjanan pituudeksi h . Jaetaan kantasivu osiin x ja $7 - x$ kuviossa



näkyvällä tavalla. Nyt Pythagoraan lausetta voi käyttää: saamme

$$5^2 - x^2 = h^2 = 6^2 - (7 - x)^2,$$

ja edelleen

$$25 - x^2 = 36 - 49 + 14x - x^2,$$

mistä seuraa

$$x = \frac{38}{14} = \frac{19}{7}.$$

Korkeusjanan neliö

$$h^2 = 25 - x^2 = 25 - \frac{361}{49} = \frac{864}{49},$$

joten

$$h = \sqrt{\frac{864}{49}} = \frac{12}{7}\sqrt{6},$$

ja pinta-ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{12}{7}\sqrt{6} = 6\sqrt{6}.$$

Yleinen tapaus ratkeaa samalla tavalla. Olkoot sivujen pituudet a , b ja c . Niiden on toteutettava ehdot

$$a < b + c, \quad b < c + a \quad \text{ja} \quad c < a + b, \quad (1)$$

jotta kyseessä todella olisi kolmio. Kolmion pinta-ala ja muoto määräytyvät yksikäsitteisesti sivujen pituuksista (yhtenevyyslause sss), joten pinta-alaksi saatava lauseke tulee olemaan symmetrinen sivujen pituuksien suhteen. Se siis pysyy samana, vaikka mitkä tahansa kaksi luvuista a , b , c vaihtaisivat keskenään paikkaa. Voimme rajoituksetta olettaa, että kolmion pisimmän sivun pituus on c . Samalla tavalla kuin numeerisessa esimerkissämme saamme

$$a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

mistä seuraa

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

ja edelleen

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Korkeusjanan neliö

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - x^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2c^2}{4c^2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{(2ac - a^2 + b^2 - c^2)(2ac + a^2 - b^2 + c^2)}{4c^2} \\ &= \frac{(b^2 - (c - a)^2)((a + c)^2 - b^2)}{4c^2} \\ &= \frac{(b + c - a)(b - c + a)(a + c + b)(a + c - b)}{4c^2} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}{4c^2}, \end{aligned}$$

joten

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}}{2c},$$

ja pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \\ &= \frac{c}{2} \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}}{2c} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)}. \end{aligned}$$

Kaava on nyt lähes valmis. Huomaa, että juurrettava on positiivinen, koska ehto (1) on voimassa. Teemme vielä eräitä kosmeettisia sievennyksiä. Merkitsemällä

$$s = a + b + c,$$

saadaan

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{s(s - 2c)(s - 2a)(s - 2b)}.$$

Merkitsemällä vielä

$$p = \frac{s}{2} = \frac{a + b + c}{2},$$

saamme etsityn kaavan *lopulliseen* muotoon

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \sqrt{s(s - 2c)(s - 2a)(s - 2b)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)} \\ &= \sqrt{\frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{16}} \\ &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \end{aligned}$$

Tämä *Heronin*¹ kaava johdetaan kirjoituksissa [3] ja [4] hieman lyhyemmin lukion trigonometriaan tukeutuen. Sovellamme sitä vielä alussa käsitellyyn esimerkkiin. Sivujen pituudet olivat 5, 6 ja 7, joten $p = 9$ ja

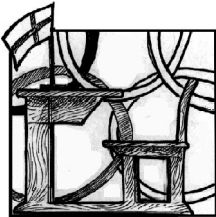
$$A = \sqrt{9(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}.$$

Matematiikkaa on tämän kaavan johtaminen, laskentoa puolestaan sen soveltaminen yksittäisissä tapauksissa.

Viitteet

- [1] <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>
- [2] <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/diplomitehtavat8.pdf>
- [3] Juhani Fiskaali, Heronin ja Brahmaguptan kaavoista, <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/2/heron.pdf>
- [4] Matti Lehtinen, Nimekästä geometriaa, <http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf>

¹Heron Aleksandrialainen (10–75), egyptiläinen matemaatikko.



Pisa-tulokset, tasa-arvo ja motivaatio

Marjatta Näätänen

Educa-messuille tammikuussa 2017 osallistui OECD:n koulutusjohtaja, ”Mr. Pisa” Andreas Schleicher. Hänen mukaansa luonnontieteistä ja matematiikasta on tullut maailman ymmärtämisen kieli. Haasteena Suomessa on saada oppilaat innostumaan näistä aineista, eikä täällä opita ajattelemaan kuten tutkija. Opettajiksi pitäisi saada houkuteltua parhaat voimat, mutta opettajan ammatti on rankimpia. Suomessa opettajien tulisi huomattavasti lisätä yhteistyötään. Schleicher vertaili Pisa-tuloksissa alaspäin menevää Suomea ja nousevaa Viroa näin: Virossa asetetaan tavoitteet oppilaille korkealle ja heitä tuetaan niiden saavuttamiseksi. Suomessa tavoitteet ovat ”liberaaleja”. Educa-messuilla monet poliitikot pitivät tärkeänä tasa-arvoa, jonka he käsittivät tarkoittavan tulosjakauman pientä hajontaa. OAJ:n Olli Luukkainen puolestaan sanoi suunnilleen näin: tasa-arvo ei tarkoita sitä, että kaikki saavat samat pisteet... Me tarvitsemme myös huippuja.

Joissain maissa ihaillaan Suomen Pisa-tulosten pientä hajontaa, joissain ei. Esittelin vuosia sitten Pisamaahan tutustumaan tulleen Ranskan opetusviranomaiselle matematiikkalehti Solmua varten tehtyä Pisa-tulosten vuosien 2003 kaaviota, joka löytyy matematiikkadiplomi VIII:n ensimmäisestä tehtävästä¹ ja vuosien 2005–2006 Pisa-erikoisnumeroista 1 ja 2 [1]. Hän sanoi: ”Tästä hän sen näkee yhdellä silmäyksellä; Suomen heikoimmat olivat selvästi muiden maiden heikoimpia parempia, siksi Suomen keskiarvo kohosi hiveneen muita EU-maita paremmaksi. Ranskassa ei tuli-

si mieleenkään panostaa heikoimpiin, me panostamme parhaisiin.” Myös vuoden 2009 kaavio esitetään samassa diplomitehtävässä. Viimeisestä tuloksesta, jossa tason lasku jatkuu, ei ole tehty kaaviota.

Suomessa monet uskoivat, että Pisa-menestys todisti Suomen koulujen tuottavan matematiikan huippuosaajia. Tämä oli väärinkäsitys, kuten ranskalainen heti huomasi. Suomen heikoimmat olivat muiden maiden heikoimpia parempia mm. sinänsä tarpeellisten tukitoimien ansiosta. Eräs syy Pisa-tulosten huononemiseen onkin tukitoimien leikkaus. Valitettavasti ennen leikkauksia tehty panostus jakauman alapäähän ei ole kuitenkaan kantanut, peruskoulun jälkeisten opintojen keskeyttäminen on yleistä. Matemaattisen pohjan heikkous on yhä suurempi ongelma opinnoissa etenemiselle. Matikkaluotsi-kirjan [2] mukaan varhainen terapia auttaisi niin, että oppilas innostuisi aikaisemmin itselleen käsittämättömästä matematiikasta, eikä muiden tasolle päästyään enää tarvitsisi erityistä tukea. Tällainen toiminta olisi siis paitsi yksilön kannalta, myös kansantaloudellisesti erittäin kannattavaa.

Oppilaiden tasoerot kasvavat koko ajan. Usein jo aivan alusta lähtien luokassa on ainakin joitain, joille oppikirjan lisätehtävien laskeminen ei riitä. Paitsi alaspäin, voivat opettajat kuitenkin halutessaan nykyisin eriyttää myös ylöspäin esimerkiksi matematiikkalehti Solmun matematiikkadiplomien avulla. Opettajien palautteen mukaan ”oppilaat nauttivat haasteista” ja ”ratkovat tehtäviä innoissaan”. Oppilaita moti-

¹<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/diplomitehtavat8.pdf>

voivat älylliset haasteet ja niissä onnistuminen. Tämä tulos on saatu myös tutkimuksen keinoin:

”Asenteista siis ainoastaan pystyvyyden tunne näyttää vaikuttavan osaamiseen, ja toisaalta osaaminen vaikuttaa kaikkiin asenteen osa-alueisiin: kausaliteetti kulkee siis osaamisesta asenteisiin selkeämmin kuin päinvastoin.” [3]

Laura Tuohilampi väitöskirjassaan [4] esittää: Mikäli matematiikka jää toissijaiseksi opiskelijoiden merkitysmaailmassa, ei ulkoa tuotu matematiikan tärkeyden korostaminen, eikä edes oppilaiden oma kokemus siitä, että matematiikka on periaatteessa tärkeää, riitä sitouttamaan matematiikan syvälliseen opiskeluun.

Tutkimukset eivät tue käsitystä matematiikan opetuksen ongelmien ratkaisemisesta digiloikalla, vaan pikemminkin päinvastoin. Tutkija Samuel Abrams kehottaa Suomen kouluja pohtimaan, voisiko amerikkalaisen huippuyliopiston tavoin katkaista nettiyhteyden oppitunneilla keskittymisen parantamiseksi. Hän toteaa myös, että Ruotsi keksi peruskoulun, mutta Suomi kehitti sitä.

Ebba Witt-Brattström kirjoittaa [5], että nyt opin ottamisen suunta näyttää kääntyvän: Ruotsi on, Suomen aikaisempaa Pisa-menestystä seurattuaan, ”suomettanut” koulujaan (ja Ruotsin tulos onkin parantunut). Huonontuneen Pisa-tuloksen jälkeen meillä puolestaan ollaan ottamassa oppia Ruotsissa jo luovutusta, huonoja tuloksia tuottaneesta tyylistä, joka toi ”luovuutta” luokkahuoneisiin ja lisää pedagogiikkaa opettajankoulutukseen. Tämä tapahtui opettajan aineopintojen ja auktoriteetin kustannuksella.

Pisasta olisi hyvä tietää, ettei sen tavoite ole mitata koulussa opittua, vaan matematiikan yleistä lukutaitoa (mathematics literacy), joka on sanomalehtien ja niiden tilastoaineistoa esittävien kuvien ymmärtämisen tasolla. Sen sijaan toinen kansainvälinen vertailu, TIMSS-testi keskittyy itse matematiikkaan. Mutta Suomi ei viimeksi testannutkaan kahdeksaluokkalaisia TIMSS-testissä – joka olisi antanut päättäjille kenties vielä ikävämpää, mutta todellista tietoa peruskoulun jälkeisiä opintoja varten tarvittavan matematiikan osaamistasosta. Neljäsluokkalaisten TIMSS-testissä Suomi päätyi 41 maan joukossa viiden tulokseen huonontaneen joukkoon vuosien 2011–2015 vertailussa.

Pisatuloksillaan loistaneissa Aasian maissa keskitytään Pisa-päättelyn sijasta paljon kehittyneemmän matematiikan oppimiseen. Tästä tulee sivutuotteena hyvä Pisatulos ja menestys muissakin kansainvälisissä vertailuis-

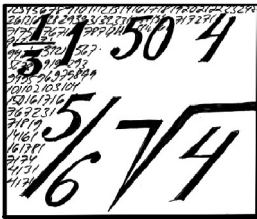
sa. Suomessa matematiikan opetussuunnitelma ja oppikirjat ovat myötäilleet Pisa-tyyppisten päättelytehtävien ratkomista. Tämä käytäntö ei ole onnistunut innostamaan oppilaita, kuten Andreas Schleicher huomautti, haasteena Suomessa on saada oppilaat innostumaan näistä aineista.

Vaikka muut pohjoismaat hävisivät Suomelle Pisatuloksissa, Kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa Ruotsi voittaa Suomen kirkkaasti. Vuonna 2016 osallistui 109 maata, Suomen sija oli 71., vuonna 2015 osallistui 104 maata, Suomen sija oli 82. Olympialaisvalmennus tehdään vapaaehtoisvoimin, eivätkä pohjaksi riitä nykykoulumme kierros kierrokselta köyhtyvät, olympialaistehtävien aiheisiin huonohkosti sopivat analyysipainotteiset tiedot ja taidot. Lisäksi Suomesta puuttuu matematiikassa musiikki- tai urheilukasvatukseen tehtyä panostusta vastaava toiminta, jolla etsittäisiin matematiikasta kiinnostuneita nuoria.

Tekniikka perustuu matematiikalle, joten yhä teknistyneen yhteiskuntamme perusta on matematiikka – jonka tiedot eivät vanhene. Nyt tulee ammattikouluista viestiä, ettei edes peruskoulun alaluokkien tietoja hallita. Tällöin ei ole pohjaa lisäopiskelulle. Matematiikan soveltaminenkaan ei onnistu vain koneita ostamalla. Tarvitaan keskittyneellä ja pitkäjänteisellä opiskelulla harjoitettuja aivoja ja omaksuttuja matematiikan työkaluja.

Viitteet

- [1] Solmu 2005–2006 Pisa-erikoisnumerot 1 ja 2.
<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/erik1/>
<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2006/erik2/>
- [2] Marja Dräger: Matikkaluotsi Matematiikkavaikeuden tunnistaminen ja kuntouttava opetus, ELLI Early learning, Helsinki 2015.
- [3] Jari Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjänteisarviointi vv. 2005–2012, koulutuksen seurantaraportti v. 2013:4, s. 243.
- [4] Laura Tuohilampi (2016), Deepening mathematics related affect research into social and cultural: Decline measurement and the significance of students’ multi-level affect in Finland and Chile.
- [5] Ebba Witt-Brattström, kolumni Humboldtidealet lever, Yliopisto 9/2016/49.



Irrationaalisia ja rationaalisia potensseja

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Jokainen meistä on varmasti huomannut, että kahden kokonaisluvun tulo on aina kokonaisluku. Esimerkiksi $2 \cdot 3 = 6$, joka myös on kokonaisluku. Tämä luonnollisestikin yleistyy kaikkiin kokonaislukujen tuloihin, siis myös sellaisiin, joissa kerrotaan yli kaksi lukua keskenään. Erikoistapauksena tästä saadaan, että jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin m^n on myös kokonaisluku. Mitä tapahtuu, jos toinen luvuista ei ole kokonaisluku? Entä jos toinen on irrationaalinen? Entä jos molemmat ovat irrationaalisia? Käy ilmi, että vastaavaa systemaattisuutta ei ole.

Oletetaan koko tekstin ajan, että kantaluvut ovat positiivisia, jotta välttää imaginaarilukujen ja muiden kompleksilukujen ilmaantumista sekä tylsältä tapaukselta, jossa kantaluku on nolla. Lisäksi oletetaan, että eksponentit ovat joko positiivisia tai negatiivisia (eli eivät nollia).

Lämmittely: rationaaliluvut

Olkoon $r = \frac{a}{b}$ rationaaliluku ja n kokonaisluku. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on yksi. Mitä onkaan r^n ? Entä n^r ? Aloitetaan luvusta r^n . Nyt

$$r^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Rationaaliluvultahan tämä näyttää, ja sitä se onkin. Kokonaisluku tämä on vain, jos $b^n \mid a^n$, eli $b \mid a$, luvun n ollessa positiivinen kokonaisluku. Luku r onkin

siis itsekkin kokonaisluku. Mikäli taas n on negatiivinen kokonaisluku, muuttuu tilanne pääläelleen, eli luvun r onkin oltava muotoa $r = \frac{1}{m}$, missä m on nollasta poikkeava kokonaisluku.

Siirrytään mielenkiintoisempaan tapaukseen n^r . Huomataan ensin, että jos $r = \frac{1}{2}$, niin tapaus $n = 2$ tuottaa irrationaaliluvun

$$n^r = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

ja $n = 4$ tuottaa kokonaisluvun:

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2.$$

Lause/Harjoitustehtävä. Todista: Yleisesti ottaen $n^{a/b}$ on kokonaisluku, kun luku $\frac{a}{b}$ on positiivinen, jos ja vain jos $n^{1/b}$ on kokonaisluku, ja tämä toteutuu, jos ja vain jos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ on luvun n alkutekijähajotelma, ja $b \mid p_1, p_2, \dots, p_k$. (Muistetaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on yksi.) Muotoile vastaava lause tilanteessa, jossa $\frac{a}{b} < 0$.

Todistetaan seuraavaksi, että n^r ei voi olla rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku, mikäli r on positiivinen. Tehdään vastaoletus:

$$n^{a/b} = \frac{s}{t},$$

missä myös lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on yksi. Nyt saadaan yhtälö

$$n^a t^b = s^b.$$

Tästä seuraa, että $t^b \mid s^b$, eli $t \mid s$. Koska lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on yksi, on tämä mahdotonta, ellei $t = \pm 1$, mutta jos $t = \pm 1$, niin $\frac{s}{t}$ on kokonaisluku. Ei siis ole mahdollista, että n^r olisi rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku.

Tehtävä. Milloin luku n^r on rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku, jos r on negatiivinen?

Siirrytäänpä eteenpäin: Korotetaan rationaaliluku potenssiin rationaaliluku, mutta oletetaan, että kumpikaan näistä luvuista ei ole kokonaisluku. Kirjoitetaan $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$ ja $r_2 = \frac{a_2}{b_2}$, missä lukujen a_1 ja b_1 sekä lukujen a_2 ja b_2 suurin yhteinen tekijä on yksi. Lisäksi oletetaan, että $b_1, b_2 \neq \pm 1$. Huomataan ensin, että

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}},$$

mikä ei ole rationaaliluku, sillä jos tämä olisi rationaaliluku $\frac{s}{t}$ (lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on jätteen yksi), niin olisi myös

$$\frac{4}{9} = \frac{s^3}{t^3},$$

eli

$$4t^3 = 9s^3,$$

eli $t^3 \mid 9$, koska lukujen t^3 ja s^3 suurin yhteinen tekijä on yksi. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, jos $t = \pm 1$, mutta oletimme, että näin ei ole. Luku on siis irrationaalinen.

Toisaalta tarkastelemalla vaikkapa lukuja $r_1 = \frac{4}{9}$ ja $r_2 = \frac{1}{2}$ huomataan, että

$$r_1^{r_2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{2}{3},$$

joka on rationaaliluku. Rationaalilukujen rationaalipotensseissa on enää yksi tapaus tarkastelematta: Voiko tulos olla kokonaisluku, jos kantaluku ei ole kokonaisluku ja eksponentti on positiivinen? Osoitetaan seuraavaksi, että näin ei voi olla. Tehdään vastaoletus:

$$r_1^{r_2} = n,$$

eli

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_2/b_2} = n,$$

joka puolestaan muokkautuu muotoon

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_2} = n^{b_2}.$$

Yhtälön oikea puoli on kokonaisluku. Vasen puoli on puolestaan kokonaisluku ainoastaan, jos $b_1^{a_2} \mid a_1^{a_2}$, eli $b_1 \mid a_1$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä oletimme, että $\frac{a_1}{b_1}$ on rationaaliluku, vaan ei kokonaisluku.

Tehtävä. Muotoile ja todista vastaava tulos, kun eksponentti on negatiivinen.

Hyvä, olemme saaneet valmiiksi kaikki tapaukset, joissa kantalukuna tai eksponenttina ei ole irrationaalilukua, ja voimme siirtyä eteenpäin.

Villit tapaukset, eli irrationaaliluvut mukana

Hyvin kiero tapa osoittaa, että irrationaaliluku potenssiin irrationaaliluku voi olla rationaaliluku, on tarkastella luvun $\sqrt{2}$ potensseja. Tunnetusti $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Luku $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku tai rationaaliluku. Kumpi tämä on, sillä ei ole juuri mitään väliä: jos tämä on rationaaliluku, on todistus valmis. Oletetaan siis, että kyseinen luku on irrationaaliluku. Tarkastellaan nyt lukua

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Jos siis luku $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku, saadaan rationaaliluku korottamalla tämä irrationaaliluku irrationaaliseen potenssiin $\sqrt{2}$.

Toinen tapa lähestyä tätä on tarkastella vaikkapa yhtälöä

$$\sqrt{3}^x = 100.$$

On helppo kirjoittaa x logaritimuodossa. Se ei kuitenkaan vielä paljon kerro luvun x irrationaalisuudesta tai rationaalisuudesta. Muokataan siis yhtälö muotoon

$$3^x = 100^2 = 10000.$$

Mikäli luku x olisi rationaalinen, eli $x = \frac{a}{b}$, olisi myös pädeittävä

$$3^a = 10000^b = 2^{4b}5^{4b}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska luvun alkutekijähajotelmat ovat yksikäsitteisiä, jolloin luku ei voi olla yhtä aikaa kolmen potenssi tai kakkosen ja viiden potenssien tulo. Toinen tapa argumentoida on havaita, että vasen puoli yhtälöä on pariton ja oikea parillinen. Tämäkään ei ole mahdollista.

Kaikkien irrationaalilukujen irrationaalipotenssit taas eivät missään nimessä voi olla rationaalilukuja, sillä irrationaalilukuja on ylinumeroituva määrä, rationaalilukuja vain numeroituva.

Konkreettinen esimerkki saadaan jäljittelemällä todistusta, jolla osoitettiin, että irrationaaliluku potenssiin irrationaaliluku voi olla myös rationaaliluku. Aloitetaan jälleen tarkastelu luvusta $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Jos tämä on irrationaalinen, todistus on valmis, sillä $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Oletetaan siis, että tämä on rationaalinen.

Tarkastellaan nyt lukua

$$\sqrt{2}^{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}.$$

Oletimme, että $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on rationaalinen, jolloin saadun luvun nimittäjä olisi rationaalinen ja osoittaja irrationaalinen, jolloin luvun on pakko olla irrationaalinen. Siispä, ainakin toinen luvuista $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ja $\sqrt{2}^{1-\sqrt{2}}$ on irrationaalinen.

Irrationaalilukujen kokonaislukupotenssit tarjoavat jännittäviä esimerkkejä. Esimerkiksi

$$\sqrt{2}^n$$

on kokonaisluku, mikäli luku n on jaollinen kahdella. Toisaalta luku

$$\pi^n$$

ei koskaan voi olla rationaalinen, sillä luku π on transkendenttinen, eli se ei ole minkään rationaalilukukertoimisen polynomin juuri. Oleellista itse asiassa ei ole se, että kyseessä on juurikin luku π , vaan se, että kantaluku on transkendenttinen. Luvun osoittaminen transkendenttiseksi ei yleensä ole kovin helppoa, mutta transkendenttisiä lukuja joka tapauksessa on olemassa, ja niitä on peräti enemmän kuin algebrallisia lukuja, eli sellaisia lukuja, jotka ovat jonkin rationaalikertoimisen polynomin juuria. (Tämän tekstin kannalta todistus ei ole oleellinen, vaan riittää uskoa väite. Todistus on samanlainen kuin todistus, jolla osoitetaan, että irrationaalilukuja on enemmän kuin rationaalilukuja.)

Solmun diplomitehtävien oheislukemisto

Matematiikkadiplomi-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät

Solmu 1/2017

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, forskardoktor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

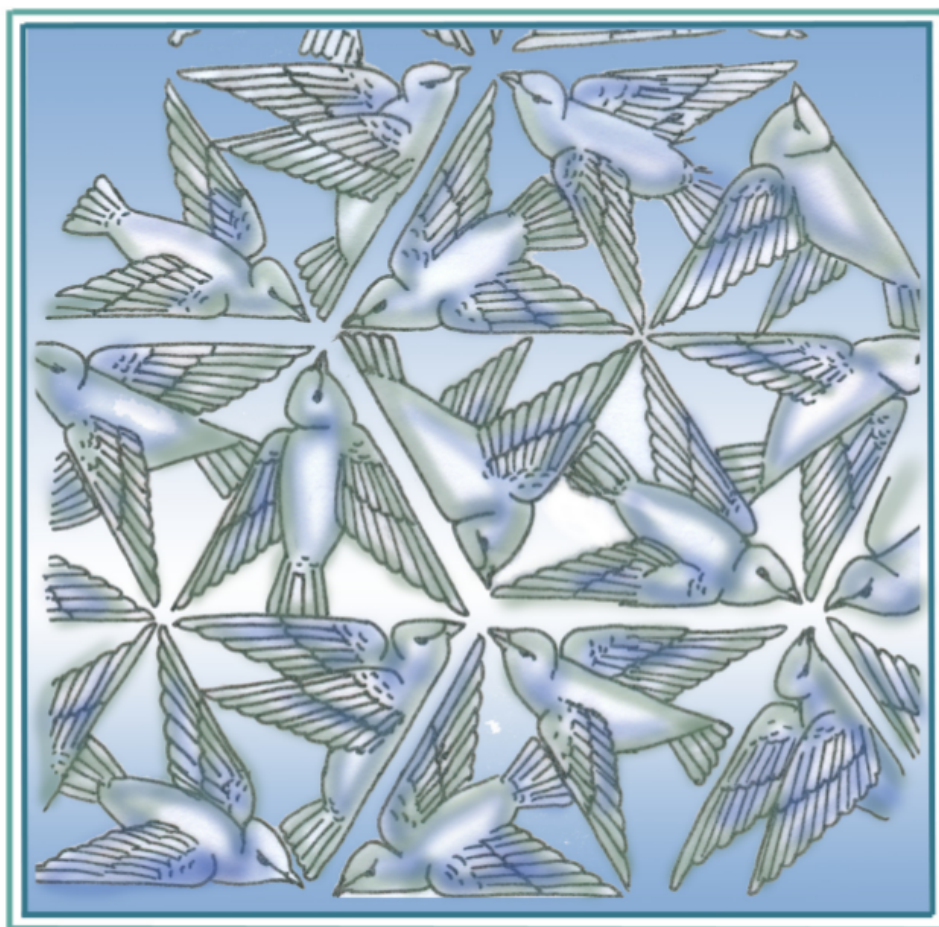
Petri Rosendahl, assistentti, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 2/2017 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 3.4.2017 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi