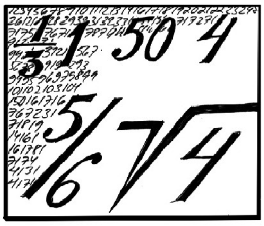

Irrationaalisia ja rationaalisia potensseja

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Jokainen meistä on varmasti huomannut, että kahden kokonaisluvun tulo on aina kokonaisluku. Esimerkiksi $2 \cdot 3 = 6$, joka myös on kokonaisluku. Tämä luonnollisestikin yleistyy kaikkiin kokonaislukujen tuloihin, siis myös sellaisiin, joissa kerrotaan yli kaksi lukua keskenään. Erikoistapauksena tästä saadaan, että jos m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, niin m^n on myös kokonaisluku. Mitä tapahtuu, jos toinen luvuista ei ole kokonaisluku? Entä jos toinen on irrationaalinen? Entä jos molemmat ovat irrationaalisia? Käy ilmi, että vastaavaa systemaattisuutta ei ole.

Oletetaan koko tekstin ajan, että kantaluvut ovat positiivisia, jotta vältytään imaginaarilukujen ja muiden kompleksilukujen ilmaantumiselta sekä tylsältä tapaukselta, jossa kantaluku on nolla. Lisäksi oletetaan, että eksponentit ovat joko positiiivisia tai negatiivisia (eli eivät nollia).

Lämmittely: rationaaliluvut

Olkoon $r = \frac{a}{b}$ rationaaliluku ja n kokonaisluku. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on yksi. Mitä onkaan r^n? Entä n^r? Aloitetaan luvusta r^n. Nyt

$$r^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Rationaaliluvultahan tämä näyttää, ja sitä se onkin. Kokonaisluku tämä on vain, jos $b^n \mid a^n$, eli $b \mid a$, luvun n ollessa positiivinen kokonaisluku. Luku r onkin siis itsekin kokonaisluku. Mikäli taas n on negatiivinen kokonaisluku, muuttuu tilanne päälaelleen, eli luvun r onkin oltava muotoa $r = \frac{1}{m}$, missä m on nollasta poikkeava kokonaisluku.

Siirrytäänpä mielenkiintoisempaan tapaukseen n^r. Huomataan ensin, että jos $r = \frac{1}{2}$, niin tapaus $n = 2$ tuottaa irrationaaliluvun

$$n^r = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

ja $n = 4$ tuottaa kokonaisluvun:

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2.$$

Lause/Harjoitustehtävä. Todista: Yleisesti ottaen $n^{a/b}$ on kokonaisluku, kun luku $\frac{a}{b}$ on positiivinen, jos ja vain jos $n^{1/b}$ on kokonaisluku, ja tämä toteutuu, jos ja vain jos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ on luvun n alkutekijähajotelma, ja $b \mid p_1, p_2, \ldots, p_k$. (Muistetaan, että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on yksi.) Muotoile vastaava lause tilanteessa, jossa $\frac{a}{b} < 0$.

Todistetaan seuraavaksi, että n^r ei voi olla rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku, mikäli r on positiivinen. Tehdään vastaoletus:

$$n^{a/b} = \frac{s}{t},$$

missä myös lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on yksi. Nyt saadaan yhtälö

$$n^a t^b = s^b.$$

Tästä seuraa, että $t^b \mid s^b$, eli $t \mid s$. Koska lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on yksi, on tämä mahdotonta, ellei $t = \pm 1$, mutta jos $t = \pm 1$, niin $\frac{s}{t}$ on kokonaisluku. Ei siis ole mahdollista, että n^r olisi rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku.

Tehtävä. Milloin luku n^r on rationaaliluku, joka ei ole kokonaisluku, jos r on negatiivinen?

Siirrytäänpä eteenpäin: Korotetaan rationaaliluku potenssiin rationaaliluku, mutta oletetaan, että kumpikaan näistä luvuista ei ole kokonaisluku. Kirjoitetaan $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$ ja $r_2 = \frac{a_2}{b_2}$, missä lukujen a_1 ja b_1 sekä lukujen a_2 ja b_2 suurin yhteinen tekijä on yksi. Lisäksi oletetaan, että $b_1, b_2 \neq \pm 1$. Huomataan ensin, että

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}},$$

mikä ei ole rationaaliluku, sillä jos tämä olisi rationaaliluku $\frac{s}{t}$ (lukujen s ja t suurin yhteinen tekijä on jälleen yksi), niin olisi myös

$$\frac{4}{9} = \frac{s^3}{t^3},$$

eli

$$4t^3 = 9s^3,$$

eli $t^3 \mid 9$, koska lukujen t^3 ja s^3 suurin yhteinen tekijä on yksi. Tämä on kuitenkin mahdollista vain, jos $t = \pm 1$, mutta oletimme, että näin ei ole. Luku on siis irrationaalinen.

Toisaalta tarkastelemalla vaikkapa lukuja $r_1 = \frac{4}{9}$ ja $r_2 = \frac{1}{2}$ huomataan, että

$$r_1^{r_2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{2}{3},$$

joka on rationaaliluku. Rationaalilukujen rationaalipotensseissa on enää yksi tapaus tarkastelematta: Voiko tulos olla kokonaisluku, jos kantaluku ei ole kokonaisluku ja eksponentti on positiivinen? Osoitetaan seuraavaksi, että näin ei voi olla. Tehdään vastaoletus:

$$r_1^{r_2} = n,$$

eli

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_2/b_2} = n,$$

joka puolestaan muokkautuu muotoon

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_2} = n^{b_2}.$$

Yhtälön oikea puoli on kokonaisluku. Vasen puoli on puolestaan kokonaisluku ainoastaan, jos $b_1^{a_2} \mid a_1^{a_2}$, eli $b_1 \mid a_1$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä oletimme, että $\frac{a_1}{b_1}$ on rationaaliluku, vaan ei kokonaisluku.

Tehtävä. Muotoile ja todista vastaava tulos, kun eksponentti on negatiivinen.

Hyvä, olemme saaneet valmiiksi kaikki tapaukset, joissa kantalukuna tai eksponenttina ei ole irrationaalilukua, ja voimme siirtyä eteenpäin.

Villit tapaukset, eli irrationaaliluvut mukana

Hyvin kiero tapa osoittaa, että irrationaaliluku potenssiin irrationaaliluku voi olla rationaaliluku, on tarkastella luvun $\sqrt{2}$ potensseja. Tunnetusti $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Luku $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku tai rationaaliluku. Kumpi tämä on, sillä ei ole juuri mitään väliä: jos tämä on rationaaliluku, on todistus valmis. Oletetaan siis, että kyseinen luku on irrationaaliluku. Tarkastellaan nyt lukua

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Jos siis luku $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku, saadaan rationaaliluku korottamalla tämä irrationaaliluku irrationaaliseen potenssiin $\sqrt{2}$.

Toinen tapa lähestyä tätä on tarkastella vaikkapa yhtälöä

$$\sqrt{3}^{x} = 100.$$

On helppo kirjoittaa x logaritmimuodossa. Se ei kuitenkaan vielä paljon kerro luvun x irrationaalisuudesta tai rationaalisuudesta. Muokataan siis yhtälö muotoon

$$3^x = 100^2 = 10000.$$

Mikäli luku x olisi rationaalinen, eli $x = \frac{a}{b}$, olisi myös pädettävä

$$3^a = 10000^b = 2^{4b}5^{4b}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska luvun alkutekijähajotelmat ovat yksikäsitteisiä, jolloin luku ei voi olla yhtä aikaa kolmen potenssi tai kakkosen ja viiden potenssien tulo. Toinen tapa argumentoida on havaita, että vasen puoli yhtälöä on pariton ja oikea parillinen. Tämäkään ei ole mahdollista.

Kaikkien irrationaalilukujen irrationaalipotenssit taas eivät missään nimessä voi olla rationaalilukuja, sillä irrationaalilukuja on ylinumeroituva määrä, rationaalilukuja vain numeroituva.

Konkreettinen esimerkki saadaan jäljittelemällä todistusta, jolla osoitettiin, että irrationaaliluku potenssiin irrationaaliluku voi olla myös rationaaliluku. Aloitetaan jälleen tarkastelu luvusta $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Jos tämä on irrationaalinen, todistus on valmis, sillä $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Oletetaan siis, että tämä on rationaalinen.

Tarkastellaan nyt lukua

$$\sqrt{2}^{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}.$$

Oletimme, että $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ on rationaalinen, jolloin saadun luvun nimittäjä olisi rationaalinen ja osoittaja irrationaalinen, jolloin luvun on pakko olla irrationaalinen. Siispä, ainakin toinen luvuista $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ja $\sqrt{2}^{1-\sqrt{2}}$ on irrationaalinen.

Irrationaalilukujen kokonaislukupotenssit tarjoavat jännittäviä esimerkkejä. Esimerkiksi

$$\sqrt{2}^{n}$$

on kokonaisluku, mikäli luku n on jaollinen kahdella. Toisaalta luku

$$\pi^n$$

ei koskaan voi olla rationaalinen, sillä luku π on transkendenttinen, eli se ei ole minkään rationaalilukukertoimisen polynomin juuri. Oleellista itse asiassa ei ole se, että kyseessä on juurikin luku π, vaan se, että kantaluku on transkendenttinen. Luvun osoittaminen transkendenttiseksi ei yleensä ole kovin helppoa, mutta transkendenttisia lukuja joka tapauksessa on olemassa, ja niitä on peräti enemmän kuin algebrallisia lukuja, eli sellaisia lukuja, jotka ovat jonkin rationaalikertoimisen polynomin juuria. (Tämän tekstin kannalta todistus ei ole oleellinen, vaan riittää uskoa väite. Todistus on samanlainen kuin todistus, jolla osoitetaan, että irrationaalilukuja on enemmän kuin rationaalilukuja.)

Solmun diplomitehtävien oheislukemisto

Matematiikkadiplomi-sivulla

`http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia
Lukujärjestelmistä
Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?
Murtolukujen laskutoimituksia
Negatiivisista luvuista
Hiukan osittelulaista
Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt
Äärettömistä joukoista
Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia
Funktiosta
Gaussin jalanjäljissä
K. Väisälä: Algebra
Yläkoulun geometriaa
Geometrisen todistamisen harjoitus
K. Väisälä: Geometria
Lukuteorian diplomitehtävät