

Solmu

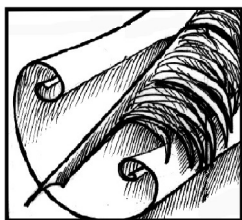
Matematiikkalehti
3/2016

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Voiko matematiikka villitä? (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Kaksi kosinilauseen 3d-versiota (Juhani Fiskaali)	5
EGMO-matkakertomus (Ella Anttila)	7
Solmun ongelmapalsta	8
Juuson π -härveli (Markku Sointu)	9
Kirjavinkkaus: The Math Olympian (Nerissa Shakespeare)	12
Paperirulla eli aritmeettinen jono ja likimääräisyys (Matti Lehtinen)	13
Verkkojen teoriaa Königsbergistä internetiin (Ville Romanov)	15
57. kansainväliset matematiikkaolympialaiset Hongkongissa (Esa V. Vesalainen)	20
Satu surullisesta numerosta (Ritva Kokkola)	26
Kuinka tarkka on riittävän tarkka? (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	28



Voiko matematiikka villitä?

Pääkirjoitus

Heinäkuussa miljoonat ihmiset hurahtivat. Pokémon go oli ilmestynyt, sitä latailtiin kännyköille, ja aivan täyspäiset ihmiset (kuten allekirjoittanut) ryhtyivät hirviöjahtiin. Lööpit kiljuivat, että lapset kävelevät pelin vuoksi satoja kilometrejä. En voi kuin nostaa hattua: tietokonepelejä on usein syytetty siitä, että nuoret eivät liiku riittävästi. Nyt yhtäkkiä kännykkäpeli on se, joka pistää ihmisen lenkille. Vaikuttavaa.

Ryhdyin miettimään, voisiko matematiikassakin olla jotain vastaavaa. Eräs belgialainen opettaja perusti pelin innoittamana kirjojen kierrätysringin: kirjat kätetään ulos, ja niistä annetaan vihje. Rinki tulikin hyvin suosituksi. Hieman pelkään, että vastaava idea matematiikassa ei niin helposti toimisi kuin kaunokirjallisuudessa: Jos ulkona lojuisi piilotettuja Springer Verlagin keltaisia kirjoja, olisivat matematiikan harrastajat haltioissaan, mutta suuri yleisö ei asiasta innostuisi. Lisäksi tempaus olisi hyvin hankala toteuttaa, koska siinä missä monessa kirjahyllyssä on muutama ylimääräinen pookari, harvalla lojuu ylimääräisiä matematiikan kirjoja hyllyssä.

Entäpä matematiikan ongelmatehtävät sitten? Voisiko niitä lojua ympäriinsä? Ei ehkä oma uskoni ihan niidenkään kansanvillitsevyyteen riitä, mutta saatan toki olla väärässä. Lehdissä on nimittäin melko usein jonkinlaisia ongelmatehtäviä, joko omalla palstallaan tai sitten uutisena: ”Tällaisia lasketaan Singaporessa – ovatko nämä liian hankalia koululaisille?” -tyyppisen otsikon alla.

Sudokut ilmestyivät joka paikkaan kymmenkunta

vuotta sitten, eivätkä ne vielä kukaan mihinkään ole hävinneet, vaikka innostus epäilemättä laantunut onkin. Sudokuissa itse asiassa on jonkin verran matematiikkaa piilotettuna: syvällisempään matematiikkaan päästään, jos ryhdytään analysoimaan, miten monta sudokuruudukkoa on olemassa, miten paljon informaatiota ruudulla on oltava, jotta ratkaisu on yksikäsitteinen. Alkeellisempaa matematiikkaa, lähinnä päättelyä pääsee harrastamaan tavallista sudokua ratkoessa. Alkeellisemminkin päättelysäännöillä on hieman eri tasoja: Ruotsin matematiikan olympiajoukkueen valmentajan Paul Vaderlindin sanomalehdessä pitämässä sudokukoulussa oli ehkäpä sääntöjä, joita keskivertoharrastaja harvemmin käyttää.

Jokin siis matematiikassa tai matematiikkaa sivuavissa aiheissa kiehtoo, mutta se ei tarkoita sitä, että lööpit vähään aikaan (ainakaan luultavasti) pääsisivät kiljumaan ”Lapset laskeneet satoja tunteja päivässä – kyyhkyslakkaperiaate villitsee nuoria” tai että lehdissä kerrottaisiin, mitä pitää tehdä, jos matematiikan harrastus on mennyt vähän yli. Näen tähän muutamia syitä. Ensinnäkin, matematiikassa ei ole yleensä saavutettavissa nopeita onnistumisia tai suurta mielihyvää pienen ponnistelun jälkeen. Siinä missä ensimmäisen tai toisen pianotuntini jälkeen saatoin olla ylpeä osatessani soittaa kaksi kappaletta (vaikka ne kovin helppoja olivatkin), ei matematiikassa ole tällaisia konkreettisia kokonaisuuksia, jotka voisi heti ottaa haltuun.

Matematiikkaa myös pidetään kovin abstraktina, ja matemaatikoiden mainekin voi olla välillä vähän merkkillinen. Tai, mitä sanot ihmisestä, joka ei erota kah-

vikuppia ja munkkirinkilää toisistaan? Tällähän matemaatikot ovat melkein brändänneet itsensä. Asiaan vihkiytymättömälle asia ei aukene, vaan lähinnä herättää omituisia mielikuvia.

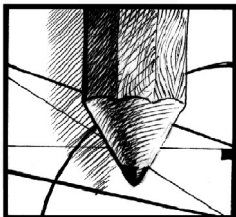
Matematiikka on abstraktia. Helppoja voittoja ei ole. Se ei kuitenkaan tarkoita sitä, etteikö konkreettisia asioita olisi. Se ei myöskään tarkoita sitä, etteikö pieniä ilonaiheita olisi tarjolla usein, ja toisinaan niitä suurempiakin. Ongelmatehtävän ratkaiseminen on esimerkki pienestä ilonaiheesta. Suurempi ilonaihe yleensä vaatii pitkäjänteistä työtä, kahdestakin syystä: syvällisiin tuloksiin ja suuriin oivalluksiin ei vähällä työllä kiinni pääse, ja toisaalta, tulosta arvostaa ihan toisella tapaa, kun on tehnyt sen eteen tunti-, päivä- tai kuukausikaudella työtä kuin jos se on saatu minuuteissa.

Matematiikkaa harrastavat saavat toki iloa myös ongelmien miettimisestä ja teorian opettelusta, siis jopa niistä hetkistä, jolloin mikään ei suju. (Tai no, tämä oli liioittelua. Ne hetket, jolloin mikään ei suju, ovat vain ärsyttäviä. Ne hetket, jolloin asiat sujuvat, mutta mitään suuria älynväläyksiä ei tule, ovat sitä mukavaa pe-

ruskauraa, jota tekee mielellään.) Tämä kuitenkin vaatii tietyn harrastuneisuuden asteen. Jos halutaan saada ihmiset innostumaan matematiikasta, pitää kynnyksen olla matala.

On hankala keksiä uusia innovatiivisia tapoja tuoda matematiikkaa kaikille näkyväksi, tai keksiä, kuinka yhä useampi ihminen siitä innostuisi. Kuitenkin, jos kännykkäpelit pistää ihmiset lenkille, niin en hämmästyisi, vaikka jotain vastaavaa voisi matematiikkaankin tulla. Yhteen asiaan voimme kuitenkin vaikuttaa: Matematiikalla on valitettavasti maine vain (huippu)lahjakkaiden lajina. Tämähän ei paikkaansa pidä. Lahjakkuus auttaa, mutta lopulta työmäärä ratkaisee. Tällä kuvitelmalla on kaksikin ikävää seurausta: toiset eivät tee töitä, koska uskovat lahjakkuudella pärjäävänsä, ja toiset eivät tee töitä, koska eivät usko pärjäävänsä kuitenkaan. Jo pelkästään tämän ennakkoluulon kumoaminen nostaisi luultavasti matematiikan osaamista huomattavasti.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Kaksi kosinilauseen 3d-versiota

Juhani Fiskaali¹

Kevään 2016 ylioppilaskirjoitusten matematiikan ko-
keessa tehtävänä oli todistaa suorakulmaista tetraedria
koskeva 3d-Pythagoraan lause $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$,
missä A , B ja C ovat tetraedrin suorakulmaisten sivu-
tahkojen pinta-alat ja D neljännen sivutahkon pinta-
ala. Tavallisen Pythagoraan lauseen $a^2 + b^2 = c^2$ yleis-
tys on kosinilause $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2$. On luon-
tevaa kysyä 3d-Pythagoraan lauseen yleistystä, 3d-
kosinilauseetta (3d viittaa kolmiulotteiseen avaruuteen).

Tarkastellaan seuraavassa kahta eri 3d-versiota. Ensimmäisessä lauseessa ”kosinitermi” ilmoitetaan sivusärmien ja niiden välisten kulmien avulla. Näin saadaan kaava (1). Toisen kosinilauseen ”kosinitermi” ilmaistaan sivutahkojen alojen ja tahkojen välisten diedrikulmien avulla. Näin saadaan 3d-kaava (2).

Käytetään seuraavia merkintöjä. Tetraedrin kärjestä (origosta) lähtevien sivusärmien pituudet olkoot a , b ja c , ja olkoot γ , α ja β vastaavasti särmäparien (a, b) , (b, c) ja (c, a) väliset kulmat. Olkoon edelleen C sen sivutahkon ala, missä sivutahkokolmion sivuina ovat a , b ja z (ja sivun z vastaisena kulmana γ). Vastaavasti A olkoon sen sivutahkon ala, missä tahkokolmion sivuina ovat b , c ja x (ja sivun x vastaisena kulmana α), ja B olkoon sen sivutahkon ala, missä tahkokolmion sivuina ovat c , a ja y (ja sivun y vastaisena kulmana β). Ja lopulta, olkoon D sen sivutahkokolmion ala, missä kolmion sivut ovat x , y ja z .

Kaavan (1) todistamisessa käytetään tavallista kosi-

nilauseetta ja Heronin kaavaa. Ensiksikin, kolmen ensimmäisen sivutahkon alat ovat $A = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, $B = \frac{1}{2}ca \sin \beta$ ja $C = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Edelleen, tavallisen kosinilauseen mukaan on

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \\ y^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{cases}$$

Alan D laskemiseksi on tässä luontevaa käyttää Heronin kaavaa muodossa

$$D = \frac{1}{4} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)},$$

jolloin sievennettäväksi jää lauseke

$$D^2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{8}(x^4 + y^4 + z^4).$$

Huolellinen suoraviivainen sievennys tuottaa ensimmäisen 3d-kosinilauseen

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - \frac{1}{2}abc[\alpha(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) + b(\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha) + c(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)]. \quad (1)$$

Jos tässä $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, saadaan 3d-Pythagoraan lause $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Säännöllisen tetraedrin tapauksessa, kun $a = b = c = s$ ja $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, saadaan

$$D^2 = 3 \times \frac{3s^4}{16} - \frac{s^4}{2} \left[3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{3s^4}{16}.$$

¹Kirjoittaja on Oulun lyseon eläkkeellä oleva matematiikan opettaja.

Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että säännöllisen tetraedrin sivutahkon ala on

$$\frac{s^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sitten toiseen 3d-kosinilauseeseen. Edellisten merkintöjen lisäksi merkitköt $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ tetraedrin kärjestä lähteviä paikkavektoreita, joiden pituudet ovat vastaavasti a , b ja c . Olkoon sivutahkojen C ja A välinen diedrikulma $\hat{B}$ (leikkaussärmänä b). Vastaavasti sivutahkojen A ja B diedrikulma olkoon $\hat{\Gamma}$ (leikkaussärmänä c) ja tahkojen B ja C välinen diedrikulma $\hat{A}$ (leikkaussärmänä a). Toisaalta diedrikulmat ovat sivutahkojen normaalien välisiä kulmia. Tarkastellaan aluksi tahkojen C ja A välistä diedrikulmaa. Näiden tahkojen normaalien suunnat ovat ristitulovektorit $\vec{a} \times \vec{b}$ ja $\vec{b} \times \vec{c}$, jolloin tahkojen C ja A välisen diedrikulman kosini on

$$\cos \hat{B} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{b} \times \vec{c}|}.$$

Tässä nimittäjänä on ristitulojen pinta-alamerkityksen mukaisesti $4CA$. Osoittaja puolestaan sievenee skalaaritulo pisteen ja ristin vaihdannaisuuden ja ris-

titulon kehityskaavan mukaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c})] \\ &= \vec{a} \cdot [(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{c}] \\ &= (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= (bc \cos \alpha)(ab \cos \gamma) - b^2 ac \cos \beta \\ &= -ab^2 c(\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha). \end{aligned}$$

Näin ollen lauseen (1) kosinitermin yhteenlaskettava $-\frac{1}{2}ab^2c(\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha)$ on sama kuin $-2AC \cos \hat{B}$. Vastaavasti lauseen (1) kaksi muuta yhteenlaskettavaa ovat $-2CB \cos \hat{A}$ ja $-2AB \cos \hat{\Gamma}$. Siten 3d-kosinilause saa muodon

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2[AB \cos \hat{\Gamma} + BC \cos \hat{A} + CA \cos \hat{B}], \quad (2)$$

missä "kosinitermi" riippuu sivutahkojen aloista ja vastaavien sivutahkojen välisistä diedrikulmista. Tässä kaavassa havaitaan enemmän analogiaa 2d-kosinilauseeseen kuin esityksessä (1). Kaava (2) on kirjallisuudesta varsin tuttu, mutta kaavaa (1) en ole satunut huomaamaan.

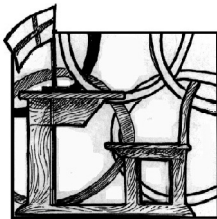
Kaksi uutta matematiikkadiplomia

Solmun matematiikkadiplomisivulle osoitteeseen

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

on lisätty diplomit IX ja X elokuussa 2016. IX on peruskoulun lopun tasoa, sen tehtävillä voi valmistaa pohjaa lukiota varten. X on entinen IX lisättynä ensimmäisellä luvulla. Se sisältää materiaalia esim. lukion kerhoille, harrastajille ja erikoiskursseille. Nämä diplomit voi suorittaa myös osoittain, ks. niiden esipuheet.

Uusia ovat siis sekä diplomit IX ja X, niiden tehtävät ja ratkaisut.



EGMO-matkakertomus¹

Ella Anttila

Sunnuntaina 10.4. tapasin joukkueenjohtajan Esa Vesalaisen Helsinki-Vantaan lentokentällä. Lensimme Budapestiin Berliinin kautta, mistä jatkoimme Buštenin kylään bussilla. Kilpailijoiden hotellissa tapasin oppaani, joka kertoi toimivansa myös Luxemburgin kahden hengen joukkueen oppaana. Osasin odottaa järjestäjien antamia lahjoja, mutta värit yllättivät minut: reppu oli räikeän oranssi ja paita kirkkaan keltainen!

Seuraavana aamuna aamiaisen jälkeen kävelimme ympäri kylää oppaan ja luxemburgilaisten kanssa sateessa. Avajaisseremonia järjestettiin paikallisella kaupungintalolla, ja esiteltäessä joukkueita minulle tuli hieman orpo olo yksin lavalla oppaan kanssa. Iltapäivällä vierailimme läheisessä Cantacuzinon linnassa.

Tiistai oli ensimmäinen kilpailupäivä. Koulun ovilla meitä odottava punainen matto herätti hymyjä. Työstettyäni ensimmäistä tehtävää jonkin aikaa tuloksetta yritin toista tehtävää, mutten päässyt pitkälle geometrian parissa. Siirryin pätkäilemään kolmatta tehtävää, ja sain ideoita kombinatoriikan tehtävään. Juututtuani siinä yritin eri lähestymistapaa ensimmäisessä tehtävässä, ja keksinkin elegantin ”kolmen rivin” ratkaisun!

Odotukseni olivat korkealla ensimmäisen koepaperin jäljiltä, mutta valitettavasti jouduin pettymään toisen kilpailupäivän kohdalla. Ainoa tehtävä, jossa sain mitään aikaiseksi, oli viides tehtävä, joka käsitteli kombinatoriikkaa. Kilpailun jälkeen keskustellessani irlantilaisien kanssa he pyysivät minua lähtemään mukaansa läheiseen Cairmainin luostariin, jonne he olivat menos-

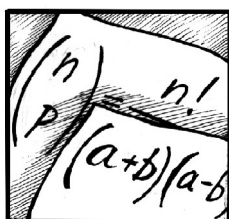
sa. Kävely metsän halki oli viihtyisä, ja luostari kappelineen ja eläimiseen oli vaikuttava.

Torstaina oli mahdollisuus kävellä Urlătoarean vesipuutoukselle. Suuri joukko myös tuotti suuren määrän ääntä metsässä, mikä hämmensi metsän rauhaan totuttanutta suomalaista. Viidentoista metrin putous oli kolmen vartin suuntaansa kävelyn väärä. Iltapäivällä taas kiertelimme kylää oppaan ja luxemburgilaisten kanssa. Opas näytti meille koulunsa, herkuttelimme paikallisen kahvilan kakulla ja loppujen lopuksi jäimme telmimään leikkipuistoon.

Rentoa päivää seurasi vuorostaan toinen täynnä ohjelmaa: Aamusta lähdimme busseilla Sinaian alueelle, jossa pääsimme opastetulle kierrokselle Peleşin linnaan, joka on aikoinaan ollut Romanian ensimmäisen kuninkaan kesäpalatsi. Sieltä jatkoimme matkaa Sinaian kasinolle, jossa nykyään järjestetään kokouksia ja kulttuuritapahtumia sekä näyttelyitä. Palattuamme hotellillemme olikin jo aika laittautua valmiiksi loppuseremoniaa varten. Ei ollut vaikeaa hymyillä tilaisuuden jälkeen otetuissa kuvissa, kun oli pronssimitali kaulan ympärillä. Hotellilla meitä odotti jäähyväisateria, ja joiltakin tytöiltä taisi jäädä suussasulava kakku välistä, kun he suuntasivat tanssilattialle heti pääruoan perään.

Lauantiaamuna koittikin jo lähtö. Bussimatka lentokentälle oli rattoisa; aika lensi siivillä rupatellessa ja seurapeliin parissa. Pienen seikkailun jälkeen lentokentällä paluulennot Helsinkiin menivät leppoisasti.

¹Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset (EGMO) pidettiin Romanian Buštenissa 10.–16.4.2016. Kilpailutehtävät on julkaistu kirjoituksessa Pronssia Buštenista!, Solmu 2/2016, <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/2/egmo2016.pdf>



Solmun ongelmapalsta

Solmussa alkaa uusi ongelmapalsta. Tarkoitus on, että sekä lukijat että toimitus ehdottavat tehtäviä, lukijat lähettävät ratkaisuja, ja lukijoiden ratkaisuja julkaistaan myöhemmissä Solmun numeroissa. Ehdotetut ongelmat saavat olla joko uusia ongelmia, tai esimerkiksi jostain kilpailusta. Ehdotetut tehtävät eivät kuitenkaan saisi olla niin tunnettuja, että voi olettaa ison osan lukijoista jo tehtävän nähneen. Toivomme, että ongelman mukana tulee ratkaisuehdotus. Toivomme paljon tehtävä- ja ratkaisuehdotuksia! Tämän kerran tehtäviin toivotaan ratkaisuehdotuksia vuoden loppuun mennessä osoitteeseen aernvall@abo.fi, kuten myös tehtäväehdotuksia seuraavaan numeroon.

1. (Ehdottanut Aki Halme) Jalkapallokentällä on pituutta noin 100 metriä ja leveyttä noin 70 metriä. Jalkapallomaalin leveys on 7,32 metriä. Maali sijaitsee lyhyemmän sivun keskellä. Mistä kohtaa jalkapallokentän sivurajaa maali näkyy suurimmassa kulmassa? Mistä kentän pisteistä maali näkyy samassa kulmassa kuin kyseisestä kohdasta sivurajaa?
2. (Ehdottanut Aki Halme) Vauvanruokapurkeista pinotaan ”pyramidi” seinää vasten siten, että kerroksia on ainakin kaksi ja jokaisessa kerroksessa on yksi vähemmän kuin sen alla olevassa kerroksessa. Ylim-

mässä kerroksessa voi olla enemmän kuin yksi purkki.

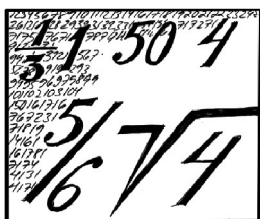
- (a) Kuinka voisit pinota 100 purkkia?
 - (b) Jos kerroksia on kuusi ja ylimmässä kerroksessa on kolme purkkia, montako purkkia on pinossa kaikkiaan?
 - (c) Voiko joitakin purkkimääriä pinota useammalla eri tavalla?
 - (d) Mikä on ainoa purkkimäärä välillä 1 000 000–2 000 000, josta ei voi tehdä pyramidia?
3. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Määritä kaikki kokonaislukuparit (a, b) , joilla

$$(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4.$$

4. (Vanha itävaltalainen kilpailutehtävä) Etsi yhtälön

$$\sqrt{4 - x\sqrt{4 - (x - 2)\sqrt{1 + (x - 5)(x - 7)}}} = \frac{5x - 6 - x^2}{2}$$

reaalilukuratkaisut.



Juuson π -härveli

Markku Sointu

Soppeenharjun koulu

Nähtyään elokuvan ”Aku Ankka matematiikan maailmassa” Juuso kiinnostui π :n desimaaleista. Hän oli myös nähnyt asiaa koskevan julisteen. Eniten häntä kuitenkin kiinnosti, miten esitteeseen printattuja lukuja voisi laskea. Juuso salli itselleen vain tavallisen funktiolaskimen käytön.

Juuso tiesi, että

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4},$$

joten

$$4 \tan^{-1} 1 = \pi.$$

Derivointitaitoisena Juuso osasi laskea ja taulukkokirjasta löytyi helposti

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (1)$$

Saadakseen luvun π desimaaleja oli laskettava

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots,$$

kun $x = 1$.

Lauseke $4P(x)$ lähestyi arvoa π , kun yhteen laskettavien määrää lisättiin. Juuso oivalsi melkein heti, että lähestyminen olisi hyvin hidasta:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Ottamalla summaan kymmenen ensimmäistä termiä saatiin

$$4 \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \approx 3,041839619,$$

eli oltiin vielä kaukana luvusta π . Oikeita desimaaleja ei ollut vielä yhtään. Juuso asetti itselleen tavoitteen laatia $P_1(x)$ siten, että sen 5 ensimmäistä termiä takaisivat niin paljon π :n oikeita desimaaleja kuin tavallinen funktiolaskin pystyi näyttämään.

Juuson strategia oli selvä. Hän käyttäisi kaavaa

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}. \quad (2)$$

Pelkän funktion $\tan x$ käyttäminen johti polynomiin

$$P(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

ja edellä nähtyihin ongelmiin, eli hitaaseen suppenemiseen.

Juuson tavoitteena oli kaava, joka olisi muotoa

$$4(m \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)) = \pi, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

koska kaava $4 \tan^{-1}(1) = \pi$ ei toiminut halutulla tavalla. Luku yksi oli yksinkertaisesti liian yksinkertainen. Tarvittiin kunnon ”härveli”, eli kaava (3). Ensin piti valita luku x . Juuso valitsi luvuksi $x = \frac{1}{10}$, koska hän ajatteli, että kymmenjärjestelmässä sillä laskemalla laskut voisivat olla mukavia tehdä.

Härveli alkoi muotoutua:

$$4 \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) - \tan^{-1}(y) \right) = \pi.$$

Käyttämällä kaavaa (2) saatiin yhtälö

$$\frac{\tan \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) - \tan \left(\tan^{-1}(y) \right)}{1 + \tan \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \tan \left(\tan^{-1}(y) \right)} = 1,$$

josta tuli ratkaista luvun $x = \frac{1}{10}$ kaveri luku y murto-lukuna.

Juuso oivalsi, että se olisi paljon helpompaa kuin mil-tä se näytti. Koska $\tan(x)$ ja $\tan^{-1}(x)$ olivat käänteis-funktioita, ne kumosivat toisensa:

$$\tan \left(\tan^{-1}(x) \right) = x.$$

Ainoan haasteen tarjosi, mitä on $\tan \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$? Ensinnä piti selvittää $\tan \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$ ja sitten $\tan \left(4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)$:

$$\begin{aligned} \tan \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) &= \frac{\tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) + \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)}{1 - \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)} \\ &= \frac{2 \tan \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)}{1 - \tan^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{1}{5} : \frac{99}{100} = \frac{20}{99}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \left(4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) &= \frac{2 \tan \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)}{1 - \tan^2 \left(2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right)} \\ &= 2 \cdot \frac{20}{99} : \left(1 - \left(\frac{20}{99} \right)^2 \right) \\ &= \frac{40}{99} : \left(1 - \frac{400}{9801} \right) = \frac{40}{99} : \frac{9401}{9801} \\ &= \frac{392040}{930699} \end{aligned}$$

ja näin ollen

$$\begin{aligned} \tan \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) &= \frac{2 \cdot 392040}{930699} : \left(1 - \left(\frac{392040}{930699} \right)^2 \right) \\ &= \frac{784080}{930699} : \frac{930699^2 - 392040^2}{930699^2} \\ &= \frac{784080}{930699} \cdot \frac{930699^2}{930699^2 - 392040^2} \\ &= \frac{74455920}{72697201}. \end{aligned}$$

Juuso halusi ratkaista y :n yhtälöstä murtolukuna, siksi hän käytti murtolukua

$$\frac{\frac{74455920}{72697201} - y}{1 + \frac{74455920}{72697201} y} = 1.$$

Merkitsemällä "murtoluku" = D , Juuso sai

$$\frac{D - y}{1 + Dy} = 1,$$

joten

$$\begin{aligned} y &= \frac{D - 1}{D + 1} = \left(\frac{74455920}{72697201} - 1 \right) : \left(\frac{74455920}{72697201} + 1 \right) \\ &= \frac{1758719}{147153121}. \end{aligned}$$

y :n ratkeaminen oli juhlahetki, mutta vasta nyt pääs-tiin asiaan. Juuso tiesi, että

$$4 \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1758719}{147153121} \right) \right) = \pi. \quad (4)$$

Juuso oli lähtenyt argumentista $\frac{1}{10}$. Hän ei todellakaan arvannut, että luvun $\frac{1}{10}$ kaveri olisi ylläesitetyn näköi-nen.

Mutta nyt ei surtu sitä. Juusolla oli kaavassa (4) kovan luokan työkalu. Siispä hän laski kaavalla (1)

$$\begin{aligned} 32 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) &\approx 32 \left(\frac{1}{10} - \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^7}{7} + \frac{\left(\frac{1}{10} \right)^9}{9} \right) \\ &\approx 3,189396880. \end{aligned}$$

Vastaavasti, joskin jonkin verran työläämmin

$$4 \tan^{-1} \left(\frac{1758719}{147153121} \right) \approx 0,047804226.$$

Koska

$$\pi = 4 \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1758719}{147153121} \right) \right),$$

saatiin luvulle π likiarvo

$$3,189396880 - 0,047804226 = 3,141592654.$$

Tulos näytti hyvältä. "Juuson pii" tuotti viidellä ter-millä kahdeksan oikeaa desimaalia. Juuso tajusikin, et-tä valinta $x = \frac{1}{10}$ oli ollut hyvä, sillä

$$\tan \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \right) \approx 1,024192389 \approx 1,$$

eli jo arvo $8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right)$ oli ollut lähellä luvun $\frac{\pi}{4}$ arvoa, ja luvun $\frac{1758719}{147153121}$ arcustangentin sarjakehitelmä olikin siis supennut nopeasti, koska luku $\frac{1758719}{147153121}$ on niin lähellä nollaa.

Arvio

$$4 \tan^{-1}(1) \approx 3,33968$$

laskettuna viidellä termillä ei pärjännyt lainkaan, mut-ta senhän Juuso jo tiesi.

Kirjallisuudesta Juuso löysi kaavan

$$4 \left(4 \tan^{-1} \left(\frac{1}{5} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{239} \right) \right) = \pi.$$

Laskemalla tästä sai viidellä termillä

$$3,158328986 - 0,016736304 = 3,141592682,$$

eli seitsemän desimaalia oikein. Juuson härväli

$$4 \left(8 \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1758719}{147153121} \right) \right)$$

ei ehkä ollut kaunis, mutta tehoa siitä löytyi, sillä se laski kahdeksan desimaalia oikein.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–X tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyyntöä voi lähettää osoitteeseen

juha.piste.ruokolainen@yahoopiste.com

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

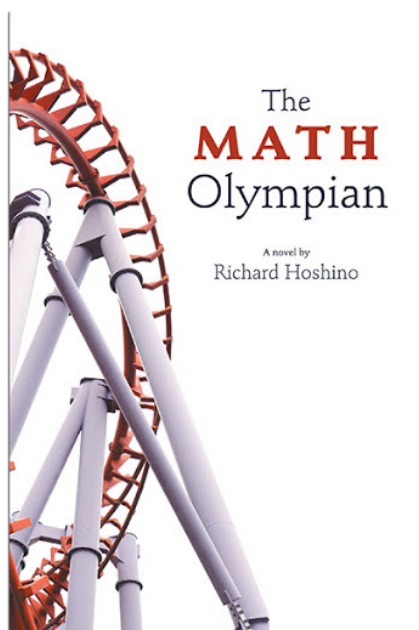
Lukuteorian diplomitehtävät



Kirjavinkkaus: The Math Olympian

Nerissa Shakespeare

Richard Hoshino: The Math Olympian, FriesenPress, 2015, 492 sivua. Hinta Adlibris-verkkokirjakaupassa 27,10 euroa. Kirja on englanninkielinen.



The Math Olympian on hyvä ja ihana Kanadaan sijoittuva monikerroksisesti kirjoitettu fiktiivinen kirja, jonka on kirjoittanut Richard Hoshino. Kirjassa kerrotaan sen päähenkilön, Bethany MacDonaldin elämästä ikävälillä 12–18 vuotta. Se esittelee luovaa matemaattista ongelmanratkaisua ja matematiikan eri osa-alueita samalla, kun Bethany yrittää tavoitella IMO:n (International Math Olympiad) unelmaansa. Yhtenä kirjan

alussa esiintyvistä ongelman ratkaisutavoista on ongelman pilkkominen pienempiin ongelmiin. Kirjassa myös rikotaan useita stereotypioita, yhtenä esimerkkinä tytöt ja luonnontieteiden osaaminen.

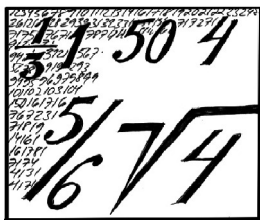
Kirjoittaja Richard Hoshino oli 1996 Canadian IMO:n edustusjoukkueen jäsen. Hän valitsi viisi tehtävää Kanadan matematiikan olympiadista kirjaansa juonta varten. Tässä on kirjan toinen tehtävä – 1996 CMO:n toinen tehtävä: Etsi kaikki reaalityratkaisut yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

Hoshino suoritti tohtorinopinnot Nova Scotian Dalhousien yliopistossa ja on työskennellyt Kanadan valtiolle ja Tokiossa tutkijana. Hän on tutkinut graafiteoriaa ja optimointia. Nykyään hän opettaa matematiikkaa Quest University Canadassa. The Math Olympian on Hoshinon ensimmäinen kirja.

Kirjasta huomaa selkeästi myös eron Kanadan ja Suomen yleisessä matematiikan arvostuksessa. Kanadassa järjestetään enemmän kilpailuja peruskoulutasolla ja treenataan kilpailumatematiikkaa.

Kenelle suosittelisin kirjaa? Ainakin kaikille matematiikasta ja ongelman ratkaisemisesta kiinnostuneille, IMO:sta haaveileville, fantasialukutoukille, mutta myös opettajille.



Paperirulla eli aritmeettinen jono ja likimääräisyys

Matti Lehtinen

Lehtori Heikki Pokela esitti MAOLin lukion matematiikkakilpailuun seuraavan tehtävähdotuksen, todelliseen teollisuusprosessiin liittyvän:

Paperitehtaassa kone rullaa paperia onton hylsyn ympärille. Määritä sylinterin muotoisen paperirullan säde (R_1) paperin pituuden (L), paksuuden (d) ja hylsyn säteen (R_2) funktiona. Paperin oletetaan rullautuvan tiiviisti. Funktio saa olla likimääräinen.

Heikki Pokelan esittämä ratkaisu on lyhyt ja oivaltava: kun rullaa katsotaan sivulta, paperia on ympyrärenkaan muotoisella pinta-alalla, joka on $\pi(R_1^2 - R_2^2)$. Mutta tämä ala on sama kuin rullalla olevan paperin sivusta katsottu ala silloin, kun paperi on vedetty suoraksi. Alaa voidaan pitää suorakulmiona, jonka sivut ovat paperin pituus L ja sen paksuus d . Ala on siis dL . Yhtälöstä

$$\pi(R_1^2 - R_2^2) = dL$$

ratkaistaan heti

$$R_1 = \sqrt{R_2^2 + \frac{dL}{\pi}}. \quad (1)$$

Mutta entä jos tämä luettuna itsestään selvä ja yksinkertainen ratkaisu ei juolahtaisikaan mieleen? Silloin voidaan johtua ratkaisuun, johon liittyy pari lukion matematiikan perustyökalua, aritmeettinen jono ja toisen asteen yhtälö. Voipa vielä tarvita derivaattaakin.

Suoraviivainen tapa lähestyä tehtävän ratkaisua olisi selvittää, kuinka monta kerrosta paperia on päällekkäin, ja päätellä siitä paperikerroksen paksuus eli

$R_1 - R_2$. Kerrokset ovat kuitenkin eripituisia. Aivan ensimmäinen kerros kiertyy R_2 -säteisen hylsyn päälle, joten sen (sisäpinnan) pituus on $2\pi R_2$. Toinen kerros kiertyy lieriölle, jonka säde on $R_2 + d$, joten se on hiukan pitempi. Kerroksen pituus on $2\pi(R_2 + d)$. Koska vastaus saa olla likimääräinen, voidaan unohtaa vaikutus, joka on uuden kierroksen aloittavalla pienellä pykälällä. Samoin jatkaen huomataan, että uusi kierros on aina $2\pi d$:n verran edellistä pidempi. Koko paperin pituus voidaan siis ajatella aritmeettisena summana, jonka ensimmäinen termi on $2\pi R_2$ ja viimeinen, jos kierroksia on kaikkiaan n kappaletta, $2\pi R_2 + (n - 1) \cdot 2\pi d$. Aritmeettisen jonon summahan on yhteenlaskettavien lukumäärä kerrottuna ensimmäisen ja viimeisen yhteenlaskettavan keskiarvolla. Koko paperin pituus toteuttaa siis yhtälön

$$2\pi \left(R_2 + (n - 1) \frac{d}{2} \right) n = L,$$

eli, jos merkitään $\frac{L}{2\pi} = M$,

$$\frac{d}{2} n^2 + \left(R_2 - \frac{d}{2} \right) n - M = 0. \quad (2)$$

Kun tämä toisen asteen yhtälö ratkaistaan, saadaan

$$n = \frac{\frac{d}{2} - R_2 + \sqrt{\left(R_2 - \frac{d}{2} \right)^2 + 2dM}}{d}$$

ja

$$nd = \frac{d}{2} - R_2 + \sqrt{R_2^2 - R_2d + \frac{d^2}{4} + 2dM}. \quad (3)$$

Mutta paperi on ohutta. d on varsin pieni verrattuna R_2 :een. Toisaalta rullalle kierretään sangen pitkä paperiliuska, joten dM ei ole häviävän pieni. Kun nämä huomiot sovitetaan yhtälöön (2), saadaankin

$$R_1 = R_2 + nd \approx \sqrt{R_2^2 + 2dM}.$$

Kun vielä palautetaan apumerkinnän M tilalle paperin pituus L , tullaan ensimmäiseen ratkaisuun (1).

Vaan miksi tehdä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käytöstä monimutkaista? Koska d on pieni, yhtälö (2) on melkein sama kuin

$$\frac{d}{2}n^2 + R_2n - M = 0. \quad (4)$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta saadaan nyt heti

$$n = \frac{-R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2Md}}{d}$$

eli

$$R_1 = R_2 + nd = \sqrt{R_2^2 + 2Md},$$

ja olemme tulleet taas ratkaisuun (1).

Viimeisen ratkaisuvaihtoehdon kohdalla voi kysyä, mikä vaikutus ylimalkaan ensimmäisen asteen termin kertoimen muutoksella on toisen asteen yhtälön ratkaisuun. Tarkastellaan toisen asteen yhtälöä $an^2 + bn + c = 0$. Jos nyt kerroin b onkin muuttuja, myös ratkaisu n on sitä: $n = n(b)$. Ratkaisu synnyttää uuden b :n funktion $f(b) = an(b)^2 + bn(b) + c$. Tällä funktiolla on kuitenkin vakioarvo: $f(b) = 0$. Vakiofunktion derivaatta on nolla. Siis myös

$$0 = f'(b) = 2an'(b)n(b) + bn'(b) + n(b),$$

eli

$$n'(b) = -\frac{n(b)}{2an(b) + b}.$$

(Konsti, jota käytettiin, on ns. implisiittinen derivointi.) Yhtälömme tapauksessa $a = \frac{d}{2}$ ja kertoimen b muu-

tos myös $\frac{d}{2}$. Muutoksen vaikutus ratkaisuun n on noin

$$|n'(b)| \cdot \frac{d}{2} = \frac{\frac{nd}{2}}{dn + R_2}.$$

Vertaamalla osoittajaa ja nimittäjää nähdään, että vaikutus on vähemmän kuin $\frac{1}{2}$. Yksinkertaistettu yhtälö merkitsee siis enintään yhden paperinpaksuuden eroa tuloksissa.

Toisen asteen polynomien ominaisuuksien selvittelyä varten ei useinkaan tarvitse turvautua differentiaalilaskentaan. Nytkin on kysymys kahden yhtälön ratkaisujen eroista. Yhtälöiden ratkaisut eivät ole aivan samat, joten niitä on syytä merkitä eri kirjaimin. Olkoon siis

$$\frac{d}{2}n_1^2 + \left(R_2 - \frac{d}{2}\right)n_1 - M = 0,$$

$$\frac{d}{2}n_2^2 + R_2n_2 - M = 0.$$

Kun yhtälöt vähennetään toisistaan, saadaan

$$\frac{d}{2}(n_1^2 - n_2^2) + R_2(n_1 - n_2) - \frac{d}{2}n_1 = 0,$$

ja kun $n_1^2 - n_2^2$ jaetaan tekijöihinsä,

$$(n_1 - n_2) \left(\frac{d}{2}(n_1 + n_2) + R_2 \right) = \frac{d}{2}n_1.$$

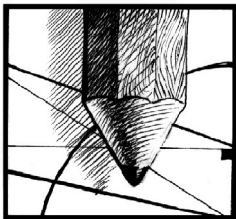
Siis ratkaisujen ero on

$$n_1 - n_2 = \frac{\frac{d}{2}n_1}{\frac{d}{2}(n_1 + n_2) + R_2}.$$

Erolle saadaan ylärajaksi 1, kun nimittäjästä jätetään pois positiivisia termejä. Helpomman yhtälön ratkaisu merkitsee enintään yhtä paperikerroksen paksuutta paperirullan säteessä.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



Verkkojen teoriaa Königsbergistä internetiin

Ville Romanov

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

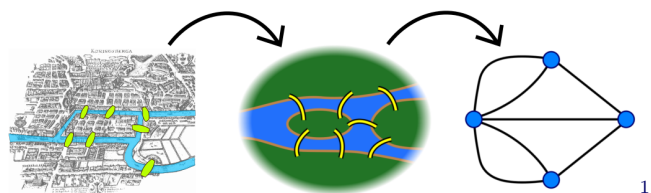
Königsbergin sillat

1700-luvun Königsbergissä (nykyään Kaliningrad) saattoi satunnainen matkaaaja päätyä pähkäilemään kinkkisen maantieteellisen pulman kanssa. Kaupungin läpi nimittäin virtaa Pregel-joki, jossa on kaupungin kohdalla kaksi suurikokoista saarta keskellä jokea. Tuohon aikaan joen eri puolia ja kahta saarta yhdisti seitsemän siltaa, joista yksi yhdisti saaret toisiinsa ja loput kuusi puolestaan kulkivat saarten ja mantereen välillä.

Hankala kysymys kuitenkin oli, olisiko mahdollista löytää sellainen kulkureitti, joka kulkee jokaisen sillan kautta tasan yhden kerran. Kartan kanssa pienen pohittamisen ja kenties yrityksen ja erehdyksen jälkeen voi huomata, ettei tuollaisen reitin löytäminen ole erityisen helppoa. Pitkällisemmän testaamisen jälkeen aloitteleva matemaatikko saattaa jopa hyväksyä, että ongelmaan ei näytä löytyvän ratkaisua.

Tämä empiirinen tosiseikka lienee ollut myös Königsbergin paikallisten asukkaiden tiedossa jo paljon aiemmin, mutta vasta paikallinen matemaatikko Leonhard Euler oli ensimmäinen, joka onnistui käsittelemään ongelmaa matemaattisesti mielekkäällä ja pätevällä tavalla. Vuonna 1736 julkaistussa artikkelissaan hän muotoili ongelman matemaattisesti ja ensimmäisenä myös todisti, ettei annettuun siltaongelmaan ole ratkaisua. Tätä Eulerin artikkelia voidaan pitää verkko- eli graa-

fiteorian lähtölaukauksena, josta tähän päivään mennessä verkoteoria on kehittynyt merkittäväksi diskreetin matematiikan osa-alueeksi. Suomessa puhutaan hie- man asiayhteydestä riippuen sekä verkoista että graa- feista (engl. graph), mutta nämä ovat käytännössä sy- nonyymeja.



Verkkoteorian perusteita

Tarkastellaan vielä Königsbergin siltaongelmaa. Itse ongelman kannalta on selvästi täysin merkityksetöntä tarkastella siltoja ja saaria niiden aidossa maantieteellisessä yhteydessä esimerkiksi mittakaava tai maa-alueiden sisäiset reitit huomioiden. Sen sijaan siltojen muodostamat yhteydet maa-alueiden välillä ovat ainoita ongelman kannalta oleellisia seikkoja. Tällöin tilanne voidaan yksinkertaistaa piirtämällä varsin yksinkertainen verkko, jossa kutakin maa-aluetta merkitään pisteellä ja alueita yhdistäviä siltoja viivoilla; kaikki ongelman kannalta epäoleellinen on jätetty pois. Näin al-

¹Kuva on mukailtu lähteistä https://en.wikipedia.org/wiki/File:7_bridges.svg, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Königsberg_graph.svg ja https://en.wikipedia.org/wiki/File:Königsberg_bridges.png. Lisenssi: CC BY-SA 3.0

kuperäisestä ongelmasta on saatu luotua yksinkertainen malli, johon voidaan soveltaa verkkoteorian tuloksia ja etsiä ratkaisua näiden valossa. Tarkastelun kohteena ovat tällöin erityisesti yhteyksien määrä ja niiden jakautuminen.

Eräs luonnollinen sovelluskohde verkkoteorialle on siis sellaiset tosielämän systeemit, joissa tarkastelun kohteena ovat erityisesti yhteydet, niiden jakautuminen ja reitit systeemin eri osien tai olioiden välillä. Varsin ilmeisiä sovelluskohteita ovat esimerkiksi liikennejärjestelmät kuten katu- ja rataverkot, erilaiset kartat, sähkö- tai tietoverkot, WWW, sosiaaliset verkostot ja sukupuut.

Yksinkertaisimmillaan verkko tai graafi on **kokoelma**

- **pisteitä** (engl. node, vertex) ja
- **viivoja** (engl. edge) eli yhteyksiä näiden välillä.

Verkoissa yhteydet ovat aina kahden eri pisteen välillä, toisin sanottuna verkoissa ei ole silmukoita. Yhteydet ovat yleensä kaksisuuntaisia, mutta niin sanotussa suunnatussa verkossa voi olla myös yhdensuuntaisia yhteyksiä, joita voi edetä vain määrättyyn suuntaan. Pisteistä puhutaan yleisesti myös *solmuina*.

Tarkalleen ottaen verkossa on kahden pisteen välillä enintään yksi viiva. Mikäli viivoja on kaksi tai useampia, puhutaan yleensä **multigraafista**. Tämän perusteella Königsbergin siltoja kuvaava verkko on itse asiassa multigraafi, sillä joitakin pisteitä yhdistää kaksi viivaa. Siltaongelman tarkastelussa jaottelu tavallisen verkon ja multigraafin välillä ei kuitenkaan ole oleellinen seikka.

Lisäksi jos verkon voi piirtää tasoon siten, että viivat eivät leikkaa toisiaan, kutsutaan verkkoa **tasoverkoksi**.

Käytetään seuraavia merkintöjä verkoille:
Olkoon $G(P_G, V_G)$ jokin verkko. Tällä tarkoitetaan, että

- P_G on verkon G pisteiden joukko ja
- V_G on verkon G viivojen joukko,

jotka sitten muodostavat itse verkon G . Mikäli valitaan vain osa verkon G viivoista ja pisteistä ja muodostetaan niistä uusi verkko, on tämä uusi verkko G^* verkon G **aliverkko**.

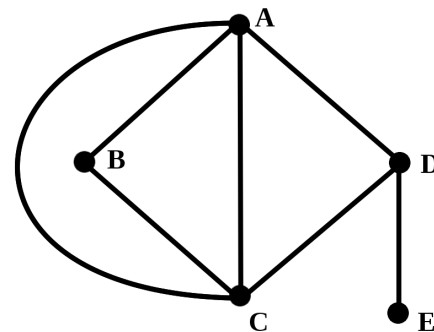
- Jos verkossa G on piste x , merkitään $x \in P_G$.
- Jos verkossa on viiva pisteiden x ja y välillä, merkitään yleensä $\overline{xy} \in V_G$.

Merkitään vielä:

- verkon viivojen määrää $v_G = |V_G|$ ja
- verkon pisteiden määrää $p_G = |P_G|$.

Määritellään lisäksi eristetty piste: $x \in P_G$ on **eristetty piste**, jos siihen ei liity yhtään viivaa.

Verkon jokaiseen pisteeseen liittyy myös **pisteen aste**, monien hyödyllisten tulosten kannalta oleellinen ominaisuus. Pisteen $x \in P_G$ asteeksi tai asteluvuksi $d(x)$ kutsutaan siihen liittyvien viivojen lukumäärää.



Esimerkiksi yllä olevassa verkossa pisteen A aste $d(A) = 4$, tai pisteen E aste $d(E) = 1$. Eristetyn pisteen aste on aina 0. Pisteiden asteisiin liittyy myös ensimmäinen merkittävä tulos:

Lause:

Verkon viivojen lukumäärälle pätee:

$$v_G = \frac{1}{2} \sum_{x \in P_G} d(x) = \text{verkon pisteiden asteiden summa jaettuna kahdella.}$$

Tästä tuloksesta puolestaan voidaan pian johtaa niin kutsuttu "**kättelylemma**":

*Juhlissa, joissa on äärellinen määrä osallistujia, on aina **parillinen** määrä osallistujia, jotka ovat kätelleet **paritonta** määrää muita osallistujia.*

Tai toisin sanottuna: äärellisessä verkossa on aina parillinen määrä paritonasteisia pisteitä! Mistä tämän voisi päätellä? Osoita kättelylemman avulla, että talossa jossa on **tasan yksi** ulko-ovi, on ainakin yksi huone jossa on **pariton määrä** ovia.

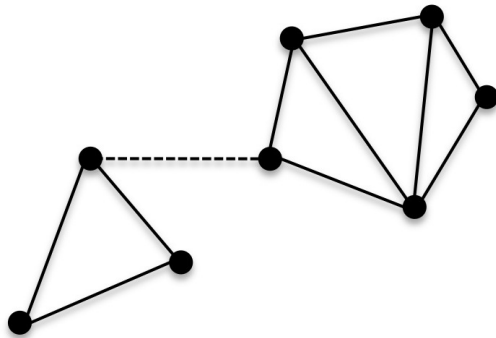
Yhtenäisyys ja kulut verkossa

Kulku verkossa on reitti, jota pitkin verkossa voidaan viivoja pitkin edetä pisteestä toiseen. Muodollisesti kulku verkossa G on jono $\bar{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ verkon pisteitä siten, että on olemassa viiva $\overline{x_{i-1}x_i} \in V_G$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Yksinkertaiseksi kuluksi sanotaan sellaista kulkua, jossa kunkin viivan tai solmun kautta kuljetaan enintään kerran.

Verkko G on **yhtenäinen**, jos verkon minkä tahansa kahden pisteen välillä on kulku: mistä tahansa verkon pisteestä voidaan edetä viivoja pitkin mihin tahansa pisteeseen. Suunnistettujen verkkojen tapauksessa voidaan puhua erikseen yhtenäisyydestä ja vahvasta yhtenäisyydestä, mutta tavallisten verkkojen tapauksessa

näiden kahden välillä ei ole eroa. Yhtenäisen verkon vastakohta on *epäyhtenäinen* verkko.

Täydelliseksi verkkoa kutsutaan, kun jokaisesta pisteestä on yhteys verkon **kaikkiin muihin** pisteisiin. Jos täydellisessä verkossa on k pistettä, voidaan viivojen lukumäärälle johtaa kaava $v_G = \frac{k(k-1)}{2}$.



2

Yhtenäinen verkko, josta saadaan epäyhtenäinen poistamalla katkoviivalla piirretty yhteys.

Eulerin kulut - takaisin Königsbergiin

Eulerin kuluksi verkossa G kutsutaan sellaista kulkua, jossa verkon G jokainen viiva esiintyy tasan yhden keran. Itse asiassa Königsbergin siltaongelmassa on kysymys nimenomaan tällaisen kulun olemassaolosta, sillä ongelmassa halutaan löytää yksinkertainen reitti jokaisen sillan kautta. Jos tarkastellaan siltaongelmaa kuvaavaa verkkoa, voidaan havaita verkon kaikkien pisteiden olevan paritonasteisia: kaikkien pisteiden aste on pariton. Kysytään nyt kaksi oleellista kysymystä:

- Voiko Eulerin kulku päättyä paritonasteiseen pisteeseen, josta kulku myös alkaa?
- Voiko Eulerin kulku päättyä paritonasteiseen pisteeseen, josta kulku ei ole alkanut?

On helppoa päätellä, että jos Eulerin kulku alkaa paritonasteisesta pisteestä, ei se voi päättyä alkupisteeseen, sillä kaikkien viivojen kautta kulkeminen tarkoittaisi, että viimeisen viivan kautta kulkeminen johtaisi pois pisteestä (ensimmäinen askel on pois aloituspisteestä, toinen takaisin, kolmas pois jne.). Ja kuitenkin huomataan, että Eulerin kulun on silti päättyttävä paritonasteiseen pisteeseen, mikäli verkossa on sellainen. Muuten tällaisesta paritonasteisesta pisteestä jäisi yksi viiva käymättä läpi. Koska Königsbergissä on neljä paritonasteista pistettä, ei ole mahdollista että kulku voisi samaan aikaan päättyä kolmeen näistä, joten Königsbergin verkossa ei voi olla Eulerin kulkua. Itse asiassa tämä tulos voidaan muotoilla yleisemminkin.

Lause:

Yhtenäisessä verkossa on Eulerin kulku, jos ja vain jos verkossa on tasan kaksi paritonasteista pistettä.

Suuret verkot maailmassamme - skaalautumattomat verkot

Arkielämässä ympärillämme on monia rakenteita, jotka ovat aivan ilmeisiä verkkoja tai joita ainakin voi mallintaa verkkoina. Esimerkiksi Internet ja muut tietoverkot ovat kirjaimellisesti verkkoja kuten myös sähkö- ja tieverkot. Konkreettisten verkkojen lisäksi ihmisten välisten suhteiden voidaan ajatella muodostavan verkon kaltaisen rakenteen, jossa ystävyys-suhteet muodostavat yhteyksiä yksilöiden eli verkon solmujen välille.

Modernin verkkoteorian kehittäjät Paul Erdős ja Alfréd Rényi olivat edelläkävijöitä suurten verkkojen tutkimuksessa. He kuitenkin tutkivat enimmäkseen satunnaisia verkkoja, joissa pisteiden välisten yhteyksien oletetaan olevan täysin sattumanvaraisesti muodostuneita. Kuitenkin monien tosielämän verkkojen tarkastelu osoittaa, ettei näiden verkkojen pisteiden astejakauma ole satunnainen. Satunnaisuuden sijaan monien näistä verkoista on havaittu noudattavan niin kutsutua potenssilakia, jonka mukaan pisteiden astelukujen jakauma noudattelee potenssijakaumaa. Tällaista verkkoa kutsutaan **skaalautumattomaksi** tai **mittakaavattomaksi verkoksi** (*scale-free network*), sillä verkon pisteiden yhteydet muuttuvat verkon koon muuttuessa, eikä verkon koko rakennetta voida päätellä jostakin verkon osaverkosta.

Potenssilakia noudattavassa verkossa astetta d olevien pisteiden osuus on $P(d) \sim cd^{-\gamma}$, missä γ on jokin kyseiselle verkolle tyypillinen vakio. Tästä jakaumasta seuraa, että verkossa on useita matala-asteisia pisteitä, mutta myös huomattava määrä pisteitä, joiden asteluku on hyvin suuri. Tällaisia pisteitä kutsutaan usein **navoiksi** tai **hubeiksi**, ja ne ovat verkon solmukohtia. Nämä navat ovat yhteydessä poikkeuksellisen moneen pisteeseen verkossa, minkä takia verkossa kahden pisteen välinen keskimääräinen etäisyys on yleensä varsin pieni. Tätä ilmiötä kuvaa esimerkiksi *kuuden erottavan askeleen teoria*, jonka mukaan keiden tahansa kahden ihmisen välillä on enimmillään kuusi ihmistä, mikäli ystävyys-suhteet käsitetään yhteyksiksi. Esimerkiksi tietyssä elinpiirissä, kuten kouluissa, harrastusten piirissä tai saman kaupungin sisällä ihmiset tuntevat toisensa verrattain hyvin, jolloin näistä yhteyksistä muodostuu niin kutsuttu **pieni maailma** (*small world*). Tästä pienestä maailmasta on vähemmän yhteyksiä ulospäin, mutta todennäköisesti muutamat keskeisissä asemissa olevat yksilöt kuten esimerkiksi poliitikot tai julkisuuden henkilöt ovat erityisen verkottuneita ja yhdistävät useita pieniä maailmoja toimien näin verkon napoina.

²<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sample-graph.jpg> Lisenssi: CC BY 3.0

Tällä ajatuksella leikkivät muun muassa *Kevin Bacon number* ja *Erdős'n luku*, jotka kertovat henkilön etäisyyden Kevin Baconiin sen perusteella, keiden kanssa kyseinen henkilö on näytellyt elokuvissa, tai etäisyyden matemaatikko Paul Erdősiin yhteisten tieteellisten julkaisujen perusteella.

Tätä pienen maailman ilmiötä tutki ensimmäisen kerran Stanley Milgram jo vuonna 1967 lähettämällä kirjeitä Yhdysvalloissa satunnaisille vastaanottajille pyytäen heitä lähettämään kirjeen sellaiselle tuttavalleen, jonka ajattelee olevan lähimpänä kirjeen lopullista vastaanottajaa. Tällä tavoin kokeilemalla Milgram sai kulun keskimääräiseksi pituudeksi kuusi ja näin pani alulle kuuden erottavan askeleen teorian. Nykyään kun tietoverkot ovat mahdollistaneet nopean sähköisen viestinnän ja sosiaalinen media yhdistää yhä useamman, on kulun keskimääräinen pituus luultavasti vain lyhentynyt. Teorian voi ajatella pätevän myös Internetin tapauksessa, sillä muun muassa hakukonesivustot yhdistävät lukemattomia vähemmän linkittyneitä sivustoja toisiinsa. Esimerkiksi vuosituhatien vaihteessa kahden sivun väliseksi keskimääräiseksi etäisyydeksi WWW:ssä mitattiin noin 19 erottavaa askelta, missä laskettiin sivulta toiselle siirtymiseen tarvittavien linkkien määrää.³

Skaalautumattomien verkkojen erityisominaisuus on kulkujen keskimääräisesti lyhyt pituus, koska verkon navat tai hubit yhdistävät suuren määrän pienempiasteisia pisteitä. Tämä rakenne on kuitenkin varsin haavoittuvainen sellaisille tapauksille, että verkosta poistuu yksi tai useampi hubi, jolloin äärimmäisimmillään verkko muuttuu jopa epäyhtenäiseksi. Sen sijaan jos verkosta poistetaan sattumanvaraisesti yksittäisiä pisteitä, voidaan niitä poistaa hyvin suuri määrä hajottamatta verkkoa, sillä skaalautumattomassa verkossa on suhteessa erittäin paljon merkityksettömiä pisteitä, joiden asteluku on pieni. Täysin satunnaisilla verkoilla sen sijaan on kriittinen määrä poistettavia pisteitä, jonka jälkeen verkko hajoaa nopeasti epäyhtenäisiin osiin.

Samaan tapaan lyhyen askelpituuden ansiosta yksittäinen häiriö voi edetä verkossa nopeasti hyvin eri puolille verkkoa nimenomaan verkon hubien kautta. Tosielämän tapausesimerkki tällaisesta *kaskadihäiriöstä* nähtiin Yhdysvaltain itärannikolla vuonna 2003, jolloin yksinkertainen paikallinen vika sähköverkossa levisi nopeasti laajoille alueille jättäen jopa 45 miljoonaa ihmistä ilman sähköä vaihteleviksi ajoiksi. Toinen mahdollinen tosielämän tapaus olisi yhteyksien katkeaminen kriittisten Internet-reitittimien välillä. Molemmissa tapauksissa kriittisen yhteyden katkeaminen tai hubin poistuminen ohjaa tieto- tai sähköverkon kuormituksen hubien sijaan pienemmän kapasiteetin solmukohtiin. Ylikuormittuessaan nekin poistuvat verkosta, jolloin kuorma ohjautuu jälleen pienemmille solmuille,

ja näin kaskadihäiriö onkin valmis leviämään salaman-nopeasti.

Pulmia pohdittaviksi

Älä katkaise lankaa!

Tarvikkeet: narukerä. Osallistujien tehtävänä on järjestäytyä ringiin ja muodostaa annetulla narulla sitä katkaisematta täydellinen verkko, jossa naru kahden osallistujan välillä tarkoittaa siis viivaa verkossa. Missä tapauksissa verkon muodostaminen on mahdollista?

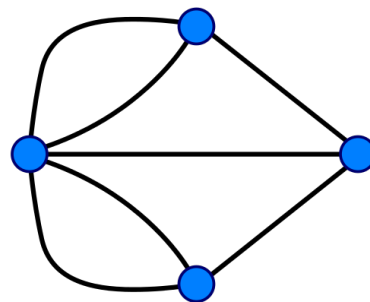
No more tears, Königsberg!

Eulerin kulku esiteltiin jo aiemmin artikkelissa: kyseessä on siis kulku, joka kulkee verkon **kaikkien viivojen** kautta tasan yhden kerran. Eulerin kulun olemassaololle on löydetty varsin käyttökelpoisia riittäviä ehtoja. Tässä niistä yksi:

Yhtenäisessä verkossa on Eulerin kulku, jos ja vain jos siinä on korkeintaan kaksi paritonasteista pistettä.

Mieti, miksi asia on näin!

Hamiltonin kulku taas kutsutaan sellaista kulkua, joka kulkee verkon **kaikkien pisteiden** kautta tasan yhden kerran. Hamiltonin kulun olemassaololle ei ole löydetty yleisiä riittäviä ehtoja, ja kulun etsiminen verkosta tai sen olemassaolon näyttäminen on ns. NP-täydellinen ongelma. Eulerin tai Hamiltonin kierrokseksi kutsutaan sellaista kulkua, joka on Eulerin tai Hamiltonin kulku ja palaa lähtöpisteeseensä.



Ohessa Königsbergin siltojen muodostama verkko.

- Lisää verkkoon yksi silta (=viiva) siten, että verkossa on **Eulerin kulku**.
- Lisää verkkoon vielä yksi silta (=viiva) siten, että verkosta löytyy **Eulerin kierros**, eli sellainen Eulerin kulku, joka palaa lähtöpisteeseensä.

³R. Albert, J. Hawoong ja A.-L. Barabási. "Internet: Diameter of the world-wide web." Nature 401 (1999): 130–131.

Cocktail party graph

”Cocktailkutsu-verkoksi” kutsutaan verkkoa, joka kuvaa cocktailkutsujen kättelemisiä. Ajatuksena on, että kutsuilla on n pariskuntaa (yhteensä $2n$ osallistujaa), ja kaikki kutsuvieraat kättelevät kaikkia muita vieraita paitsi omaa pariaan. Verkossa tämä tarkoittaa sitä, että kaikista pisteistä on viiva verkon muihin pisteisiin paitsi kyseisen pisteen omaan pariin.

Miltä cocktailkutsu-verkko näyttää, jos juhliin osallistuu

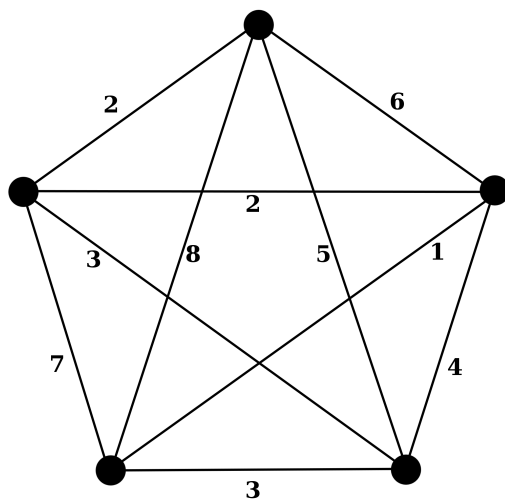
- $n = 3$ pariskuntaa
- $n = 5$ pariskuntaa?

Saatko piirrettyä verkot siten, etteivät viivat leikkaa toisiaan? Ovatko verkot siis tasoverkkoja?

Reittikartan optimointi

Oheinen verkko kuvaa reittejä, joilla julkinen liikenne voidaan järjestää Yli-Hilseen kaupungissa. Verkko on painotettu yhteysvälien kustannusten mukaan, eli jokaisella viivalla on tietty painokerroin. Julkisten menojen leikkausten vuoksi liikenneverkko on toteutettava

- siten, että kaikista pisteistä voi kulkea minne tahansa (ts. verkko on yhtenäinen),
- mahdollisimman halvalla.



Halvin mahdollinen reittikartta on niin kutsuttu verkon virittävä puu. **Puu** on yhtenäinen verkko, jossa

kahden pisteen välillä on olemassa tasan yksi (yksinkertainen) kulku: kahden eri pisteen välillä on siis vain yksi mahdollinen reitti. Verkon G **virittäväksi puuksi** sanotaan jotakin G :n puumuotoista aliverkkoa, joka koostuu joistakin verkon G viivoista, jotka yhdistävät kaikki pisteet P_G .

Tehtävänäsi on etsiä halvin mahdollinen reittikartta käyttäen kahta eri menetelmää:

- ”Ahne algoritmi”:
Aloita puun rakentaminen ”halvimmista viivoista” eli viivoista, joiden painokerroin on mahdollisimman pieni, ja lisää niitä puuhun yksi kerrallaan, kunnes kaikki pisteet on saavutettu.
- Renkaiden poistaminen:
Puun määritelmän mukaan puussa ei ole yhtään rengasta, siis yksinkertaista kulkua jonka alku- ja päätepisteet ovat samat. Lähde liikkeelle valmiista verkosta ja ala sitten poistaa sieltä viivoja, jotka kuuluvat johonkin renkaaseen.

Saitko molemmista kohdista samanlaisen puun? Jos et, onko niillä kuitenkin samat kokonaiskustannukset?

Kirjallisuutta ja muita mielenkiintoisia lähteitä

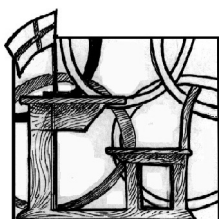
A. Barabási, *Linkit: verkostojen uusi teoria*. Terra Cognita, 2002.

Unkarilais-amerikkalainen fyysikko Albert-László Barabási on yksi keskeisiä verkostojen uuden teorian kehittäjiä. Muun muassa mittakaavattoman verkon käsite on hänen keksintönsä ja hän on tutkinut suurikokoisten sekä luonnossa esiintyvien että keinotekkoisten verkkojen ominaisuuksia, kuten esimerkiksi häiriöalttiutta.

R. Diestel, *Graph theory*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2000.

The Opte Project on hanke, jonka tarkoituksena on luoda taiteellinen näkemys Internetistä verkko-muodossa. Internetin kartasta voi helposti hahmottaa WWW:n ”pieni maailma” -rakenteen.
<http://www.opte.org/>

The Oracle of Bacon on verkkosivusto, joka laskee lähes kenen tahansa jossakin elokuvassa esiintyneen henkilön Kevin Baconin luvun.
<http://oracleofbacon.org/>



57. kansainväliset matematiikkaolympialaiset Hongkongissa

Esa V. Vesalainen

Basque Center for Applied Mathematics

57. kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin Hongkongissa 9–16.7.2016. Suomea kilpailussa edustivat Ella Anttila, Hannes Ihalainen, Alvar Kallio, Iiro Kumpulainen, Joose Lehtinen ja Antti Röyskö. Ella Anttila, Iiro Kumpulainen ja Alvar Kallio saivat kunniainnoinnat.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

1. Kolmiolla BCF on suora kulma kärjessä B . Olkoon A piste suoralla CF siten, että $FA = FB$ ja piste F sijaitsee pisteiden A ja C välissä. Valitaan piste D siten, että $DA = DC$ ja AC puolittaa kulman $\angle DAB$. Valitaan piste E siten, että $EA = ED$ ja AD puolittaa kulman $\angle EAC$. Olkoon M janan CF keskipiste. Olkoon X se piste, jolla $AMXE$ on suunnikas (missä $AM \parallel EX$ ja $AE \parallel MX$). Osoita, että suorat BD , FX ja ME kulkevat saman pisteen kautta.

2. Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille $n \times n$ -ruudukon jokaiseen ruutuun voi asettaa yhden kirjaimista I , M ja O siten, että:

- jokaisella rivillä ja jokaisella sarakkeella yksi kolmasosa kirjaimista on I -kirjaimia, yksi kolmasosa M -kirjaimia ja yksi kolmasosa O -kirjaimia; ja
- jokaisella lävistäjällä, jolla ruutujen lukumäärä on kolmella jaollinen, yksi kolmasosa kirjaimista on I -

kirjaimia, yksi kolmasosa M -kirjaimia ja yksi kolmasosa O -kirjaimia.

Huomautus: Numeroimme $n \times n$ -ruudukon rivit ja sarakkeet luonnollisella tavalla luvuilla $1, 2, \dots, n$. Täten jokainen ruutu vastaa positiivisten kokonaislukujen paria (i, j) , missä $1 \leq i, j \leq n$. Kun $n > 1$, ruudukossa on $4n - 2$ lävistäjää, jotka edustavat kahta eri lajia. Ensimmäisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j) , joissa $i + j$ on jokin vakio, kun taas toisen lajin lävistäjä koostuu niistä ruuduista (i, j) , missä $i - j$ on jokin vakio.

3. Olkoon $P = A_1 A_2 \dots A_k$ tason konvekksi monikulmio. Kärkien $A_1, A_2, \dots, A_k$ koordinaatit ovat kokonaislukuja ja ne sijaitsevat erään ympyrän kehällä. Olkoon S monikulmion P ala. On annettu pariton positiivinen kokonaisluku n siten, että monikulmion P sivujen pituuksien neliöt ovat kokonaislukuja ja jaollisia luvulla n . Osoita, että $2S$ on kokonaisluku ja jaollinen luvulla n .

Toisen kilpailupäivän tehtävät

4. Positiivisista kokonaisluvuista koostuva joukko on *sulotuoksuinen*, jos se sisältää ainakin kaksi alkioita ja jokaisella sen alkiosta on yhteinen alkulukutekijä ainakin yhden toisen alkion kanssa. Olkoon $P(n) = n^2 + n + 1$. Mikä on pienin mahdollinen positiivisen

kokonaisluvun b arvo, jolla on olemassa ei-negatiivinen kokonaisluku a siten, että joukko

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

on sulotuoksuinen?

Huomautus. Tässä sanan ”sulotuoksuinen” takana on se seikka, että Hong Kong tarkoittaa suurin piirtein samaa kuin ”sulotuoksuinen satama”.

5. Liitutaululle kirjoitetaan yhtälö

$$(x-1)(x-2) \cdots (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdots (x-2016),$$

missä kummallakin puolella on 2016 lineaarista tekijää. Mikä on pienin mahdollinen k , jolla on mahdollista pyyhkiä pois täsmälleen k kappaletta näistä 4032 lineaarisesta tekijästä siten, että yhtälön kummallekin puolelle jää jäljelle ainakin yksi tekijä ja että lopputuloksena syntyvällä yhtälöllä ei ole reaalityökalutkaisuita?

6. Tasossa on $n \geq 2$ janaa siten, että mitkä tahansa kaksi janaa leikkaavat toisensa, ja mitkään kolme janaa eivät kulje saman pisteen kautta. Geoffin on valittava jokaisesta janasta toinen sen päätepisteistä ja asetettava sille sammakko niin, että se katsoo janan toista päätepistettä. Sitten hän taputtaa käsiään $n-1$ kertaa. Joka kerta, kun hän taputtaa, jokainen sammakko välittömästi hyppää eteenpäin janansa seuraavalle leikkauspisteelle. Mikään sammakoista ei koskaan vaihda hyppysuuntaansa. Geoff haluaisi asettaa sammakot siten, että mitkään kaksi niistä eivät milloinkaan ole samassa leikkauspisteessä samaan aikaan.

1. Osoita, että Geoff voi aina toteuttaa toivomuksensa, kun n on pariton.
2. Osoita, että Geoff ei koskaan voi toteuttaa toivomustaan, kun n on parillinen.

Tehtävien kotimaat. Tehtävä 1 oli Belgian lähettäjä, tehtävä 2 Australian, tehtävät 3 ja 5 Venäjän, tehtävä 4 Luxemburgin ja tehtävä 6 Tšekin.

Ratkaisut

1. Koska kolmiot $\triangle ABF$ ja $\triangle ACD$ ovat yhdenmuotoiset, on

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}.$$

Koska lisäksi $\angle BAC = \angle FAD$, ovat myös kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle AFD$ yhdenmuotoiset. Voimme laskea

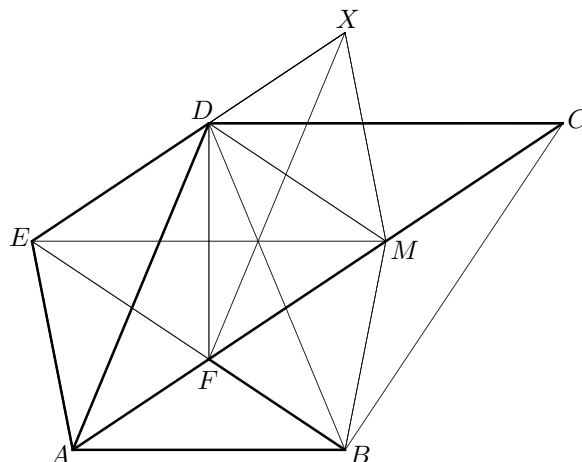
$$\begin{aligned} \angle DFA &= \angle CBA = 90^\circ + \angle BAC = 90^\circ + \angle DAE \\ &= 90^\circ + \frac{180^\circ - \angle AED}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AED, \end{aligned}$$

ja muistaen, että $EA = ED$, kehäkulmalauseen nojalla piste F sijaitsee E -keskisellä EA -säteisellä ympyrällä, ja aivan erityisesti on $EF = EA = ED$. Koska lisäksi

$$\angle EFA = \angle FAE = 2 \angle BAC = \angle BFC,$$

näemme, että pisteet B , F ja E ovat samalla suoralla.

Koska $\angle EDA = \angle MAD$, kohtaa suora AD molemmat suorista AM ja ED samassa kulmassa, jolloin $ED \parallel AM \parallel EX$, ja pisteet E , D ja X lepäävät samalla suoralla.



Kuva. Vahvennetuilla viivoilla piirretyt kolmiot ovat tehtävänannon oletusten nojalla yhdenmuotoisia tasakylkisiä kolmioita.

Koska M on suorakulmaisen kolmion $\triangle BFC$ hypoteenuksen keskipiste, on $MF = MB = MC$. Nyt kolmiot $\triangle EAF$ ja $\triangle MBF$ ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden kannat AF ja BF ovat yhtä pitkät, ja molempien kantakulmat ovat suuruuksiltaan $2 \angle BAC$. Täten kolmiot $\triangle EAF$ ja $\triangle MBF$ ovat yhteneviä.

Nyt $MB = EA = XM$, ja toisaalta

$$BE = BF + FE = AF + FM = AM = EX,$$

ja siten kolmiot $\triangle EMB$ ja $\triangle EMX$ ovat yhtenevät.

Lopuksi, koska $EF = ED$, ovat janat FX ja DB keskenään symmetriset suoran EM suhteen, mistä toivottu johtopäätös seuraakin.

2. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$ halutunlainen, ja oletetaan, että meille on annettu halutunlainen $n \times n$ -kirjainruudukko. Jos jokaisella rivillä on $k \in \mathbb{Z}_+$ kappaletta kutakin kirjainta, on tietenkin kullakin rivillä yhteensä $3k$ kirjainta, ja siis $n = 3k$.

Jaetaan ruudukko nyt 3×3 -aliruudukoihin luonnollisella tavalla – niitä syntyy siis n^2 kappaletta – ja otetaan erityisesti tarkasteluun näiden 3×3 -aliruudukoiden keskimmäiset ruudut. Kutsutaan näitä ruutuja vaikkapa *tärkeiksi*. Kutsutaan lisäksi niitä rivejä, sarakkeita ja lävistäjiä, jotka kulkevat tärkeän ruudun kautta *tärkeiksi* tai *tärkeiksi linjoiksi*. Ratkaisun ajatuksena on laskea kahdesti modulo 3 se luku N , joka kertoo niiden

parien $\langle \ell, r \rangle$ lukumäärän, missä ℓ on tärkeä linja ja r on sellainen linjan ℓ ruutu, jossa majoilee M -kirjain.

Ensinnäkin, M -kirjaimia on taulukossa kaikkiaan $3k^2$ kappaletta. Jokainen niistä kuuluu joko täsmälleen yhteen tai täsmälleen neljään sellaiseen riviin, sarakkeeseen tai lävistäjään, joka kulkee tärkeän ruudun kautta. Koska $4 \equiv 1 \pmod{3}$, on nyt oltava $N \equiv 3k^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Toisaalta, jokainen tärkeä rivi sisältää täsmälleen k kappaletta M -kirjaimia, ja tärkeitä rivejä on täsmälleen k kappaletta. Samoin tärkeitä sarakkeita on k kappaletta, ja jokainen niistä sisältää täsmälleen k kappaletta M -kirjaimia. Vasemmalta ylhäältä oikealle alas suuntaavilla tärkeillä lävistäjillä on M -kirjaimia yhteensä

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k + (k-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = k^2$$

kappaletta. Tässä yhteydessä on tärkeää, että tärkeitä lävistäjiä ovat täsmälleen ne, mitkä kulkevat jonkin tärkeän ruudun kautta. Samoin voimme käsitellä vasemmalta alhaalta oikealle ylös suuntaavat tärkeät lävistäjät. Täten $N \equiv k^2 + k^2 + k^2 + k^2 \equiv 4k^2 \equiv k^2 \pmod{3}$.

Yhdistämällä kaksi saatua kongruenssia saadaan $k^2 \equiv N \equiv 0 \pmod{3}$, ja siis luvun k on oltava jaollinen kolmella, ja edelleen luvun n on oltava jaollinen yhdeksällä. Riittää osoittaa, että jokaisella yhdeksällä jaollisella $n \in \mathbb{Z}_+$ löytyy halutunlainen ruudukko.

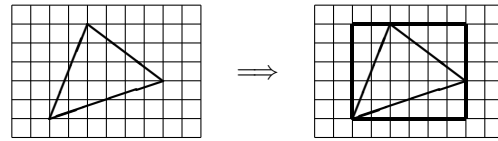
Mutta tämä ei ole kovin hankalaa. Ensinnäkin, on helppo tarkistaa, että seuraava 9×9 -ruudukko on halutunlainen:

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

Lopuksi, jos $n \in \mathbb{Z}_+$ on jaollinen yhdeksällä, niin halutunlainen $n \times n$ -ruudukko saadaan tekemällä yllä annetusta taulukosta $(n/9)^2$ kopiota ja asettamalla ne $n/9 \times n/9$ -ruudukoksi.

3. Todistetaan ensin, että $2S \in \mathbb{Z}$. Koska monikulmion voi pilkkoa lävistäjillä kolmioiksi, tämä seuraa suoraan seuraavasta havainnosta: jos kolmion Δ kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, niin kyseisen kolmion ala on kokonaisluvun puolikas. Tämän näkee vaikkapa piirtämällä kolmion kärkien kautta sellaisen suorakaiteen, jonka sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset ja

jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja. Tällöin kolmion Δ ala saadaan laskemalla suorakaiteen ala (joka on selvästi kokonaisluku), ja vähentämällä siitä sellaisten suorakulmaisten kolmioiden aloja, joiden kärjet ovat kokonaislukukoordinaattisia pisteitä ja kaiteet koordinaattiakseleiden suuntaisia, ja joiden alat siis selvästi ovat kokonaislukujen puolikkaita.



Kuva. Kuinka todeta, että kolmion, jonka kärkien koordinaatit ovat kokonaislukuja, alan on oltava kokonaisluvun puolikas.

Tehtävän varsinainen haaste on siis todistaa, että pätee $n \mid 2S$. Olkoon monikulmiolla k kärkeä ja nimitään monikulmion kärjet $A_1, A_2, \dots, A_k$, tässä järjestyksessä ympäripiirretyn ympyrän kehää pitkin. Riittää selvästi osoittaa tulos siinä tapauksessa, missä n on jonkin parittoman alkuluvun p potenssi p^t , missä $t \in \mathbb{Z}_+$.

Käytämme induktiota monikulmion kärkien lukumäärän k suhteen. Olkoon ensin $k = 3$, ja olkoot sivujen pituuksien neliöt an, bn ja cn , missä $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin Heronin kaavan nojalla

$$\begin{aligned} 16S^2 &= n^2 \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})} \\ &\quad \cdot \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} \\ &= n^2 (2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2). \end{aligned}$$

Koska nyt $n^2 \mid 16S^2$ ja n on pariton, on $n \mid S$.

Olkoon seuraavaksi $k \geq 4$, ja oletetaan, että väite on jo todistettu vähemmän kuin k kärkeä omaaville monikulmioille.

Jos minkään monikulmiomme lävistäjän pituuden neliö on jaollinen luvulla n , voimme tätä lävistäjää pitkin pilkkoa sen kahdeksi pienemmäksi monikulmioksi, joille väite induktio-oletuksen mukaan pätee erikseen, ja on selvää, että asia on kunnossa. Voimme siten olettaa, ettei minkään monikulmion lävistäjän pituuden neliö ole jaollinen luvulla n . Tämä oletus tulee johtamaan ristiriitaan.

Kun $r \in \mathbb{Z}_+$, merkitsemme alkuluvun p eksponenttia luvun r alkutekijöihinjaossa $\nu_p(r)$. Osoitamme, että jokaiselle $m \in \{2, 3, \dots, k-1\}$ pätee

$$\nu_p(|A_1 A_m|^2) > \nu_p(|A_1 A_{m+1}|^2), \quad (*)$$

mistä välittömästi seuraa ristiriita

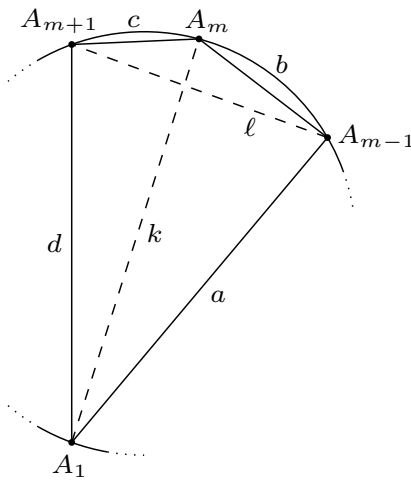
$$\begin{aligned} \nu_p(|A_1 A_2|^2) &\geq t > \nu_p(|A_1 A_3|^2) > \nu_p(|A_1 A_4|^2) \\ &> \nu_p(|A_1 A_5|^2) > \dots > \nu_p(|A_1 A_k|^2) \geq t, \end{aligned}$$

missä kaksi ensimmäistä epäyhtälöä seuraavat oletuksista $p^t \mid |A_1 A_2|^2$ ja $p^t \nmid |A_1 A_3|^2$, ja viimeinen oletuksesta $p^t \mid |A_1 A_k|^2$.

Meidän pitää vielä todistaa epäyhtälö (*) annetulle $m \in \{3, 4, \dots, k-1\}$. Käytämme induktiota, ja oletamme, että $\nu_p(|A_1 A_{m-1}|^2) > \nu_p(|A_1 A_m|^2)$. Soveltamalla Ptolemaiosin lausetta jännekuiluun $A_1 A_{m-1} A_m A_{m+1}$ näemme, että

$$kl = ac + bd,$$

missä a, b, c ja d ovat nelikulmion sivujen pituudet $|A_1 A_{m-1}|$, $|A_{m-1} A_m|$, $|A_m A_{m+1}|$ ja $|A_{m+1} A_1|$, ja k ja ℓ ovat sen lävistäjien pituudet $|A_1 A_m|$ ja $|A_{m-1} A_{m+1}|$ seuraavan kuvan mukaisesti.



Nyt siis tietenkin myös

$$b^2 d^2 = a^2 c^2 + k^2 \ell^2 - 2ack\ell,$$

mistä edelleen seuraa, että $2ack\ell \in \mathbb{Z}$. Koska $\nu_p(a^2) > \nu_p(k^2)$ induktio-oletuksen nojalla, ja koska $\nu_p(c^2) \geq t > \nu_p(\ell^2)$, on myös $\nu_p(a^2 c^2) > \nu_p(k^2 \ell^2)$, jolloin selvästi myös $\nu_p(2ack\ell) > \nu_p(k^2 \ell^2)$, ja on oltava $\nu_p(b^2 d^2) = \nu_p(k^2 \ell^2)$. Mutta koska lisäksi $\nu_p(b^2) \geq t > \nu_p(\ell^2)$, on oltava $\nu_p(d^2) < \nu_p(k^2)$, mikä olisin todistettava.

4. Aloitetaan tekemällä joitakin havaintoja polynomin P arvoista.

Havainto A. Luvuilla $P(n)$ ja $P(n+1)$ ei ole yhteistä alkulukutekijää millään $n \in \mathbb{Z}$.

Todistus. Jos $d \in \mathbb{Z}_+$ on lukujen $P(n)$ ja $P(n+1)$ yhteinen tekijä, niin d jakaa myös luvun

$$(n+2)P(n) - nP(n+1) = 2,$$

ja siis $d = 1$ tai $d = 2$. Mutta luvut $P(n)$ ja $P(n+1)$ ovat selvästi parittomia, eli luvun d on oltava pariton myös, ja siten $d = 1$.

Havainto B. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin lukujen $P(n)$ ja $P(n+2)$ ainoa mahdollinen yhteinen alkulukutekijä on 7.

Todistus. Jos alkuluku p jakaa molemmat luvuista $P(n)$ ja $P(n+2)$, niin sen on myös jaettava luku

$$(2n+7)P(n) - (2n-1)P(n+2) = 14 = 2 \cdot 7,$$

eli on oltava $p = 2$ tai $p = 7$. Mutta koska luvut $P(n)$ ja $P(n+2)$ ovat parittomia, voi olla vain $p = 7$.

Havainto C. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin lukujen $P(n)$ ja $P(n+3)$ ainoa mahdollinen yhteinen alkulukutekijä on 3.

Todistus. Jos alkuluku p jakaa molemmat luvuista $P(n)$ ja $P(n+3)$, niin sen on jaettava myös luku

$$(n+5)P(n) - (n-1)P(n+3) = 18 = 2 \cdot 3^2,$$

eli $p = 2$ tai $p = 3$. Mutta jälleen, koska luvut $P(n)$ ja $P(n+3)$ ovat parittomia, voi olla vain $p = 3$.

Tehtävän 4 ratkaisu. Olkoot siis $a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ja $b \in \mathbb{Z}_+$ sellaisia, että joukko

$$\{P(a+1), P(a+2), \dots, P(a+b)\}$$

on sulotuoksuinen. Tietenkin $b \geq 2$. Toisaalta ei voi olla $b = 2$, koska luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+2)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä, ja siten $b \geq 3$. Mutta ei voi myöskään olla $b = 3$, koska havainnon A nojalla luvulla $P(a+2)$ ei voi olla yhteisiä alkutekijöitä kummankaan luvuista $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa, ja siten on oltava $b \geq 4$.

Oletetaan sitten, että $b = 4$. Luvulla $P(a+2)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa, ja luvulla $P(a+3)$ ei ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ kanssa. Siispä luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ on oltava yhteinen alkutekijä, samoin luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+3)$. Mutta havainnon B nojalla tämän alkutekijän on oltava 7, jolloin 7 on molempien lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+3)$ alkutekijä, vastoin havaintoa A. Täten on oltava $b \geq 5$.

Oletetaan sitten seuraavaksi, että $b = 5$. Luvulla $P(a+3)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ kanssa, joten sillä on oltava yhteinen alkutekijä luvun $P(a+1)$ tai luvun $P(a+5)$ kanssa, ja havainnon B nojalla luku $P(a+3)$ on jaollinen seitsemällä. Mutta samassa hengessä luvulla $P(a+2)$ ei ole yhteistä alkutekijää lukujen $P(a+1)$ ja $P(a+3)$ kanssa havainnon A nojalla. Jos luvulla $P(a+2)$ ja $P(a+4)$ olisi yhteinen alkutekijä, olisi se havainnon B nojalla 7, jolloin luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+3)$ olisi yhteinen tekijä 7, vastoin havaintoa A. Siispä luvuilla $P(a+2)$ ja $P(a+5)$ on oltava yhteinen alkulukutekijä, jonka havainnon C nojalla on oltava 3.

Mutta aivan samoin luvulla $P(a+4)$ ei havainnon A nojalla ole yhteisiä alkutekijöitä lukujen $P(a+3)$ eikä $P(a+5)$ kanssa, ja jos sillä olisi yhteinen alkutekijä

luvun $P(a+2)$ kanssa, olisi sen oltava havainnon B nojalla 7, jolloin luvut $P(a+3)$ ja $P(a+4)$ olisivat molemmat jaollisia luvulla 7, vastoin havaintoa A. Täten luvuilla $P(a+1)$ ja $P(a+4)$ on oltava yhteinen alkulukutekijä, jonka havainnon C nojalla on oltava 3. Mutta nyt luvut $P(a+1)$ ja $P(a+2)$ ovat molemmat jaollisia luvulla 3, vastoin havaintoa A, ja toteamme, että on oltava $b \geq 6$.

Mutta arvo $b = 6$ onkin sopiva. Esimerkiksi luvut

$$\begin{aligned} P(196) &= 38613, & P(197) &= 39007, & P(198) &= 39403, \\ P(199) &= 39801, & P(200) &= 40201, & P(201) &= 40603 \end{aligned}$$

muodostavat sulotuoksuisen joukon, sillä luvuilla 38613 ja 39801 on yhteinen tekijä 3, luvuilla 39007 ja 40603 on yhteinen tekijä 19, sekä luvuilla 39403 ja 40201 on yhteinen tekijä 7.

5. Jos poistamme vähemmän kuin 2016 tekijää, niin silloin varmasti molemmille puolille jää sama tekijä $x - n$ jollakin $n \in \{1, 2, \dots, 2016\}$, jolloin yhtälöllä on reaalin ratkaisu $x = n$. Siksi on poistettava ainakin 2016 tekijää. Tulemme osoittamaan, että riittää poistaa sopivasti valitut 2016 tekijää – nimittäin vasemmalta puolelta ne tekijät $x - n$, missä $n \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ ja $n \equiv 2$ tai $3 \pmod{4}$, ja oikealta puolelta ne tekijät $x - n$, missä $n \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ ja $n \equiv 1$ tai $4 \pmod{4}$. Toisin sanoen, osoitamme, ettei yhtälöllä

$$\begin{aligned} &(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)(x-9)(x-12) \\ &\quad \cdots (x-2009)(x-1012)(x-2013)(x-2016) \\ &= (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)(x-10)(x-11) \\ &\quad \cdots (x-2010)(x-2011)(x-2014)(x-2015) \end{aligned}$$

ole reaalityökaluratkaisuita.

Selvästikään mikään luvuista $x \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ ei voi olla yhtälön ratkaisu, sillä jokaisella näistä arvoista yhtälön toinen puoli häviää, kun taas toinen puoli ei häviä.

Myöskään mikään luvuista $x \in]1, 2[\cup]3, 4[\cup]5, 6[\cup]7, 8[\cup \dots \cup]2013, 2014[\cup]2015, 2016[$ ei voi olla ratkaisu, sillä näillä arvoilla yhtälön vasemman puolen lauseke on negatiivinen, kun taas oikea puolen lauseke on positiivinen.

Olkoon sitten $x \in]-\infty, 1[\cup]4, 5[\cup]8, 9[\cup]12, 13[\cup \dots \cup]2012, 2013[\cup]2016, \infty[$. Nämä arvot eivät ole ratkaisuita, sillä vaikka näillä arvoilla yhtälön molemmat puolet ovat positiivisia reaalityökaluja, vasempi puoli on itseisarvoltaan oikeaa puolta pienempi. Tämä seuraa vertaamalla puolia kahden vierekkäisen tekijän pareissa. Nimittäin, jos $j \in \{0, 1, 2, \dots, 503\}$, niin tekijät $(x - (4j + 1))(x - (4j + 4))$ ja $(x - (4j + 2))(x - (4j + 3))$ ovat molemmat positiivisia, ja lisäksi

visia, ja lisäksi

$$\begin{aligned} &(x - (4j + 1))(x - (4j + 4)) \\ &= x^2 - (8j + 5)x + (16j^2 + 20j + 4) \\ &< x^2 - (8j + 5)x + (16j^2 + 20j + 6) \\ &= (x - (4j + 2))(x - (4j + 3)). \end{aligned}$$

Olkoon lopuksi $x \in]2, 3[\cup]6, 7[\cup]10, 11[\cup \dots \cup]2010, 2011[\cup]2014, 2015[$. Näillä arvoilla molemmat puolet ovat negatiiviset, mutta nyt oikean puolen itseisarvo on pienempi kuin vasemman puolen. Tämä vaatii molemmien puolen ensimmäisen ja viimeisen tekijän käsittelyn erikseen: tietenkin

$$0 < x - 2 < x - 1 \quad \text{ja} \quad x - 2016 < x - 2015 < 0.$$

Loppuja termejä voi jälleen vertailla puolittain kahden vierekkäisen termin pareissa, kuten aiemmin. Olkoon $j \in \{1, 2, \dots, 503\}$. Tällöin tekijät $(x - 4j)(x - (4j + 1))$ ja $(x - (4j - 1))(x - (4j + 2))$ ovat molemmat positiivisia ja

$$\begin{aligned} &(x - (4j - 1))(x - (4j + 2)) \\ &= x^2 - (8j + 1)x + (16j^2 + 4j - 2) \\ &< x^2 - (8j + 1)x + (16j^2 + 4j) \\ &= (x - 4j)(x - (4j + 1)). \end{aligned}$$

6. Piirretään ympyrä niin, että kaikki n janaa ovat kokonaan sen sisäpuolella, ja jatketaan niitä molemmilta puolilta, kunnes niiden päätepisteet ovat ympyrän kehällä. Tämä helpottaa janoista ja niiden päätepisteistä puhumista. Numeroidaan janojen päätepisteet ympyrän kehää pitkin $0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 1$.

Olkoon ensin n parillinen. Jos sammakot on asetettu niin, että ympyrän kehällä kahdelta vierekkäiseltä päätepisteeltä, kutsukaamme niitä vaikkapa nimillä A ja B , löytyy sammakko, niin silloin Geoffin toivomus ei toteudu. Tämän nähdäksemme olkoon P päätepisteitä A ja B vastaavien janojen leikkauspiste. Oleellinen havainto on tämä: jokainen jana, joka leikkaa janan AP , leikkaa myös välttämättä janan BP , ja siten molemmilta janoilta AP ja BP löytyy yhtä monta leikkauspistettä, ja pisteistä A ja B lähtevät sammakot löytävät toisensa pisteestä P samaan aikaan.

Oletetaan nyt, että sammakot on aseteltu Geoffin toivomuksen kannalta suotuisalla tavalla. Ilman yleisyyden menettämistä voimme olettaa, että eräs sammakkoista on asetettu päätepisteeseen 0. Koska nyt päätepisteessä 1 ei voi olla sammakkoa, täytyy sellainen olla vastaavan janan toisessa päätepisteessä $n + 1$. Samassa hengessä, koska pisteessä $n + 2$ ei ole sammakkoa, täytyy vastaavan janan toisesta päätepisteestä 2 löytyä sellainen. Jatkamalla tätä argumenttia näemme, että n sammakkoa on välttämättä asetettu päätepisteisiin 0,

$n + 1, 2, n + 3, 4, n + 5, \dots, n - 2, 2n - 1$. Mutta nyt vierekkäisiltä päätepisteiltä 0 ja $2n - 1$ löytyy sammakot, eli olemme päätyneet ristiriitaan, ja tehtävän osio b) on ratkaistu.

Olkoon sitten seuraavaksi n pariton. Asetamme sammakot päätepisteisiin $0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n - 2$. Koska päätepistettä i vastaava toinen päätepiste on $\equiv n + i \pmod{2n}$, ja n oli pariton, ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaiselta janalta löytyy täsmälleen yksi sammakko, kuten pitääkin. Otetaan tarkasteluun joidenkin kahden sammakon aloituspäätepisteet A ja B . Olkoon jälleen P päätepisteitä A ja B vastaavien janojen leikkauspiste. Haluamme osoittaa, että pisteistä A ja B lähtevät sammakot käyvät pisteessä P eri aikoina. Tämän osoittamiseksi riittää osoittaa, että janoilta AP ja BP löytyy eri määrä leikkauspisteitä. Tämän puolestaan todistamme osoittamalla, että janoilta AP ja BP löytyy yhteensä pariton määrä leikkauspisteitä (piste P pois lukien).

Tarkastellaan niitä $n - 2$ janaa, jotka jäävät jäljelle,

kun poistamme päätepisteitä A ja B vastaavat janat. Ne jakautuvat kolmeen luokkaan: niihin, jotka leikkaavat molempia janoista AP ja BP , niihin, jotka leikkaavat vain toista niistä, ja niihin, jotka eivät leikkaa kumpaakaan. Olkoon näitä janoja vastaavasti a, b ja c kappaletta. On ilmeistä, että piste P pois lukien janoilta AP ja BP löytyy yhteensä $2a + b$ leikkauspistettä. Riittää siis osoittaa, että b on pariton. Mutta tämä on lähes tulkoon ilmeistä: Valitaan toinen ympyränkaarista AB . Selvästi b on yhtä suuri kuin tältä kaarelta pisteiden A ja B väliltä löytyvien päätepisteiden lukumäärä, joka taas on varmasti pariton sen nojalla, miten sammakot aseteltiin. Näin on tapaus a) käsitelty myös ja olemme valmiit.

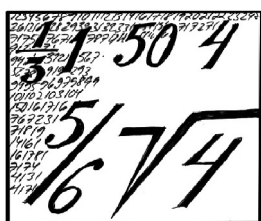
Lähteet

Yllä annetut ratkaisut perustuvat tapahtumassa joukkueiden johtajille jaettuihin malliratkaisuihin.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

- Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)
- Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)
- Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)
- Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)
- Geometria (K. Väisälä)
- Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)
- Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukanen)
- Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)
- Algebra (K. Väisälä)
- Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikka (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
- Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
- Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)
- Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)
- Matematiikan historia (Matti Lehtinen)
- Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Satu surullisesta numerosta¹

Ritva Kokkola

Olipa kerran numero kaksi eli kakkonen.

”Olen niin yksinäinen”, se huokaisi. ”Minulla ei ole enää kiekuroita. Ei kaunista yläsilmukkaa eikä ihanaa alasilmukkaa, jotka kaartuivat kauniisti ruutupaperilla.”

”Kuulehan nyt, numero kakkonen, sinä muistelet ikivanhoja aikoja. Sinulla oli silmukat ja koukerot kauan kauan sitten”, sanoi ykkönen tuimasti.

”Mutta minä kaipaen niitä aivan hirveästi. Tämän näköisenä minä olen ruma. Olen kuin mikäkin ongenkousku!”

”Katso minua!” ykkönen komensi. ”Olen pelkkä vertikaalinen viiva.”

”Mikä? Mitä tarkoittaa vertikaalinen?” muut numerot kyselivät ja nauroivat makeasti kuin hyvälle kaskulle.

”Vertikaalinen tarkoittaa pystysuoraa”, ykkönen selitti.

”Olen pelkkä yksinkertainen pystysuora viiva”, ykkönen ajatteli ääneen. ”Kerran minulla oli ylhäällä pikiriikkinen väkänä. No, minäkin kaipasin sitä”, ykkönen muisteli haikeasti. Mutta hän huomasi, että oli opinut pitämään suorasta ryhdistään.

”Sinä olet vähään tyytyväinen”, kakkonen sanoi nakkäkästi. ”Mutta minä haluan olla kaunis. Minä haluan omat kiharani takaisin.”

”Ei pitäisi aina valittaa. Katso vaikka tuota!” Ykkönen osoitti numero seitsemää. Hän kertoi, kuinka seiska-rukalla oli joskus poikkiviiva. Sitten se otettiin

pois ja arvata saattoi, mikä hänen tilanteensa on nyt? Nyt se on siinä taas! Seiska ei valita, vaikka hänen on pitänyt sopeutua kaiken maailman oikkuihin. Poikkiviiva, poikkiviiva pois, poikkiviiva takaisin! Ykkönen hyppäsi seiskan poikkiviivalle.

”Mutta hänellä on iso lippakin! Miksi minulle ei voitua jättää minkäänlaista silmukkaa?” kakkonen kiukuteli.

”Stop tykkänään”, ykkönen sanoi topakasti, ”nyt on ruikutus lopetettava!”

”Tuokaan ei valita, vaikka on pelkkä nolla!” ykkönen huudahti ja osoitti rivin ensimmäistä. ”Siinä seisoo tyytyväisenä ja on pelkkä ympyrä tyhjää täynnä.”

Numero yhdeksän kipitti nollan eteen ja kysyi, paljonko on tyhjä nyt.

Ohooh! Tyhjästä tulikin yhdeksänkymmentä. Kaikki numerot huomasivat, että nollalla oli iso merkitys.

”Oi, voi, voi minua poloista! Lapset vihaavat minua!” nelonen huudahti.

Muut numerot kääntyivät katsomaan. Miten lapset voivat vihata numeroa? Pientä viatonta numeroa neljä?

”Sinulla on kaunis vino kulma ja jalka, jonka varassa pysyt paikallasi”, muut lohduttivat.

”No, kun... no, kun...”, nelonen melkein nyhkytti. ”Minä olen huono numero. Minä olen huono koulunumero. Minä olen hylätty! Kokonaan hylätty numero!”

”Voi, sinua raukkaa”, tuumivat kahdeksan ja yhdeksän, jotka tiesivät olevansa hyviä.

¹Kirjoittaja on kemiläinen kirjailija, jolta on ilmestynyt mm. matematiikka-aiheiset lastenkirjat *Ansku ja Armas ynnä matikka-täti* (2013) ja *Ansku ja Armas Piin pauloissa* (2015). Tämä satu on kirjoitettu Oulun MAOL:n päiviä 1.–2.10.2016 varten.

”Ei puhuta koulunumeroista.” Ykkönen palautti päiväjärjestyksen. Ruvetaan leikkimään!”

Kaikki numerot hyppäsivät ilmaan ja huusivat: ”Kannatetaan, kannatetaan!” Viitonen ponkaisi kuutosen ympyrälle ja alkoi keinua. Kohta kaikki viitokset keinuivat kuutosilla. Ykkönen huusi toisille ykkösille, että asento horisontaaliin! Yks! Kaks! Muut ykköset katsoivat hölmistyneinä. He muistivat olevansa vertikaaleja. Siis vaakatasoon! Yks! Kaks! Ykkönen komensi muodostamaan matojonon. Muut numerot kiljuivat, kun ykköset kiemurtelivat ja luikertelivat edestakaisin.

Kolmoset kääntyivät konttaamaan ja kakkoset hyppäsivät kyytiin ja kohta he laukkasivat laskuvihon sivuille. Neloset kiipesivät seiskojen poikkiviivalle ja ponnistivat ylös lipan päälle tähyämään ulapalle kuin merimiehet laivansa mastossa. Kahdeksikot kirjoittivat yhdeksikön yläympyrään, että kaikki lapset pitävät matematiikasta. Sitten jokainen tarttui oman yhdeksikönsä jalkaan ja alkoi heilutella sitä niin kovasti, että yhdeksiköt olivat tikahtua nauruunsa.

Missä oli nolla! Huhuu! Täällä! Eipäs kun täällä! Joka puolelta kuului nollan iloinen huhuilu. Ensin tuolta nurkan takaa. Sitten täältä! Pöydän alta! Nurkasta ja naulakon alta! Pian lattialla vilisteli nolla toisensa perään. Ja kaikilla oli hauskaa. Vähän aikaa. Mutta leikkimiseenkin kyllästyy. Numerot pitkästyivät ja tarvitsivat oikeaa toimintaa.

”Nyt tarvitaan lapsia!” ykköset huusivat kuorossa ja nousivat seisomaan. Kakkoset väsyivät kolmosilla ratsastamiseen eivätkä kolmoset halunneet enää olla hevosia. Keinuminen pyöritytti viitokset ja kuutoset. Lippujen heiluttelu väsytti kahdeksikot ja yhdeksikköjen päät olivat pyörällä ja maha kipeä kikattamisesta. Seiskojen lippa alkoi painua vinoksi nelosten painosta. Kaikki huusivat, että lapsia tarvitaan. Tarvitaan kokonainen luokkahuoneellinen lapsia!

Pulleat nollat olisivat halunneet vielä pyöriä nurkasta nurkkaan, mutta lopettivat heti, kun kuulivat, että lapsia huudettiin. Pyöreät, pehmeät nollat rakastivat

lapsia. Niistä oli ihanaa, kun lapset piirsivät numeroita ja aina nollan kohdalla heille tuli mieleen aurinko tai kuu tai puolukka tai mustikka. Vain vaivoin lapset malttoivat olla värittämättä nollaa. Joskus joku piirsi nollalle hymysuun tai nauravat silmät.

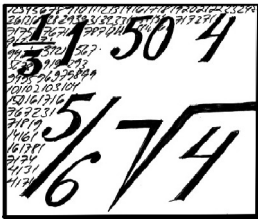
Sitten lapset ryntäsivät luokkaan. He kirjoittivat ensin sivun täyteen nollia. Toisen sivun täyteen ykkösiä, seuraavan kakkosia. Yhteensä he kirjoittivat täyteen kymmenen sivua, sillä jokainen numero sai ikion sivunsa. Numerot ovat helppoja, lapset tuumivat. Ei laskeminen voi olla vaikeaa, kun täytyy opetella vain kymmenen numeroa!

Ensin he kirjoittivat $1 + 1$ ja saivat 2. Sitten he vähensivät kolmesta yhden ja saivat kaksi. Nelosesta he vähensivät kaksi ja saivat kaksi. Seitsemän miinus viisi oli kaksi. Yhdeksän miinus seitsemän oli kaksi. Kaksi miinus nolla oli kaksi. Kuudesta kun vähensi neljä sai kaksi. Kun nollaan lisäsi kaksi sai kaksi. Kun kahteen lisäsi nollan sai kaksi. Kaksi, kaksi ja kaksi!

Kakkonen tunsu itsensä tärkeäksi. Hän oli niin iloinen, että unohti entiset, ikivanhat silmukat ja kiharat ja koukerot. Hän oli tyytyväinen sellaisena kuin oli. Sitä paitsi hän huomasi: kaunis kaari, terävä kulma ja vaakatasoinen alaviiva. Horisontaali alaviiva! Muut numerot nyökyttelivät ja hymyilivät toisilleen. Nolla muutui naurusta soikeaksi.

Sitä paitsi, kakkonen huomasi. Minut on helppo kirjoittaa. Lasten piti ennen harjoitella koukeroita ja silmukoita niin kauan, että itse asia saattoi kokonaan unohtua!

Laskutoimitukset olivat tehneet tehtävänsä. Näin matematiikka oli muuttanut surullisen kakkosen onnelliseksi kakkoseksi. Aina, kun lapset kirjoittivat kakkosen, hekin tulivat onnellisiksi ja muistivat, että jokaisen on hyvä olla sellaisena kuin on, vaikka aika ajoin vähän muuttuukin. Kasvaa, lihoo, laihtuu. Joskus lähtee hammas, jollakulla on punainen tukka, jollakulla toisella jonkin muun väriinen. Aina kuitenkin jokainen on joku!



Kuinka tarkka on riittävän tarkka?

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Erilaisiin arviointiongelmiin törmää päivittäin: kaupassa on ihan kiva tietää, mikä ostosten loppusumma tulee suurin piirtein olemaan, tai jos kassalla summa vaihtuu merkittävästi, niin on mukava tarkistaa se. Harvemmin ainakaan itse lasken ostoksia sentin tarkkuudella. Yleensä pyörästän lähimpään euroon, tai yritän löytää kuitista asioita, joiden summa olisi suurin piirtein tasoa kymmeniä euroja, esimerkiksi siis bataatit 4,28 euroa ja juusto 5,95 euroa summautuvat karkeasti ottaen kymppiin. Myös niin, että pyöristetään lähimpiin euroihin ja sitten lasketaan yhteen, saadaan näille ostoksille kymppi loppusummaksi: eli bataatit 4 euroa ja juusto 6 euroa on yhteensä 10 euroa. Tarkka summahan olisi $4,28 + 5,95 = 10,23$, mutta hyvin harvoin tämä tarkkuus on tarpeen.

Pyöristysongelmaan olen törmännyt myös tutkimusprojekteissa: Jos halutaan vaikka tietokoneella piirtää kuvaajia erilaisten funktioiden ja lukujonojen käytöksestä, niin mikä tarkkuus riittää? Miten tiheästi pitää funktion arvoja laskea, jotta tietokoneen kuvaaja antaisi hyvän käsityksen funktion käytöksestä? Mistä kohtaa voi irrationaaliluvun desimaaliesityksen katkaista menettämättä älytöntä määrää tarkkuudesta? Näihin kysymyksiin vastaukset tietenkin riippuvat ainakin funktiosta, irrationaaliluvun luonteesta ja suuruudesta sekä vaaditusta tarkkuudesta.

Olen itse käyttänyt taannoin aikaa arvioidakseni, miten monta desimaalia tarvitaan Riemannin zeta-funktion nollakohtien esityksistä, jotta ns. Lin kertomien kuvaaja pysyy hallinnassa. Toisessa vaakakupissa

oli siis laskenta-aika, toisessa puolestaan kuvaajan luotettavuus. Jouduimme arvioimaan esimerkiksi termin

$$\left(\frac{\rho}{\rho - \tau}\right)^n$$

käytöstä, kun τ on pieni vakio, n saa olla varsin iso ja ρ on Riemannin zeta-funktion nollakohta. Hyvin nopeasti kävi ilmi, että jos ρ on itseisarvoltaan iso, ei tarvita kovinkaan monen desimaalin tarkkuutta. Jos taas ρ on pieni, on virhe ihan valtava, jos n on suuruudeltaan vaikka sata. Päädyimme käyttämään kaksijakoista lähestymistapaa: suurimmalle ρ

Tässä tekstissä on tarkoitus parin esimerkin kautta näyttää, miten esimerkiksi voi laskujen lopputuleman tarkkuutta arvioida.

Luvun $\frac{1}{e}$ tarkkuus

Oletetaan tietävämmme luvun e desimaalit tarkkuudella ϵ , eli toisin sanoen, käytämme luvulle e approksimaatiota θ , jonka suuruudesta tiedämme, että $|\theta - e| \leq \epsilon$. Jos esimerkiksi $\theta = 2,7$, niin $|\theta - e| < 0,018282$, jolloin luku ϵ voi olla esimerkiksi 0,018282.

Nyt voimme laskea todellisen osamäärän ja arvio-osamäärän erotuksen:

$$\left|\frac{1}{e} - \frac{1}{\theta}\right| = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{e} = \frac{e - \theta}{e\theta} < \frac{\epsilon}{e\theta}.$$

Esimerkissämme olisi siis

$$\frac{e - \theta}{e\theta} = \frac{e - 2,7}{e\theta} < \frac{0,018282}{2,7^2} < 0,00251,$$

eli nyt tarkkuus jopa parani!

Mikäli luvun e sijaan olisimme olleet kiinnostuneita Eulerin vakion $\gamma \approx 0,5772$ arvioinnista vaikkapa luvulla 0,58, olisi käynyt heikomminkin: Alkuperäinen arviotarkkuus olisi ollut suurin piirtein $0,58 - 0,5772 = 0,0028$, mutta osamäärien tarkkuus olisikin ollut

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{0,58} \approx 0,0083,$$

eli tarkkuus olisi heikentynyt. Selitys tälle on se, että kun lukua ρ arvioidaan luvulla θ ja arvion tarkkuus on ϵ , pätee

$$\left| \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\theta} \right| = \frac{|\theta - \rho|}{\theta\rho} < \frac{\epsilon}{\theta\rho},$$

joka on pienempi kuin ϵ , jos $\theta\rho > 1$, ja suurempi kuin ϵ , jos $\theta\rho < 1$, eli alle ykkösen olevien lukujen osamäärien arviot ovat heikompia kuin lähtöarvio, yli ykkösen puolestaan parempia.

Tämä on luonnollista: jos tarkkuus heikkenisi, kun jakajat olisivat yli yhden, tarkoittaisi se, että lopputulos olisi suhteellisesti todella heikko: erotus olisi pieni ja virhe verrattain iso.

Suhteellinen virhe

Verrataan vielä virheen kokoa tuloksen kokoon: onhan ihan eri asia, jos virhe on vaikkapa kymmenen suuruusluokkaa, jos tuloksen koko on biljoona tai jos tulos onkin esimerkiksi sadasosa.

Virheen olemme äsken todenneet olevan korkeintaan

$$\frac{\epsilon}{\theta\rho}.$$

Tuloksen koko on $\frac{1}{\rho}$. Suhteellinen virhe on siis näiden osamääriä

$$\frac{\frac{\epsilon}{\theta\rho}}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\epsilon\rho}{\theta\rho} = \frac{\epsilon}{\theta},$$

eli myös suhteellinen virhe käyttäytyy samoin kuin absoluuttinen virhe: yli ykkösen olevien lukujen osamäärien arvio on parempi, alle ykkösen olevien taas huonompi.

Luvun π desimaalit

Ajatellaanpa, että tehtävänä on laskea π^{10} ykkösen tarkkuudella, eli löytää sellainen kokonaisluku n , että $|n - \pi^{10}| < 1$. Selvästikään ei riitä arvioida, että π on kolme, sillä

$$3^{10} = 59049$$

ja

$$3,1^{10} \approx 81962,8$$

ja π^{10} on vielä tätäkin suurempi. Yksi keino olisi tietenkin testata: Todetaan, että

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338 \dots$$

Tästä voisi sitten kokeilla, että riittäisikö vaikkapa kuusi desimaalia:

$$3,141592^{10} \approx 93647,85$$

ja

$$3,141593^{10} \approx 93648,15.$$

Nyt kävikin hyvä tuuri, ja tarkkuus on riittävä. Tämä tehtävä olisi siis nopeasti ohi kokeilemalla, mutta entä jos haluttaisiinkin vaikka laskea π^{100} kokonaisluvun tarkkuudella? Haarukointi ja testaus voisi viedä aika paljon pidempään.

Tarkastellaan nyt kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi alkuperäistä ongelmaa. Ajatellaan, että käytetään luvulle π likiarvoa θ , jolloin $|\pi - \theta| = \epsilon$. Kuinka pieni ϵ on varmasti riittävän pieni?

Lasketaan erotus

$$|\pi^{10} - (\pi \pm \epsilon)^{10}|.$$

Aloitetaan tilanteesta $|\pi^{10} - (\pi + \epsilon)^{10}|$. Koska $\pi + \epsilon > \pi$, voidaan kirjoittaa $(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10}$. Esitellään nyt erilaisia tapoja lähestyä ongelmaa. Tilanne, jossa on miinus plus-merkin tilalla voidaan käsitellä samoin, ja välillä mahdollisesti jopa hieman helpommin.

Sulut auki

Yksi vaihtoehto olisi kertoa sulut auki. Yleensä en ole tämän lähestymistavan fani, mutta nyt se kuitenkin toimii.

$$(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10} = \sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \epsilon^k \pi^{10-k}.$$

Termejä on nyt yhteensä $2^{10} - 1 = 1023$ kappaletta. Jotta näihin saa mitään otetta, pitää olettaa jotain luvun ϵ suuruudesta suhteessa luvun π suuruuteen. Helppo oletus olisi vaikkapa olettaa, että $\epsilon < \frac{1}{\pi}$, mutta nyt esimerkiksi termille

$$\binom{10}{5} \epsilon^5 \pi^5$$

ei saa parempaa arviota kuin $\binom{10}{5}$, mikä ei missään nimessä riitä. Oletus $\epsilon < \frac{1}{\pi^{10}}$ voisi toimia paremmin. Nyt lauseke muuttuisi muotoon

$$\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \epsilon^k \pi^{10-k} < \sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \pi^{10-10k-k},$$

mutta tämäkään ei ihan riitä, sillä

$$\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \pi^{10-10k-k} > \binom{10}{1} \pi^{10-10-1} = \frac{10}{\pi}.$$

Näin voi jatkaa ja yrittää lisätä oletuksia luvun ϵ suuruudelle, kunnes arvio on lopulta riittävän pieni. Lähestymistapa on melkoisen hidas ja kaikkien termien hyvä arviointi ei välttämättä ole ihan triviaalia, vaikkakin binomikerrointen kohdalla usein onnistuu. Parempi on lähteä hieman toisesta suunnasta: kunhan

$$\binom{10}{k} \pi^{10-k} \epsilon^k > 2 \binom{10}{k+1} \pi^{10-k-1} \epsilon^{k+1},$$

eli

$$\pi > 2\epsilon \frac{10-k}{k+1},$$

joka on varmasti tosi (sillä tiedämme jo varmasti testailujen pohjalta, että on vaadittava $\epsilon < \pi^{-10}$), huomaamme, että

$$2\epsilon \frac{10-k}{k+1} < 20\epsilon < \frac{20}{\pi^{10}} < \pi,$$

jolloin koko summaa voi arvioida geometrisena summaksi:

$$\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} \epsilon^k \pi^{10-k} < 2 \binom{10}{1} \pi^{10-1} \epsilon = 20\pi^9 \epsilon.$$

Nyt tiedämme, että

$$|(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10}| < 20\pi^9 \epsilon < 1,$$

kun $\epsilon < \frac{1}{20\pi^9}$. Kokonaislukupotensseille tämä tapa ei ole hullumpi, mutta yleisille funktioille mahdollisesti jopa mahdoton (aina ei ole sulkuja, jotka voisi kertoa auki, ja vaikka olisi, ei tapa välttämättä toimi arvioinnissa).

Ottaen tekijän

Tätä ongelmaa voimme lähestyä myös tekijän ottaen. Käytetään kaavaa

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$

jolloin saadaan

$$(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10} = (\pi + \epsilon - \pi) \sum_{k=0}^9 \epsilon^k \pi^{9-k} = \epsilon \sum_{k=0}^9 \epsilon^k \pi^{9-k}.$$

Tämä on paljon helpompi esitys kuin sulut aukikerroksen saatu. Nyt nimittäin huomaamme välittömästi, että summa muodostaa geometrisen jonon, jonka suhdeluku on $\frac{\epsilon}{\pi}$. Summa ei ainakaan pienene, jos kasvatamme sen äärettömän pitkäksi:

$$\epsilon \sum_{k=0}^9 \epsilon^k \pi^{9-k} < \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \pi^{9-k} = \epsilon \pi^9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{\pi}\right)^k.$$

Muutos äärettömän pitkäksi sarjaksi tehtiin, jotta summa olisi helpompi laskea. Nyt

$$\epsilon \pi^9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{\pi}\right)^k = \frac{\epsilon \pi^9}{1 - \frac{\epsilon}{\pi}} = \frac{\epsilon \pi^{10}}{\pi - \epsilon} < 1,$$

kun

$$\epsilon \pi^{10} < \pi - \epsilon,$$

eli

$$\epsilon < \frac{\pi}{\pi^{10} + 1},$$

eli aavistuksen luvun π^9 käänteislukua pienempi luku riittää, varmuudella esimerkiksi $\frac{1}{\pi^{10}}$.

Derivoiden ja integroiden

Yritetään nyt kuitenkin hieman toisenlaista, ihan yhtä suoraviivaista tapaa lähestyä ongelmaa: kirjoitetaan erotus derivaatan integraalina:

$$(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10} = \int_{\pi}^{\pi+\epsilon} 10x^9 dx.$$

Koska integraalin suuruus on korkeintaan integroitavan funktion maksimiarvo integrointivälillä kertaa integraalin pituus, saadaan

$$\int_{\pi}^{\pi+\epsilon} 10x^9 dx \leq 10\epsilon \max_{\pi \leq x \leq \pi+\epsilon} x^9 = 10\epsilon(\pi + \epsilon)^9.$$

Seuraava ongelma onkin arvioida siedettävällä tarkkuudella tämä lauseke. Toisin sanoen, arvioida lukua π jotenkin mukavasti ylöspäin. Jos arviosta haluaa selvittää ilman laskinta, voi todeta vaikkapa, että $\pi + \epsilon < 3,15$, kun esimerkiksi $\epsilon < \frac{1}{1000}$ ja $3,15^2 < 10$, joten

$$(\pi + \epsilon)^{10} - \pi^{10} \leq 10 \cdot \epsilon \cdot 10^4 \cdot 3,15 = 315000\epsilon.$$

Jos tämä on alle yhden, niin myös alkuperäinen lauseke on varmasti alle yhden, joten kirjoitetaan

$$315000\epsilon < 1,$$

eli

$$\epsilon < \frac{1}{315000} \approx 0,00000317.$$

Vastaavasti voidaan laskea myös erotus $\pi^{10} - (\pi - \epsilon)^{10}$. Tämä jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Kannattaa huomioida, että vaikka näin saadaan vaadittu tarkkuus laskuihin, ei tämä suoraan esimerkiksi kerro, että π^{10} ja $(\pi - \epsilon)^{10}$ pyöristyisivät samaan kokonaislukuun, ei vaikka vaadittaisiin paljon parempikin tarkkuus, sillä vaikka lukujen erotus olisi kuinka pieni tahansa, voisivat ne silti sijaita eri puolin jotain muotoa $k + \frac{1}{2}$ olevaa lukua, missä k on kokonaisluku. Jos siis haluttaisiin tarkastella mihin kokonaislukuun jokin luku pyöristyy, vaadittaisiin vielä lisää työtä.

Solmu 3/2016

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, postdoctoral fellow, Basque Center for Applied Mathematics

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Petri Rosendahl, assistentti, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

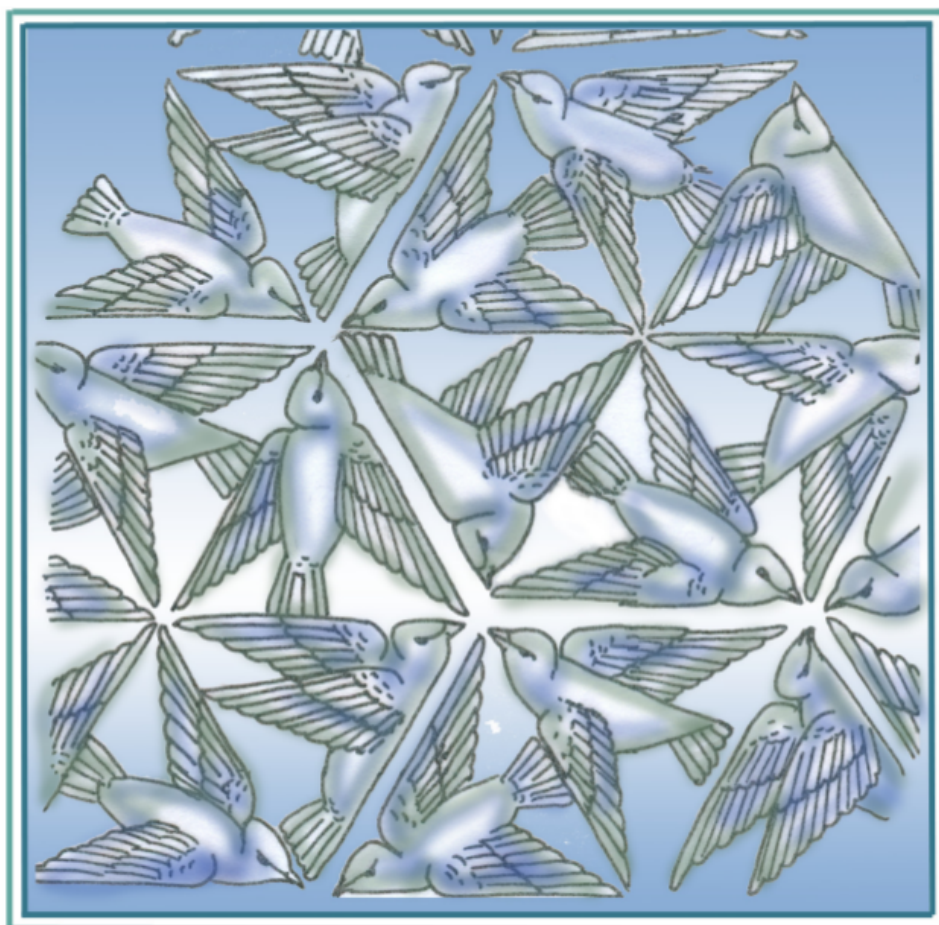
Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 1/2017 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 2.1.2017 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Kansikuva: Mukailtu vektorigrafiikalla vanhasta maisemapostikortista Königsbergistä.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi