

Solmu

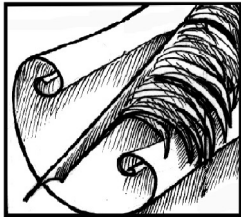
Matematiikkalehti
2/2016

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Pala palalta (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Matikkaluotsi, avuksi oppimisvaikeuksiin (Marjatta Näätänen)	5
Symbolisesti metsässä (Pekka Alestalo)	7
Valintaperusteiden kertomaa (Jouni Pursiainen)	10
Tasograafit ja väritykset: ratkaisuita ongelmiin (Esa V. Vesalainen)	13
Pepin keppihevoseet, toisen asteen yhtälö ja Newton (Samuli Siltanen)	16
Tunnuslukujen keski- ja epämääräisyyksiä tutkailemassa (Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja Kimmo Vehkalahti)	18
Differentiaaliyhtälöitä (Lehtori K.)	21
Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailut on taas käyty	24
Pronssia Buzenista!	26



Pala palalta

Pääkirjoitus

”Pala palalta norsukin syödään” rohkaisi äitini minua kerran ison koenipun kanssa taistellessani. Minulla sen paremmin kuin hänelläkään ei ole kokemusta norsun syömisestä, mutta vertaus oli silti selkeä: joskus on parempi keskittyä pieniin asioihin ja unohtaa kokonaisuus. Koepaperinipun kanssa menee helposti toivo, jos pohtii, että vielä on kolmesataa paperia jäljellä, tai jos erehtyy miettimään, että kuusi seitsemäsosaa jäljellä, yksi seitsemäsosa takana. Sen sijaan, jos vain miettii edessä olevaa paperia, ja iloitsee sen siirtyessä tarkastettujen pinoon, tai iloitsee edellisen tunnin aikana hyvin tehdystä työstä, tuntuu homma paljon mahdollisemmalta.

Väitöskirjaohjaajani professori Jutila varoitti, ettei pidä antaa yksityiskohtien ja epäolennaisuuksien hämätä ja viedä huomiota liiallisesti. Yksityiskohdat ja epäolennaisuudet eivät tietenkään yleensä ole sama asia. Minulle hän sanoi, että ei pidä tarttua lillukanvarsisiin. Viesti on selvä. Ei pidä ihmetellä liikaa kaikkea epäolennaista. Eräälle toiselle yhtä aikaa väitöskirjaa tehneelle oppilaalleen hän puolestaan kertoi yksityiskohtien häiritsevän asiantuntijoita. Tämä voi aluksi tuntua hieman merkilliseltä, ehkä jopa epäloogiselta, mutta tarkemmin ajateltuna tämäkin on ihan loogista: jos todistuksessa tai tutkimusartikkelissa on kaikki mahdolliset laskujen yksityiskohdat ja välivaiheet näkyvissä, on teksti ja tulokset mahdollisesti suhteellisen vähällä vaivalla jopa niiden verifioitavissa, jotka eivät juuri kyseisen alan asiantuntijoita ole. Sen sijaan kokonaisuus häviää. Todistusten rakenteita ei näy, ideat peittyvät epäolennaisilla välivaiheilla. Tällöin vähemmän on

todellakin enemmän tiettyyn pisteeseen asti. Jos kaikki yksityiskohdat ja välivaiheet poistetaan, jää jäljelle vain todistuksen runko, hahmotelma, josta taas asiantuntija saa kyllä idean irti, ja voi ehkä arvioida todistustekniikan realistisuutta kyseiseen ongelmaan, mutta myös sudenkuopat ovat piilossa, ja lähes kaikki todellinen työ jää lukijalle.

Olen mukana tutkimusprojektissa, joka lähti liikkeelle yksityiskohdista, suorastaan lillukanvarsista. Ei siis mistään suuresta visiosta tai ideasta, vaan pikemminkin esimerkistä. Tarvitsimme täysin toiseen tutkimusprojektiin esimerkkejä. Tehtävä delegoitui minulle. Lähdin kehittämään niitä ainoalla mieleeni juolahtaneella keinolla, sain aikaan kasan esimerkkejä ja lähetin ne projektin muille jäsenille. En pitänyt niitä mitenkään merkityksellisinä, vain mukavina esimerkkeinä ja mahdollisesti sopivina numeeriseen laskentaan. Eräs toinen meistä jatkoi, todisti, että esimerkit olivat ainoat tietyt ehdot toteuttavat funktiot. Tämän jälkeen hänen päässään napsahti (hyvällä tavalla), ja hän onnistui yhdistämään näin generoidun funktiojoukon toiseen tunnettuun funktiojoukkoon. Yhtäkkiä meillä olikin projekti, joka oli kunnianhimoisempi kuin alkupeäinen, josta kriittisimmät vaiheet oli vahingossa tehty, ja jota kukaan meistä ei koskaan olisi visioinut ennen kuin osatulokset ja lillukanvarret muodostivat viitoitetun reitin koko tulokselle.

Tasapaino on epäilemättä jossain yksityiskohtien ja suurien visioiden välissä, vähän kuin sienestäessä tai marjastaessa: on ensin huomioitava metsätyyppi (avokallio on huono paikka herkkutattien poimimiseen,

mutta sen jälkeen kun metsätyyppi on oikea, kannattaa tuijotella maata, sinne lilukanvarsien väliin, ja katsoa, josko siellä niitä sienä olisi). Suuret visiot eivät sisällä niitä yksityiskohtia, joista tulokset on muodostettu.

Yksityiskohdat ovat yksinään vain yksityiskohtia.

Hyvää kesää!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteella

`juha.ruokolainen(at)helsinki.fi`

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Kombinaatio-oppia

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

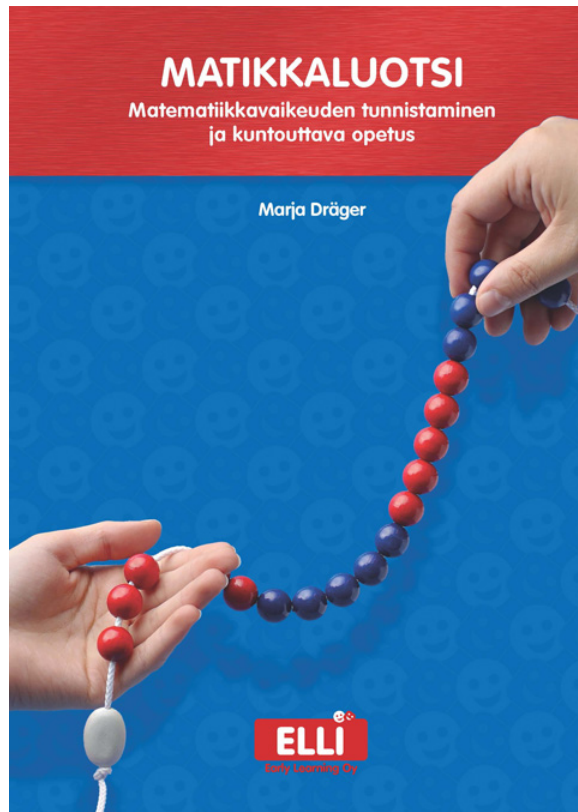
Lukuteorian diplomitehtävät



Matikkaluotsi, avuksi oppimisvaikeuksiin

Marjatta Näätänen
Helsingin yliopisto

Marja Dräger: Matikkaluotsi – Matematiikkavaikeuden tunnistaminen ja kuntouttava opetus. Elli Early Learning Oy, 2015.



Lukivaikeuksia on hoidettu jo pitkään, mutta myös matematiikan oppimisvaikeuksia voidaan hoitaa

Arviot matematiikkakuntoutusta tarvitsevien oppilaiden määrästä vaihtelevat n. 10 % molemmin puolin eri tasoilla alkuopetuksessa. Marja Drägerin kirjalla on siis paitsi yksilöiden, myös yhteiskunnan kannalta merkitystä. Tätä korostaa Drägerin 20 vuoden kokemuksen tulos: ensimmäisinä kouluvuosina annetun tuen seurauksena oppilaat eivät enää tarvitsekaan tukea ylemmillä luokilla vaan saatuaan perustason kuntoon voivat edetä muun luokan mukana. Kuntouttavan opetuksen kesto on lyhin, jos se voidaan aloittaa varhain, ja matematiikan kumuloituvuuden takia on aikuisenkin työsattävä jopa ensimmäisen luokan oppisisältöjä, jos peruskäsite, lukukäsite hallitaan puutteellisesti.

Drägerin kirja käsittelee yksityiskohtaisesti neljän ensimmäisen luokan matemaattisten perustaitojen kuntouttavaa opetusta ja esittelee käytetyt välineet. Kuntouttavaa opetusta matematiikan keskeisistä sisällöistä on annettu 1–6 luokan oppilaille ja Drägerin kokemuksen mukaan melkein kaikkia voidaan auttaa. Opetus on yksilöllistä, kokemus on osoittanut, ettei 2–3 oppilaan ryhmäopetuksesta ollut hyötyä. Etenemisen tahiti määräytyy lapsen mukaan ja kuntoutusta jatketaan, kunnes lapsi pääsee luokkansa tasolle ja pystyy jatkamaan matematiikan opiskelua muun luokan mukana – nyt ilman tukea. Alussa tulisi kehittyä lukumäärän säilyvyys; lukukäsite, sitten peruslaskutoimitukset. Läh-

tötaso kartoitetaan ja oppilasta havainnoidaan testin aikana. Dräger kertoo, että oppimisen edistyessä opettaja voi nähdä lapsen kehonkielestä ryhdin paranemisen ja katsekontaktin, matematiikka muuttuu ymmärrettäväksi ja mielekkääksi aineeksi, arvosanat nousevat. Jatkokoulutuksen ja jatko-opintojen este väistyy samoin kuin mahdollinen syrjäytymisen riski.

Matematiikan merkitystä mietti myös Erik Häggman. Hän tutki vuosien 2000–2005 opiskelijavirtatilastoista peruskoulun päättäneiden sijoittumista koulutukseen ja työelämään ja löysi kymmenien tuhansien ”kadonneiden” nuorten joukon, joka ei ollut opinnoissa, töissä, tai muussa vastaavassa. Hän epäili, että suurin syy saattoi olla riittämätön matematiikan pohja. Tuleehan kaikissa ammattiopinnoissakin vastaan symbolitason asioita, kuten matematiikan kaavoja.

Matematiikan rakenteen käyttö opetuksen perustana

Kuntouttavassa opetuksessa matematiikan oppimisvai-

keuksia työstetään konkreettisten välineiden avulla. Itse tekeminen ja oivallus auttavat ymmärtämään, miten matematiikan eri asiat liittyvät toisiinsa; koko ajan käytetään perustana opetuksessa matematiikan rakennetta. Esimerkiksi lukualuetta laajennettaessa käytetään analogiaa.

Ymmärrystä seuraa motivaatio

Tulos ymmärrystä seuraavasta motivaatiosta on saatu Suomenkin tutkimuksissa (Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012, toim. Jari Metsämuuronen, 2013), mutta silti edelleen näytetään uskottavan, että motivoinnista on aloitettava – mutta itse asiassa siis matematiikan oppiminen riittää motivoimaan. Saman olen huomannut Solmun matematiikkadiplomien tehtävistä: omalle tasolle sopivat älylliset haasteet kiinnostavat oppilaita ja onnistumisesta saatu ilo kannustaa jatkamaan.

Verkko-Solmun artikkeleita matematiikan historiasta

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/yhteiskunta.html löytyviä artikkeleita:

Matti Lehtinen: Matematiikkaa muinaisuudesta – Itämaan tietäjien laskentoa

Johan Stén: Bernoullien merkillinen tiedemiesdynastia

Matti Lehtinen: Miten integroitiin, kun ei vielä osattu integroida?

Matti Lehtinen: Suomen matematiikan tähtinimet

Matti Lehtinen ja Vadim Kulikov: Emmy Noether mursi sukupuolirajan

Matti Lehtinen: Suomen matematiikan pioneereja

Eero Raaste: Äidinkielenä luvut – Srinivasa Ramanujanin syntymästä 120 vuotta

Vadim Kulikov: Ensimmäisten kuuluisien naismatematiikkojen henkilökuvia, Sofia Kovalevskaja

Matti Lehtinen: Matematiikka esillä Helsingin yliopiston museossa

Matti Lehtinen: Kaksi syntymäpäiväsankaria

Antti Rasila: Mercatorin kartta

David Acheson: 1089 ja muita matemaattisia yllätyksiä

Mika Koskenoja: Sattuman matematiikka I – klassinen todennäköisyys

Jorma Merikoski: Kompleksiluvuista ja kvaternioista

Marjatta Näätänen: Naisten matematiikan opiskelusta Ranskassa vuosina 1801–2001

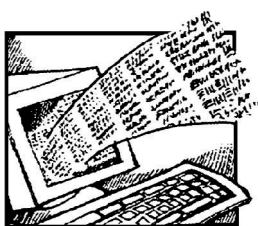
Kalevi Suominen: Diofantoksen ongelmat

Teemu Mehtiö: Tangram

Janis Künnap: Pythagoraan lause

Matti Lehtinen: Roomalaiset numerot – laskentoa ilman kertotaulua

Matti Lehtinen: Matematiikan sanoja



Symbolisesti metsässä¹

Pekka Alestalo

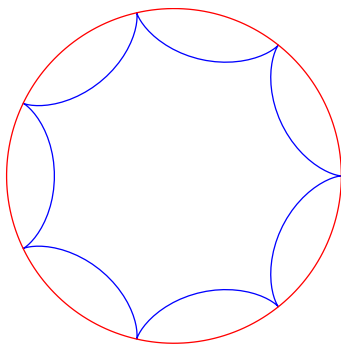
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
matematiikan ja systeemianalyysin laitos
pekka.alestalo@aalto.fi

Lasketaanpa integraali

Sykloidit ovat tasokäyriä, joiden kaarenpituuden laskeminen johtaa integraaliin

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(nx)} dx, \quad (1)$$

kun $n \geq 1$ on kokonaisluku.



7-kärkinen hyposykloidi ympyrän sisällä.

Integraalia ei löydy MAOLin taulukkokirjasta, joten kokeillaan symbolisella laskimella. Esimerkiksi TI-nspire CAS -laskimella ja Casion ClassPad 330 -laski-

mella integraalin likiarvoksi saadaan 5,656854, jos luvulle n annetaan konkreettinen lukuarvo. Tulos näyttää siis olevan riippumaton luvusta n .

Integraalien tarkkoja arvoja tai tulosta yleisellä n laskimet eivät pysty muodostamaan, joten otetaan käyttöön järeämmät symbolisen laskennan työkalut: Mathematica ja Maple. Valitaan ohjelmalle aluksi konkreettinen lukuarvo, vaikkapa $n = 10\,000$.

Mathematican syntaksilla kirjoitetaan

```
Integrate[Sqrt[1-Cos[10000 x]],{x,0,2 Pi}]
```

Kolmen ja puolen minuutin kuluttua ohjelma antaa vastauksena

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(10000x)} dx = \frac{1}{1250\sqrt{2}}.$$

Lasku oli ilmeisesti hankala, koska yleensä integraalin arvo saadaan, jos ei nyt aivan silmänräpäyksessä, niin ainakin parissa sekunnissa. Lisäksi tuloksen likiarvo ei ole lähelläkään laskinten antamaa vastausta.

Tämä herättää sen verran epäilyksiä, että lasketaan vielä Maplilla. Käskyllä

```
> int(sqrt(1-cos(10000*x)),x=0..2*Pi)
```

¹Otsikko on väännös kirjan [4] nimestä.

saadaan 35 sekunnin kuluttua vastaus

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(10000x)} dx = 4\sqrt{2},$$

jonka likiarvo on sama kuin laskinten antama tulos.

Vielä yksi epätoivoinen yritys: Ilmainen symbolisen laskennan ohjelma Sage [5] tarjoaa integraalin arvoksi nolaa, mikä ei tietenkään ole positiivisen funktion integraalille mahdollista.

Tässä on nyt selvästi jotakin hämärää.²

Symbolista laskentaa

Symbolisen laskennan vaaroista löytyy varoittavia esimerkkejä internetin keskustelupalstoilta, blogeista [2] ja myös matemaatikkojen tieteellisistä lehdistä [1]. Opiskelijoille ja opettajille yksi tuttu esimerkki on kevään 2015 pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista, jossa osa laskimista ei löytänyt tavallisella solve-käskyllä yhtälön $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$ ratkaisua $x = 0$. Laskinten antama tulos on tietysti puutteellinen, mutten uskalla väittää, että se on täysin päätön. Myös tämän kevään pitkän matematiikan tehtävässä 12 laskinratkaisua yrittävä kokelas törmäsi ongelmaan, joka on itse asiassa hyvin lähellä yllä laskettua integraalia. Pалаan tähän kirjoitukseni lopussa.

Yllä olevissa laskuissa käytettiin kahta tämän hetken johtavaa symbolisen laskennan ohjelmaa: (aakkosjärjestyksessä) Maplea ja Mathematicaa. Niiden kaupalliset versiot maksavat yli 2000 euroa, mutta suppeampia opiskelijaversioita myydään n. 100 euron hintaan. En ole testannut laskuja kaikilla ylioppilaskirjoituksissa käytettävillä laskimilla, mutta jos ym. hinnoilla on mitään katetta, niin on vaikea odottaa parempia tuloksia. Todettakoon lisäksi, että Mathematican ”verkko-versio” Wolfram-alpha ei saa yllä olevasta integraalista mitään järkevää tulosta tunnin sisällä.

Lasketaan käsin

Mikä vastaus on oikein? Ainoa tapa selvittää asia on laskea käsin.

Itse asiassa integraalin laskeminen yleisellä parametrilla n on lähes yhtä helppoa kuin arvolla $n = 1$. Jokainen 1. vuoden yliopistomatematiikan integrointisulkeiset kunnialla selvittänyt näkee nimittäin heti, että integraali voidaan laskea käyttämällä kaksinkertaisen kosinin kaavaa seuraavalla tavalla: Koska

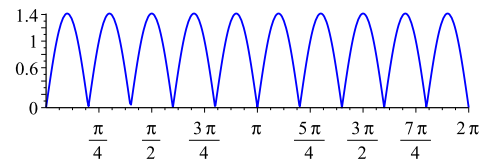
$$\cos(nx) = \cos(2(nx/2)) = 1 - 2\sin^2(nx/2),$$

niin

$$1 - \cos(nx) = 2\sin^2(nx/2).$$

Tästä seuraa, että

$$\sqrt{1 - \cos(nx)} = \sqrt{2}\sqrt{\sin^2(nx/2)} = \sqrt{2}|\sin(nx/2)|.$$



Kuvaaaja arvolla $n = 10$.

Ottamalla huomioon lausekkeen $\sin(nx/2)$ jaksollisuuden ja merkkivaihtelun välillä $x \in [0, 2\pi]$ saadaan integraalin arvoksi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(nx)} dx &= \sqrt{2}n \int_0^{2\pi/n} \sin(nx/2) dx \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 1$. Maple oli siis tällä kertaa oikeassa!

Miksi Mathematica antaa väärän vastauksen? Siihen on vaikea vastata, koska kaupallisten ohjelmistojen koodit eivät ole julkisia. Tuloksia vertaamalla huomataan kuitenkin, että vastausten suhde on 10000, joten Mathematican vastaus on vain yhden sini-nyppylän pinta-ala. Ohjelman dokumentaatioissa mainitaankin tilanteesta, jossa liian monessa palassa määritellyn funktion integroimista voi (yrittää) helpottaa esimerkiksi apukäskyllä

`MaxPiecewiseCases = Infinity.`

Tällä ei kuitenkaan näytä olevan vaikutusta kirjoituksen aiheena olevan integraalin kohdalla. Käyttäjän kannalta pidän kuitenkin suurimpana ongelmana sitä, että ohjelma antaa väärän vastauksen varoittamatta lainkaan mahdollisesta ongelmasta. Pienentämällä lukuarvoa 10000 huomataan, että Mathematican vastaus muuttuu oikeaksi jossakin lukujen 1000 ja 10000 välillä.

En kuitenkaan antaisi edes Maplelle puhtaita papereita kyseessä olevan integraalin kohdalla. Kun ohjelmaan syöttää integraalin (1) symbolisella positiivisen kokonaisluvun arvolla n

`> assume(n, posint)`

niin oikea vastaus $4\sqrt{2}$ tulee silmänräpäyksessä, vaikka konkreettinen tapaus $n = 10000$ kestää yli puoli minuuttia! Myös Maplen integroimisalgoritmeissa näyttää olevan vielä toivomisen varaa. Mathematican kohdalla laskut yleisellä n menevät vielä hankalammiksi.

²Laskut on tehty tammikuussa 2016 Maplen ja Mathematican uusimmilla versioilla. On täysin mahdollista, että ohjelmistojen päivitys poistaa ongelmat minä päivänä tahansa. Sen sijaan laskimissa ei välttämättä ollut uusimpia ohjelmaversioita.

Kysyin asiasta Simo Kivelältä, joka kirjoittaa aiheesta blogissaan [3].

Yhteenvetona täytyy korostaa myös Kivelän mainitsemaa periaatetta, jonka mukaan vähänkin epäilyttävien symbolisten laskujen tukena pitäisi aina käyttää sekä graafisia että numeerisia tarkistuksia, jos se vain on mahdollista.

YO-tehtävä 12/kevät 2016

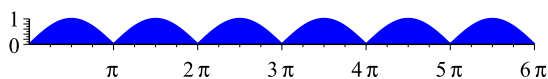
Integraali (1) palautuu muuttujanvaihdoilla³ $t = nx$ ja yllä mainituilla kaavoilla muotoon

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(nx)} dx = \frac{\sqrt{2}}{n} \int_0^{2n\pi} |\sin(t)| dt.$$

Koska funktio $g(t) = |\sin(t)|$ on π -jaksollinen, niin

$$\int_0^{2n\pi} |\sin(t)| dt = 2n \int_0^\pi \sin(t) dt = 4n.$$

Ensimmäisen yhtälön geometrista perustelua kaivattiin otsikossa mainitun YO-tehtävän a-kohdassa, mutta vain tapauksessa $n = 1$.



Kuvaaja tapauksessa $2n = 6$.

Saman tehtävän b-kohdassa oli tarkoitus muodostaa integraalifunktion

$$\int_0^x |\sin(t)| dt$$

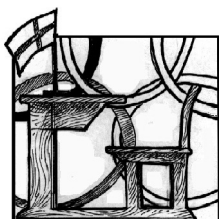
lauseke muuttujan arvoilla $0 \leq x \leq 2\pi$. Tämä näyttää olevan hieman liian vaikeaa sekä Maplille että Mathematicalle, laskimista puhumattakaan. Maple ja Mathematica osaavat kyllä piirtää integraalifunktion kuvaa oikein, mutta lausekkeiden sieventäminen edes tyydyttävään muotoon ei näytä onnistuvan yleisellä muuttujan arvolla $x > \pi$.

Ehkäpä käsin laskemisessa on vielä toistaiseksi jokin pointti?

Viitteet

- [1] A.J. Durán, M. Pérez, J.L. Varona: The misfortunes of a trio of mathematicians using Computer Algebra Systems. Can we trust them? Notices of the American Mathematical Society, Vol. 61, 1249–1252, 2014.
- [2] <http://simokivela.blogspot.fi/>
Blogi 21.11.2015: Mitä symbolilaskentaohjelmalta voi odottaa ja mitä ei?
- [3] <http://simokivela.blogspot.fi/>
Blogi 12.4.2016: Mitä symbolilaskentaohjelmalta voi odottaa ja mitä ei, osa 2.
- [4] Osmo Pekonen (toim.): Symbolien metsässä. Art House, 1992.
- [5] <http://www.sagemath.org/index.html>

³Muuttujanvaihto ei kuulu lukion varsinaiseen sisältöön, mutta sitä käsitellään joissakin valinnaisen kurssin 13 oppikirjoissa.



Valintaperusteiden kertomaa¹

Jouni Pursiainen

kemian professori ja OuLUMA-keskuksen johtaja, Oulun yliopisto

Mitä aineita lukiossa kannattaa lukea? Oulun yliopiston opiskelijavalinnan perusteet kertovat siitä, mitä lukioaineita yliopisto-opinnoissa tarvitaan ja arvostetaan.

Lukiolla on yleissivistävä tehtävä, mutta lukion tulee myös luoda valmiuksia opinnoille yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa. Tässä käydään läpi ylioppilastutkinnon ainevalintojen ja kirjoitusten arvosanojen merkitystä Oulun yliopiston opiskelijavalinnassa 2016, keskittyen LUMA-aineisiin. Erilliset pääsykokeet on jätetty tarkastelun ulkopuolelle. Opiskelijavalinnan perusteet eivät synny sattumalta, vaan koulutusohjelmat valmistelevat niitä huolella, tavoitteena saada parhaat mahdolliset opiskelijat alalle. Opiskelijavalintatieto auttaa osaltaan tekemään onnistuneita ainevalintoja lukiossa.

Kansallinen tilanne

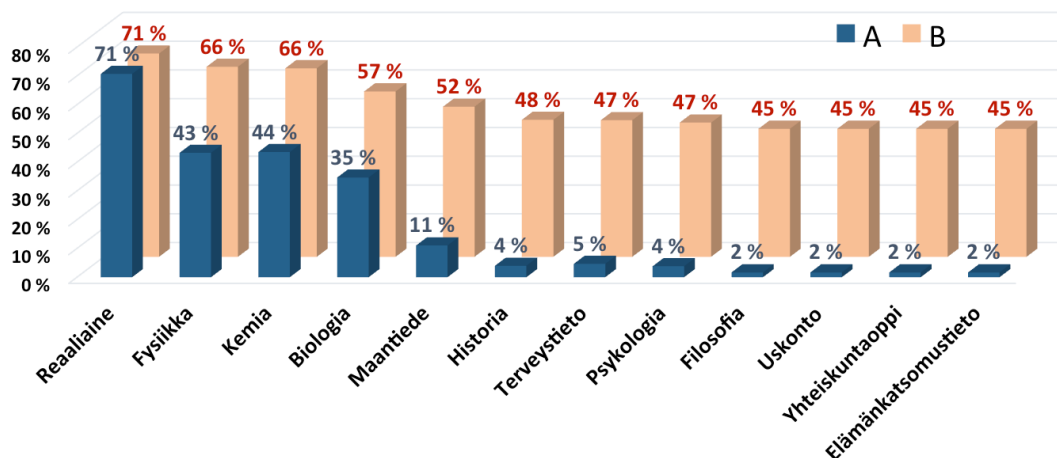
Vuonna 2015 Suomessa valmistui 30618 ylioppilasta, joista pitkän matematiikan kirjoitti 10335 (33.8 %) ja lyhyen matematiikan 14216 (46.4 %). LUMA-realiaineista biologian kirjoitti 5988 (19.6 %), fysiikan 5158 (16.8 %), kemian 4841 (15.8 %) ja maantieteen 3322 (10.8 %) ylioppilasta (Lähde: Ylioppilastutkintolautakunta).

Vuonna 2015 yliopistoihin valittiin Suomessa yhteensä 18714 opiskelijaa, joten näiden lukujen valossa yli-

opistollinen opiskelupaikka on tarjolla 61 %:lle ylioppilaista. Näistä aloituspaikoista LUMA-koulutusaloilla oli 10351 (55 % aloituspaikoista) (Lähde: Vipunen). Tässä LUMA-koulutusaloiksi on luokiteltu seuraavat: luonnontieteellinen, teknillistieteellinen, kauppatieteellinen, lääketieteellinen ja maatalousmetsätieteellinen koulutusala, sekä hammaslääketiede, eläinlääketiede, terveystieteet ja farmasia. Nämä luvut kertovat karua kieltään valtakunnallisesta tilanteesta. Pitkän matematiikan kirjoittaneiden määrä on likimain sama kuin LUMA-koulutusalojen aloituspaikkamäärä, joten pitkän matematiikan avulla on oivat mahdollisuudet saada opiskelupaikka. Fysiikan ja kemian kirjoittaneiden määrä ei riitä täyttämään edes luonnontieteiden (3243) ja teknillisten tieteiden (2566) yhteenlaskettuja aloituspaikkatarpeita! Tilannetta toki helpottaa se, että fysiikan tai kemian kirjoittaneiden yhteenlaskettu määrä on fysiikan ja kemian lukuja suurempi ja myös se, että kaikki fysiikkaa tai kemiaa lukeneet eivät ole niitä kirjoittaneet. Silti voi sanoa, että LUMA-osajista on kansallinen puute.

Oulun yliopisto on monitieteinen yliopisto, jossa on 10 tiedekuntaa ja 40 sellaista koulutusohjelmaa, joihin otetaan opiskelijoita suoraan lukiosta. Kevään 2016 yhteisvalinnassa näissä koulutusohjelmissa on 1810 aloituspaikkaa, jos tarkastelun ulkopuolelle jätetään maisteriohjelmien valinnat ja siirto-opiskelijat. Oulun yliopisto on kansallista keskiarvoa hiukan LUMA-painotteisempi: LUMA-tiedekunnissa on noin 3/4 aloituspaikoista.

¹ Teksti on muokattu OuLUMA-keskuksen verkkosivuilla 11.2.2016 ilmestyneestä samannimisestä kirjoituksesta.



Kuva 1: Reaaliaineet Oulun yliopiston valintaperusteissa, joko erikseen nimettyinä (A) tai määrittelemättömän otsikon ”reaaliaine” alla (B).

Matematiikka ja reaaliaineet Oulun yliopiston valintaperusteissa

Miten ylioppilaskirjoitusten tuloksia käytetään Oulussa valintaperusteina? Tässä rajoitetaan matematiikkaan ja reaaliaineisiin siten, että kullekin ylioppilaskirjoitusten arvosanalle on määritelty kussakin koulutusohjelmassa suhteellinen maksimi-arvo 1. Tämän saavuttaen, jos oppiaine on suoravalinta-aehto tai jos oppiaineen arvosana edustaa pisteytyksessä maksimitasoa. Jos esimerkiksi pitkän matematiikan ylioppilaskokeen laudatur antaa 10 pistettä (maksimipistemäärä ko. koulutusohjelman valintaperusteissa), on pitkän matematiikan suhteellinen arvo 10/10. Jos tällöin lyhyen matematiikan laudaturista saa 6 pistettä, on lyhyen matematiikan suhteellinen arvo 6/10. Näin saadut arvot painotetaan aloituspaikkojen määrällä koulutusohjelmittain. Eli 100 aloituspaikan koulutusohjelmassa pitkä matematiikka saisi esimerkissä painoituksen 100 ja lyhyt 60. Näiden lukujen summa (yli kaikkien koulutusohjelmien) jaettuna aloituspaikkojen määrällä 1810 vastaa kyseisen lukion oppiaineen merkitystä prosentteina Oulun yliopiston aloituspaikoista.

Reaaliaineiden kohdalla tarkastelunäkökulmia on kaksi, riippuen vaihtoehtoisten aineiden käsittelytavasta (Kuva 1). Käsittelytapa A antaa vertailuluvun vain niille reaaliaineille, jotka on nimetty valintaperusteeksi, erikseen tai vaihtoehtoisina. Täysi vertailuarvo annetaan siis silloin, kun vaihtoehdot ovat erikseen nimetyt, kuten ”kemia tai fysiikka, parempi arvosana”. Valintakriteeri ”kaksi parasta reaaliainetta” (tms.) ei sen sijaan tuo vertailulukua millekään reaaliaineelle erikseen, mutta tuottaa otsikon ”reaaliaine” kohdalle vertailuarvon, jonka maksimi on 1. Käsittelytapa A kuvastaa koulutusohjelmien ilmaisemia osaamistarpeita. Käsittelytapa B antaa vertailuarvon jokaiselle niistä reaaliaineista, jotka sisältyvät mainittuun laajempaan joukkoon (kuten ”kaksi parasta reaaliainetta”). B-näkökulma katsoo asiaa hakijan kannalta, antaen

täyden painon jokaiselle oppiaineelle, jotka häneltä voidaan laskea valintapisteiksi.

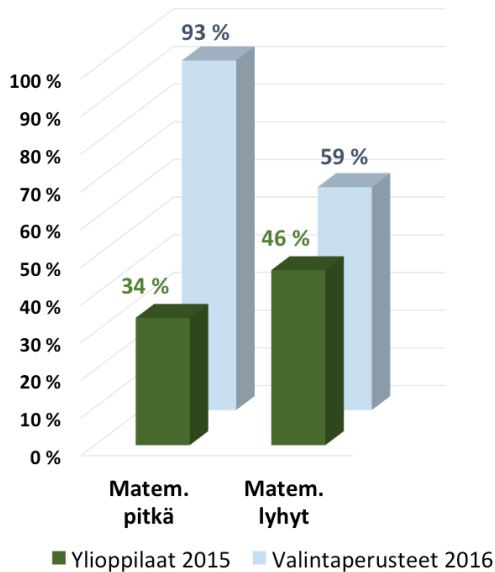
Ylioppilaiden ainevalinnat vs. valintaperusteet

Valintaperusteiden painotukset saavat konkreettista merkitystä, kun niitä verrataan kunkin lukioaineen kirjoittajien %-osuuksiin. Valintaperusteena pitkää matematiikkaa käyttää peräti 93 % aloituspaikoista ja lyhyttä matematiikkaa 59 %. Silti pitkän matematiikan kirjoittaa vain 34 % ylioppilaista (Kuva 2) ja lyhyen 46 %. Lyhyttä matematiikkaa käytetään valintaperusteena jokseenkin yhtä usein kuin pitkääkin, mutta sen pisteytys on huonompi. Pisteytyksissä hyvin kirjoitettu lyhyt matematiikka voi olla yhtä arvokas kuin huonosti kirjoitettu pitkä matematiikka, mutta hyvin kirjoitettu pitkä matematiikka on todellinen valttikortti useimpiin koulutusohjelmiin.

Perinteiset LUMA-reaaliaineet fysiikka, kemia ja biologia näyttävät samassa valossa kuin pitkä matematiikka (Kuva 3). Nimeltä mainiten fysiikka esiintyy valintaperusteissa 43 %:ssa, kemia 44 %:ssa, biologia 35 %:ssa ja maantiede 11 %:ssa aloituspaikoista. Jos mukaan otetaan myös nämä oppiaineet otsikon ”reaaliaine” alta ovat vastaavat luvut: fysiikka 66 %, kemia 66 %, biologia 57 % ja maantiede 52 % (Kuva 1). Kirjoittajien määrät ovat paljon pienempiä, välillä 15–20 %. Hiukan lievemmin myös maantiede seuraa samaa trendiä. Se, että 80–85 % ylioppilaista ei kirjoita fysiikkaa, kemiaa tai biologiaa, on ongelma, koska näiden oppiaineiden merkitys valintaperusteina on suuri. Syynä voi olla valintaperustetiedon puutteen ohella se, että nämä oppiaineet koetaan vaikeina tai työläinä.

Terveystietoa, psykologiaa, yhteiskuntaoppia kirjoitetaan enemmän (23–37 %) kuin LUMA-reaaliaineita, vaikka ne juuri ja juuri löytyvät nimeltä mainittuina

Oulun yliopiston valintaperusteissa. Näiden oppiaineiden merkitys on lähinnä yleissivistävä.



Kuva 2: Matematiikan kirjoittaneiden osuus vuoden 2015 ylioppilaista ja matematiikka Oulun yliopiston valintaperusteissa 2016.

Lukioaineiden ja valintojen merkityksistä

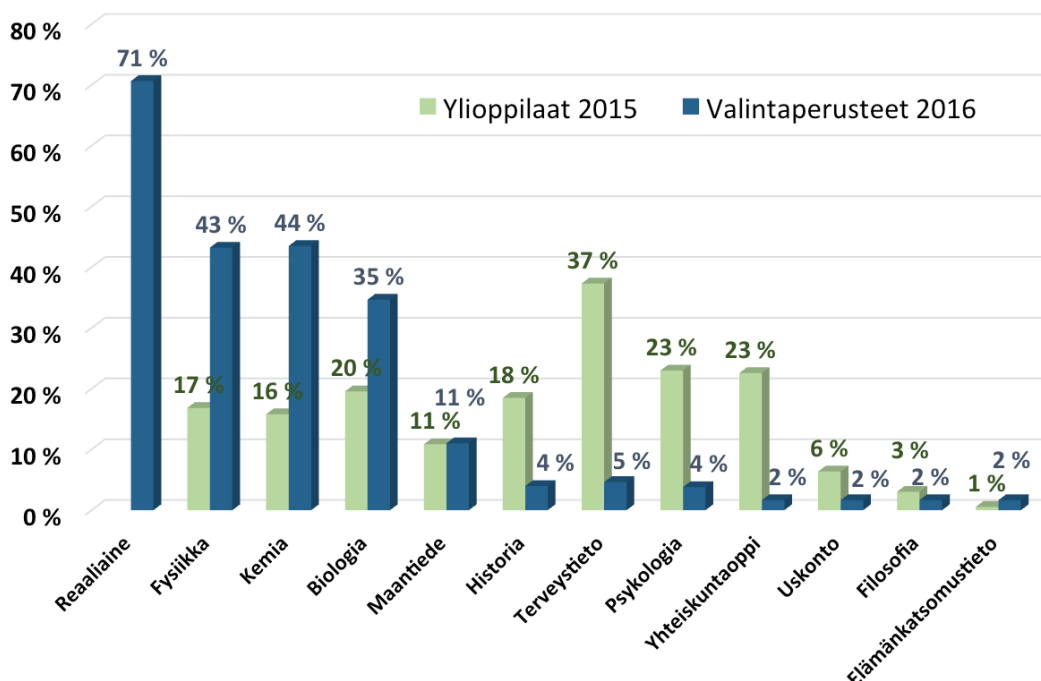
Erityisesti matemaattis-luonnontieteellisissä aineissa kirjoittajien ja yliopistollisen tarpeen välinen epäsuhta on valtakunnallinen ongelma. Opiskelupaikkoja riittää

matemaattisesti orientoituneille nuorille, mutta muut (enemmistö) joutuvat kilvoittelemaan lukumääräisesti vähemmistä ei-matemaattisista koulutuspaikoista ja moni jää ilman. Se, mikä on tuntunut mielenkiintoiselta lukiota aloittaessa, ei välttämättä vastaa tämän maailman tarpeita.

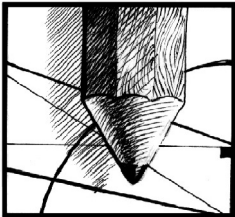
Kyse on myös suomalaisten mahdollisuuksista pärjätä muuttuvassa maailmassa. Maan taloudellinen tulevaisuus, vientiteollisuuden kautta, on kiinni LUMA-aineissa, olipa kyse ICT-alasta, kemian teollisuudesta, kaivosalasta, biotaloudesta tai metsä- tai terästeollisuudesta. Luonnontieteellistä osaamista tarvitaan laajalti myös suljetulla sektorilla, esimerkiksi lääketieteissä.

Keskeisiä yhteiskunnan ja elinkeinoelämän tulevaisuutta koskevia ratkaisuja tekevät 15–16-vuotiaat nuoret. Heillä ja heidän vanhemmillaan on oikeus tietää, tehdessään valintoja peruskoulun jälkeisistä opinnoista, mitä niistä ratkaisuista seuraa. Lukiossa paljon auttaisi jo sekin, jos alussa keskityttäisiin pakollisiin. Keskeiset ainevalinnat lykkäytyisivät tuonemmaksi, jolloin ratkaisut eivät enää perustuisi yläkoulusta periytyneeseen asenneilmapiiriin.

Ikäluokkien pieneneminen rasittaa maan tulevaisuutta monella tavalla jatkossa, mutta yliopistoissa LUMA-aineita koskeva epäsuhta kärjistää tilannetta vielä nopeammin. Lukiolaisen kannattaa valita huolella yliopilaskirjoituksiin ne oppiaineet, ”valintojen valttikortit”, joiden avulla hän tavoittelee opiskelupaikkaa. Panostaminen matemaattis-luonnontieteelliseen osaamiseen on mainio sijoitus tulevaisuuteen.



Kuva 3: Reaaliaineita kirjoittaneiden osuus vuoden 2015 ylioppilaista ja reaaliaineet Oulun yliopiston valintaperusteissa 2016.



Tasograafit ja väritykset: ratkaisuita ongelmiin

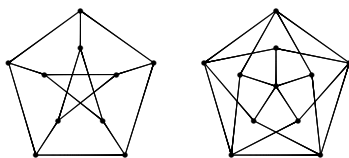
Esa V. Vesalainen

Basque Center for Applied Mathematics

Edellisen numeron graafiaiheisessa artikkelissa¹ oli lopussa kolme ongelmaa pohdittavaksi niille lukijoille, jotka sellaista kaipaavat. Tässä on niille esimerkkiratkaisuita.

Ongelma 1

Onko Petersenin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Petersenin graafin kärjet voi värittää? Onko Grötzschin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Grötzschin graafin kärjet voi värittää?

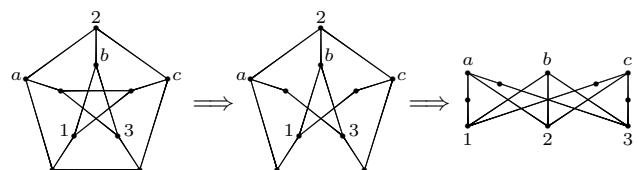


Kuva. Petersenin ja Grötzschin graafit.

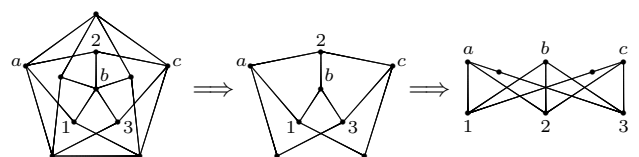
Tässä siis graafi oli tasograafi, jos sen pystyi piirtämään tasoon niin, että sen kärjet piirretään pisteiksi, ja särmä leikata eivätkä kosketa toisiaan kuin vain särmien päätepisteinä olevissa kärjissä. Edelleen, kärkien värityksistä vaadittiin, että särmällä yhdistetyt kärjet aina väritetään eri väreillä.

Ratkaisu: tasoon piirtäminen. Kumpikaan graafeista ei ole tasograafi, minkä voi osoittaa esimerkiksi Kuratowskin lauseella.

Petersenin graafista löytää graafin $K_{3,3}$ osaväleihinjaon esimerkiksi näin:



Grötzschin graafista puolestaan löytää graafin $K_{3,3}$ osaväleihinjaon esimerkiksi näin:



Jos emme halua käyttää Kuratowskin lausetta, niin voisimme osoittaa, etteivät tarkasteltavat graafit ole tasograafeja, myös suoraan käyttäen artikkelissa¹ esiteltyjä ideoita:

¹VESALAINEN, E. V.: *Tasograafit ja väritykset*, Solmu, 1/2016, 7–13.

Tehdään vastaoletus, että Petersenin graafi olisi tasograafi, ja oletetaan, että se on piirretty tasoon siten, etteivät mitkään kaksi särmää kuvaavaa viivaa leikkaa toisiaan, paitsi mahdollisesti kärjissä, tietenkin. Tällöin kärkien lukumäärä on $v = 10$, särmien lukumäärä on $e = 15$, ja Eulerin kaavan nojalla alueiden lukumäärän on oltava $f = 2 + e - v = 7$.

Toisaalta, lasketaan jokaiselle alueelle, kuinka montaa särmää se koskettaa, ja lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N , muistaen tietenkin laskea särmä mukaan kahdesti, jos se koskettaa molemmilta puoliltaan samaa aluetta. Tietenkin jokainen särmä lasketaan jälleen kahdesti, eli $N = 2e$. Toisaalta, ei ole vaikea vakuuttua siitä, että jokaista aluetta täytyy reunustaa ainakin viisi särmää, eli on oltava $N \geq 5f$. Mutta nyt olisi siis oltava

$$30 = 2e = N \geq 5f = 35,$$

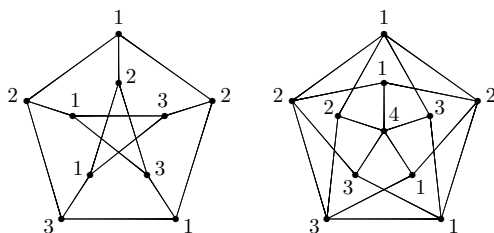
mikä on tietenkin mahdotonta.

Grötzschin graafille sama todistus toimii melkein sellaisenaan: On helppo tarkistaa, että jos Grötzschin graafi olisi piirretty tasoon niin, etteivät mitkään kaksi sen särmää kuvaavaa viivaa leikkaisi, kärkiä lukuun ottamatta, niin olisi $v = 11$, $e = 20$ ja $f = 2 + 20 - 11 = 11$, ja lisäksi jokaista aluetta reunustaisi vähintään neljä särmää, jolloin saisimme epäyhtälön

$$40 = 2e = N \geq 4f = 44,$$

mikä puolestaan antaisi meille ristiriidan.

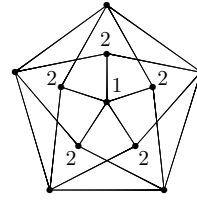
Ratkaisu: väriykset. Aloitetaan havaitsemalla, että Petersenin graafin kärjet voi värittää kolmella eri värillä ja Grötzschin graafin kärjet neljällä eri värillä:



Petersenin ja Grötzschin graafeista myös helposti näkee, ettei kummankaan kärkiä voi värittää vain kahta väriä käyttäen, esimerkiksi siksi, ettei kummankaan ulkokehän viittä kärkeä voi värittää vain kahdella värillä. Petersenin graafin osalta olemmekin siis jo valmiit.

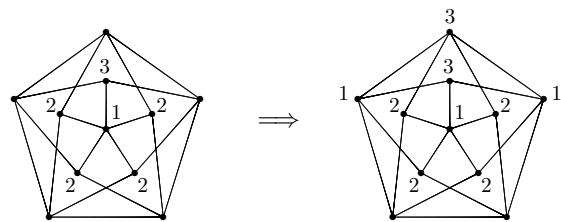
Yritetään siis värittää Grötzschin graafin kärjet kolmella eri värillä 1, 2 ja 3. Ilman yleisyyden menettämistä voimme värittää keskimmäisen kärjen värillä 1.

Jos värittäisimme keskuskärjen naapurit kaikki samalla värillä, joksi voisimme valita värin 2, niin ulkokehän viisi kärkeä olisi väritettävä käytettävissä olevilla väreillä 1 ja 3:



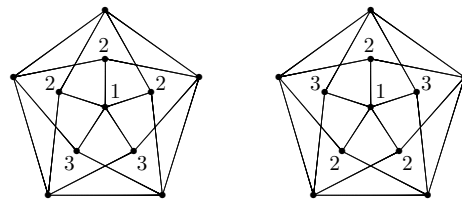
Tämä ei tietenkään ole mahdollista.

Siis kärjen 1 naapureissa täytyy esiintyä molempia väreistä 2 ja 3. Ilman yleisyyden menettämistä voimme valita, että väriä 2 on esiinnyttävä enemmän kuin väriä 3. Jos väri 3 esiintyisi täsmälleen kerran, niin tällöin ulkokehälle tulee ainakin kahdesti väri 1 ja kerran väri 3:



Mutta nyt alarivin kaksi kärkeä tuottaisivat ilmeisen ongelman, sillä ne olisi molemmat väritettävä värillä 3.

Keskuskärjen naapureista siis kaksi on väritettävä värillä 3 ja kolme värillä 2. Nyt meillä on kaksi tapausta sen mukaan, miten värillä 3 väritetyt naapurit sijoittuvat:



Mutta molemmissa tapauksissa molemmat alimmista kahdesta kärjestä olisi väritettävä värillä 1, mikä on mahdotonta. Täten Grötzschin graafin kärkiä ei voi värittää vain kolmea väriä käyttäen, ja olemme valmiit.

Ongelma 2

Miten edellisen numeron graafiartikkelissa¹ annettua viisivärilauseen todistusta voi yksinkertaistaa, jos halutaankin osoittaa vain se heikompi tulos, että tasograafin kärjet voi värjätä kuudella värillä?

Ratkaisu. Käytämme viisivärilauseen todistusta seuraten induktiota graafin kärkien lukumäärän suhteen.

Jos tasograafillamme on enintään kuusi kärkeä, voi ne selvästi värittää kuudella eri värillä. Oletetaan sitten, että $N \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että tiedämme väitteen todeksi enintään N kärjen tasograafeille, ja otetaan tarkasteluun mielivaltainen $N + 1$ kärkeä sisältävä tasograafi.

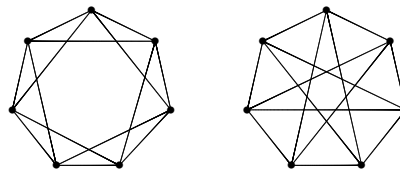
Jos tarkasteltava $N + 1$ kärjen tasograafi ei ole yhtenäinen, niin sen jokainen yhtenäinen osa sisältää enintään N kärkeä, ja yhtenäiset osat voi värittää yksittelen erikseen enintään kuutta väriä käyttäen. Voimme siis huoletta olettaa, että tarkastelemme $N + 1$ kärjen yhtenäistä tasograafia.

Tiedämme, että tarkasteltavassa graafissa on jollain kärjellä x enintään viisi naapuria. Poistamme kärjen x ja siihen liittyvät särmät hetkeksi, jolloin jäljelle jää N kärjen graafi, jonka kärjet voimme värittää kuudella värillä halutulla tavalla. Lisäämme nyt kärjen x ja siihen liittyvät särmät takaisin graafiin. Jos voimme jotenkin laajentaa värityksen koskemaan kärkeä x , mahdollisesti väritystä sopivasti muokkaamalla, niin olemme valmiit.

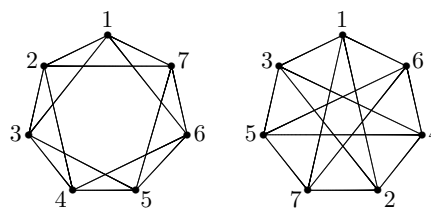
Ja nyt olemme kohdassa, jossa todistus yksinkertaistuu merkittävästi: nimittäin kärki x voidaan aina värittää eri värillä kuin naapurinsa, yksinkertaisesti siksi, että sillä on enintään viisi naapuria, mutta värejä on käytettävissä kuusi.

Ongelma 3

Ovatko seuraavat graafit eri graafeja vai sama graafi?



Ratkaisu. Tällä ongelmalla on oikein miellyttävä ratkaisu. Numeroidaan ensin vasemmanpuoleisen graafin kärjet $1, 2, \dots, 7$, ja piirretään graafi sen jälkeen uudelleen siten, että kärjet laitetaan kehään lävistäjiä seuraillen:



Ja näin saatiinkin tehtävänannon oikeanpuoleinen graafi!

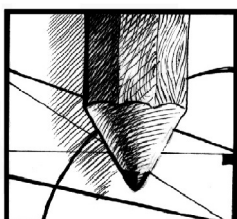
Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä

Nobelin fysiikan palkinnon saaja E. P. Wigner kirjoitti artikkelissa, jonka otsikko on Matematiikan hämmästyttävä tehokkuus luonnontieteissä:

”Matematiikan kielen ihmeellinen sopivuus fysiikan lakien formulointiin on suurenmoinen lahja, jota emme ymmärrä emmekä ansaitse, meidän tulisi olla kiitollisia siitä ja toivoa, että se pysyy voimassa myös tulevaisuudessa ja että sitä voidaan laajentaa monille muillekin tieteen aloille, seurasi siitä sitten mielihyvää tai hämmennystä.”

N. Bourbakin artikkelissa ”Matematiikan arkkitehtuuri” sanotaan:

”Nykyfysiikan viimeiset keksinnöt näyttävät vahvistavan, mitä odottamattomimmalla tavalla, kokeellisesti havaittavien ilmiöiden ja matemaattisten struktuurien välisen läheisen yhteyden. Kuitenkaan emme tiedä yhtään mitään tämän tosiasian perusteista ja ehkä emme koskaan tule tietämäänkään.”



Pepin keppihevokset, toisen asteen yhtälö ja Newton

Samuli Siltanen

matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Karaoken peruskauraa on *Aikuinen nainen*, rockin *Stairway to heaven* ja matematiikan tietenkin *Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava*. Tiedättehän: olkoon tehtävänä löytää x , joka toteuttaa yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Tällöin joko muistamme ulkoa tai kaivamme taulukko-kirjasta iki-ihan kerran klassikon

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Koulumatematiikan standardi puolestaan on opettajalle osoitettu kysymys *Mihin tätä tarvitaan?* Toisen asteen yhtälön tapauksessa tämä kysymys on toki mieletön, koska sitä tarvitaan melkein kaikkeen. Otetaan esimerkiksi keppihevosjuhlien järjestäminen.

Peppi Pasanen on kaksitoistavuotias keppihevosten mestari. Häneltä sujuu paitsi esteratsastus, myös keppihevosten suunnittelu ja valmistus korkeatasoisena suomalaisena käsityönä! Kuvassa 4 on pari esimerkkiä. Aika ajoin Peppi järjestää kepparijuhlia, joissa jokainen osallistuja antaa kullekin toiselle itse tehdyn keppihevosen.

Tulevien juhlien suunnittelua vaikeuttaa juuri valmistunut uusi kepparitalli. Siinä on 20 pilttuuta, ja olisi tietysti tyylikkäintä, jos omistajaa vaihtavia keppihevosaia olisi tasan kaksikymmentä. Pepillä on siis ratkaistavana matemaattinen pulma *kuinka monta kaveria pitäisi kutsua, jotta omistajaa vaihtavia keppihevosaia olisi juuri 20 kappaletta?*



Kuva 4: Peppi Pasasen suunnittelemia ja valmistamia keppihevosaia.

Merkitään osallistujien määrää x :llä. Jokainen antaa muille kuin itselleen keppihevosen, joten kunkin tulee tuoda niitä $x - 1$ kappaletta. Keppihevosten kokonaismäärä on siis $x(x - 1)$. Talli tulee täsmälleen täyteen, kun $x(x - 1) = 20$, eli sievennyksen jälkeen toteamme etsivämme x :ää, joka toteuttaa yhtälön

$$x^2 - x - 20 = 0.$$

Sijoittamalla klassiseen ratkaisukaavaan $a = 1$ ja $b = -1$ ja $c = -20$ Peppi saa kaksi ratkaisua: joko $x = 5$

taikka $x = -4$. Näistä viisi on parempi vaihtoehto, koska tylsät ovat kinkerit, joissa porukkaa on vähemmän kuin ei ketään.

Huvin vuoksi voimme kokeilla myös toisenlaista ratkaisutapaa, jonka ihmiskunnan iloksi loi suurguru **Isaac Newton**. Tässä *Newtonin iteraatiossa* etsimme nollakohtaa funktiolle $f(x) = x^2 - x - 20$ ja valitsemme ratkaisulle alkuarvauksen x_1 . Alkuarvausta parannetaan askeleittain käyttäen Newtonin iteraatiota $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$ eli yleisemmin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tässä f' on funktion f derivaatta. Katso kuva 5.

Miltä Newtonin iteraatio näyttää? Otetaan alkuarvaukseksi 2. Silloin iteraatio etenee kuvan 5 osoittamalla tavalla ja tuottaa nämä luvut:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 8 \\ x_3 &= 5.6 \\ x_4 &= 5.035294117647059 \\ x_5 &= 5.000137331197070 \\ x_6 &= 5.000000002095476 \\ x_7 &= 5.000000000000000 \end{aligned}$$

Tuo alimmainen luku x_7 onkin jo oikea tietokoneen koko laskentatarkkuudella: vastaus on 5 osallistujaa.

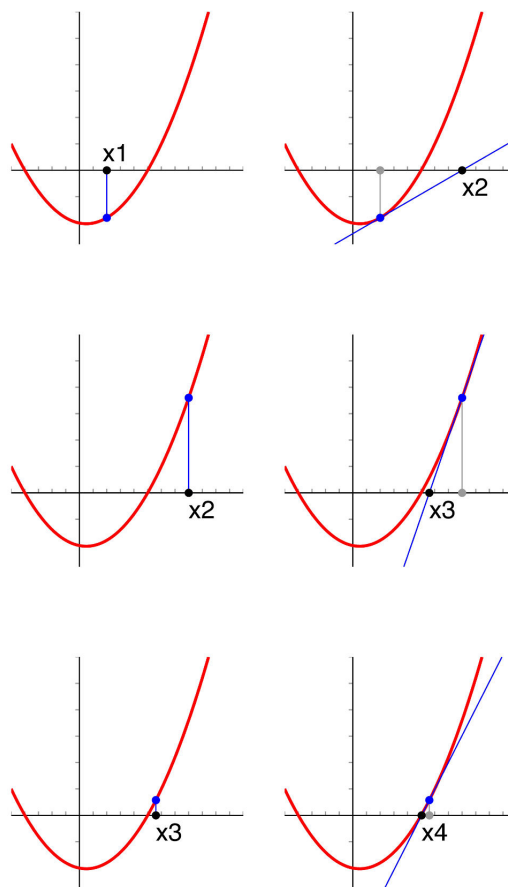
Kumpi on parempi menetelmä toisen asteen yhtälön ratkaisuun, kaava vai iteraatio?

Ratkaisukaavan hyvä puoli on yleispätevyys: se antaa aina kaksi oikeaa ratkaisua, myös kompleksilukuvastaukset silloin, kun reaalisia ratkaisuja ei ole. Iteraatio puolestaan suppenee vain yhteen ratkaisuun, joka riippuu alkuarvauksesta. Esimerkiksi yllä olevassa tapauksessa $f(x) = x^2 - x - 20$ alkuarvaus $x_1 = -1$ tuottaa ratkaisun $x = -4$. Iteraatioissa on ongelmiaakin: alkuarvaus $x_1 = 1/2$ johtaa nollalla jakamiseen eikä anna tulosta ollenkaan.

Iteraatoratkaisun eduksi voidaan katsoa se, että se antaa aina numeerisen likiarvon. Ratkaisukaava saat-

taa tuottaa esimerkiksi kaupankäyntiin liittyvään kysymykseen vastauksen “ $100\sqrt{2}$ euroa.” Newtonin iteraatio antaa helpommin tulkittavan ratkaisun “141 euroa ja 42 senttiä.”

Muistettakoon myös se, että ratkaisukaavan olemassaolo on hieno ja harvinainen asia. Kuten **Évariste Galois** aikoinaan osoitti, viidennen ja sitä korkeamman asteen yhtälöille ei ole ratkaisukaavaa lainkaan! Niissä tapauksissa meidän on turvauduttava Newtonin iteraation tapaisiin ratkaisukeinoihin.



Kuva 5: Newtonin iteraatio, joka perustuu derivaatan ovelaan käyttöön.

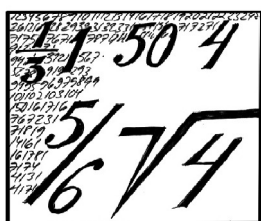
Uutta Verkko-Solmussa

Matematiikkadiplomi-sivulla

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

on ilmestynyt kirjoitus Kombinaatio-oppia:

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2008/diplomi/kombinatoriikkaa.pdf>



Tunnuslukujen keski- ja epämääräisyyksiä tutkailemassa

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Åbo Akademi

Kimmo Vehkalahti

Helsingin yliopisto

Todennäköisyyyslaskennassa ja tilastotieteessä esiintyy monia *tunnuslukuja*, joilla voidaan kuvata jonkin joukon olemusta. Tällaisia ovat muun muassa kolme erilaista keskiarvoa sekä mediaani ja moodi. Käytännössä ylivoimaisesti useimmin näistä kohdataan **aritmeettinen keskiarvo**, jossa joukon alkiot lasketaan yhteen ja jaetaan niiden lukumäärällä. Harvemmin vastaan tulevat **geometrinen** ja **harmoninen keskiarvo**, vaikka kaikki kolme tunnettiin jo antiikin Kreikassa.

Mediaani on *keskimmäinen* arvo, kun joukon alkiot on laitettu suuruusjärjestykseen. **Moodi** puolestaan tarkoittaa joukon *tyypillisintä* eli useimmin esiintyvää arvoa. Siitä käytetään myös nimeä *tyyppi-arvo*.

Joukon keskimääräistä olemusta kuvaavia tunnuslukuja tuntuu olevan kovin paljon. Tarvitaanko niitä kaikkia oikeasti? Tutkiskellaanpa tätä aihepiiriä muutaman esimerkin avulla.

Esimerkki 1: kouluarvosanat

Kuvitellaan, että koulutodistuksessa on 11 arvosanaa, joista kuusi on kympejä, yksi on seiska ja loput neljä viitotia. Todistuksen (aritmeettinen) keskiarvo on siis

$$\frac{6 \cdot 10 + 7 + 4 \cdot 5}{11} = \frac{87}{11} \approx 7,9.$$

Kun laitetaan arvosanat järjestykseen $\{10, 10, 10, 10, 10, 10, 7, 5, 5, 5, 5\}$, nähdään helposti, että mediaani ja moodi ovat molemmat kympejä. Jos todistuksessa olisikin neljä kymppiä ja kuusi viitosta (ja seiska), olisi keskiarvo

$$\frac{4 \cdot 10 + 7 + 6 \cdot 5}{11} = \frac{77}{11} = 7,$$

kun taas mediaani ja moodi olisivat molemmat viitotia. Tämän perusteella tuntuu, että aritmeettinen keskiarvo on varsin fiksu tapa kuvata arvosanajoukon olemusta tiivistetysti. Sen sijaan mediaani ja moodi eivät ehkä vaikuta tässä suhteessa kovin luotettavilta.

Ehkä tavallinen keskiarvo tosiaan riittää. Vai pitäisikö sittenkin tutkia asiaa vielä toisen esimerkin valossa?

Esimerkki 2: keskinopeudet

Turusta Alastarolle ajaa noin tunnissa nopeudella 70 km/h. Jos siis ajaa Turusta Alastarolle ja takaisin tällä nopeudella, kestää matkanteko kaksi tuntia. Kuvitellaanpa, että ajetaankin Turusta Alastarolle nopeudella 35 km/h. Jos takaisin ajaisi nopeudella 105 km/h, niin taittaisiko koko matka jälleen kahdessa tunnissa?

Lukujen 35 ja 105 keskiarvo on ilmiselvästi 70:

$$\frac{35 + 105}{2} = \frac{140}{2} = 70,$$

mutta tämä ei kerrokaan koko totuutta. Jo pelkkä menomatka vie kaksi tuntia, jos nopeus on 35 kilometriä tunnissa, jolloin riippumatta siitä miten pahaa ylinopeutta kaahaa paluumatkan, ei koko matka voi millään taittua kahdessa tunnissa. Mikä tässä nyt meni pieleen? Miksi aritmeettinen keskiarvo ei nyt toimikaan?

Katsotaanpa. Nopeus on matkan ja ajan suhde:

$$v = \frac{s}{t},$$

missä v on nopeus, s matka ja t aika. Tästä voimme ratkaista, että

$$t = \frac{s}{v}.$$

Jos siis ajamme matkan s ensin nopeudella v_1 ja sitten nopeudella v_2 , kestää matkanteko yhteensä

$$t = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}.$$

Keskinopeus on luonnollisestikin kokonaismatkan $2s$ suhde kokonaisaikaan $\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$, eli

$$\frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

eli lukujen v_1 ja v_2 harmoninen keskiarvo.

Jos siis Turusta Alastarolle ajaa nopeudella 35 km/h ja takaisin nopeudella 105 km/h, on keskinopeus, eli nopeuksien harmoninen keskiarvo

$$\frac{2}{\frac{1}{35} + \frac{1}{105}} = 52,5,$$

joka myös vastaa todellisuutta: Matka Turusta Alastarolle ja takaisin nopeudella 52 km/h kestää

$$\frac{140 \text{ km}}{52,5 \text{ km/h}} = 160 \text{ minuuttia},$$

ja toisaalta, matka Turusta Alastarolle nopeudella 35 km/h kestää kaksi tuntia ja paluumatka nopeudella 105 km/h kestää 70 km/105 km/h = 40 minuuttia, eli yhteensä 160 minuuttia (kun jätetään huomiotta se aika, joka kuluu, kun poliisi pysäyttää ylinopeuden vuoksi ja kirjoittaa sakot).

Nopeuksissa siis harmoninen keskiarvo peittoaa aritmeettisen keskiarvon. Tämäkään esimerkki ei kuitenkaan riitä perustelemaan mediaanin tai moodin käyttöä, joten otetaan vielä kolmas esimerkitapaus.

Esimerkki 3: varat ja velat

Tarkastellaan suomalaisten nettovarallisuutta eli varojen ja velkojen erotusta. Tilastokeskuksen mukaan

vuonna 2013 kotitalouksien nettovarallisuuden mediaani oli 110 000 euroa, kun taas keskiarvo oli 195 332 euroa, siis lähes kaksinkertainen määrä. Kumpi tunnusluku – keskiarvo vai mediaani – tässä tapauksessa on luotettavampi ja miksi?

Likemmäksi selvyyttä vie nettovarallisuustaulukko [1], johon on koottu mediaanin ja keskiarvon ohella *fraktilleiksi* kutsuttuja tunnuslukuja. Niistä tyypillisimpiä ovat *ala-* ja *yläkvartiili*, jotka osoittavat 25 %:n ja 75 %:n kohdalla olevan arvon järjestetystä joukosta lukuja, vastaavasti kuin mediaani osoittaa puolivälin eli 50 %:n kohdan.

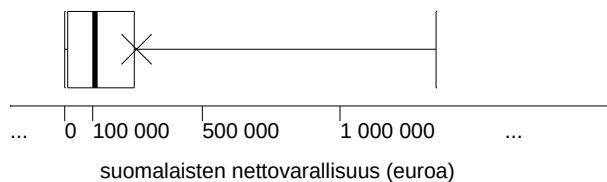
Nettovarallisuuden alakvartiili on 10 000 euroa, mikä siis tarkoittaa, että neljäsosalla kotitalouksista on nettovarallisuutta alle 10 000 euroa. Varakkaimmalla neljäsosalla on yläkvartiilin perusteella nettovarallisuutta yli 252 116 euroa. Ala- ja yläkvartiilin rajaamaan väliin, jonka keskelle mediaani asettuu, kuuluu puolet (75 % – 25 % = 50 %) suomalaisista kotitalouksista.

Keskiarvo näyttää nyt olevan lähempänä yläkvartiilia kuin mediaania. Mistä tämä johtuu? Tunnusluvut vaikuttavat välillä keskimäärin kovin epämääräisiltä!

Sama taulukko sisältää kvartiilien lisäksi muitakin fraktilleja, jotka auttavat ymmärtämään, mistä on kysymys. Lähempänä joukon ääriarvoja ovat 10 %:n ja 90 %:n fraktilit, joista nähdään, että varakkaimmalla 10 %:lla on nettovarallisuutta yli 458 673 euroa, kun taas varattomimmilla vain alle 50 euroa. (Nettovarallisuus ei näytä todellakaan jakautuvan kovin tasaisesti.) Varakkaimmalla prosentilla (sadasosalla) suomalaisista on nettovarallisuutta yli 1,3 miljoonaa euroa.

Luvassa laatikollinen lukuja (kuvassa)

Hyvä tilastollinen kuva tiivistää tiedot vielä paremmin kuin pelkät tunnusluvut. Oheinen *laatikkokuva* näyttää, miten epätasaisesti suomalaisten nettovarallisuus on jakautunut. Laatikon vasen reuna on alakvartiilin ja oikea reuna yläkvartiilin kohdalla (ks. luvut edellä).



Välissä oleva paksumpi pystyviiva osoittaa mediaanin paikan. Laatikon reunoista lähtevät vaakasuorat viivat ulottuvat vain 10 %:n ja 90 %:n fraktilleihin asti, sillä pienintä ja suurinta nettovarallisuuden arvoa taulukko ei paljasta. (Arvatenkin ne ovat melko suuria negatiivisia ja varsin suuria positiivisia lukuja.)

Yläkvartiilin tietämällä näkyvä rasti osoittaa, missä jakauman keskiarvo huutelee. Tässä se on kaukana medianista. Mitä enemmän se siitä poikkeaa, sitä *vinompi* jakauma on. Tällöin keskiarvo ei ole todellakaan nimensä veroinen vaan se saattaa jopa räikeästi vääristää käsitystämme tutkittavan ilmiön luonteesta. Tilastoilla valehtelu [2] on törkeä rike, jolla voi olla huomattavan kauaskantoisia ja vakavia seurauksia.

Myös esimerkiksi palkkajakaumat ovat tyypillisesti varsin vinoja, joten keskiarvo ei ole hyvä keskipalkankaan mitta. Mediaani sen sijaan kertoo luotettavasti keskimäisen arvon, vaikka ääriarvot olisivat kuinka pieniä tai suuria tahansa.

Varallisuustietoja voi tarkastella myös ikäryhmittäin: alle 25-vuotiaat ovat varattomimpia (alakvartiili jopa negatiivinen eli yli neljäsosalla tästä ikäryhmästä on enemmän velkoja kuin varoja) ja 65–74-vuotiaat varakkaimpia (alakvartiili 80 000 euroa, lähes kaikkien suomalaisten mediaanin verran).

Tarkemmin lukuja ja niiden kuvaamaa todellisuutta valottaa Tilastokeskuksen pääjohtaja *Marjo Bruun* vuonna 2013 julkaistussa haastattelussa [3]. Siitä voi myös katsoa ja vertailla tässä esitettyjä lukuja vuoden 2009 tilanteeseen, jolloin nykyinen talouden alamäki oli jo alkanut. Tunnusluvut antanevat osviittaa taantuman mahdollisista vaikutuksista nettovarallisuuteen.

Johtopäätöksiä ja pohdiskelua

Kaikissa edellä esitetyissä esimerkeissä luvuista saatoin laskea erilaisia tunnuslukuja, kunhan oli tarkkana niistä tekemiensä tulkintojen kanssa. Mediaani ja muut fraktiilit eivät kuitenkaan edellytä laskettavuutta. Niiden käyttöön riittää, että tutkittavan joukon alkiot voidaan järjestää suuruusjärjestykseen.

Se, miksi mediaani tuntui käyttäytyvän oudosti esimerkiksi 1, johtui vain siitä, että arvosanoja oli niin vähän. Mediaani ynnä muut *järjestystunnusluvut* toimivat paremmin isommilla aineistoilla. Tällöin ei ole myöskään merkitystä, vaikka lukuja olisi parillinen määrä, jolloin yksikäsitteistä keskimmäistä lukua ei ole. Mediaaniksi kelpaa silloin kumpi hyvänsä keskimmäisistä luvuista (tai niiden keskiarvo, jos laskeminen on mielekästä).

Moodi on vielä vaatimattomampi sen suhteen, mitä se aineistolta olettaa. Riittää, että joukon alkiot voidaan nimetä jollain tunnuksilla (esimerkiksi päärynä, appelsiini ja banaani). Niillä ei tarvitse olla edes mitään järjestystä - moodihan ilmaisee vain, mitä näistä alkiosta esiintyy eniten eli mikä on joukon tyypillisin edustaja.

Hyvin usein saatetaan käyttää tunnuksina myös numeroita, mutta tällöin numerot ovat vain koodeja, joilla ei pidä laskea mitään. Vaikka siis edellä mainitut hedelmät koodattaisiin numeroin {1, 2, 3}, ei esimerkin 1

tapaisilla laskelmilla olisi mitään virkaa. Olisikin turvallisempaa käyttää sanallisia koodeja, esimerkiksi {P, A, B}, niin ei tulisi vahingossa tehtyä hölmöyksiä.

Tilastollisessa tutkimuksessa, joka perustuu olennaisesti erilaisten asioiden ja ilmiöiden mittaamiseen, on tärkeää kiinnittää huomiota siihen, miten mitataan. Kyselytutkimuksissa [4] riittää lähes aina kolme *mittaustaso*: 1) luokittelu, 2) järjestäminen ja 3) (numeerinen) mitta. Tämä on vähän yksinkertaisempi tapa ajatella kuin kirjallisuudessa yleensä esitetty jako neljään niin kutsuttuun *mitta-asteikkoon*: luokittelusteikko, järjestysteikko, välimatka-asteikko ja suhteusteikko. Käsitteenä “luokittelusteikko” on hieman onneton, sillä sana “asteikko” antaa ymmärtää, että jotain voitaisiin asettaa (asteikolle) järjestykseen, mikä ei luokittelutalossa nimenomaan ole mahdollista.

On syytä mitata aina mahdollisimman tarkasti, koska tällöin on käytettävissä enemmän erilaisia tunnuslukuja ja muita tilastollisia menetelmiä. Jos tyydytään vain luokittelemaan asioita eri nimiksi, ei voida käyttää edes mediaania, keskiarvoista puhumattakaan. Pelkkien keskilukujen lisäksi on tarkasteltava, mitä niiden ympärillä tapahtuu, kuten esimerkin 3 tapauksessa.

Erilaisten tunnuslukujen kuten keskiarvon ja medianin tärkeä tehtävä on tiivistää tietoa, mutta pelkkien tunnuslukujen tuijottelu on kuin yrittäisi sokeasti hapsuilla lukujen seassa: liian paljon jää pimentoon. Luvuista piirretyt tilastolliset kuvat kertovat usein yhdellä vilkaisulla enemmän kuin mitkään tunnusluvut. Yksi *Yogi Berran* viisauksista kuuluukin (vapaasti suomennettuna): “*Voit nähdä paljon pelkästään katsomalla.*”

Viitteet

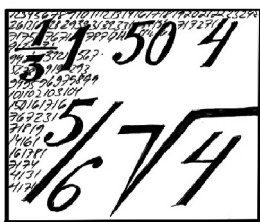
- [1] Suomen virallinen tilasto (SVT): Kotitalouksien varallisuus [verkkojulkaisu]. ISSN=2242-3214. Helsinki: Tilastokeskus. www.stat.fi/til/vtutk/index.html
- [2] https://fi.wikipedia.org/wiki/Kuinka_tilastoilla_valehdellaan
- [3] <http://www.porssisaatio.fi/blog/2013/10/14/varallisuus-tilastojen-valossa/>
- [4] Vehkalahti, Kimmo (2014). *Kyselytutkimuksen mitarit ja menetelmät*. Luku 2: Mittaus ja tiedonkeruu. Helsinki: Finn Lectura.

https://fi.wikipedia.org/wiki/Aritmeettinen_keskiarvo

https://fi.wikipedia.org/wiki/Geometrisen_keskiarvo

https://fi.wikipedia.org/wiki/Harmoninen_keskiarvo

https://fi.wikipedia.org/wiki/Yogi_Berra



Differentiaaliyhtälöitä

Lehtori K.

Differentiaaliyhtälöt tulivat kouluopetukseen 1960-luvulla, kun differentiaalilaskentaa alkoi esiintyä yliopilaskokeissa. Vaihtoehtoisina tehtävinä oli usein yhtälöitä. Oppikirjoissa niitä ei 60-luvulla ollut, mutta monissa lukioissa järjestettiin aiheesta erikoiskursseja ja kerhotoimintaa. Eturivin oppilaitoksissa vaikuttaneet opettajat julkaisivat kehittämäänsä kurssimateriaaleja kirjasina laajemmankin lukiolaisjoukon saataville. Tyypillisenä sisältönä oli ns. separoituvien yhtälöiden ratkaiseminen sekä vakiokertoimiset ensimmäisen ja toisen kertaluvun lineaariset yhtälöt. Lisäksi niissä mallinnettiin eräitä mekaniikan ja sähköopin ilmiöitä. Mainittujen yhtälöiden ratkaiseminen on varsin kaava-
maista toimintaa, minkä lukiokurssit kohtuullisesti hallitseva pystyisi nykyisinkin helposti opiskelemaan itsenäisesti nettilähteistä, ks. esim. [6].

Suurena vaikuttimena tämän harrastuksen viriämiseen oli se, että teknilliseen korkeakouluun pyrittäessä oli osattava yhtälöiden alkeet – pääsykokeissa, ja ne olivat pakolliset, esiintyi differentiaaliyhtälöitä. Niihin valmistauduttaessa oli opiskeltava myös Väisälän vektorianalyysin [7] ensimmäinen luku, joka on sisällöltään hieman nykyistä lukion vektoriopin kurssia laajempi sisältäen mm. vektoritulon eräine fysikaalisine sovelluksineen.

Differentiaaliyhtälöt eivät kuulu lukion nykyiseen eivätkä tulevaankaan opetussuunnitelmaan, mutta eräitä yksinkertaisia yhtälöitä voi silti helposti ratkaista opetussuunnitelmiin sisältyvillä tiedoilla ja taidoilla. On vain yhdisteltävä eri kursseilla esiin tulevia asioita. Lehtori jätti edellisessä kirjoituksessaan [5] lukijan

pohdittavaksi kolme tehtävää, jotka ratkaisemme seuraavassa yksinomaan lukion nykyistä oppimäärää soveltaen. Ensimmäisenä tehtävänä oli bakteeriviljelmän kasvun mallintaminen oletuksella, ettei kasvua rajoittavia esteitä ole. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla kahtia, joten on järkevää olettaa, että pienessä aikavälissä tapahtuva lisäys on suoraan verrannollinen bakteerien määrään aikavälin alussa sekä tietenkin aikavälin pituuteen. Bakteerien lukumäärä ei ole jatkuva suure, mutta voimme silti laatia kasvua esittävän differentiaaliyhtälön tutkimalla lukumäärän sijasta kasvuston massaa. Olkoon se $m = m(t)$ hetkellä t sekä $m(0) = m_0 > 0$. Lisäksi on järkevää olettaa tunnetuksi viljelmän kahdentumisaika T , jonka kuluessa viljelmän koko tuplautuu; erityisesti $m(T) = 2m(0) = 2m_0$. Samalla tavalla kuin kirjoituksessa [5] päädyimme yhtälöön

$$m'(t) = km(t)$$

alkuehdolla $m(0) = m_0$, missä vakio k on positiivinen verrannollisuuskerroin. Yhtälöstä nähdään, että m on aidosti kasvava, joten sillä on derivoituva käänteisfunktio $t = t(m)$. Käänteisfunktion derivoimissääntöä soveltaen saamme yhtälön

$$t'(m) = \frac{1}{km},$$

josta integroimalla seuraa

$$t(m) = \frac{1}{k} \ln m + d.$$

Ehdosta $m(0) = m_0$ saadaan $t(m_0) = 0$, joten integroi-

misvakioksi tulee

$$d = -\frac{1}{k} \ln m_0,$$

ja

$$t(m) = t = \frac{1}{k} \ln m - \frac{1}{k} \ln m_0 = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{m}{m_0} \right).$$

Täten

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Verrannollisuuseroin k eliminoiduu kahdentumisaajan T avulla, minkä aktiivinen lukiolainen todetkoon nähtyään ensin tämän tehtävän vaihtoehtoisen ratkaisun. Voimme nimittäin lähes samalla tavalla johtaa ongelmasta *differentssiyhtälön*. Olkoon $N = N(t)$ bakteerien lukumäärä hetkellä t . Aika t oletetaan diskreetiksi muuttujaksi, joka saa arvoja $t = 0, 1, 2, \dots$. Valitaan aikayksikkö pieneksi kahdentumisaikaan verrattuna. Verrannollisuutta soveltaen lukumäärän muutos aikavälissä $[t-1, t]$

$$N(t) - N(t-1) = k \cdot N(t-1) \cdot 1,$$

joten

$$N(t) = (1+k)N(t-1), \quad N(0) = N_0.$$

Saadun rekursiokaavan avulla nähdään välittömästi, että

$$N(t) = (1+k)^t N(0) = (1+k)^t N_0.$$

Kahdentumisaajan avulla saamme edelleen

$$(1+k)^T N_0 = 2N_0,$$

mistä seuraa

$$(1+k) = 2^{1/T} \quad \text{ja} \quad N(t) = N_0 2^{t/T}.$$

Eliminoimalla verrannollisuuseroin k kahdentumisaajan T avulla nähdään, että ratkaisut

$$m(t) = m_0 e^{kt} \quad \text{ja} \quad N(t) = N_0 2^{t/T}$$

ovat samat.

Toisena tehtävänä oli yhtälön

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

ratkaiseminen alkuehdolla $y(0) = 1$. Trigonometrian kurssilta muistuu mieleen tangenttifunktion derivaatta, mutta käsittelemme tehtävän kuitenkin kirjoituksessa [5] esitetyn Lindelöf-sitaatin mukaisesti. Koska $y'(x) = 1 + y^2 \geq 1 > 0$, on ratkaisufunktio $y = y(x)$ aidosti kasvava, joten sillä on (derivoituva) käänteisfunktio $x = x(y)$. Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$\frac{dx}{dy} = x'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Integroimalla saamme

$$x = x(y) = -d + \arctan y,$$

josta edelleen

$$y = y(x) = \tan(x + d).$$

Koska $y(0) = 1$, on $\tan d = 1$, mistä seuraa, että

$$d = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ratkaisufunktioita on siis ääretön määrä,

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4} + n\pi\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kolmas kysymys oli ylioppilaskokeessa syksyllä 1967. Siinä pyydetään ratkaisemaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$$

valitsemalla $x + y$ apumuuttujaksi. Ohjeen mukaan merkitsemme

$$z(x) = x + y(x),$$

jolloin

$$z'(x) = 1 + y'(x).$$

Tällä sijoituksella yhtälö tulee muotoon

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \cos z = 2 \cos^2 \frac{z}{2}.$$

Turvaudumme taas Lindelöfin [1] neuvoon. Jos

$$\frac{z}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

eli

$$y \neq -x + (1 + 2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

niin funktiolla $z = z(x)$ on derivoituva käänteisfunktio $x = x(z)$, joka saadaan integroimalla yhtälöstä

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Tulos on

$$x = -d + \tan \frac{z}{2} = -d + \tan \left(\frac{z}{2} - n\pi \right),$$

josta seuraa

$$\frac{z}{2} - n\pi = \arctan(x + d),$$

ja edelleen

$$y = -x + 2n\pi + 2 \arctan(x + d),$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $d \in \mathbb{R}$. Tämä on yhtälön ratkaisu siinä tapauksessa, että

$$y \neq -x + (1 + 2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entä jos

$$y = -x + (1 + 2n)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}?$$

Tällöin yhtälön $y'(x) = \cos(x + y)$ vasen puoli on -1 ja myös oikea puoli on -1 , joten yhtälö toteutuu. Siis myös suoraparvi $y = -x + (1 + 2n)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ toteuttaa yhtälön. Ratkaisu koostuu siis kokonaisuudessaan kahdesta käyräparvesta

$$\begin{cases} y = -x + (1 + 2n)\pi, \\ y = -x + 2n\pi + 2 \arctan(x + d), \end{cases}$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $d \in \mathbb{R}$. Helposti nähdään, että ylemmän parven suorat ovat alemman parven käyrien asymptootteja. Lisäksi alemman parven käyrät lähestyvät suoraparven suoria, kun $d \rightarrow \infty$ tai $d \rightarrow -\infty$.

1970-luvulla harrastettu, paljon parjattu uusi matemaatiikka toi koulumatematiikkaan monen murheen vastapainoksi myös tietynlaisen tarkkuuden. Yhtälöiden ja juurien määrittelyehtoja ja nimittäjien nollakohtia tutkittiin tarkemmin senkin jälkeen, kun joukko-opista oli suurelta osin luovuttu. Vielä 60-luvulla näihin asioihin ei koulumatematiikassa juuri kiinnitetty huomiota, ja niinpä esimerkiksi yo-tehtäväkokoelmassa [3] ja kirjasessa [4] ei tämän tehtävän yhteydessä huomata ollenkaan suoraparviratkaisua. Kokoelmassa [3] tehtävän ratkaisu on lähes täysin virheellinen ja [4] jättää käsittelyn vajaaksi ilmoittaen käyräparviratkaisun ainoastaan implisiittisesti.

Suomen matemaattisen yhdistyksen nettisivulta [8] löytyy lähes kaikki ylioppilastehtävät. Differentiaaliyhtälöistä kiinnostuneelle lukijalle lehtori suosittelee kevään 1999 tehtävää n:o 9b.

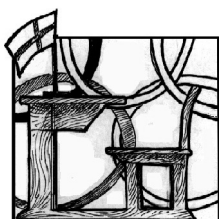
Kirjallisuutta

- [1] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset III. Ensimmäinen osa. Tavalliset differentiaaliyhtälöt*. Mercatorin kirjapaino oy, 1935.
- [2] Y. Juve ja V. Lyytikäinen, *Differentiaaliyhtälöiden alkeet*. Kirjayhtymä, 1971.
- [3] E. Kannisto, Y. Metsänkylä, *Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnossa vuosina 1944–1968*, kahdeskymmenesseitsemäs painos, Gummerus osakeyhtiö, 1968.
- [4] A. Kantanen, *Differentiaaliyhtälöiden harjoitus-esimerkkejä lukiota varten*, Otava 1968.
- [5] http://matematiikkalehtisolmu.fi/2016/1/lehtori_K_4.pdf
- [6] <https://matta.hut.fi/matta2/etc/vakkrtdy.html>
- [7] K. Väisälä, *Vektorianalyysi*. 3. p. WSOY, 1961.
- [8] <http://matemaattinenyhdistys.fi/yo/>

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

- Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)
- Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)
- Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)
- Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)
- Geometria (K. Väisälä)
- Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)
- Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)
- Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Nääänen)
- Algebra (K. Väisälä)
- Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
- Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
- Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)
- Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)
- Matematiikan historia (Matti Lehtinen)
- Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailut on taas käyty

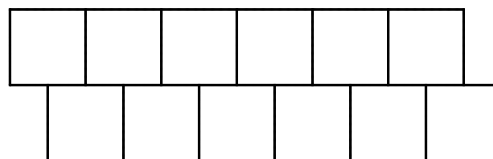
Olympiavalmennus on yhdessä Helsingin, Oulun ja Turun yliopiston sekä Summamutikkakeskuksen ja OuLUMA-keskuksen kanssa järjestänyt yhdessä alueellisen seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailun Helsingissä, Turussa ja Oulussa. Kolmeen alkukilpailuun osallistui yhteensä noin 2500 oppilasta, joista parhaat kutsuttiin kilpailemaan finaaliin. Helsingin finaalin ykkössija jaettiin Töölön yhteiskoulun **Daniel Aro-**nen ja Munkkiniemen yhteiskoulun **Aaro Niinen** välillä. Oulussakin ykkössija jaettiin: tasapisteissä olivat Oulun steinerkoulun **Otto Uolamo** ja Kellon koulun **Veeti Veteläinen**. Turun seudun finaalin ykkössija meni Vistan koulun **Pauli Lähteelle**.

Alkukilpailutehtävät ovat monivalintoja. Finaalitehtävistä suurin osa on avoimia kysymyksiä, eli vaaditaan kokonainen ratkaisu perusteluineen, ei vain vastausta. Ohessa esimerkkejä tehtävistä. Mukavia laskuhetkiä! Jos ratkaisuja kaipaa, niin niitä löytää kilpailusivuilta <http://matematiikkakilpailut.fi/seiskat/>. Jos keksii mielestään tyylikkään ratkaisun, jota ei löydy kilpailusivuilta, voi sen mielellään lähettää vaikka Solmun toimitukselle.

Alkukilpailutehtäviä

- Laske $1379 + 2480 - 3576$.
a) 283 b) 289 c) 353 d) 495 e) 603
- Oheinen kuvio väritetään kolmella värillä niin, että jokainen ruutu väritetään täsmälleen yhdellä värillä, ja mikäli kahdella ruudulla on yhtään yhteistä

sivua, ei niitä saa värittää samalla värillä. Montako väritysvaihtoehtoa on?



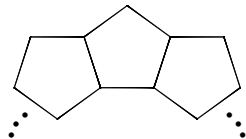
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 30

- Lukujonon sanotaan olevan *aritmeettinen* mikäli jonnossa minkä tahansa kahden peräkkäisen termin erotus on vakio. Mikä on aritmeettisen lukujonon 5, 66, 127, ... viideskymmenes eli 50. termi?
a) 2989 b) 2994 c) 3055 d) 3305 e) 6350
- Metrin pitunen keppi jaetaan kolmeen osaan, joiden pituudet suhtautuvat toisiinsa kuten luvut 2 : 5 : 7. Kuinka pitkä on lyhin osa?
a) $\frac{1}{5}$ m b) $\frac{2}{5}$ m c) $\frac{1}{7}$ m d) $\frac{2}{7}$ m e) $\frac{1}{6}$ m
- Mikä on luvun $7^7 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ viimeinen numero?
a) 7 b) 1 c) 5 d) 9 e) 3
- Määritä väritetyn alueen pinta-ala. Kuvassa on neliö, jonka sivun pituus on 1, ja josta on jätetty valkoiseksi yläkulmista alakeskelle yltävät suorakulmaiset kolmiot sekä yläreunasta keskipisteeseen yltävä tasakylkinen kolmio.



- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

7. Säännöllisen viisikulmion muotoisia laattoja laiteetaan kuvan muotoisesti vierekkäin kehään:



Kuinka monta laattaa kehässä on?

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

8. Montako sellaista nelinumeroista positiivista kokonaislukua (eli kokonaislukua väliltä 1000–9999) on olemassa, joiden numeroiden summa on parillinen?

- a) 2250 b) 4499 c) 4500 d) 5000 e) 5001

Loppukilpailutehtäviä

1. Tarkastellaan merkeistä ♥ ja ♦ muodostettuja jonoja. Saamme tehdä jonoille kolmenlaisia operaatioita:

- Voimme aina pyyhkiä pois kaksi peräkkäistä ♥-merkkiä;
- voimme aina korvata peräkkäiset merkit ♥♦♥ peräkkäisillä merkeillä ♦♦; ja kääntäen
- voimme aina korvata peräkkäiset merkit ♦♦ peräkkäisillä merkeillä ♥♦♥.

Selvitä, miten näillä operaatioilla voi jonon ♦♦♦♦♦♦♦♦ muuttaa jonoksi ♦.

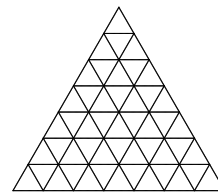
2. Tasossa on 100 suoraa. Jotkin niistä voivat olla yhdensuuntaisia yhden tai usemman muun suoran kanssa, mutta mitkään kolme eivät leikkaa samassa pisteessä. Onko mahdollista, että suorilla on kaikkiaan tasan 2016 leikkauspistettä?

3. Huoneessa on 25 hehkulamppua numeroituna yhdestä kahteenkymmeneenviiteen. Jokaisessa lampussa on katkaisija, jota kerran painamalla lamppu syttyy ja uudestaan painamalla taas sammuu. Lamput ovat aluksi kaikki pois päältä. Painetaan ensin jokaista katkaisijaa, jonka numero on jaollinen yhdellä (1, 2, 3, ..., 25). Sitten jokaista, jonka numero on jaollinen kahdella (2, 4, 6, ..., 24), sitten kolmella jaolliset ja niin edespäin aina 25:llä jaollisiin asti.

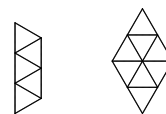
Mitkä lampuista ovat lopuksi päällä ja miksi?

4. Anna, Heta, Juha, Matti, Oona, Reetta ja Teemu kokoontuvat joka tiistai matematiikkakerhoon. Kerho kokoontuu pyöreän pöydän ympärille. Tuoleja on seitsemän. Matti istuu aina samalla paikalla. Heta haluaa istua Matin vieressä. Oona ja Reetta eivät tule toimeen, eivätkä siten halua istua vierekkäin. Monellako eri tavalla oppilaat voivat asettua pöytään?

5. Tarkastellaan tällaista tasasivuisista kolmioista muodostuvaa ruudukkoa:



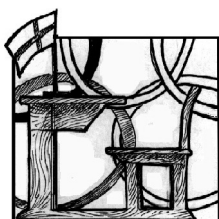
Voiko tämän ruudukon laatoittaa seuraavan muotoisilla laatoilla?



Kuten tavallista laatoitettaessa, emme salli laattojen menevän päällekkäin, emmekä ylittää ruudukon reunaa.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



Pronssia Buştenista!

Viidennet Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset järjestettiin 10.–16.4.2016 idyllisissä vuoristomaisemissa Buştenissa, Romaniassa. Kilpailuun osallistui kaikkiaan 147 kilpailijaa 38 eri maasta. Suomea edustanut Ella Anttila Helsingin matematiikkalukiosta sai pronssimitalin 14 pisteellä, kun mitaliraja oli 11 pistettä. Lisää tietoa löytyy kilpailun kotisivuilta osoitteesta <https://www.egmo.org/egmos/egmo5/>

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten kilpailutehtävät 2016

1. Olkoon n pariton positiivinen kokonaisluku, ja olkoot $x_1, x_2, \dots, x_n$ ei-negatiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}),$$

missä $x_{n+1} = x_1$.

2. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, ja leikatkoont lävistäjät AC ja BD pisteessä X . Olkoot C_1 janan CX keskipiste, D_1 janan DX keskipiste ja M janan CD keskipiste. Suorat AD_1 ja BC_1 leikkaavat pisteessä Y , ja suora MY leikkaa lävistäjää AC pisteessä E ja lävistäjää BD pisteessä F , missä E ja F ovat eri pisteitä. Osoita, että suora XY sivuaa pisteiden E , F ja X kautta kulkevaa ympyrää.

3. Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan yksikköneliön muotoisista ruuduista koostuvaa $4m \times$

$4m$ -taulukkoa. Kaksi eri ruutua *liittyvät* toisiinsa, jos ne ovat samalla rivillä tai samassa sarakkeessa. Mikään ruutu ei liity itseensä. Jotkin ruudut väritetään siniseksi niin, että jokainen ruutu liittyy ainakin kahteen siniseen ruutuun. Määritä pienin mahdollinen määrä sinisiä ruutuja.

4. Kaksi samansäteistä ympyrää ω_1 ja ω_2 leikkaavat toisensa kahdessa eri pisteessä X_1 ja X_2 . Tarkastellaan ympyrää ω , joka sivuaa ympyrää ω_1 ulkopuolelta pisteessä T_1 , ja joka sivuaa ympyrää ω_2 sisäpuolelta pisteessä T_2 . Osoita, että suorat X_1T_1 ja X_2T_2 leikkaavat toisensa pisteessä, joka sijaitsee ympyrän ω kehällä.

5. Olkoot k ja n kokonaislukuja, joille $k \geq 2$ ja $k \leq n \leq 2k - 1$. Sijoitetaan $n \times n$ -šakkilaudalle suorakaitteen muotoisia laattoja, joista jokaisen mitat ovat joko $1 \times k$ tai $k \times 1$. Jokainen laatta peittää täsmälleen k ruutua, ja mitkään kaksi laattaa eivät mene päällekkäin. Tätä jatketaan, kunnes laudalle ei voi enää asettaa lisää laattoja tällä tavalla. Selvitä jokaisille k ja n , mikä on pienin mahdollinen määrä laattoja tällaisessa laatta-asetelmassa.

6. Olkoon S niiden positiivisten kokonaislukujen n joukko, joille jokin luvuista $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$ on luvun n^4 tekijä. Osoita, että joukossa S on äärettömän monta lukua, jotka ovat muotoa $7m$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 1$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 2$, äärettömän monta lukua muotoa $7m + 5$ sekä äärettömän monta lukua muotoa $7m + 6$, mutta ei ainuttakaan lukua, joka olisi muotoa $7m + 3$ tai $7m + 4$, missä m on kokonaisluku.

Solmu 2/2016

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, postdoctoral fellow, Basque Center for Applied Mathematics

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

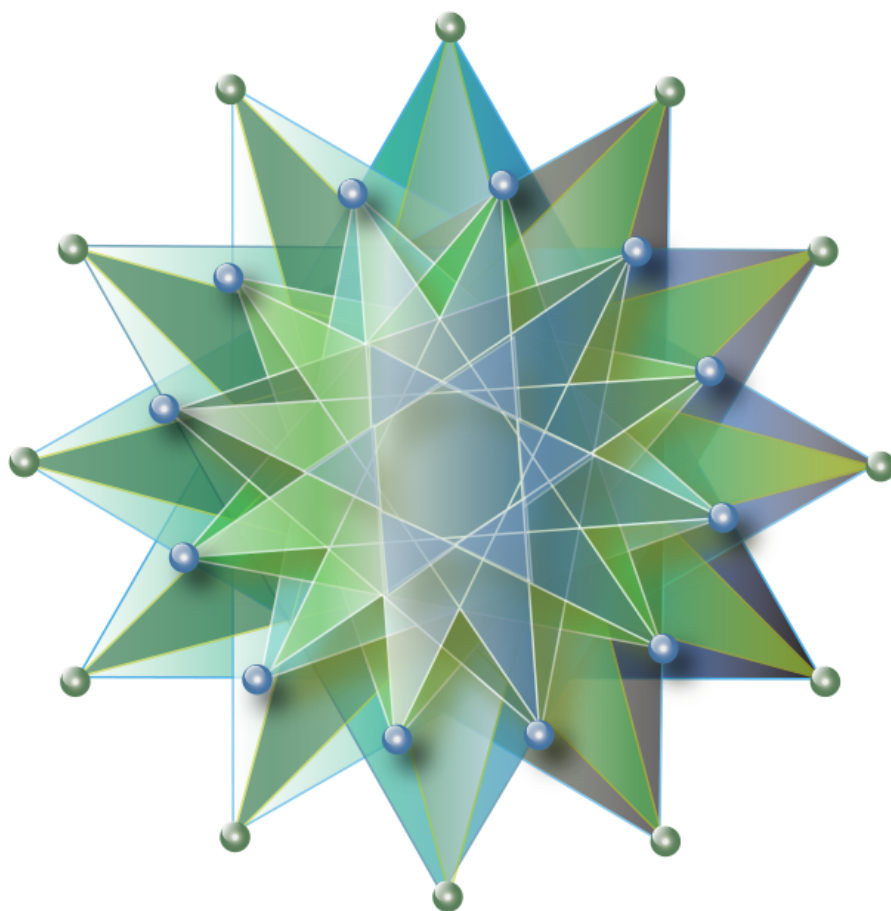
Petri Rosendahl, assistentti, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 3/2016 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.8.2016 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



MATEMATIIKAN VERKKOSANAKIRJA

MATEMATIIKKALEHTISOLMU.FI