Eräs vanha kilpailutehtävä yleistyksineen

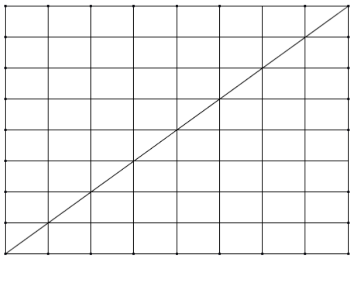
Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Muinoin, muistaakseni syksyllä 1996, MAOL:n peruskoulukilpailun alkukilpailussa oli tehtävä, joka meni suurin piirtein näin: ”Kuinka monen ruudun läpi kulkee 56×48-ruudukon lävistäjä?” Tehtävässä saattoi hyvinkin olla hieman eri lukuarvot, ja luultavasti sanamuodotkin olivat erilaisia. En muista ihan tarkasti, sillä olen lukenut tehtävän viimeksi lähes kaksikymmentä vuotta sitten. Kuitenkin tuolla muotoilulla saadaan jo tehtävän idea selville.

Kuinka tämä ratkeaa?

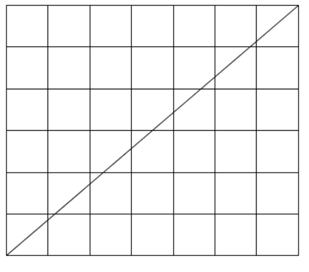
Näillä luvuilla ei ole mahdoton ajatus piirtää ruudukkoa ja sille lävistäjää ja sen jälkeen tyynesti laskea paperista ruutujen lukumäärä. Huolellinen kyllä joutuu olemaan, jos haluaa huolimattomuusvirheet välttää. Voisikin ehkä olla järkevää tehdä jotain muuta.

Huomataan aluksi, että $56 = 7\cdot 8$ ja $48 = 6\cdot 8$. Ruudukon molemmat sivut ovat siis jaettavissa kahdeksalla, jolloin myös lävistäjä jakautuu kahdeksaksi pienen suorakulmion lävistäjäksi. Kas näin:



Kuvan jokainen ruutu sisältää siis 6×7-ruudukon. Lävistäjän osat todellakin ovat 6×7-ruudukkojen lävistäjiä, eli ne menevät kulmasta kulmaan. (Mikäli lukija ei tätä usko, voi lukija piirtää vaikkapa 6×9-ruudukon ja 10×14-ruudukon, jakaa ensimmäisen sivut kolmeen osaan, toisen sivut kahteen osaan ja meditoida näiden piirustusten ääressä.)

Nyt tämän 6×7-ruudukon voi käsitellä vaikka piirtämällä kuvan ja laskemalla suoraan kuvasta. (Silloin toki herää kysymys, että onko tämä riittävän täsmällinen lähestymistapa, vai pitäisikö jotain todistaakin, mutta ainakin itse pitäisin tätä ihan riittävänä peruskoulutasolla.) Kuva on tässä:

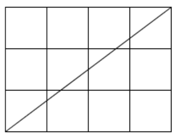


Nyt voidaan laskea. Suoraan paperista laskemalla saadaan, että lävistäjä kulkee 12 ruudun kautta. Alkuperäisessä kuviossa lävistäjä siis kulkee $12\cdot 8 = 96$ ruudun kautta.

Muutama erikoistapaus ja oppinut arvaus

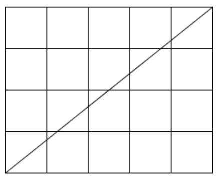
Maailmassa on muitakin ruudukoita kuin sellaisia, jotka saadaan muodostettua latomalla yhtä monta 6×7-ruudukkoa päällekkäin ja vierekkäin. Tarkastellaan nyt muutamaa tällaista ruudukkoa.

Ensin 3×4-ruudukko:



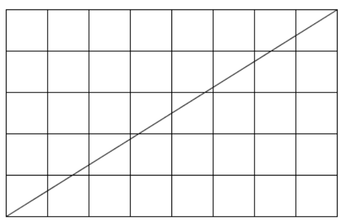
Lävistäjä kulkee nyt kuuden ruudun kautta.

Nyt 4×5-ruudukko:



Lävistäjä kulkee nyt kahdeksan ruudun kautta.

Katsotaan vielä 5×8-ruudukkoa:



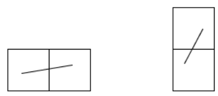
Lävistäjä kulkee nyt 12 ruudun kautta.

Vaikuttaisi siis siltä, että mikäli kyseessä on $\ell \times k$-ruudukko, kun ei ole olemassa mitään ykköstä suurempaa kokonaislukua, jolla voisi jakaa sekä luvun ℓ että k niin, että molempien jakolaskujen tulos on kokonaisluku (eli lukujen *suurin yhteinen tekijä* on yksi), kulkisi lävistäjä $k + \ell - 1$ ruudun läpi.

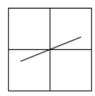
Oppineen arvauksen perustelu

Keskitytään yksinkertaisuuden vuoksi vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan menevään lävistäjään (suorakulmion toinen lävistäjä käyttäytyy samoin, kulkusuunta taas sovitaan yksinkertaisuuden vuoksi). Tarkastellaan aluksi lävistäjän kulkemista ruudukossa, ennen kaikkea sitä miten lävistäjä kulkee ruudusta toiseen. Ensimmäiseksi havaitaan, että lävistäjän on siirryttävä ruudusta viereiseen ruutuun, joko yllä tai oikealla olevaan. Se ei siis voi mennä kulmasta yli kulmittaiseen ruutuun (tätä perustellaan vielä hiukan myöhemmin – lukija voi joko lukea perustelut tai sitten piirrellä itse kuvia ja miettiä, miksi näin on). Esitetään vielä kuvin hyväksyttävät tilanteet ja mahdoton tilanne.

Näin lävistäjä voi tehdä:

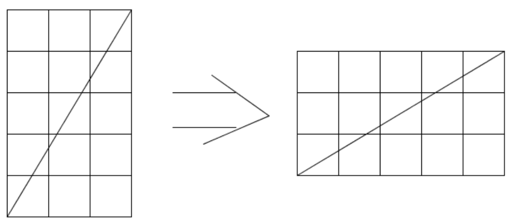


Näin lävistäjä ei voi tehdä:

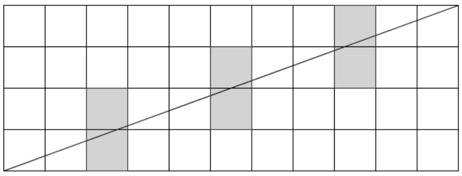


Kulman yli siirtyminen ei ole mahdollista, sillä silloin alkuperäisen ruudukon vasemmasta alakulmasta siihen kulmaan, jonka yli lävistäjä kulkee, voitaisiin muodostaan pieni suorakulmio, jonka lävistäjä olisi alkuperäisen ison ruudukon lävistäjän osa. Tällöin pienen ruudukon pitäisi itse asiassa olla muotoa $d\ell' \times dk'$, missä $\frac{\ell}{\ell'} = \frac{k}{k'} = h$, jonka pitäisi olla kokonaisluku, kun alkuperäinen ruudukko olisi kooltaan $\ell \times k$. Tämä tarkoittaisi, että sekä k että ℓ olisi jaollinen kokonaisluvulla h, joka olisi suurempi kuin yksi. Oletimme, että näin ei voi olla.

Lävistäjän tulee siis edetä vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan. Voidaan ajatella, että ruudukko on leveämpi kuin korkea, koska jos ruudukko on korkeampi kuin leveä, voidaan se kääntää, jolloin saadaan ruudukko, jolla on enemmän leveyttä kuin korkeutta, eli näin:



Ensin siis siirrytään jonkin aikaa oikealle, sitten yksi ylös, sitten taas jonkin aikaa oikealle, yksi ylös, ja näin jatketaan, kunnes ollaan oikeassa yläkulmassa. Tässä kuvassa on tummennettu ne kohdat, joissa tehdään siirtymä ylös (tässä nimenomaisessa ruudukossa). Muulloin siirtymä on aina oikealle:



Tämä tarkoittaa sitä, että lävistäjä käy täsmälleen kerran jokaisessa sarakkeessa paitsi niissä sarakkeissa, joissa on siirtymä ylläkkäin. Näissä sarakkeissa lävistäjä kulkee kahden ruudun läpi. Jokaisesta oikealle siirtymästä tulee ℓ ruutua. Ylöspäin siirtymistä tulee vielä jonkin verran ruutuja lisää. Niistä tulee itse asiassa $k-1$ ruutua lisää, sillä ensimmäinen ylläkkäin siirtymä vielä alimmalta riviltä toiseksi alimmalle, toinen toiseksi alimmalta kolmanneksi alimmalle ja niin edespäin. Yhteensä ylläkkäin siirtymiä on siis $k-1$ kappaletta. Kaikkien lävistäjän käymien ruutujen määrä on siis $\ell + k - 1$.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pyynnön voi lähettää osoitteella

juha.ruokolainen(at)helsinki.fi

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät