

Solmu

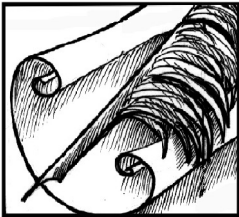
Matematiikkalehti
1/2016

matematiikkalehtisolmu.fi



Sisällys

Pääkirjoitus: Kaikki, minkä tietää itse, on triviaalia (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	3
Aivotutkijan vinkkejä matematiikan opiskeluun taito- ja taideaineiden maailmasta (Minna Huotilainen)	5
Tasograafit ja väritykset (Esa V. Vesalainen)	7
Eräs vanha kilpailutehtävä yleistyksineen (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	14
Matemaatikkona vakuutuslalla ja työeläkelaitoksessa (Jarno Ruokokoski)	17
Keskimääräisyys ja reiluus (Samuli Siltanen)	22
Differentiaalilaskentaa (Lehtori K.)	24
Matematiikkadiplomit, tilanne syksyllä 2015 (Marjatta Näätänen)	26
Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	27



Kaikki, minkä tietää itse, on triviaalia

Pääkirjoitus

Luin vähän aikaa sitten mainion kolumnin Yleisradion verkkosivulta. Kolumnin aiheena oli, miten politiikantoimittajien pitäisi ottaa oppia urheilutoimittajilta, jotta tekstit olisivat vähän vauhdikkaampia ja vetoaisivat massoihin paremmin. Kolumni ei varmastikaan ollut yliampuvuudessaan kovin tosissaan kirjoitettu, mutta ryhdyin silti miettimään, että meillä matematiikassa on ehkä hieman samaa ongelmaa kuin politiikasta kirjoittavillakin: vauhti ja vaaralliset tilanteet vetoavat massoihin, mutta oikeasti homman pointti on usein teknisissä yksityiskohdissa (ja silloinkin, kun omasta mielestämme kyse on suurista kuvioista, on se suurille massoille järkyttävän teknistä).

Ensimmäinen ongelma on tietysti haastavuus: Urheiluselostuksesta voi ymmärtää hyvin paljon ilman suurempaa koulutusta. Jotain voi jäädä ymmärtämättä, mutta se tuskin pilaa kokonaiskuvaa. Matemaattisesta selityksestä ei ymmärrä välttämättä edes yhtä prosenttia ilman asianmukaista koulutusta. Asianmukainen pitää tässä ymmärtää joustavasti: Joskus riittää innostus tai matematiikan lukio-opinnot jo pitkälle. Toisinaan ei edes näennäisesti oikean alan tutkimus. Moni meistä ammatikseen yliopistolla työskentelevistä on varmasti joskus ollut kuuntelemassa muka yleistajuista esitelmää, josta on ehkä ymmärtänyt otsikon ja ensimmäisen minuutin, jos sitäkään.

Eräs luennoitsija Helsingin yliopistolla totesi fuksikursilla, että pitää olla tarkkana kehittäessään tenttitehtäviä: jos luennoitsijan mielestä tenttitehtävät ovat mielenkiintoisia, ovat ne auttamatta liian haastavia kurssikokeeseen. Tähän lausahdukseen tiivistyy osa ma-

tematiikasta kertomisen ongelmallisuudesta: ne asiat, joista olemme oikeasti innoissamme, ovat usein todella haastavia. Minä itse voin myöntää olevani hirvittävän innostunut esimerkiksi yleistettyjen Lin kertoimien asymptotiikasta ja riippuvuuksista nollakohtiin, mutta en unelmoisikaan kertovani tästä kovin tarkasti kenellekään, jolla ei ole matemaattista koulutusta. Voisin ehkä yrittää pikkuisen raapaista pintaa. Silloinkin joutuisin asettamaan sanani todella tarkasti, jotta en heti pelottaisi kuulijaa pois. Silti riskinä olisi, että kuulijani pelästyisi samanaikaisesti, kun itse tuntisin, että vielä ei päästy edes asiaan, ja silloin, jos tuntuu siltä, että vielä ei edes puhuta asiasta, on paljon hankalampi olla innostunut kuin jos puhuu juuri siitä, mistä haluaisikin puhua.

En yritä sanoa, että matematiikasta (tai politiikasta) pitäisi puhua silmät kiiluen ja jääkiekkoselostajalta kuulostaen. Väitän kuitenkin, että kuulijankin näkökulmasta asia on kiinnostavampaa, jos puhuja kuulostaa innostuneelta, eikä vain esitä lakonista monologia.

Vähän aikaa sitten rikottiin uusi alkulukuennätys. Suurin tunnettu alkuluku on nyt $2^{74207281} - 1$. Se on aivan valtava. Kun se kirjoitetaan kymmenjärjestelmässä, on siinä noin 22 miljoonaa numeroa. Otin hyllystäni ensimmäisen käteen osunneen kirjan, ja laskin miten monta merkkiä sivulle mahtuisi. Vastaus oli vajaa 2000. Kirja oli toki Heli Laaksosen Lähtisiks föli?, jossa on nähdäkseni hieman normaalia väljempi ladonta. Melko turvallisesti voi kuitenkin arvioida, että yli neljää tuhatta merkkiä ei sivulle siististi survottaisi. Tällaisia neljän tuhannen merkin sivuja uusi alkuluku siis

täyttäisi noin 5500, eli ehkä kymmenen tai useamman normaaliyhkon kirjan verran. Uuden alkuluvun kymmenjärjestelmäesityksestä saisi siis jopa kirjasarjan!

Tällaisen uuden valtavan alkuluvun löytyminen on periaatteessa helppo uutisoitava, ja siitä on helppo kertoa massoille. Alkuluvun määrittelmä on helppo antaa, ja kuka tahansa tajuaa, että kirjasarjan täyttävä luku on valtava. Mutta entäs sitten? Valtavan isolla alkuluvulla ei kuitenkaan ole lopulta niin paljon merkitystä. Sillä on merkitystä, että iso luku voidaan todistaa alkuluvuksi. Se kertoo menetelmien toimivuudesta. Sitä varten mahdollisesti pitää kehittää uusia menetelmiä todistaa, että luku on alkuluku, mutta sillä mikä luku tarkasti ottaen on uusi suurin löytynyt alkuluku, ei ole niin paljon väliä.

Tyypillisesti uudet alkulukuennätykset ovat muotoa $2^p - 1$, missä p on myös alkuluku. Tällaisia alkulukuja kutsutaan Mersennen alkuluvuiksi. Alun perin uskottiin, että kaikki muotoa $2^p - 1$ olevat luvut ovat alkulukuja, kun p on alkuluku, mutta jo $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ onkin yhdistetty luku. Tähän päivään mennessä Mersennen alkulukuja on löydetty 49 kappaletta, pienin niistä on $3 = 2^2 - 1$ ja suurin tämä juuri löytynyt jättiläinen. Mersennen alkulukuja uskotaan olevan äärettömän paljon, ja tokihan aina uuden sellaisen löytyminen vahvistaa tätä uskoa. Mersennen alkuluvut ovat kuitenkin hyviä kandidaatteja alkulukumetsästykseseen, sillä niistä voidaan luvun suuruuteen nähden varsin säädyllisellä vaivalla tarkistaa, ovatko ne alkulukuja vai ei. Tällä yksinkertaisuudella on kuitenkin hintansa: se, että kaikki alkulukuennätykset ovat samaa muotoa, antaa kovin vähän informaatiota erityyppisistä luvuista.

Toinen tunnettu ennätysten etsinnän muoto on suurten alkulukukaksosten metsästyks. Lukuparia $p, p+2$ kutsutaan alkulukukaksosiksi, mikäli ne molemmat ovat alkulukuja. Tähän metsästykseseen liittyy osin sama liik-

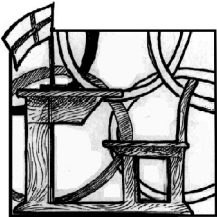
keelle laittava voima kuin Mersennen alkulukuihinkin: niitä uskotaan olevan äärettömän paljon, mutta sitä ei ole todistettu.

Eräs Helsingin yliopiston maineikas professori totesi taannoin, että kaikki omat tulokset tuntuvat triviaaleilta. Näinhän se usein on: olen pahimmillaan takonut päästä seinään puoli vuotta todistaakseni jonkin tuloksen, ja tuloksen ollessa valmis miettinyt, että se on kyllä niin triviaali, että ainakaan todistuksessa ei ole mitään mielenkiintoista. (Onneksi tulos itsessään oli ihan hyvä, niin se tuntui yhä julkaisemisen arvoiselta.) Minun tekisi mieleni lisätä, että lopulta hyvin moni asia, jonka tietää, tuntuu triviaalilta, varsinkin jos asian tuntee hyvin.

Alkulukuennätysten kohdalla triviaalius on hieman eri tasolla: En väitä tuntevani alkulukujen etsintäprojekteja. Jos tuntisin, puhuisin varmaan niistä innoissani (juuri niistä teknisistä detaljeista). Sen sijaan tiedetään, ja on tiedetty jo hyvin pitkään, että alkulukuja on äärettömän paljon. Silloin se, että uusi ennätysasuuri luku löytyi, ei tunnu niin ihmeelliseltä, vaikka menetelmät ja urakkaan käytetyt työtunnit kaiken mahdollisen huomion ansaitsivatkin.

Voi hyvin olla, että olen koko tämän kirjoituksen ajan aliarvioinut suuria massoja. Ehkä niistä alkulukutestien menetelmistä voisi puhua karkealla tasolla. Ehkä myös niistä Lin kertoimista. Olenhan lopulta yrittänyt kertoa modulimuodoistakin ihmisille, joilla ei ole matemaattista koulutusta. Seuraus ei ole ollut järkytys, vaan selitykseni kuunteleminen, ja välillä keskeyttäminen, jos jokin sana on ollut vieras. Ihan helppoa se ei varmasti ole kummallekaan osapuolelle ollut, mutta aika palkitsevaa.

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Aivotutkijan vinkkejä matematiikan opiskeluun taito- ja taideaineiden maailmasta

Minna Huotilainen

Aivot ja työ -tutkimuskeskus, Työterveyslaitos

Aivotutkimus on tieteenala, jolla matematiikkaa todella tarvitaan. Aivotutkimuslaitteiden huima tekninen kehitys on aikaansaanut tilanteen, jossa aineiston suuri määrä mahdollistaa todella pitkälle menevän tilastollisen tarkastelun ja matemaattisten mallien kehittelyn. Matematiikan ja tietojenkäsittelytieteen asiantuntijat ovatkin mukana aivotutkimusryhmien jäseninä miettimässä, miten näitä uusia mahdollisuuksia voidaan hyödyntää.

Suomella on aivotutkimuksessa poikkeuksellisen paljon kansainvälistä merkitystä: Suomalaiset tutkijat ovat maailmalla kuuluisia esimerkiksi tutkimusmenetelmä magnetoenkefalografian (MEG) kehitystyöstä ja automaattisen kuulomuistin tutkimuksista. Aivotutkimuksen tulokset alkavat olla merkityksellisiä myös oppimisen ja koulun näkökulmasta, sillä tutkimusmenetelmät antavat nykyään mahdollisuuden tehdä paitsi teoreettista myös hyvin käytännöllistä, tavallisen elämän tilanteisiin liittyvää tutkimusta. Erityisesti taito- ja taideaineiden oppiminen ja harrastaminen voi olla matematiikan taitojen kannalta hyödyllistä. Tässä artikkelissa kerron aivotutkimuksen ja oppimistutkimuksen pohjalta nousevia suosituksia oppimisen tehostamiseksi.

Liikunta on varmasti kaikkein eniten tutkittu taitoaine aivojen oppimis- ja muistitutkimuksen näkökulmasta. Jo kymmeniä vuosia sitten tehdyt tutkimukset osoittavat koe-eläinten oppivan paremmin ja niiden muis-

tin säilyvän paremmin, mikäli ne saavat liikkua oppimisen aikana tai saman päivän aikana. Liikunnallinen elämäntapa näyttää suojelevan aivoja tehokkaasti: monet ikääntymiseen liittyvät muutokset ovat hitaampia liikuntaa harrastavilla. Uudessa tutkimuksessa korostuu myös ns. liikahtelu eli käytännössä istumisasennon välttäminen tai pitkien istumisrupeamien katkaiseminen oppimistilanteessa. Tutkimukset osoittavat, että opimme paremmin seisoma-asennossa kuin istuen, ja seisten tai kävellen opittu materiaali säilyy muistissa paremmin kuin istuen opittu. Oppimisen aikana tapahtuva liikahtelu ja seisoma-asennon käyttö näyttäisi tutkimusten valossa olevan erityisen hyödyllistä niille oppilaille, joilla on tarkkaavuuden säätelyn ongelmia. Saako teidän matikanluokassa liikkua tai seistä opetuksen aikana? Miten varmistetaan, ettei tästä aiheudu melua? Aivotutkimuksien avulla on havaittu, että jo muutaman minuutin kestoisen, hyvin intensiivinen liikunta (tutkimuksissa yleensä joko koripallo, jonglööri tai musiikin tahtiin tehty nopea tanssillinen liikunta 2–10 minuutin ajan) avaa oppimiselle optimaalisen aikaikkunan, joka tutkimuksista riippuen kestää 20 minuutista 60 minuuttiin. Tämän optimaalisen ajanjakson aikana aivot ovat kemiallisesti valmistautuneet oppimiseen valmistelemalla oppimisalueiden hermosoluja vastaanottamaan uutta, relevanttia tietoa ja säilyttämään sitä. Käytä siis matematiikan tuntia edeltävä välitunti ulkoilun ja liikkumisen merkeissä. Samoin tutkimuksissa on havaittu, että oppimisen jälkeen tapah-

tuva 45 minuuttia tai pidempään kestävä liikkuminen tai pelkkä liikahtelu (esimerkiksi koiran ulkoiluttaminen tai kotityöt) vaikuttaa positiivisesti päivän aikana opitun materiaalin säilymiseen muistissa, kun muistia testataan seuraavana päivänä tai kolmen viikon kuluessa. Jos koet oppineesi jotain vaativaa, käytä saman päivän illasta hetki rauhalliseen liikuntaan, jotta saat opitun tiedon pysymään muistissa. Älä kuitenkaan harasta liikuntaa liian myöhään, ettei se häiritse untasi. Oppimisen jälkeisen yön hyvä uni on nimittäin erityisen merkittävää tiedon säilyttämisen kannalta.

Musiikki on taideaine, johon liittyvä aivotutkimus on Suomessa ja maailmalla tällä hetkellä erittäin aktiivista. Musiikin harrastaminen näyttää muokkaavan aivoja erittäin voimakkaasti ja positiivisella tavalla. Soittimen soittamista harrastavien lasten aivoissa tapahtuu nopeutunutta rakenteellista ja toiminnallista kehitystä kuulojärjestelmän, tuntojärjestelmän, motorisen järjestelmän, aivokurkiaisien, pikkuaivojen ja otsalohkon alueella. Nämä aivomuutokset johtuvat musiikkiharrastuksesta, mutta niiden vaikutus ulottuu harrastuksen ulkopuolelle. Musiikkia harrastavien lasten keskittymiskyky on parempi ja he saavat parempia pisteitä monissa testeissä, esimerkiksi äänteiden havaitsemista, puheen havaitsemista, hienomotoriikkaa, kuulomuistia, tarkkaavaisuuden säätelyä, lukemista, vieraan kielen äänteiden havaitsemista ja tuottamista testauksissa. Soittimen soittoharjoittelu vaatii paljon tarkkaavaisuutta, mutta se myös kehittää sitä. Soittamista harjoiteltaessa kuulo- ja motorinen järjestelmä kehittyvät tavallista nopeammin, ja näitä resursseja oppilas voi käyttää myös muissa kuuloa ja liikkumista vaativissa tehtävissä. Mieti siis, haluaisitko aloittaa soitto- tai lauluharrastuksen. Klassista musiikkia voi harrastaa musiikkiopistoissa ja muuallakin, ja monilla paikkakunnilla on myös rytmimusiikin opetusta. Tutkimuksissa on havaittu positiivisia vaikutuksia aivotuomintaan myös itseohjautuvasta bändisoittimien soi-

tosta, jossa ainut opettaja on nettivideot. Musiikkia voi harrastaa monella tavoin, ja se näyttää olevan eri muodoissaan oppimiselle erityisen hyödyllistä. Musiikin kuuntelemisella on nopea vaikutus oppimismahdollisuuteen. Juuri ennen oppimista noin 15 minuutin ajan kuunneltu nopeatempoinen ja kuulijan mielestä miellyttävä ja piristävä musiikki avaa oppimiselle optimaalisen aikaikkunan, joka näyttää tutkimuksesta riippuen kestävän noin puolisen tuntia. Tämä oppimisikkuna muistuttaa jonkin verran liikunnan avulla syntyvää oppimisikkunaa. Matematiikan tuntia tai läksyjen tekoa ennen kannattaa siis kuunnella vauhdikasta, mukavaa musiikkia. Noin puolella oppilaista myös oppimisen ja tehtävien tekemisen aikana kuunnellusta musiikista on apua oppimiseen, kun taas noin puolella oppilaista musiikin kuuntelu samaan aikaan huonontaa oppimista. Ei-kielellisissä tehtävissä ja instrumentaalimusiikkia kuunnellessa hyötyjien määrä kasvaa. Tarkkaavaisuuden ongelmista kärsivillä oppilailla tehtävien aikana tapahtuva musiikin samanaikainen kuuntelu näyttää olevan hyödyllisempää kuin muilla oppilailla. Jokaisen tulisikin itse kokeilla, onko esimerkiksi läksyjen teon aikana musiikin kuuntelusta hyötyä vai haittaa.

Muistakin taito- ja taideaineista voi olla matematiikan oppijalle paljon hyötyä. Taito- ja taideaineet stimuloivat aivoja voimakkaasti. Esimerkiksi käsitöissä ja kuvataiteessa aktivoidaan laajasti näkö- ja tuntojärjestelmiä. Taito- ja taideaineiden integroiminen muuhun opetukseen antaa mahdollisuuksia syventää oppimista itse tekemällä. Aivotutkimuksen näkökulmasta tekemällä oppiminen syventää osaamista ja on erittäin arvokasta muistissa säilymisen kannalta. Käsitöet ja askartelu voivat olla erinomaisia menetelmiä matematiikan vaikeiden käsitteiden oppimisessa: kertotaulua hyödynnetään myös patalappua virkatessa ja olenpähännyt virkatun dodekaedrin ja fraktaalinkin. Taito- ja taideaineita harrastamalla voidaan siis tukea monin tavoin matematiikan oppimista.

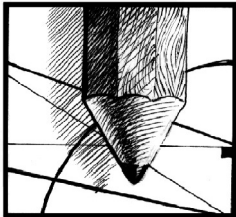
Solmun matematiikan verkkosanakirja

Solmun matematiikan verkkosanakirja on osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/a.html

Sekä sisältöä että tekniikkaa koskevat kokemukset ovat meille arvokkaita ja kaikenlaiset parannus- sekä korjausehdotukset tervetulleita. Palautetta voi lähettää osoitteeseen

[toimitus\(at\)matematiikkalehtisolmu.fi](mailto:toimitus(at)matematiikkalehtisolmu.fi)



Tasograafit ja väritykset

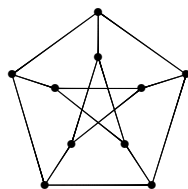
Esa V. Vesalainen

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Graafi on matemaattinen olio, joka koostuu kahdesta eri asiasta:

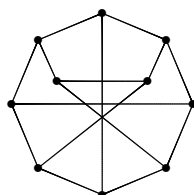
- 1) äärellisestä joukosta *kärkiä*; sekä
- 2) joukosta *särmiä*, eli eri kärkien pareja; kahden eri kärjen välillä joko on särmä tai sitten ei ole.

Tavanmukaisesti pieni graafi on helppo antaa kuvallisessa muodossa valitsemalla tason pisteitä kärjiksi, ja yhdistämällä kaksi kärkeä toisiinsa jonkinlaisella mukavalla viivalla silloin, kun ne ovat toistensa *naapureita*, eli silloin, kun niitä yhdistää särmä:

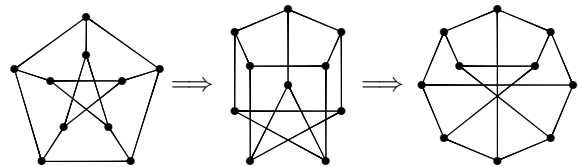


Kuva. Esimerkki graafista, *Petersenin graafi*.

On oleellista, että graafi itsessään ei tiedä sitä, miten se on piirretty tasoon. Esimerkiksi graafi



on sama kuin edellinen graafi, minkä näkee vaikkapa näin:



Voisimme myös antaa tämän saman graafin listana kärkien nimiä, ja listana näiden kärkien nimien pareja:

Kärjet: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
 Särmät: 01, 12, 23, 34, 40,
 05, 16, 27, 38, 49,
 57, 79, 96, 68, 85.

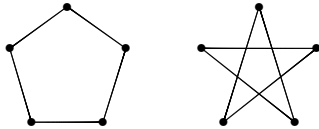
Toinen tapa esittää tämä listana olisi

Kärjet: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.
 Särmät: $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, ha,$
 $ae, cg, bi, if, dj, jh, ij$.

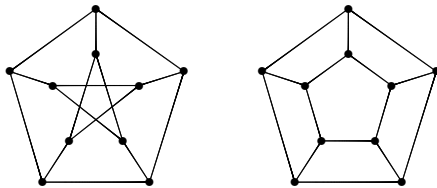
Se, että nämä kaksi eri listaa antavat saman graafin, ei ole mitenkään itsestäänselvää, mutta siitä voi vakuuttua esimerkiksi vaihtamalla kirjaimet numeroiksi $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto 6, d \mapsto 8, e \mapsto 5, f \mapsto 7, g \mapsto 9, h \mapsto 4, i \mapsto 2$ ja $j \mapsto 3$, jolloin jälkimmäisen graafin kärkien ja särmien listat muuttuvatkin edellisen graafin listoiksi, järjestystä lukuun ottamatta:

Kärjet: 0, 1, 6, 8, 5, 7, 9, 4, 2, 3.
 Särmät: 01, 16, 68, 85, 57, 79, 94, 40,
 05, 69, 12, 27, 83, 34, 23.

Yleensä samaistamme graafit, jotka ovat keskenään samanlaisia, mutta emme luonnollisestikaan tee näin, jos ne ovat jonkin isomman graafin eri osia. Esimerkiksi seuraavat graafit ovat ensimmäisen Petersenin graafin kuvassa eri osia, vaikka ne ovatkin rakenteeltaan samat:



On helppo todeta, että jos kaksi graafia ovat rakenteeltaan samat (oikeasti pitäisi käyttää kreikasta johdettua ilmaisua ”graafit ovat keskenään isomorfiset”, mutta sivuuttakaamme tällaiset hienoudet), niin niillä on oltava yhtä paljon kärkiä ja yhtä paljon särmiä. Samoin asettamalla kärjet sopivasti vastakkain on vastinkärjillä aina oltava yhtä paljon naapureita. Mutta on myös tärkeää tiedostaa, että nämä ehdot eivät ole riittäviä sen toteamiseen, että kaksi graafia ovat sama graafi. Esimerkiksi kaksi graafia



ovat ihan aidosti eri graafeja, vaikka molemmissa on yhtä paljon kärkiä ja särmiä, ja kaikkien kärkien asteet ovat samat. Esimerkiksi oikeanpuoleisessa graafissa kärjestä pääsee takaisin lähtökärkeen kiertämällä kolmen muun kärjen kautta, kun taas vasemmanpuoleisessa graafissa on aina kierrettävä vähintään neljän kärjen kautta.

Graafit ovat eräitä yksinkertaisimpia kuviteltavissa olevia matemaattisia olioita. Siitä huolimatta niiden teoria on hämmästyttävän rikasta, mistä myöhemmin kuvattavat tulokset todistavatkin.

Luonnollisesti graafin käsitteellä on monia monituisia erilaisia variaatioita. Esimerkiksi, voisimme sallia särmän alkavan ja päättyvän samasta kärjestä, jolloin puhuisimme silmukasta. Tai voisimme sallia useampia särmiä kahden kärjen välille. Vielä yleisemmin voisimme tarkastella graafia, jossa yksittäisillä särmillä olisi suunta. Ja niin edelleen ja niin pois päin. Kaikilla tällaisilla variaatioilla on luonnollisesti paikkansa, vaikka emme niistä sen enempää tässä mainitsekaan.

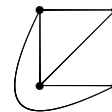
Ennen kuin siirrymme tarkastelemaan kiintoisia graafeihin liittyviä matemaattisia seikkoja, lienee paikallaan vielä sanoa muutama sananen graafien merkityksestä matematiikan ulkopuolella: ne ovat osoittautuneet hämmästyttävän hyödyllisiksi. Koska emme voi tässä tehdä enemmän oikeutta tälle tosiasialle, tyydymme vain mainitsemaan, että esimerkiksi algoritmitieos [6] sisältää katalogin usein käytännössä vastaan tulevista algoritmista ongelmista, ja noin kolmasosa katalogin ongelmista liittyy graafeihin.

Tasograafit

Kutsumme graafia *tasograafiksi*, jos sen voi piirtää tasoon niin, että mitkään kaksi särmää kuvaavaa viivaa eivät leikkaa toisiaan, paitsi tietenkin mahdollisesti itse kärjissä, joiden puolestaan ajatellaan olevan tason pisteitä. Esimerkiksi graafi



on tasograafi, kuten helposti näkee:



Itse asiassa juuri nyt emme voi antaa mitään esimerkkiä graafista, joka ei olisi tasograafi, mutta voimme tehdä niin hieman myöhemmin, kun käytettävissämme on enemmän teoriaa.

Meidän lienee syytä varoittaa lukijaa erästä seikasta: Tässä yhteydessä periaatteessa pitäisi olla varovainen sen kanssa, millaisia viivoja käyttää. Esimerkiksi, jos vaatisimme viivoilta vain ns. jatkuvuutta, niin osoittautuisi, että viivoja voisi piirtää niin, että ne peittäisivät kokonaisia tasoalueita, eivätkä siis enää näyttäisi lainkaan ”viivamaisilta”. Mutta osoittautuu, että jos rajoitamme piirrettävien viivojen luonnetta aivan vähänkin, niin tällaisia patologisia tilanteita ei yksinkertaisesti tule vastaan.

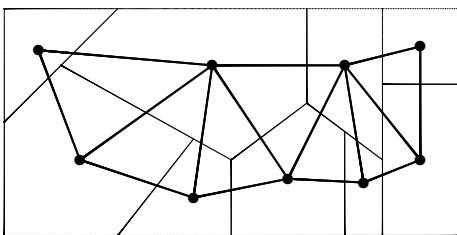
Luonnollisia mahdollisuuksia olisivat murtoviivat, eli viivat jotka koostuvat äärellisen monesta janasta. Kaikissa tämän artikkelin kuissa, yhtä poikkeusta lukuun ottamatta, käytämmekin yksinkertaisuuden vuoksi janoja. Tai voisi valita jossakin mielessä sileitä viivoja, esim. sellaisia, joilla on jokaisessa pisteessä hyvin määritelty tangentti, tai äärellisen monesta tällaisesta osasta koostuvia viivoja. Se, miten tarkalleen ottaen valinta tehdään, ei ole kovin tärkeää alla kuvatun matematiikan kannalta.

Toki käytämme näillekin viivoille hieman epätriviaaleja, mutta intuitiivisesti täysin selviä, tosiasioita, kuten sitä, että jos viiva lähtee pisteestä ja itseään leikkaamatta palaa takaisin samaan pisteeseen, niin viiva jakaa tason kahteen osaan, rajoitettuun sisäosaan sekä rajoittamattoman isoon ulkopuoleen.

Väriytykset

Eräs 1800-luvulta peräisin oleva ongelma kysyy: kuinka monella värillä voimme aina värittää kartan valtiot niin, että kaksi valtiota, joilla on yhteistä rajaviivaa, aina väritetään eri väreillä. Erityisesti, riittääkö neljä väriä aina tähän?

Tällä ongelmalla on helppo yhteys tasograafien kärkien väriytyksiin: oleellisesti ottaen joka valtion alueelle voi sijoittaa kärjen, ja jos kahdella naapurivalttiolla on yhteistä rajaviivaa, niin voimme yhdistää näiden valtioiden kärjet särmällä.



Kuva. Karttojen väriyksistä graafien väriytyksiin.

Eli tarkastelemmekin ongelmaa, kuinka monta väriä tarvitaan tasograafin kärkien värittämiseen niin, että naapurikärjet aina väritetään eri väreillä? Erityisesti, riittääkö neljä väriä tähän aina?

Tämä ongelma osoittautuu hämmästyttävän vaikeaksi. Ensimmäisenä sen ratkaisi Kempe vuonna 1879 osoittamalla, että neljä väriä riittää. Valitettavasti vain yksitoista vuotta myöhemmin Heawood huomasi todistuksessa virheen ja osoitti, että lähestymistapa kuitenkin riittää sen osoittamiseen, että viisi väriä on aina riittävästi. Esitämme alla viisivärilauseen todistuksen, oleellisesti ottaen samalla lähestymistavalla.

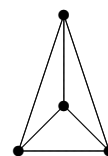
Tarina muuttuu erityisen kiehtovaksi vuonna 1976, jolloin Appel ja Haken lopulta todistivat nelivärilauseen. He hyödynsivät tietokonetta kuuluisassa todistuksessaan oleellisella tavalla. Alkuperäinen todistus oli monimutkainen myös tietokoneesta riippumattomilta osiltaan; se koostui 50 sivusta tekstiä ja kuvioita, 85 sivusta, joissa oli lähes 2500 kuviota lisää, sekä 400 mikrofilmisivusta, joissa oli lisää diagrammeja ja tuhansien pienten yksityiskohtien tarkistuksia. Tietokoneaikaa todistus oli vaatinut 1200 tuntia. Lisäksi vuosien

varrella todistuksen pienistä yksityiskohdista on löytynyt useita virheitä, jotka on yksitellen korjattu.

Todistus synnytti kiivasta keskustelua matemaattisen todistuksen luonteesta ja tietokoneen hyödyntämisestä todistuksissa. Vaikka tietokonetta hyödyntäviin todistuksiin suhtaudutaankin nykyisin myönteisemmin kuin ennen, keskustelu jatkuu edelleen.

Tasograafien teoriaa

Olkoon G yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää, ja jakakoot sen kärjet ja särmät tason f alueeseen. Tässä *yhtenäinen* tarkoittaa sitä, että graafissa mistä tahansa kärjestä pääsee särmii pitkin kulkemalla mihin tahansa muuhun kärkeen.



Kuva. Esimerkkigraafi. Tämä on yhtenäinen tasograafi, jolle $v = 4$, $e = 6$ ja $f = 4$. Neljäs alue on siis kuvion ulkopuolelle jäävä rajattoman suuri alue.

Todistamme viisivärilauseen neljässä osassa osoittamalla, että

1. $v - e + f = 2$;
2. $e \leq 3v - 3$;
3. jollakin kärjellä on enintään viisi naapuria; ja että
4. viisi väriä riittää.

Eulerin kaava. Jos yhtenäisellä tasograafilla on v kärkeä ja e särmää, ja se on piirretty tasoon niin, etteivät sen mitkään kaksi särmää leikkaa toisiaan, ja näin on syntynyt f aluetta mukaan lukien koko kuvion ulkopuolelle jäävä rajattoman iso alue, niin täytyy päteä $v - e + f = 2$.

Todistus. Aloitamme toteamalla, että väite varmasti pätee graafille, jolla on täsmälleen yksi kärki, sillä onhan tällöin $v = 1$, $e = 0$ ja $f = 1$, ja siis

$$v - e + f = 1 - 0 + 1 = 2.$$

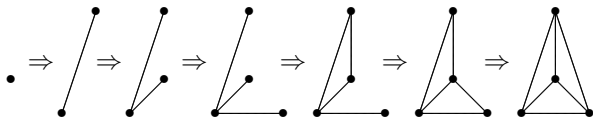
Todetaan seuraavaksi, että jos meillä on tasoon oikein piirretty yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää ja f aluetta, ja jolle vielä pätee $v - e + f = 2$, niin tämä identiteetti säilyy lisättäessä graafiin yksi uusi kärki ja yksi uusi särmä, joka kytkee uuden kärjen johonkin jo olemassaolevaan kärkeen. Onhan nimittäin uudessa graafissa $v + 1$ kärkeä, $e + 1$ särmää ja f aluetta, ja

$$(v + 1) - (e + 1) + f = v - e + f = 2.$$

Seuraavaksi voimme todeta, että jos meillä on tasoon oikein piirretty yhtenäinen tasograafi, jolla on v kärkeä, e särmää ja f aluetta, ja jolle vielä pätee $v - e + f = 2$, niin tämä identiteetti säilyy lisättäessä uusi särmä kahden jo olemassa olevan kärjen väliin. Onhan nimittäin uudessa graafissa v kärkeä, $e + 1$ särmää ja $f + 1$ aluetta – uusi särmä jakaa jonkin jo olemassa olevan alueen kahteen osaan – ja lisäksi

$$v - (e + 1) + (f + 1) = v - e + f = 2.$$

Lopuksi, lukija toivottavasti uskoo, että näillä kahdella operaatiolla voi rakentaa minkä tahansa yhtenäisen tasograafin yhdestä kärjestä lähtien.



Kuva. Esimerkkikuva Eulerin kaavan todistuksen lähestymistavasta, eli siitä, miten yhtenäinen graafi voidaan rakentaa yhdestä kärjestä lähtien lisäämällä kerrallaan joko uusi kärki ja särmä, joka yhdistää sen johonkin jo olemassa olevaan kärkeen, tai lisäämällä uusi särmä kahden jo olemassaolevan kärjen välille.

Lause. Jos yhtenäisellä tasograafilla on v kärkeä ja e särmää, niin $e \leq 3v - 3$. Itse asiassa, jos $v \geq 3$, niin pätee vielä $e \leq 3v - 6$.

Todistus. Jos $v = 1$ niin särmiä ei voi olla, ja $e = 0 = 3v - 3$. Jos taas $v = 2$, niin särmiä on enintään yksi, eli $e \leq 1 \leq 3 = 3v - 3$. Oletetaan siis, että $v \geq 3$.

Jokainen alue koskettaa jotakin määrää särmiä. Lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N . Jos särmä koskettaa samaa aluetta molemmilta puoliltaan, niin se lasketaan sen alueen osalta mukaan kahdesti. Nyt jokainen särmä lasketaan kahdesti, eli $N = 2e$. Toisaalta, varmasti jokaista äärellistä aluetta ympäröi vähintään kolme särmää, ja varmasti kuvion ulkopuolinen rajaton alue koskettaa vähintään kolmea särmää, eli on oltava $N \geq 3f$. Toisaalta, Eulerin kaavasta seuraa, että $f = 2 - v + e$. Täten siis

$$2e \geq 3f = 6 - 3v + 3e,$$

mistä heti seuraakin, että

$$e \leq 3v - 6.$$

Lause. Yhtenäisestä tasograafista löytyy aina kärki, jolla on enintään viisi naapuria.

Todistus. Olkoon kyseisessä graafissa v kärkeä ja e särmää. Lasketaan kaikkien kärkien kaikkien naapureiden lukumäärät yhteen. Koska tällöin jokainen särmä

kasvattaa täsmälleen kahden kärjen naapurien lukumäärää kumpaakin yhdellä, on yhteenlaskun lopputuloksena $2e$. Jos jokaisella kärjellä olisi vähintään kuusi naapuria, niin yhteenlaskun lopputulos olisi väistämättä vähintään $6v$, eli olisi $2e \geq 6v$, eli $e \geq 3v$, vastoin edellisen lauseen tulosta. Siis jollakin kärjellä on oltava enintään viisi naapuria.

Viisivärilauseen todistus

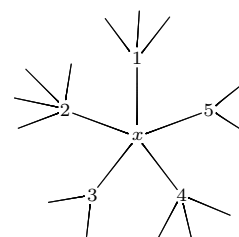
Viisivärilause. Tasograafin kärjet voi aina värittää viidellä eri värillä niin, että naapurikärjet aina väritetään eri väreillä.

Todistus. Käytämme induktiota graafin kärkien lukumäärän suhteen. Jos tasograafillamme on enintään viisi kärkeä, voi ne selvästi värittää viidellä eri värillä. Oletetaan sitten, että $N \in \mathbb{Z}_+$ on sellainen, että tiedämme väitteen todeksi enintään N kärjen tasograafeille, ja otetaan tarkasteluun mielivaltainen $N + 1$ kärkeä sisältävä tasograafi.

Jos tarkasteltava $N + 1$ kärjen tasograafi ei ole yhtenäinen, niin sen jokainen yhtenäinen osa sisältää enintään N kärkeä, ja yhtenäiset osat voi värittää yksitellen erikseen enintään viittä väriä käyttäen. Voimme siis huolelta olettaa, että tarkastelemme $N + 1$ kärjen yhtenäistä tasograafia.

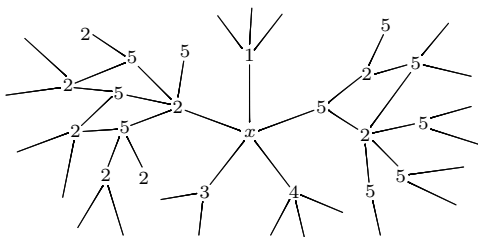
Tiedämme, että tarkasteltavassa graafissa on jollain kärjellä x enintään viisi naapuria. Poistamme kärjen x ja siihen liittyvät särmät hetkeksi, jolloin jäljelle jää N kärjen graafi, jonka kärjet voimme värittää viidellä värillä halutulla tavalla. Lisäämme nyt kärjen x ja siihen liittyvät särmät takaisin graafiin. Jos voimme jotenkin laajentaa värityksen koskemaan kärkeä x , mahdollisesti väritystä sopivasti muokkaamalla, niin olemme valmiit.

Jos kärjen x naapurit on väritetty enintään neljää väriä käyttämällä, niin tietenkin jäljelle on jäänyt ainakin yksi väri, jolla kärjen x voi värittää. Erityisesti, jos kärjellä x on enintään neljä naapuria, niin kärjen x voi värittää eri värillä kuin naapurinsa. Täten voimme huolelta olettaa, että kärjellä x on viisi naapuria ja että sen naapurit on väritetty kaikkia viittä väriä käyttäen. Voimme kutsua käytettyjä värejä vaikkapa nimillä 1, 2, 3, 4 ja 5 seuraavan kuvan mukaisesti:



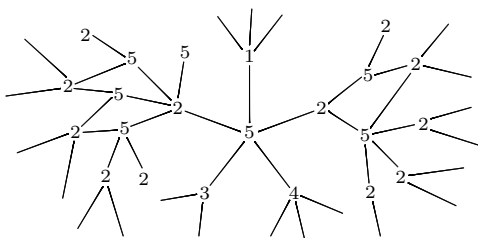
Kärjen naapureiden välillä saattaa olla särmiä, mutta selkeyden vuoksi emme ole piirtäneet kuvaan sellaisia.

Tarkastelemme nyt kärjen x väreillä 2 ja 5 väritettyjä naapureita, niiden väreillä 5 ja 2 väritettyjä naapureita, edelleen näiden väreillä 2 ja 5 väritettyjä naapureita, ja niin edelleen. Tarkastelemme siis seuraavan kuvan mukaista väreillä 2 ja 5 väritettyjen kärkien joukkoa.



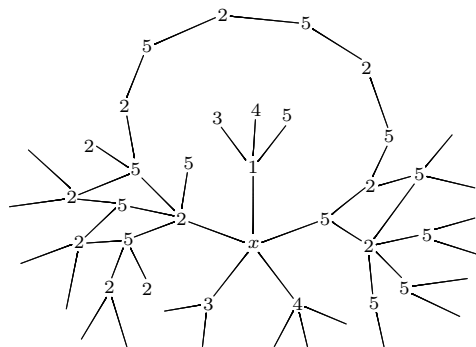
Ehkä varmuuden vuoksi on hyvä huomauttaa, että tarkastelussa eivät suinkaan ole välttämättä mukana kaikki väreillä 2 ja 5 väritetyt kärjet, vaan ainoastaan ne, joihin pääsee kärjestä x kulkemalla särmiä pitkin vain väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien kautta.

Jos joukot eivät kohtaa, niin voimme vaihtaa värit 2 ja 5 päittäin värillä 5 väritetystä kärjen x naapurista kasvavassa joukossa, minkä jälkeen kärjen x voikin värjätä värillä 5:

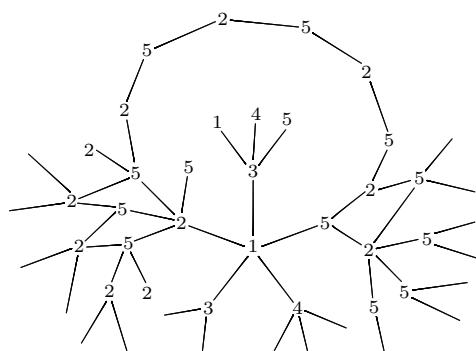


Jos taas kärkeen x väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien kautta liittyvät väreillä 2 ja 5 värjättyt kärjet muodostavat yhtenäisen kokonaisuuden, niin kärki x liittyy väreillä 2 ja 5 värjättyjen kärkien polkuun, joka lähtee kärjestä x ja myös päättyy kärkeen x . Tarkastellaan jotakin lyhintä mahdollista tällaista polkua P . On helppo tarkistaa, ettei tämä polku voi kulkea minkään kärjen eikä minkään särmen kautta kuin enintään kerran.

Nyt polku P joko kiertää kärjen x värillä 1 värjättyä naapuria, tai kärjen x väreillä 3 ja 4 värjättyjä naapureita. Koska jälkimmäinen tapaus voidaan käsitellä aivan samoin kuin edellinenkin, oletamme, että polku kiertää kärjen x värillä 1 värjättyä naapuria:



Nyt polun sisäpuolella voimme yksinkertaisesti vaihtaa esimerkiksi värit 1 ja 3 keskenään, jolloin voimme värjätä kärjen x värillä 1, ja olemme valmiit:



Neliväriäuseen todistus

Miten neliväriäuseen todistetaan? Todistus on hirmuisan monimutkainen; itse asiassa niin monimutkainen, ettei ihminen voi tarkistaa sitä kynällä ja paperilla. Voimme ehkäpä kuitenkin yrittää antaa jonkinlaisen karkean mielikuvan siitä, mistä neliväriäuseen todistuksissa on kyse.

Pohjimmiltaan neliväriäuseen todistus on rakenteeltaan samanlainen kuin yllä esitetyn viisiväriäuseenkin. Ylimmällä tasolla suoritamme induktion graafien kärkien lukumäärän suhteen. Induktioaskeleessa ensin osoitamme, että graafin on sisällettävä jokin joistakin äärellisen monesta konfiguraatiosta. Sitten induktioaskel viimeistellään osoittamalla, että jokaisella konfiguraatiolla on se ominaisuus, että jos graafi sellaista lukuun ottamatta on jo väritetty neljällä värillä, niin väritystä voi muokata niin, että sen voi lopuksi laajentaa koko graafin värikykseksi.

Yllä olevan viisiväriäuseen todistus oli täsmälleen tätä muotoa; teimme induktion graafin kärkien lukumäärän suhteen. Konfiguraatioita tarvitsimme vain yhden; kärjen, jolla on enintään viisi naapuria. Ja tämän konfiguraation osoittaminen suotuisaksi viiden värin värityksen laajentamisen kannalta osoittautui tehtävissä olevaksi ja varsin miellyttäväksikin askareeksi.

Neliväriäuseen todellinen haaste on siinä, että eri konfiguraatioita tarvitaan sen verran monta, että niiden käyminen läpi käsin kynällä ja paperilla ei enää tunnu kovin hyvältä ajatukselta. Jonkinlaisen kuvan neliväriäuseen todistusten monimutkaisuudesta saa esimerkiksi ihmettelemällä artikkelin [8] kaunista liitettä http://arxiv.org/src/0905.0043v3/anc/U_2822.pdf, jossa on annettu eräs riittävä 2822 konfiguraation lista. Kärkiä kuvaavat symbolit merkitsevät tietoa naapureiden lukumäärästä.

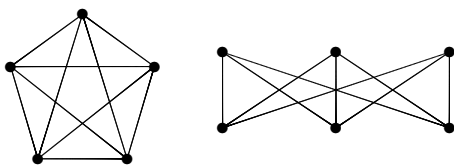
Luonnollisesti ajatuksena on, että kaikista näistä konfiguraatioista voi tarkistaa sen, että ne eivät aiheuta ongelmia väriäyksiä muokattaessa ja laajennettaessa induktioaskeleessa. Itse asiassa konfiguraatioita on niin paljon, että tämä tarkistuskin tehdään tietokoneella, ja on oleellista, että konfiguraatiot ovat sellaisia, että tämä on mahdollista.

Tietysti jäljelle jää kysymys, miten tällainen lista generoidaan? Se tuotetaan tietokoneella. Tämä vaatii epätriviaaleja ideoita, eikä ole mitenkään itsestäänselvä asia, emmekä ihmettele niitä tässä. Tosin, alkuperäisestä Appelin ja Hakenin todistuksesta, joka siis vaati 1200 tuntia tietokoneaika, voimme todeta, että he eivät tienneet etukäteen, että lasku koskaan loppuisi: jos tietokoneohjelma pysähtyi, niin sopiva lista konfiguraatioita oli saavutettu, mutta ennen tietokoneohjelman pysähtymistä ei ollut mitään takeita siitä, että se tosiaan pysähtyisi. . .

Tarkemmin tasograafeista

Nyt, kun olemme selvinneet viisiväriäuseen todistuksesta, voisimme hyvällä syyllä kysyä, voimmeko ymmärtää paremmin sitä, milloin graafin ylipäättänsä voi piirtää tasoon? Osoittautuu, että tähän on olemassa varsin elegantti Kuratowskin lauseen nimellä kulkeva vastaus.

Aloitetaan nimeämällä kaksi erityistä graafia, Kuratowskin graafit K_5 ja $K_{3,3}$, jotka ovat seuraavan kuvan mukaisia.



Kuva. Kuratowskin graafit K_5 ja $K_{3,3}$.

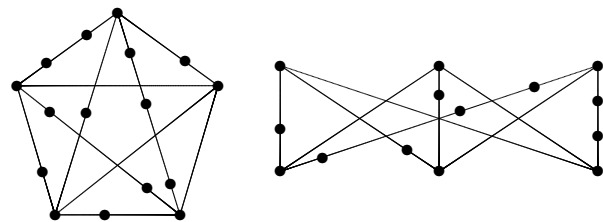
Nämä ovat ensimmäiset esimerkkimme graafeista, jotka eivät ole tasograafeja:

Lause. Graafit K_5 ja $K_{3,3}$ eivät ole tasograafeja.

Todistus. Graafille K_5 väite seuraa välittömästi siitä, että toisaalta sille $v = 5$ ja $e = 10$, ja toisaalta, jos se olisi tasograafi, niin aiemmin todistamamme lauseen nojalla olisi $e \leq 3v - 6 = 15 - 6 = 9$, mikä ei tietenkään käy.

Graafille $K_{3,3}$ väite on hieman vaikeampi todistaa, mutta menee läpi ideoilla, jotka on jo yllä esitelty. Tehdään se vastaoletus, että $K_{3,3}$ olisi piirretty tasoon. Tällöin olisi $v = 6$ ja $e = 9$. Lisäksi Eulerin kaavan vuoksi olisi oltava $f = 2 - v + e = 5$. Jokainen alue koskettaa jotakin määrää särmiä; lasketaan nämä lukumäärät yhteen luvuksi N . Kuten aiemmin, on varmasti oltava $N = 2e$, eli $N = 18$. Toisaalta, on helppo vakuuttua siitä, että jokaista aluetta täytyy reunustaa ainakin neljä särmää (graafissa ei nimittäin ole kolmioita). Täten on oltava $N \geq 4f$, eli $N \geq 20$, mutta tämä on ristiriidassa edellisen lukua N koskevan ehdon kanssa. Täten $K_{3,3}$ ei voi olla tasograafi.

On myös selvää, että graafien K_5 ja $K_{3,3}$ osaväleihinjaoit, jotka saadaan ottamalla toistuvasti jokin särmä ja korvaamalla se ketjulla kärkiä ja särmiä seuraavan kuvan mukaisesti, eivät myöskään ole tasograafeja.



Kuva. Graafien K_5 ja $K_{3,3}$ eräät osaväleihinjaoit.

Yllättäen K_5 ja $K_{3,3}$ sekä niiden osaväleihinjaoit ovat ainoat esteet graafin piirtämiselle tasoon:

Kuratowskin lause. Graafin voi piirtää tasoon täsmälleen silloin, kun se ei sisällä kummankaan graafeista K_5 ja $K_{3,3}$ mitään osaväleihinjakoa.

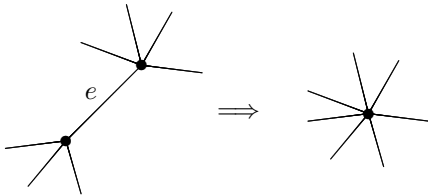
Tämän todistaminen on riittävän hankalaa, ettemme valitettavasti mitenkään voi sitä tässä tehdä.

Avoin tie. . .

Tietenkään tarina ei pääty tähän. Esimerkiksi tasograafeihin liittyen voi pyrkiä ymmärtämään tarkemmin graafien K_5 ja $K_{3,3}$ osaväleihinjaoit sisällyttämistä. Pienenä esimerkkinä mainittakoon Maderin lause, jonka mukaan graafi, jolle pätee $v \geq 5$ ja $e > 3v - 6$, sisältää aina jonkin graafin K_5 osaväleihinjaoit. Samoin voi tutkia graafien piirtämistä monimutkaisemmille pinnoille kuin tasoon, jolloin päädytään topologiseksi graafiteoriaksi kutsuttuun alaan.

Väriäyksistä on vielä paljon tutkimusta tehtävänä. Ehkäpä merkittävin avoin ongelma väriäyksiin liittyen on

Hadwigerin konjektuuri, joka tarjoaa erään mahdollisen syvällisen selityksen sille, miksi graafissa tarvitaan ainakin tietty määrä värejä kärkien värjäämiseen. Kutsutaan särmän *kontraktioksi* sellaista operaatiota, jossa särmä poistetaan, ja sen päätekärjet yhdistetään yhdeksi kärjeksi, jonka naapureina ovat samat kärjet kuin kahdella aiemmalla kärjellä:

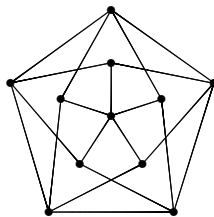


Hadwigerin konjektuuri sanoo, että yhtenäisen graafin kärkien värittäminen vaatii ainakin k väriä täsmälleen silloin, kun tekemällä sopivasti särmien kontraktioita sen voi muuttaa graafiksi K_k . Graafi K_k on se graafi, jolla on k kärkeä ja jossa kaikkia kärkipareja yhdistää särmä.

Hadwigerin konjektuuristakin toki tiedetään jo joitakin asioita. Esimerkiksi sen tiedetään pitävän paikkansa paitsi yhdelle, kahdelle ja kolmelle värille, jotka ovat helppoja tapauksia, myös neljälle, viidelle ja kuudelle värille. Itse asiassa Hadwigerin konjektuuri viidelle värille osoittautuu yhtäpitäväksi nelivärilauseen kanssa. Mainittakoon myös se yllättävä Robertsonin, Seymourin ja Thomasin tulos, että myös Hadwigerin konjektuuri kuudelle värille on yhtäpitävä nelivärilauseen kanssa.

Ongelmia pohdittavaksi

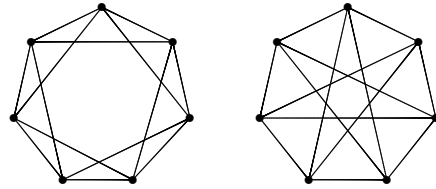
Ongelma 1. Onko Petersenin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Petersenin graafin kärjet voi värittää? Onko seuraava Grötzschin graafi tasograafi? Mikä on pienin määrä värejä, jolla Grötzschin graafin kärjet voi värittää?



Kuva. Grötzschin graafi.

Ongelma 2. Miten yllä annettua viisivärilauseen todistusta voi yksinkertaistaa, jos halutaankin osoittaa vain se heikompi tulos, että tasograafin kärjet voi värjätä kuudella värillä?

Ongelma 3. Ovatko seuraavat graafit eri graafeja vai sama graafi?



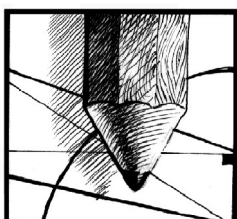
Kirjallisuudesta

Johdatuksia graafiteoriaan on olemassa paljon. Eräs helppolukuinen sellainen on [2], jolle yllä esitelty viisivärilauseen todistuksen esittely on epäilemättä eniten velkaa. Yliopistollisempia esityksiä löytyy esimerkiksi teoksesta [3], josta löytyy esitys niin Kuratowskin lauseesta todistuksineen kuin monista monituisista muistakin aiheista, tai vaikkapa mainiosta pienestä virokielisestä kirjasta [1]. Molemmat viimeksi mainitut olivat myös hyödyllisiä tätä artikkelia kirjoitettaessa.

Nelivärilauseen historiaa ja sen ympärillä käytyä keskustelua on valotettu muun muassa teoksen [4] luvussa 6 sekä laajassa väritysten matematiikkaan keskittyvässä teoksessa [7]. Molemmat kirjat ovat erittäin luettavia ja sisältävät mielenkiintoista materiaalia hyvin esitettynä. Vakavampi ja yksityiskohtaisempi matemaattinen nelivärilauseen ja sen historian esittely löytyy teoksesta [5].

Viitteet

- [1] BULDAS, A., P. LAUD, ja J. VILLEMSON: *Graafid*, Tartu Ülikool, 2003.
- [2] CHARTRAND, G.: *Graphs as Mathematical Models*, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1977.
- [3] DIESTEL, R.: *Graph Theory*, Springer, 2000. Uusin painos löytyy sähköisessä muodossa Internetistä sivuilta <http://diestel-graph-theory.com>.
- [4] KRANTZ, S.: *The Proof is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*, Springer, 2011.
- [5] SAATY, T. L., ja P. C. KAINEN: *The Four-Color Problem*, Dover Publications, 1986.
- [6] SKIENA, S. S.: *The Algorithm Design Manual*, Springer, 2008.
- [7] SOIFER, A.: *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, 2009.
- [8] STEINBERGER, J. P.: *An unavoidable set of D-reducible configurations*, Trans. Amer. Math. Soc., 362 (2010), 6633–6661.



Eräs vanha kilpailutehtävä yleistyksineen

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

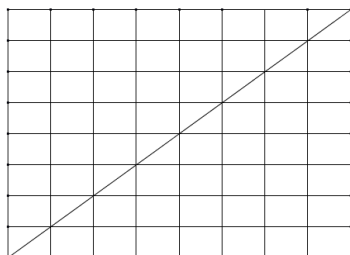
Åbo Akademi

Muinoin, muistaakseni syksyllä 1996, MAOL:n peruskoulukilpailun alkukilpailussa oli tehtävä, joka meni suurin piirtein näin: ”Kuinka monen ruudun läpi kulkee 56×48 -ruudukon lävistäjä?” Tehtävässä saattoi hyvinkin olla hieman eri lukuarvot, ja luultavasti sanamuodotkin olivat erilaisia. En muista ihan tarkasti, sillä olen lukenut tehtävän viimeksi lähes kaksikymmentä vuotta sitten. Kuitenkin tuolla muotoilulla saadaan jo tehtävän idea selville.

Kuinka tämä ratkeaa?

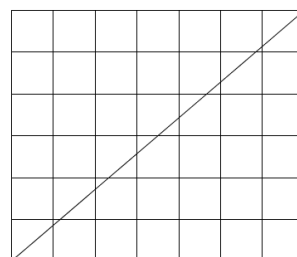
Näillä luvuilla ei ole mahdollon ajatus piirtää ruudukkoa ja sille lävistäjää ja sen jälkeen tyynesti laskea paperista ruutujen lukumäärä. Huolellinen kyllä joutuu olemaan, jos haluaa huolimattomuusvirheet välttää. Voisikin ehkä olla järkevää tehdä jotain muuta.

Huomataan aluksi, että $56 = 7 \cdot 8$ ja $48 = 6 \cdot 8$. Ruudukon molemmat sivut ovat siis jaettavissa kahdeksalla, jolloin myös lävistäjä jakautuu kahdeksaksi pienen suorakulmion lävistäjäksi. Kas näin:



Kuvan jokainen ruutu sisältää siis 6×7 -ruudukon. Lävistäjän osat todellakin ovat 6×7 -ruudukkojen lävistäjiä, eli ne menevät kulmasta kulmaan. (Mikäli lukija ei tätä usko, voi lukija piirtää vaikkapa 6×9 -ruudukon ja 10×14 -ruudukon, jakaa ensimmäisen sivut kolmeen osaan, toisen sivut kahteen osaan ja meditoida näiden piirustusten ääressä.)

Nyt tämän 6×7 -ruudukon voi käsitellä vaikka piirtämällä kuvan ja laskemalla suoraan kuvasta. (Silloin toki herää kysymys, että onko tämä riittävän täsmällinen lähestymistapa, vai pitäisikö jotain todistaakin, mutta ainakin itse pitäisin tätä ihan riittävänä peruskoulutuksella.) Kuva on tässä:

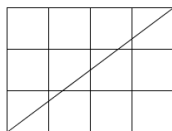


Nyt voidaan laskea. Suoraan paperista laskemalla saadaan, että lävistäjä kulkee 12 ruudun kautta. Alkuperäisessä kuviossa lävistäjä siis kulkee $12 \cdot 8 = 96$ ruudun kautta.

Muutama erikoistapaus ja oppinut arvaus

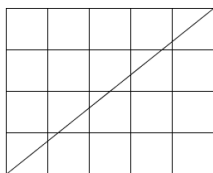
Maaailmassa on muitakin ruudukoita kuin sellaisia, jotka saadaan muodostettua latomalla yhtä monta 6×7 -ruudukkoa päällekkäin ja vierekkäin. Tarkastellaan nyt muutamaa tällaista ruudukkoa.

Ensin 3×4 -ruudukko:



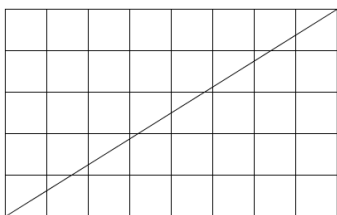
Lävistäjä kulkee nyt kuuden ruudun kautta.

Nyt 4×5 -ruudukko:



Lävistäjä kulkee nyt kahdeksan ruudun kautta.

Katsotaan vielä 5×8 -ruudukkoa:



Lävistäjä kulkee nyt 12 ruudun kautta.

Vaikuttaisi siis siltä, että mikäli kyseessä on $\ell \times k$ -ruudukko, kun ei ole olemassa mitään ykköstä suurempaa kokonaislukua, jolla voisi jakaa sekä luvun ℓ että k niin, että molempien jakolaskujen tulos on kokonaisluku (eli lukujen *suurin yhteinen tekijä* on yksi), kulkisi lävistäjä $k + \ell - 1$ ruudun läpi.

Oppineen arvauksen perustelu

Keskitytään yksinkertaisuuden vuoksi vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan menevään lävistäjään

(suorakulmion toinen lävistäjä käyttäytyy samoin, kulkusuunta taas sovitaan yksinkertaisuuden vuoksi). Tarkastellaan aluksi lävistäjän kulkemista ruudukossa, ennen kaikkea sitä miten lävistäjä kulkee ruudusta toiseen. Ensimmäiseksi havaitaan, että lävistäjän on siirryttävä ruudusta viereiseen ruutuun, joko yllä tai oikealla olevaan. Se ei siis voi mennä kulmasta yli kulmitaiseen ruutuun (tätä perustellaan vielä hiukan myöhemmin – lukija voi joko lukea perustelut tai sitten piirrellä itse kuvia ja miettiä, miksi näin on). Esitetään vielä kuvin hyväksyttävät tilanteet ja mahdoton tilanne.

Näin lävistäjä voi tehdä:

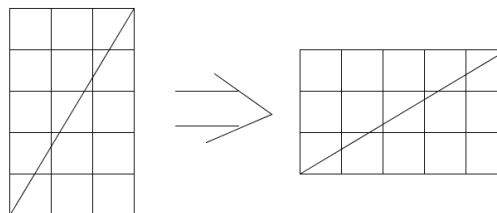


Näin lävistäjä ei voi tehdä:

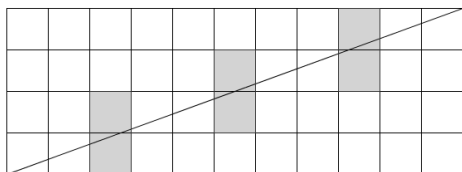


Kulman yli siirtyminen ei ole mahdollista, sillä silloin alkuperäisen ruudukon vasemmasta alakulmasta siihen kulmaan, jonka yli lävistäjä kulkee, voitaisiin muodostaa pieni suorakulmio, jonka lävistäjä olisi alkuperäisen ison ruudukon lävistäjän osa. Tällöin pienen ruudukon pitäisi itse asiassa olla muotoa $d\ell' \times dk'$, missä $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{k'}{k} = h$, jonka pitäisi olla kokonaisluku, kun alkuperäinen ruudukko olisi kooltaan $\ell \times k$. Tämä tarkoittaisi, että sekä k että ℓ olisi jaollinen kokonaisluvulla h , joka olisi suurempi kuin yksi. Oletimme, että näin ei voi olla.

Lävistäjän tulee siis edetä vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan. Voidaan ajatella, että ruudukko on leveämpi kuin korkea, koska jos ruudukko on korkeampi kuin leveä, voidaan se kääntää, jolloin saadaan ruudukko, jolla on enemmän leveyttä kuin korkeutta, eli näin:



Ensin siis siirrytään jonkin aikaa oikealle, sitten yksi ylös, sitten taas jonkin aikaa oikealle, yksi ylös, ja näin jatketaan, kunnes ollaan oikeassa yläkulmassa. Tässä kuvassa on tummennettu ne kohdat, joissa tehdään siirtymä ylös (tässä nimenomaisessa ruudukossa). Muulloin siirtymä on aina oikealle:



Tämä tarkoittaa sitä, että lävistäjä käy täsmälleen kerran jokaisessa sarakkeessa paitsi niissä sarakkeissa, joissa on siirtymä ylläkkäin. Näissä sarakkeissa lävistäjä

kulkee kahden ruudun läpi. Jokaisesta oikealle siirtymästä tulee ℓ ruutua. Ylöspäin siirtymistä tulee vielä jonkin verran ruutuja lisää. Niistä tulee itse asiassa $k - 1$ ruutua lisää, sillä ensimmäinen ylläkkäin siirtymä vielä alimmalta riviltä toiseksi alimmalle, toinen toiseksi alimmalta kolmanneksi alimmalle ja niin edespäin. Yhteensä ylläkkäin siirtymiä on siis $k - 1$ kappaletta. Kaikkien lävistäjän käymien ruutujen määrä on siis $\ell + k - 1$.

Solmun matematiikkadiplomit

Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Alimmat tasot ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin.

Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteella

`juha.ruokolainen(at)helsinki.fi`

Ym. verkko-osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät



Matemaattikkona vakuutusosalalla ja työeläkelaitoksessa

Jarno Ruokokoski

Keskinäinen työeläkevakuutusyhtiö Varma

jarno.ruokokoski@varma.fi

Johdanto

Kun olin lukiossa, tiesin jo silloin jatkavani opintoja matematiikan parissa yliopistossa. Kuitenkaan minulla ei ollut harmainta hajuakaan, missä kaikkialla vastavalmistunut matemaatikko voisi työskennellä. Selviä vaihtoehtoja olivat tietysti opettaminen eritasoisissa kouluissa ja tutkiminen yliopistossa, mutta en tiennyt muita. Todellisuudessa on olemassa muitakin vaihtoehtoja teollisuudessa ja yritysmaailmassa ja yritän tässä tekstissä kuvailla yhtä näistä: vakuutusalaa.

Vakuutustoiminta on syntynyt varsin kauan sitten. Vakuutuksen vanhinta tunnettua alkujuurta edustaa kuljetusvakuutus. Siitä on säilynyt tietoja jo muinaisen Babylonian ajoilta noin 2000–3000 eKr. Vakuutus oli tuolloin lainausliikkeen liitännäinen. Lainan vakuutena oli usein lainaajan omaisuus ja mikäli lainaa ei pystytty maksamaan takaisin esimerkiksi sen takia, että rosvot tuhosivat lainanottajan karavaanin, seurauksena saattoi olla hänen joutuminen perheineen lainanantajan orjaksi. Karavaanarikauppiat halusivat suojautua tältä riskiltä siten, että lainan takaisinmaksusta vapautettiin, jos karavaaniretki epäonnistui. Jos retki onnistui, lainasumman lisäksi oli suoritettava huomattava hyvitys korkeana lainakorkona. Tätä korkoa voidaan pitää lainanantajan riskiä vastaavana vakuutusmaksuna.

Tuo menetelmä siirtyi Babyloniasta foinikialaisille ja edelleen kreikkalaisille ja roomalaisille, jotka sovelsivat

sitä erityisesti merenkulun alalla. Tiedetään, että roomalainen Cato vanhempi antoi merilainoja. Välttääkseen liian suuren tappionvaaran, hän hajotti lainattavan pääoman lukuisille eri laivoille. Jo tällöin on siis oivallettu vakuutustoiminnan perusajatus: vastuun jakaminen lukuisiin toisistaan riippumattomiin kohteisiin. Tällöin voitto ja tappiot tasoittavat toisiaan suurten lukujen lain mukaisesti.

Merilainatoiminta säilyi muuttumattomana aina 1300-luvulle saakka. Katolinen kirkko alkoi vastustamaan toimintaa 1300-luvulla, koska sitä pidettiin koronkiskontana. Kirkko kielsi lainat, se ei kiinnittänyt huomiota siihen, että ”korko” oli suureksi osaksi vastiketta vahingonvaarasta. Kiellon takia merilainasopimusten varsinaista kuljetuksen epäonnistumisvastuuta koskeva osa irrotettiin itsenäiseksi sopimukseksi, ja tätä irrotushetkeä pidetään nykymuotoisen merivakuutuksen syntymähetkenä.

Vakuutuksenantajina toimivat tuolloin ja pitkään sen jälkeen yksityiset varakkaat henkilöt sekä pankkiiriliikkeet ja kauppahuoneet. Yksityisten vakuutuksenantajien valtakaudella ei ollut harvinaista, että vakuutuksenantajat joutuivat maksukyvyttömiksi. Tämä on hyvin ymmärrettävää, kun vakuutustoiminnan laajetessa vakuutuksenantaja joutuu ottamaan vastuulleen paljon suurempia vakuutusarvoja kuin maksutulot ja käytävissä olevat omat varat yhteensä ovat. Koko toiminta perustui kokemusperäiseen oletukseen, että suurten lukujen lain mukaan vahinko kohtaa vain pientä osaa va-

kuutuskannasta. Vakuutustoiminnan menestyksellinen harjoittaminen edellyttää tämän vuoksi perusteellista kokemusta vahinkojen määristä ja määrien heilumisesta erilaisten tekijöiden vaikutuksesta. Kun tilasto- ja vakuutustekniikka oli alkeellista, vakuutustoiminta oli usein suoranaista uhkapeliä, joka saattoi jatkua vain niin kauan kuin mukana oli hyvää onnea.

Näistä historiallisista vakuutuksen muodoista näkyy hyvin vakuutustoiminnan keskeiset ominaisuudet: riskin taseaus kantamalla vastuu vahingosta yhteisesti suuren vakuutettujen joukon kesken, vakuutusyhtiön ottaman riskin oikean hinnoittelun tärkeys sekä erilaisten vakuutustapahtumien määrien heilunta vuosittain. Vakuutustoiminnan historiaan voi tutustua lisää esimerkiksi kirjan Vakuutusoppi [1] avulla.

Eläkevakuutus

Eläkevakuutus on yksi vakuutustoiminnan muoto. Sen ongelma voidaan muotoilla seuraavasti: Erkki täyttää vuonna 2016 30 vuotta. Hän haluaa ostaa itselleen syntymäpäivälahjaksi 1500 euroa kuukaudessa eläketä 65-vuotiaasta alkaen aina kuolemaan asti. Paljonko Erkin pitää maksaa työeläkelaitokselle syntymäpäivänään, jotta laitos voi turvallisesti luvata Erkkille tuollaisen eläkkeen?

Sopimukseen yleensä liittyvät seuraavat ehdot:

1. Työeläkelaitos ei voi koskaan yksipuolisesti purkaa sopimusta edes siinä tapauksessa, että rahat ovat vähissä.
2. Minkä tahansa ikäisenä Erkki kuoleekin, hänelle tai hänen perikunnalleen ei makseta mitään jälkihyvityksiä kuoleman jälkeen.
3. Rahojen arvo putoaa ajan kanssa, jolloin sopimukseen voidaan kytkeä eläkkeen kasvaminen vaikkapa 2 % vuodessa ja kasvaminen voi jatkua myös eläkkeen maksamisen alettua.

Tarvittavaan rahamäärään vaikuttavat selvästi ihmisten kuolemisvauhti, mitä vanhempina ihmiset kuolevat, sitä enemmän rahaa keskimäärin tarvitaan, vaikka jotkut ihmiset kuolevat ennen kuin eläkkeen maksaminen alkaa. Toisaalta Erkin maksamat rahat kantaa sijoittaa tuottavasti johonkin, jolloin sijoitustoiminnan tuotoilla voidaan pudottaa tarvittavaa rahamäärää. Silloin pitää tosin varautua sijoitustuottojen heilunnasta aiheutuviin varojen muutoksiin. Yleisesti Erkin vakuutusyhtiölle maksamia rahoja kutsutaan vakuutusmaksuksi, tai asiayhteyden ollessa tuttu, pelkäksi maksuksi.

Korkoutuvuudesta

Olkoon sijoitustoiminnan tuotto vuodessa i prosenttia. Tällöin jatkuva vakiokorko, eli korkoutuvuus on

$$\delta = \ln(1 + i). \quad (1)$$

Termi ilmaisee, paljonko pitää maksaa jatkuvasti korkoa korolle, jotta vuosikorko olisi i . Se voidaan johtaa tutummasta vuosikoron r kaavasta $r = 1 + i$. Käytännössä sijoitustoiminnan tuotot heiluvat vuosittain. Tätä ei mallinneta erityisesti, vaan oletetaan samanlainen sijoitustoiminnan tuotto joka vuodelle. Työeläkelaitoksissa koroksi asetetaan nykyisin 3 %. Jos sijoitustoiminnan tuotto on enemmän, ylijäämä varastoidaan vakuutusyhtiöön ylimääräiseen puskuriin ja huonona sijoitustoiminnan tuottovuotena puuttuva määrä otetaan samasta puskurista. Puskuria kutsutaan vakavaraisuuspääomaksi. Käytännössä eläkealalla vakavaraisuuspääomasta suoritetaan myös ylimääräisiä varojen täydennyksiä, jolloin todelliseksi varojen tuotoksi tulee enemmän kuin 3 %.

Kuolevuuden mallintamisesta

Vastasyntyneen henkilön elinajan pituutta, lyhyesti elinaikaa, merkitään positiivisella satunnaismuuttujalla $\mathbf{X}$. Iässä $x \geq 0$ jäljellä oleva elinaika

$$T_x = (\mathbf{X} - x) | \mathbf{X} > x$$

on ehdollinen positiivinen satunnaismuuttuja. x -ikäisen jäljellä olevan elinajan kertymäfunktioita merkitään

$${}_tq_x = \mathbb{P}(T_x \leq t) = \mathbb{P}(\mathbf{X} - x \leq t | \mathbf{X} > x), \quad t \geq 0.$$

Termi ${}_tq_x$ kertoo siis todennäköisyyden, että nyt x -ikäinen henkilö on kuollut hetkeen t mennessä. Vakuutusmatematiikassa ollaan yleensä kiinnostuneita kuolevuusintensiteetistä, eli jäljellä olevan elinajan kertymäfunktion derivaatasta:

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{\Delta {}_tq_x}{\Delta t}. \quad (2)$$

Tätä termiä kutsutaan yleisesti kuolevuudeksi.

Käytännössä kuolevuus määritellään sovittamalla havaittuun väestön kuolemisvauhtiin joku funktio, joka mahdollisimman hyvin sopii havaittuihin arvoihin. Yleensä mallia ei pyritä rakentamaan erittäin täsmällisesti, sillä halutaan, että malli olisi yksinkertainen. Niin yksinkertainen, että eliniän piteneminen voidaan huomioida yksinkertaisin ikäsiirtein, jolloin kuolevuudet voidaan taulukoida ja samasta taulukosta saadaan kaikki kuolevuudet. Tämä nopeuttaa valtavia laskentoja, joissa käydään esimerkiksi läpi monen miljoonan vakuutetun joukkoja.

Kuolevuuden mallintaminen on aina kuitenkin hankala ongelma, ja huolimatta huolellisesta työstä, malleja on jouduttu päivittämään ajoittain. Työeläkelaitosten kohdalla tällainen mallin päivitys laskettiin vuonna 2015 ja sen hinnaksi tuli noin 3 miljardia. Käytännössä kuolevuuksien päivitys toteutetaan 31.12.2016 ja nuo tarvittavat 3 miljardia kerätään työeläkelaitosten sisäisistä puskureista jolloin asiakkaiden vakuutusmaksut eivät tämän takia nouse. Jo tällaisella täydennyksellä on suuri vaikutus laitosten varallisuuksiin ja pahempi epäonnistuminen kuolevuuden mallintamisessa voi johtaa jopa työeläkelaitosten konkurssiin ja eläkkeiden leikkauksiin ja sitä kautta vanhuusköyhyyteen. Toki kuolevuus voidaan arvioida myös alakanttiin, jolloin laitoksiin jää ylimääräistä rahaa, jolla voidaan alen-
taa vakuutusmaksuja. Mutta historiassa näin päin ei ole juuri onnistuttu ennustamaan tulevaa kuolevuutta. Eläkealalla tarvitaan päteviä matemaatikoita huolehtimaan siitä, että kuolevuus tulee mallinnetuksi mahdollisimman oikein ja että sitä tarvittaessa päivitetään ajoissa.

Nykyinen kuolevuusmalli perustuu Gompertz-funktioon, joka on muotoa

$$\mu_x = b \cdot e^{f \cdot (x-g)}.$$

Käytännössä tällä hetkellä voimassa olevassa kuolevuusmallissa pätee $b = 5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-0.57}$, $f = 0.095$ ja g on henkilön iästä ja sukupuolesta riippuva vakio, ns. ikäsiirto. Miehillä ikäsiirrolle pätee

$$g = \begin{cases} 0 & \text{kun } v - s < 1940 \\ -1 & \text{kun } 1940 \leq v - s < 1950 \\ -2 & \text{kun } 1950 \leq v - s < 1960 \\ -3 & \text{kun } 1960 \leq v - s < 1970 \\ -4 & \text{kun } 1970 \leq v - s < 1980 \\ -5 & \text{kun } 1980 \leq v - s < 1990 \\ -6 & \text{kun } v - s \geq 1990 \end{cases}$$

ja naisilla

$$g = \begin{cases} -7 & \text{kun } v - s < 1940 \\ -8 & \text{kun } 1940 \leq v - s < 1950 \\ -9 & \text{kun } 1950 \leq v - s < 1960 \\ -10 & \text{kun } 1960 \leq v - s < 1970 \\ -11 & \text{kun } 1970 \leq v - s < 1980 \\ -12 & \text{kun } 1980 \leq v - s < 1990 \\ -13 & \text{kun } v - s \geq 1990. \end{cases}$$

Kaavassa v on tarkasteluvuosi ja s on henkilön ikä hänen syntymäpäivänään vuonna v . Käytännössä $v - s$ on henkilön syntymävuosi. 31.12.2016 voimaan astuva uudempi kuolevuusfunktio perustuu edelleen Gompertz-funktioon, mutta se on monimutkaisempi ja jää tämän tekstin ulkopuolelle.

Pääoma-arvosta

Edellä kuvattu Erkin eläkevakuutusongelma voidaan ratkaista käyttäen korkoutuvuutta (1) ja kuolevuutta (2). Määritellään aluksi kaavat

$$D_x = e^{-\int_0^x (\delta + \mu_s) ds} \quad (3)$$

ja

$$\bar{N}_x = \int_x^\infty D_t dt. \quad (4)$$

Funktioita D_x ja $\bar{N}_x$ kutsutaan kommutaatiofunktioiksi.

Oletetaan, että henkilölle maksetaan tietyn ajan kuluttua vuotuisäärältään summan E suuruisia jatkuvasti maksettavaa eläkettä, eli jatkuvaa elinkorkoa niin kauan kuin henkilö on elossa. Jatkuvasti maksamisella tarkoitetaan sitä, että dt :n pituisella aikavälillä maksettavaa eläkettä kertyy määrä $E \cdot dt$. Sanalla pääoma-arvo tarkoitetaan nykyhetkellä tarvittavaa rahamäärää, jolla selvittää edellä kuvatussa velvoitteesta aina henkilön kuolemaan asti. Yksikköelinkorolla tarkoitetaan tilannetta, jossa $E = 1$.

Osoittautuu, että m :n vuoden kuluttua iässä $x+m$ aloitettavan yksikköelinkoron pääoma-arvo ${}_m\bar{a}_x$ vakuutuksen ostopäivällä, iässä x , voidaan ilmaista edellä kuvattujen kommutaatiofunktioiden avulla:

$${}_m\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_{x+m}}{D_x}. \quad (5)$$

Tämä kaava ei tupsahda taivaalta, vaan se voidaan johtaa huolellisesti lähtien liikkeelle edellä kuvatussa Erkin ongelmasta. Todistus kaavalle löytyy esimerkiksi kirjasta [2]. Kaavassa olevat kommutaatiofunktio-
ot ovat lyhennysmerkintöjä, joita käytetään tosin monissa eri tyyppisten henkivakuutuslaskelmien kaavoissa. Suomessa eläkevakuutuksen rahastojen maksaminen aloitetaan aina teoriassa iässä 65, jolloin käytännössä $x + m = 65$. Mikäli Erkki on jo 65-vuotias tai vanhempi, niin silloin $m = 0$, mutta kaava ei muutoin muutu.

Kaavan (5) johtaminen perustuu olennaisesti odotusarvoihin ja näin henkilön odotettavissa olevaan elinikään. Jos tällainen tuote myydään vain yhdelle vakuutetulle, voi käydä niin, että hän elää paljon pidempään kuin odotusarvoisesti hänen ikäisensä ja rahat loppuvat. Siksi vakuutusyhtiön pitää saada itselleen iso joukko vakuutettuja, jolloin keskimääräinen vakuutusyhtiön asiakas käyttäytyy odotusarvon mukaisella tavalla ja rahat keskimäärin riittävät.

Erkin eläkkeen vakuutusmaksu olisi näillä tiedoilla noin 91 000 euroa, kun pätee $E = 1500 \cdot 12 = 18000$ (vuosieläkkeen määrä) ja yksikköelinkoron pääoma-arvosta ${}_m\bar{a}_x$ saadaan E :n suuruisen jatkuvasti maksettavan eläkkeen pääoma-arvo kaavalla $E \cdot {}_m\bar{a}_x$. Uudemmallalla

kuolevuusmallilla hinta olisi noin 101 000 euroa. Käytännössä eläkettä ei makseta jatkuvana rahavirtana, vaan kuukausittain. Tässä ei kuitenkaan tehdä merkittävää virhettä teoriaan nähden.

Kenelläkään ei ole yleensä varaa maksaa tuollaisia rahamääriä heti, jolloin eläkevakuutusmaksu kerätään vuosittain palkasta perittävänä maksuna. Teoriassa tästä seuraa, että vakuutusmaksu nousee iän noustessa, koska sijoitustoiminnan tuotot eivät ehdi vaikuttamaan lähellä eläkeikää oleviin vakuutusmaksuihin kovin kauan. Käytännössä maksutaso sovitetaan kuitenkin koko väestön yli, jolloin se on sama kaiken ikäisille.

Vastuuvclasta

Kun Erkki on suorittanut vakuutusmaksun työeläkelaitokselle, se on kuukausieläkkeitä velkaa Erkkille vakuutusmaksun suoritushetkestä Erkin kuolemaan asti tehdyn sopimuksen mukaisesti. Velan määrää summattuna kaikkien vakuutuksenottajien yli kutsutaan vastuuvclaksi. Vastuuvclan määrä lasketaan yhdelle vakuutetulle teoriassa samalla kaavalla kuin maksukin, eli kaavalla (5). Tällä tavalla laskettua nyt tarvittavan rahan määrää kutsutaan pääoma-arvoksi. Kun henkilö on jo vanhuuseläkkeellä, pätee $m = 0$. Eläkealalla erikoisuuksia tulee siihen, että vastuu lasketaan syntymävuosiluokan keskimääräisellä iällä (esimerkiksi syntymävuosiluokan kaikkien ihmisten ikänä käytetään vuoden lopussa ikää 65,5 vuotta) ja siitä, että eläke voi alkaa jossakin muussa iässä kuin iässä 65 (joustava vanhuuseläkeikä). Tällöin kertynyttä eläkettä muutetaan siten, että maksettava kuukausieläkkeen määrä putoaa tai nousee jonkun verran. Varsinainen pääoma-arvon määrä ei kuitenkaan muutu. Teoreettisissa laskelmissa on kuitenkin yksinkertaisempaa käyttää aina ikää 65.

Vakuutuslainsäädännön mukaan vakuutusyhtiöillä pitää olla joka hetkellä varallisuutta vähintään vastuuvclan verran. Mikäli varat pääsisivät tippumaan vastuuvclan määrän alapuolelle, seurauksena olisi yhtiön konkurssi. Yleisesti vakuutusyhtiöt tarvitsevat itselleen isomman määrän rahaa kuin mitä vastuuvclka vaatii, ja tuon ylimääräisen rahan avulla yhtiö selviää vaihtelevasta kuolevuudesta ja sijoitustoiminnan tuottojen heilunnasta. Laskennallisesti näitä rahoja pidetään edellä kuvatussa vakavaraisuuspääomassa.

Sijoitustoiminnasta

Kun työeläkelaitos on saanut vakuutusmaksun vakuutetulta, sille pitää saada jonkin verran tuottoa, koska sijoitusten tuotto on jo huomioitu vakuutusmaksua laskettaessa (kaavassa (5) δ asetetaan vastaamaan 3 %:n vuosituottoa). Näin laitokset käytännössä tekevätkin,

rahat sijoitetaan ympäri maailmaa erilaisiin sijoitus- tuotteisiin, kuten osakkeisiin, kiinteistöihin, joukkovelkakirjalainoihin, muiden hallinnoimiin rahastoihin jne. Kun näin tehdään, syntyy kaksi osittain toisensa kumoavaa ominaisuutta:

1. Mitä parempi tuotto rahoille voidaan saada, sitä halvemmaksi vakuutusten hinta voidaan asettaa asiakkaalle. Toisaalta korkeampaan tuottoon liittyy korkeampi riski.
2. Yhtiö ei voi sijoittaa kaikkia rahoja samaan omaisuuslajiin, sillä pahassa talouskriisissä omaisuuslajin arvo voi pudota niin alas, että yhtiön varojen määrä alittaa vastuuvclan määrän, jolloin yhtiö menee konkurssiin.

Näin voidaan muotoilla erittäin vaikea sijoitusongelma: mihin omaisuuslajeihin, ja millä painoilla varat kannattaisi sijoittaa markkinoille? Edellä kuvatussa eläkeongelmassa Erkki voi teoriassa suorittaa ensimmäiset maksut täytettyään 18 vuotta ja kuolla vasta 105-vuotiaana, jolloin viimeiset Erkin eläke-eurot maksetaan ulos vasta 87 vuoden kuluttua ensimmäisistä maksuista! Keskimäärinkin kukin eläke-euro makaa työeläkelaitoksen varoissa kymmeniä vuosia. Muotoiltaessa vastausta edellä kuvattuun sijoitusongelmaan pitäisi pystyä hyödyntämään tätä ominaisuutta. Periaatteessa ei ole niin hirveästi väliä, putoaako omaisuuslajin arvo 10 % huomenna, jos se tuottaa pitkällä aikavälillä paremmin kuin matalariskisemmät omaisuuslajit. Rahojahan tarvitaan kuitenkin vasta kymmenien vuosien kuluttua. Siksi korkeariskisissä, mutta hyvin tuottavissa omaisuuslajeissa (esim. osakkeet), pitäisi pystyä pitämään aina verrattain korkeaa osuutta varallisuudesta. Toisaalta hajautuksen pitäisi olla hyvä, koska eri omaisuuslajit saattavat olla negatiivisesti korreloituneita, jolloin hajautus takaa keskimäärin paremman tuoton samalla riskitasolla.

Esittelen tässä yhden erittäin yksinkertaisen "ratkaisuyrityksen". Oletetaan, että käytössä on yksi sijoitustuote, jonka arvon muutos vuorokauden kuluttua on normaalijakaunut satunnaismuuttuja parametreilla μ ja σ . Normaalijakauman perusteella voidaan muodostaa $V@R$, joka kertoo suurimman mahdollisen tappion etukäteen määritetylle aikahorisontille (tässä yksi vuorokausi) ja etukäteen määritellyllä luottamustasolla. Tulos on varsin helppo johtaa normaalijakaumasta ja siksi saadaan

$$V@R = -(\mu - z_x \sigma) \approx z_x \sigma.$$

Viimeisessä pyörityksessä oletetaan, että vuorokaudessa sijoitustuotteen arvon muutoksen odotusarvo on käytännössä 0. Kaavassa z_x on luottamustason mukainen normaalijakauman piste (esim. luottamustasolla 99 % pätee $z_x \approx 2.325$).

Edellä kuvattu ratkaisu voidaan yleistää melko helposti useaan sijoitustuotteeseen ja huomioida samalla esi-

merkiksi historian avulla eri sijoitustuotteiden korreloituneisuus. Ratkaisu on helposti laskettavissa analyytisesti ja näin mille tahansa sijoituskorille saadaan laskettua V@R halutulla riskitasolla. Näin voitaisiin ajatella, että jos vakavaraisuuspääomassa on vähintään V@R-luvun verran varallisuutta vaikkapa luottamustasolla 99 %, vakuutusyhtiö on suojautunut sijoitustoiminnan heilunnan aiheuttamilta tappioilta. 99 %:n todennäköisyydellä varoja on edelleen riittävästi huomenna.

Kuitenkin varsin nopeasti käy selväksi, ettei tällainen laskenta riitä, sillä

1. sijoitustuotot eivät noudata normaalijakaumaa,
2. V@R ei kerro pahimman mahdollisen tappion suuruutta annetun luottamustason ulkopuolella,
3. V@R-luku riippuu vahvasti malleissa tehdyistä oletuksista ja tuottohistoriasta estimoiduista parametreista (esim. σ ja sijoitustuotteiden korrelaatiot edellä) ja historia ei välttämättä toista itseään ja
4. V@R-malli ei ennusta odottamattomia riskejä.

Siksi päteville matemaatikoille, jotka pystyvät muotoilemaan tähän ongelmaan hyviä ratkaisuja, on tötä. Yksityisen sektorin työeläkevakuutuslaitoksissa on tällä hetkellä yhteensä noin 180 miljardia euroa varallisuutta. Jos riskiä voitaisiin turvallisesti nostaa ylöspäin nykyiseen tasoon nähden ja näin päästä pitkällä aikavälillä keskimäärin 0.5 %-yksikköä isompiin sijoitustuottoihin, se tarkoittaisi 900 miljoonaa euroa vuodessa vakuutusmaksujen alennuksia ja tällä olisi jo iso kansantaloudellinen merkitys!

Lopuksi

Tässä tekstissä pyrin hieman valottamaan vakuutusalan matemaattisia ongelmia, joiden parissa matemaatikot työskentelevät. Tekstissä ei ole aukotonta todistusta kaavalle (5), koska tavoitteena oli enemmän valottaa alan matemaattisia ongelmia. Tarkemmat todistukset löytyvät esimerkiksi kirjasta Henkivakuutusmatematiikka [2]. Edellä kuvattu hinta 91 000 eläkevakuutuksesta ei ole koko totuus, sillä vanhuuseläkkeet on rahastoitu vain osittain. Lisäksi eläkemaksun määräämiseen ja erilaisiin laitosten puskureihin liittyy paljon

monimutkaisuutta, joka jää tämän tekstin ulkopuolelle. Samoin työeläkelaitosten muut eläkelajit, työkyvyttömyyseläke ja perhe-eläke jäävät tämän tarkastelun ulkopuolelle.

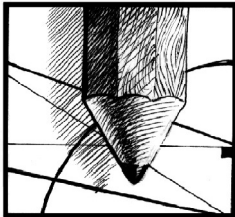
Käytännössä alalle hakeutumiseen vaaditaan korkeakoulututkintoa matematiikasta tai tilastotieteestä, ja rahoitusteorian, tilastotieteen ja stokastiikan opinnot katsotaan eduksi. Myös tietotekniikan osaamisesta on hyötyä. Hyvän opintokokonaisuuden saa aikaiseksi suorittamalla SHV-tutkintoon vaadittavat yliopistokurssit jo yliopisto-opintojen aikana sekä ottamalla esimerkiksi tietotekniikan sivuaineeksi. SHV-tutkinto tarkoittaa sosiaali- ja terveysministeriön hyväksymää vakuutusmatematiikan tutkintoa.

Jokaisella vakuutusyhtiöllä täytyy olla ainakin yksi SHV-tutkinnon suorittanut henkilö, jota kutsutaan myös vastuulliseksi vakuutusmatematiikoksi tai aktuaariksi. Hän vastaa viranomaisille ja yhtiön johdolle siitä, että vakuutusyhtiössä sovellettavat vakuutusmatemaattiset menetelmät ovat asianmukaisia ja yhtiön vakuutusmaksut ja vastuuvelan laskentatapa ja määrä täyttävät lakien ja asetusten mukaiset vaatimukset. Aktuaarilla on alaisinaan joukko matemaatikkoja, jotka auttavat aktuaaria saavuttamaan nämä tavoitteet. SHV-tutkintoon voi tutustua osoitteessa www.actuary.fi ja samalta sivulta näkee myös alan työpaikkailmoituksia.

Vakuutusmatematiikkona onnistuminen edellyttää riittävää pohjakoulutusta ja päteville matemaatikoille on edelleen hyvin töitä tarjolla. Työpaikan saavuttaminen edellyttää huolellisia matematiikan opintoja, mutta toisaalta matematiikan opiskelu tuottaa turvallisen työuran. Edellä kuvatun kuolevuuden ja sijoitustoiminnan tuottojen turvavälien malleihin tarvitsee edelleen tehdä päivityksiä, jolloin myös kehitystyöhön kykeneviä henkilöitä tarvitaan. On todella tärkeää, että esimerkiksi käytössä olevan kuolevuusmallin heikkeneminen toteutuneisiin lukuihin nähden havaitaan ajoissa.

Viitteet

- [1] Jukka Rantala, Esko Kivisaari, *Vakuutusoppi*, Finva, 2014.
- [2] Martti Pesonen, Pertti Soinen, Tapani Tuominen, *Henkivakuutusmatematiikka*, Finva, 2014.



Keskimääräisyys ja reiluus

Samuli Siltanen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Matematiikkaa voi käyttää moneen tarkoitukseen. Useimmat sovelluskohteet liittyvät tekniikkaan ja tutkimukseen, mutta joskus matemaattinen tarkkuus voi myös auttaa kohtelevaan ihmisiä reilummin.

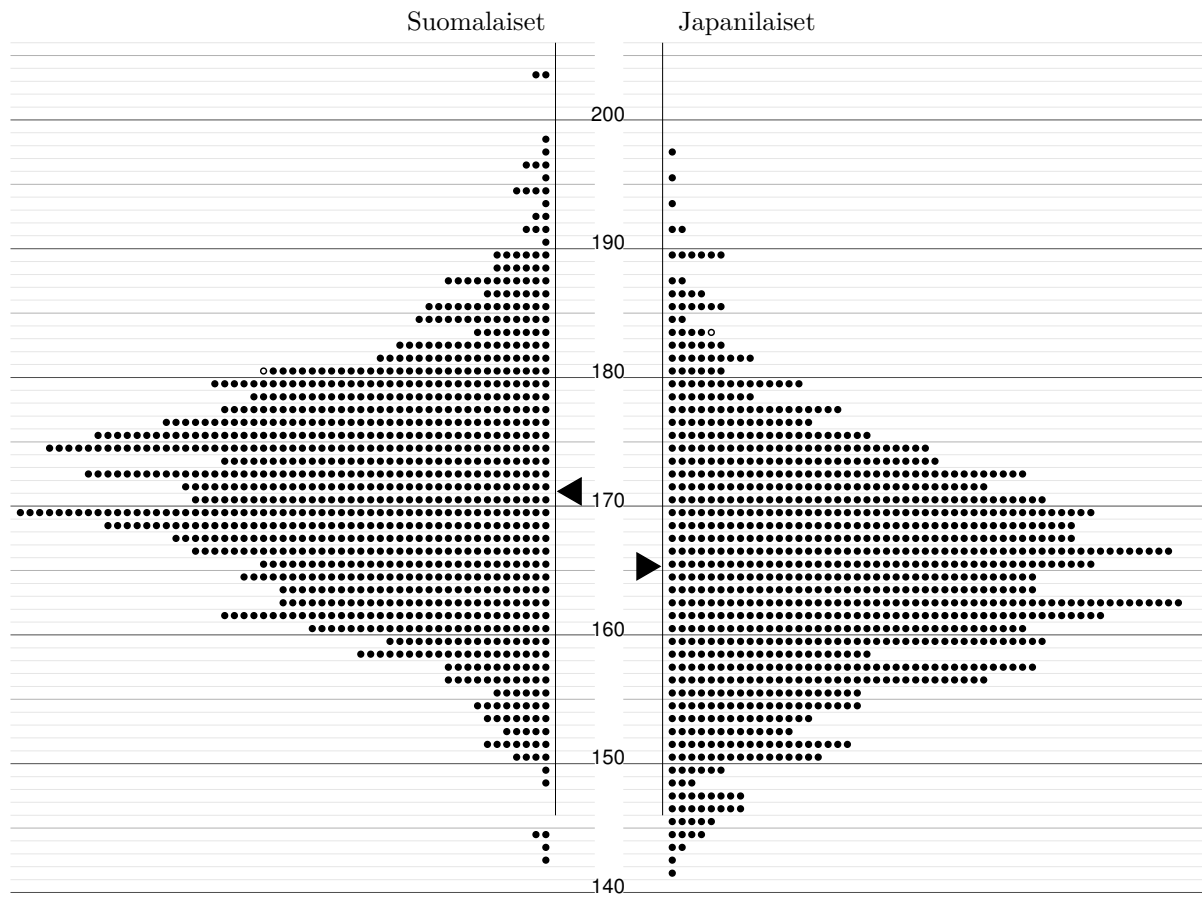
Miltä sinusta kuulostaa väite ”japanilaiset ovat lyhyempiä kuin suomalaiset”? Luulenpa, että olet joskus kuullut niin sanottavan. Tokiossa aikoinani asuneena voin vakuuttaa, että siltä ainakin tuntuu ruuhka-aikaan metroasemalla: hyvin näkee 180-senttinen suomalainen paikallisten päiden yli.

Toisaalta ystäväni ja työtoverini Takanori Ide (katso kuva 1) on minua pidempi. Mitä meidän siis tulisi ajatella väitteestä ”japanilaiset ovat lyhyempiä kuin suomalaiset”? Joidenkin havaintojen mukaan se vaikuttaa todella, mutta vastaesimerkki kuitenkin osoittaa sen epätodeksi. Tarkempi vastaus vaatii täsmällisempää kielenkäyttöä.

Havainnollistan tilannetta tietokonesimulaatiolla. Kuvitellaan järjestely, jossa jalkapallokentälle on aitojen avulla viritetty linjat eripituisten henkilöiden jonoille. Valitaan satunnaisesti 999 japanilaista ja 999 suomalaista. Pyydetään kaikkia heitä menemään pituutensa mukaiseen jonoon, suomalaisia kentän länsipuolelle ja japanilaisia itäpuolelle. Myös Takanori ja minä osallistumme, jolloin kummastakin maasta on 1000 osallistujaa. Helikopterista katsottuna tilanne näyttää kuvan 2 mukaiselta. Huomaa, että kuvaan on merkitty suomalaisten osallistujien keskipituus 171.4 cm sekä japanilaisten osallistujien keskipituus 165.5 cm.



Kuva 1: Kirjoittaja (vas.) ja tohtori Takanori Ide shintotemppelissä torii-porttien alla Kiotossa vuonna 2011. Takanori on minua monta senttiä pidempi. Mainittakoon hovin vuoksi myös, että hänellä on neljännen ase-teen musta vyö kendossa.



Kuva 2: Tuhat suomalaista vasemmalla puolella ja tuhat japanilaista oikealla puolella pituutensa mukaisissa jonoissa. Minut (180 cm) ja Takanori (183 cm) on merkitty valkoisella pallolla. Mustat kolmiot näyttävät kummankin maan osallistujien pituuksien keskiarvon. Vaikka Takanori onkin minua pidempi, ovat japanilaiset keskimäärin lyhyempiä kuin suomalaiset.

Simuloitujen osallistujien pituudet arvottiin satunnaisesti Gaussin käyrän muotoisesta normaalijakaumasta, jonka parametrit ovat keskiarvo ja keskihajonta. Keskiarvot otettiin sivulta <http://www.disabled-world.com/artman/publish/height-chart.shtml>. Sen mukaan suomalaisten keskipituus on 171.5 cm ja japanilaisten 165 cm. Keskihajonta oli molemmissa tapauksissa hatusta vetäisty 9 cm, koska siitä en löytänyt tilastotietoja. Vaikka todelliset keskihajonnat kenties hiukan poikkeavatkin yhdeksästä sentistä, tämän kirjoituksen johtopäätökset pysyvät samoina.

Niinpä näemme, että väite ”japanilaiset ovat lyhyempiä kuin suomalaiset” on epätosi ja että seuraavat kaksi väitettä ovat tosia:

1. Japanilaiset ovat *keskimäärin* lyhyempiä kuin suomalaiset.
2. On olemassa sellainen suomalainen henkilö S ja sellainen japanilainen henkilö T, että T:n pituus on suurempi kuin S:n.

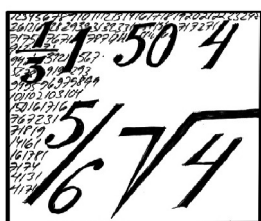
Nyt on vaarana, että esille tuomani asiat näyttävät

lähinnä saivartelulta ja arkipäiväisen kielenkäytön tarpeettomalta perkaamiselta. Miten tämä liittyy ihmisten reiluun kohteluun?

Otetaan esimerkiksi kesätyöpaikan haku, jossa jäätelökioskin myyjältä edellytetään musikaalisuutta. Asiakkaita on nimittäin tarkoitus houkutelaa sulokkaalla laululla.

Usein kuullaan väitettävän, että matemaatikot ovat muita musikaalisempia. (Omat havaintoni eivät tosin tue tätä väitettä, sillä olen koettanut parantaa laulutaitoani vuosikymmenten mittaisella matematiikkaan perehtymisellä. Tulokset eivät ole kehuttavia.) Mikäli jäätelökioskin omistaja kuitenkin uskoo matemaatikkojen musikaalisuuteen, saattaisin viedä työpaikan epäreilulla tavalla joltakin taitavalta laulajalta, joka ei ole matemaatikko.

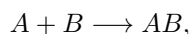
Kirjoitukseni huipentuukin tähän yhteenvetoon: jos haluaa kohdella ihmisiä reilusti, kokonaisiä ryhmiä koskevia keskimääräisiä tietoja tai luuloja ei pidä ulottaa koskemaan yksilöitä.



Differentiaalilaskentaa

Lehtori K.

Lehtori joutui viimeisenä lukukautenaan ennen eläköitymistään tuuraamaan kemian opettajaa, koska kunnollisempaa sijaista ei ollut saatavilla ja lukujärjestyksessä oli tilaa. Edellisestä alan opetusrupeamasta oli ehtinyt kulua yli 20 vuotta, joten oli pakko yrittää perehtyä asiaan ennen luokkaan astumista. Aiheena oli kemian kolmoskurssi, jossa käsitellään reaktiomekanismeja sekä reaktioissa tapahtuvia energioiden siirtymisiä. Tuntien onnistumisista ei jäänyt kerrottavaa, mutta oppikirjoja selatessa tuli mieleen, että kemiallisen reaktion kulkua voisi mallintaa matemaattisestikin. Niinpä lehtori johkaantui pohtimaan palautumatonta reaktiota



missä kuvitteelliset molekyylit A ja B sopivasti yhteen kolahtaessaan muodostavat molekyylin AB . Reaktion voi ajatella tapahtuvan liuoksessa, jonka tilavuus pysyy vakiona. Mitä enemmän siinä on lähtöaineita, sitä enemmän tapahtuu niiden välisiä suotuisia törmäyksiä aikayksikössä ja sitä nopeammin reaktio kulkee. Tuotteen syntynopeus ja vastaavasti lähtöaineiden vähenemisenopeus ovat siis suoraan verrannollisia lähtöaineiden pitoisuuksiin. Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ ne ovat

$$[A] = [B] = c_0 > 0 \quad \text{sekä} \quad [AB] = 0.$$

Reaktioyhtälön perusteella $[A]$ ja $[B]$ pysyvät jatkossakin yhtäsuurina. Olkoon $c = [A] = [B] = c(t)$ hetkellä t . Tarkoituksena on määrittää tämä funktio. Sen muutos pienessä aikavälissä $[t, t + \Delta t]$ on yllä todetun perusteella likimäärin suoraan verrannollinen reagoivien

aineiden pitoisuuksiin hetkellä t sekä aikavälin pituuteen, joten c :n muutos

$$\begin{aligned} c(t) - c(t + \Delta t) &\approx k \cdot [A] \cdot [B] \cdot \Delta t \\ &= k \cdot c(t)^2 \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

missä k on reaktiolle ominainen positiivinen vakio. Likimääräisyys tulee siitä, että c :n arvo muuttuu koko ajan siirryttäessä ajanhetkestä t hetkeen $t + \Delta t$. Jos kuitenkin Δt on hyvin pieni, niin muutos ei ole merkittävä. Likimääräisyhtälö on siis sitä tarkempi, mitä pienempää aikaväliä tutkitaan. Kirjoittamalla se muotoon

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \approx -k \cdot c(t)^2$$

ja antamalla $\Delta t \rightarrow 0$ saadaan vasemmalle puolelle $c'(t)$ ja ” $\approx$ ” oikenee yhtäsuuruudeksi. Tuloksena on differentiaaliyhtälö $c'(t) = -k c(t)^2$ alkuehdolla $c(0) = c_0$. Leibnizin tavalla kirjoitettuna se on

$$\frac{dc}{dt} = -kc^2. \quad (6)$$

Valitettavasti differentiaalilaskenta lukiossa painottuu alkeisfunktioiden derivoimisääntöjen ulkoa opetteluun eikä tällaisia mallinnuksia juuri suoriteta. Luonnontieteellisten ja teknillisten jatko-opintojen kannalta olisi kuitenkin suotavaa, että niitäkin tehtäisiin. Oleellisinta on tällöin derivaatan määritelmän ymmärtäminen sekä muuntuvan ilmiön tarkastelu paikallisesti pienessä muuttujavälissä.

Mitä c -funktioista voidaan sanoa yhtälön (6) perusteella sitä ratkaisematta? Nähdään, että sen derivaatta on

kaikilla t :n arvoilla negatiivinen, joten $c = c(t)$ on aidosti vähenevä. Sillä on siis käänteisfunktio $t = t(c)$. Tässä kohdassa on ”sopivaista” siteerata Lindelöfiä:

Edellä olemme pitäneet x :ää riippumattomana muuttujana ja y :tä x :n funktiona. Mutta voidaan myöskin, ja joskus se tuottaa helpoituksenkin, käsittää y riippumattomaksi muuttujaksi ja x sen funktioksi. [1, s. 2]

Huvittavalta tuntuva helpotuksen i -muoto oli sata vuotta sitten käypää oikeinkirjoitusta! Ernst Lindelöfiä (1870 - 1946) voi pitää yhtenä suomalaisen yliopisotematiikan kantaisista. Hänen neuvoaan seuraten tarkastelemme siis c :n käänteisfunktioita $t = t(c)$. Yhtälöstä (6) seuraa välittömästi

$$\frac{dt}{dc} = t'(c) = -\frac{1}{kc^2},$$

josta integroimalla saamme

$$t = t(c) = \frac{1}{kc} + d.$$

Alkuehdon $t(c_0) = 0$ mukaan integroimisvakio

$$d = -\frac{1}{kc_0},$$

joten

$$t = \frac{1}{kc} - \frac{1}{kc_0},$$

mistä seuraa

$$c = c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0 kt}.$$

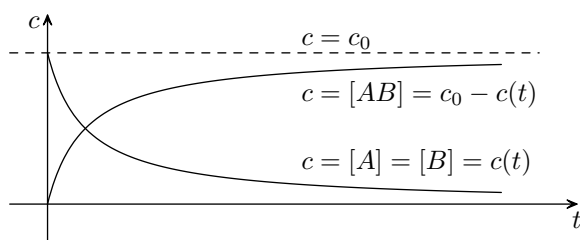
Siis hetkellä t

$$[A] = [B] = c(t) = \frac{c_0}{1 + c_0 kt}$$

ja

$$[AB] = c_0 - c(t) = \frac{c_0^2 kt}{1 + c_0 kt}.$$

Kuviosta



ja yhtälöistäkin näkee, että kuvaajat lähestyvät asymp-totottisesti t -akselia ja suoraa $c = c_0$, kun $t \rightarrow \infty$.

Lehtori ei eläkkeelläkään pääse irti opettamisen vim-mastaan, vaan tyrkyttää aktiiviselle lukijalle muutamia tehtäviä ratkaistaviksi. Aluksi pari helppoa verryttely-kysymystä.

1. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla kahtia. Mallin-na bakteeriviljelmän kokoa ajan funktiona tekstissä esitettyyn tapaan oletuksella, että ravintoa on riit-tävästi.

2. Määritä yhtälön

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 1$.

Kolmas kysymys onkin sitten katalampi. Kyseessä on ylioppilaskokeen tehtävä syksyiltä 1967.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

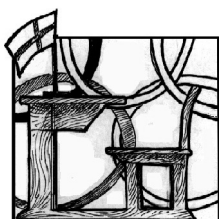
$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$$

valitsemalla $x + y$ apumuuttujaksi.

Differentiaalilaskenta tuli ylioppilaskokeisiin 1960-luvulla sellaisella ryminällä, etteivät opettajatkaan py-syneet mukana. Tämänkin tehtävän ”malliratkaisusta” kokoelmassa [2] voisi antaa enintään pari lohdutuspis-tettä! Sittemmin vaatimustasoa on löysätty. Wolfram-Alphakaan (<http://www.wolframalpha.com/>) ei rat-kaise tätä yhtälöä täydellisesti.

Viitteet

- [1] E. Lindelöf, *Differentiali- ja integralilasku ja sen so-vellutukset III. Ensimmäinen osa. Tavalliset diffe-rentialiyhtälöt*. Mercatorin kirjapaino oy, 1935.
- [2] E. Kannisto, Y. Metsänkylä, *Matemaattiset tehtä-vät ylioppilastutkinnoissa vuosina 1944–1968*, kah-deskymmenesseitsemäs painos, Gummerus osa-keyhtiö, 1968.



Matematiikkadiplomit, tilanne syksyllä 2015

Marjatta Näätänen

Helsingin yliopisto

Syksyllä 2015 tuli uusia vastauspyyntöjä 63 paikkakunnalta: Espoo, Forssa, Haapavesi, Hankasalmi, Hausjärvi, Helsinki, Hyvinkää, Hämeenkyrö, Hämeenlinna, Iisalmi, Ilmajoki, Inari, Jyväskylä, Järvenpää, Kangasala, Karkkila, Kauniainen, Kempele, Kirkkonummi, Kittilä, Kokemäki, Kokkola, Kolari, Kouvola, Kuhmoinen, Kuopio, Kuortane, Lahti, Lappajärvi, Lappeenranta, Lohja, Loviisa, Luumäki, Mikkeli, Muurame, Mäntsälä, Nivala, Nurmijärvi, Oulainen, Oulu, Pietarsaari, Pori, Porvoo, Pöytyä, Raase, Ristiina, Salo, Seinäjoki, Sipoo, Taipalsaari, Tammela, Tampere, Tervola, Tornio, Turku, Tuusula, Ulvila, Vaala, Vaasa, Vantaa, Vihanti, Ylöjärvi, Ähtäri.

Jotkut koulut ovat ilmoittaneet ottavansa diplomit käyttöön kaikilla tasoilla. Vastauspyynnöistä näkyy myös diplomien leviäminen opettajalta toiselle; samalta paikkakunnalta tulee useita pyyntöjä ja opettajat kertovat saaneensa vinkin kollegaltaan ja kertovat, että aikovat levittää tietoa diplomeista tutuilleen.

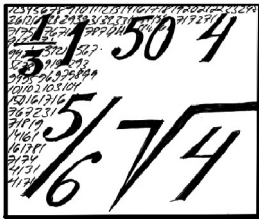
Opettajien palaute on yhtä positiivista kuin ennenkin: ”Hienoa, että meillä on tällainen mahdollisuus”, ”Mahtavaa, että järjestätte tällaista toimintaa”. Oppilaiden innostuminen itselleen sopivan tasoisten haasteiden edessä tulee myös esille, opettaja kirjoittaa, että lapset ”nauttivat haasteista”. Matematiikan tarjoama älyllinen haaste riittää innostamaan, sen kummempaa motivointia ei tarvita. Onnistuminen ponnistelun jälkeen on hieno, jatkoon motivoiva kokemus.

Matematiikkadiplomitoiminta aloitettiin ensimmäisen luokan tehtävien kokeilulla Jyväskylän normaalikoulussa keväällä 2008. Nyt niitä on valmiina 9 tasoa. Ne ete-

nevät, mutta eivät seuraa hyvin tarkasti luokkatasoja. Oppilaiden erojen takia voidaan tarvita samalla luokalla useita eri tasoja.

Matematiikkadiplomeihin on vielä yksi uusi taso tekeillä. Nykyinen 9. taso on lukiolaisellekin haastava, joten on päätetty lisätä yksi uusi, tasoltaan yläasteen loppuun sopiva. Näin oppilaat voisivat testata, että he ovat omaksuneet lukiota varten tarvittavan matematiikan käsitteistön ja hallitsevat sen käyttämisen. Matematiikkahan on kumuloituva aine, aukot perustiedoissa estävät ymmärrystä jatkossa ja jäljelle jää vain ulkoa opettelu. Työ on aloitettu ja toivottavasti valmistuu kesään 2016 mennessä.

Opettajat voivat pyytää vastaukset koulun sähköpostiin osoitteesta juha.ruokolainen(at)helsinki.fi. Näin pystytään myös seuraamaan diplomitoiminnan leviämistä eri puolille maata. Erityisesti suurten keskustien ulkopuolella tehtävien saamista on arvostettu. Opettajat kertovat oppilaiden laskevan niitä ”innoissaan”. He kertovat myös käyttävänsä niitä (ylöspäin) eriyttämiseen, tällaisesta materiaalista on puute. Diplomitehtäviä voi laskea luokassa, kotona, kerhossa, ryhmässä, myös kertaamiseen voi tehtäviä käyttää. Diplomisivulla on myös runsaasti oheislukemistoa. Kiittävää palautetta on tullut siitä, että näin tasokasta materiaalia annetaan kaikille ilmaiseksi. Koulussa on yleinen ongelma, että tasoerot kasvavat, niinpä opettaja, joka opettaa 1. ja 2. luokkaa, on vuosien kuluessa huomannut, että erot kasvavat koko ajan (siis jo näin varhain!): ”Matematiikasta taitaville eivät hyvienkään kirjasarjojen lisätehtävät tahdo riittää tai ainakin ne ovat saman toistoa. Tässä kohtaa diplomit tulevat tarpeeseen.”



Aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Åbo Akademi

Joulun aikoihin ryhdyin joinain yön pimeinä tunteina pohtimaan riisipuuron mantelimääriä. Sekä minä että vanhempani keittää riisipuuron harvinaisen harhaoppisesti: minä täysin ilman manteleita, vanhempani hilitsemällä mantelimäärällä. Jos siis vanhempieni keittämässä riisipuurossa on n mantelia annosta kohti ja minun keittämässäni nolla, ja ihminen syö molempia riisipuuroja yhden annoksen, on hänellä keskimäärin $\frac{n}{2}$ mantelia riisipuuroannoksessa. Tämä on aritmeettinen keskiarvo, eli se keskiarvo, josta yleensä keskiarvojen yhteydessä puhutaan. Näiden lukujen geometrinen keskiarvo onkin vain nolla. Geometrisen keskiarvo lasketaan kertomalla luvut keskenään ja ottamalla sitten tulosta niin mones juuri kuin tulossa tekijöitä oli. Tässä tapauksessa siis $\sqrt{n \cdot 0} = 0$. Tässä tapauksessa geometrinen keskiarvo on siis huomattavasti pienempi kuin aritmeettinen. Itse asiassa voidaan todistaa, että epänegatiivisten lukujen aritmeettinen keskiarvo on aina vähintään yhtä suuri kuin geometrinen. Todistetaan tämä tulos hetken kuluttua induktiolla. Ennen sitä määritellään aritmeettinen ja geometrinen keskiarvo täsmällisesti sekä motivoidaan vähän, minkä ihmeen vuoksi geometrinen keskiarvo edes on olemassa, eli mitä sillä voi tehdä. Mantelien laskemiseen se nimittäin lopulta on harvinaisen huono mittari.

Aritmeettinen keskiarvo

Lukujen $a_1, a_2, \dots, a_n$ aritmeettinen keskiarvo määri-

tellään lausekkeella

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Tämä soveltuu hyvin esimerkiksi manteliannosten laskemiseen: Jos syö kaksi annosta puuroa, molemmissa $\frac{n}{2}$ mantelia, niin loppusumma on n mantelia, jonka saa myös syömällä esimerkiksi yhden mantelittoman ja yhden n mantelin annoksen, tai minkä tahansa sellaisen manteliannoksen yhdistelmää, joiden keskiarvo on $\frac{n}{2}$ mantelia.

Geometrinen keskiarvo

Epänegatiivisten lukujen $a_1, a_2, \dots, a_n$ geometrinen keskiarvo määritellään lausekkeella

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Tässä on todellakin kriittistä, että luvut ovat epänegatiivisia, sillä jos esimerkiksi $n = 2$ ja luvuista toinen negatiivinen ja toinen positiivinen, on geometrinen keskiarvo imaginäärinen, eikä se kuvaa tilannetta lainkaan. Jos taas esimerkiksi molemmat luvut olisivatkin negatiivisia, olisi geometrinen keskiarvo positiivinen (neliöjuuri määritellään positiiviseksi), eikä sellaisenaan luvun voi ajatella kovin hyvin kuvaavan alkuperäisten lukujen suuruutta, sillä tuntuisi mielettömältä, että mikään keskiarvo olisi suurempi kuin alkuperäiset luvut.

Seuraava kysymys tietenkin on: Milloin olisi järkevää käyttää geometrista keskiarvoa aritmeettisen sijaan? Onko tällaisia tilanteita? Ehkä alkeellisin esimerkki ovat korot: Tehdään x euron pääomatalletus. Ensimmäisen vuoden korkoprosentti on a % ja toisen vuoden korkoprosentti on b %. Kuinka paljon rahaa on kahden vuoden jälkeen? Vastaus on tietysti

$$x \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Jos haluttaisiin selvittää, mikä vuotuisen korkoprosentin pitäisi olla, jos korkoprosentti olisi vakio, jotta päästäisiin samaan tuottoon, toimii geometrinen keskiarvo ilmeisesti. Lukujen $1 + \frac{a}{100}$ ja $1 + \frac{b}{100}$ geometrinen keskiarvo on

$$\sqrt{\left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right)},$$

jolloin kahden vuoden jälkeen säästöjä on

$$x \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right)}^2 = x \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Jos tässä yritettäisiin käyttää aritmeettista keskiarvoa, mentäisiin metsään ja rankasti:

$$\frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right) + \left(1 + \frac{b}{100}\right)}{2} = 1 + \frac{a+b}{200},$$

ja tällä luvulla kahden vuoden jälkeisen tuoton laskeminen menisikin seuraavasti:

$$x \left(1 + \frac{a+b}{200}\right)^2 = x \left(1 + \frac{a+b}{100} + \left(\frac{a+b}{200}\right)^2\right),$$

joka ei ole sama kuin

$$x \left(1 + \frac{a}{100}\right) \left(1 + \frac{b}{100}\right) = x \left(1 + \frac{a+b}{100} + \frac{ab}{10000}\right),$$

paitsi jos $a = b$.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö voidaan muotoilla seuraavasti: Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ epänegatiivisia kokonaislukuja. Tällöin

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

ja yhtäsuuruus vallitsee, jos ja vain jos $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö on hyvin tunnettu, ja sille on useita erilaisia todistuksia. Sen voi todistaa yksinkertaisella (ei simppelellä, vaan kertaalleen tehdyllä) induktiolla (katso esimerkiksi Lehtisen Pieni kilpailumatematiikan opas [7]), Jensenin epäyhtälöllä tai

kuten seuraavaksi teemme, kaksinkertaisella induktiolla. Kaksinkertainen induktio on todella tyylikäs: Ensin todistetaan epäyhtälö kaikille kakkosen potensseille, ja sen jälkeen osoitetaan, että jos väite pätee luvulla $n+1$, niin se pätee myös luvulla n .

Induktiossa tyypillisesti osoitetaan, että mikäli väite pätee luvulla n , pätee se myös luvulla $n+1$, jolloin alusta, luvusta $n=1$ aloittaen voidaan edetä todeten, että väitteen pätemisestä, kun $n=1$, seuraa, että väite pätee myös, kun $n=2$, josta seuraa, että väite pätee, kun $n=3$, ja niin edelleen.

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistuksessa käytetyn induktion filosofia on tosiaan toisenlainen, ensin käsitellään kakkosen potenssit, ja sitten laskeudutaan. Tämä tarkoittaa sitä, että jos haluttaisiin vaikkapa todistaa, että epäyhtälö pätee, kun $n=6$, ei edettäisi kukaan ketjussa

$$n=1 \rightarrow n=2 \rightarrow n=3 \rightarrow n=4 \rightarrow n=5 \rightarrow n=6$$

vaan ketjussa

$$n=1 \rightarrow n=2 \rightarrow n=4 \rightarrow n=8 \rightarrow n=7 \rightarrow n=6.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön todistus

Keskitytään nyt todistamaan aritmeettis-geometrisen epäyhtälön suuruusjärjestys. Tarkastellaan lopuksi yhteenvedossa sitä, miksi itse asiassa yhtäsuuruus voi valita, jos ja vain jos kaikki luvut ovat yhtä suuria.

Ensimmäinen induktio

Ensimmäisen induktion tehtävä on siis todistaa väite kaikille luvun 2 potensseille. Aloitetaan luvusta $1 = 2^0$: Väite pätee nyt ilmeisesti:

$$\sqrt[n]{a} = a = \frac{a}{1}.$$

Joudumme lisäksi osoittamaan väitteen luvulle $2 = 2^1$, koska tätä tarvitaan todistuksen rakentamisessa. Osoitetaan siis, että

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten epäyhtälö voidaan puolittain neliöidä ja saadaan yhtäpitävä epäyhtälö:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \sqrt{ab}^2 = ab.$$

Tämä epäyhtälö on puolestaan yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{a^2 + b^2}{4} \geq \frac{ab}{2}$$

kanssa, mutta tämä epäyhtälö onkin sama kuin

$$\frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{ab}{2} = \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0,$$

mikä on tosi.

Tehdään nyt induktio-oletus: Väite pätee luvulla 2^k , eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Osoitetaan seuraavaksi, että väite pätee myös luvulla 2^{k+1} , eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \dots, a_{2^{k+1}}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Huomataan, että

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\ &= \frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{k+1}}}, \end{aligned}$$

ja ensimmäinen induktio onkin valmis.

Toinen induktio

Toisen induktion tehtävä on siis osoittaa, että mikäli väite pätee luvulla $n + 1$, pätee väite myös luvulla n .

Huomataan aluksi, että alkuaskel on jo hoidettu ensimmäisellä induktiolla. Voidaan siis saman tien muotoilla induktio-oletus: Väite pätee luvulla $n + 1$, eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}},$$

kun luvut $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja.

Induktioväite on siis nyt, että väite pätee luvulla n , eli että

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

kun luvut $a_1, a_2, \dots, a_n$ ovat mitä tahansa epänegatiivisia reaalilukuja. Tämä on nyt todistettava. Manipuloidaan ja hyödynnetään induktio-oletusta. Saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &= \frac{\frac{n}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n+1} \\ &\geq \sqrt[n+1]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}}. \end{aligned}$$

Siispä

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n/(n+1)} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Puolittain potenssiin $\frac{n+1}{n}$ korottamalla saadaan

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

ja todistus on valmis.

Yhteenveto induktioista

Induktiot yhteensä kattavat kaikki mahdolliset positiiviset kokonaisluvut, sillä ensimmäisellä induktiolla päästään mihin tahansa kakkosen potenssiin, ja toisella induktiolla päästään mistä tahansa luvusta alaspäin. Siispä, jos halutaan todistaa aritmeettis-geometrisen epäyhtälö luvulle n , riittää ensin todistaa se ensimmäisen induktion avulla sellaiselle luvulle 2^k , joka toteuttaa ehdon $2^k \geq n$, ja tämän jälkeen laskeudutaan lukuun n .

Vielä pitää käsitellä yhtäsuuruus. Huomataan, että yhtäsuuruus pätee triviaalisti, kun kaikki luvut ovat yhtä suuria. Silloin aritmeettinen ja geometrisen keskiarvo ovat yhtä suuria. Perustellaan nyt, miksi milloinkin muulloin aritmeettinen ja geometrisen keskiarvo eivät voi olla yhtä suuria. Huomataan, että tapauksessa $n = 2$ käytettiin epäyhtälöä

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Tässä epäyhtälössä yhtäsuuruus pätee selvästi, jos ja vain jos $a = b$. Tätä askelta puolestaan tarvittiin todistaamaan epäyhtälö kakkosen potensseille, joten sama ominaisuus periytyi niille, ja lopulta vielä toisessa induktiossa. (Harjoitustehtäväksi jätetään tarkistaa päättelyketjun pitävyys.)

Niille, jotka haluavat lukea lisää

Epäyhtälöistä löytyy paljon mukavia tekstejä. Matematiikan olympiavalmennuksen sivulta löytyy esimerkiksi Esa Vesalaisen kääntämä Paul Vaderlindin epäyhtälömoniste [8] sekä allekirjoittaneen ja Jari Lappalaisen moniste [5]. Edistyneempää materiaalia kaipaavalle sopii esimerkiksi Kedlayan $A < B$ [4]. Solmu-lehdessä Halmetoja on kirjoittanut tekstejä epäyhtälöistä, kuten [1] ja [2].

Viitteet

- | | |
|--|---|
| <p>[1] M. Halmetoja. Epäyhtälöistä, osa 1. Solmu 2/2010.
http://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/2/epayhtaloista_osa1.pdf</p> <p>[2] M. Halmetoja. Epäyhtälöistä, osa 2. Solmu 3/2010.
http://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/3/epayhtaloista_osa2.pdf</p> <p>[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. Inequalities. Cambridge University Press.</p> <p>[4] K. Kedlaya. $A < B$ (A is less than B).
http://artofproblemsolving.com/articles/files/KedlayaInequalities.pdf</p> | <p>[5] J. Lappalainen, A.-M. Ernvall-Hytönen. Epäyhtälöoppia matematiikkaolympialaisten tehtäviin.
http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/eykirja.pdf</p> <p>[6] M. Lehtinen. Kilpailumatematiikan opas.
http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/kilpmatopas.pdf</p> <p>[7] M. Lehtinen. Pieni kilpailumatematiikan opas.
http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/opas.pdf</p> <p>[8] P. Vaderlind. Epäyhtälöiden kieltämätön viehätys.
http://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/vaderlind.pdf</p> |
|--|---|

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)

Solmu 1/2016

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, professori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

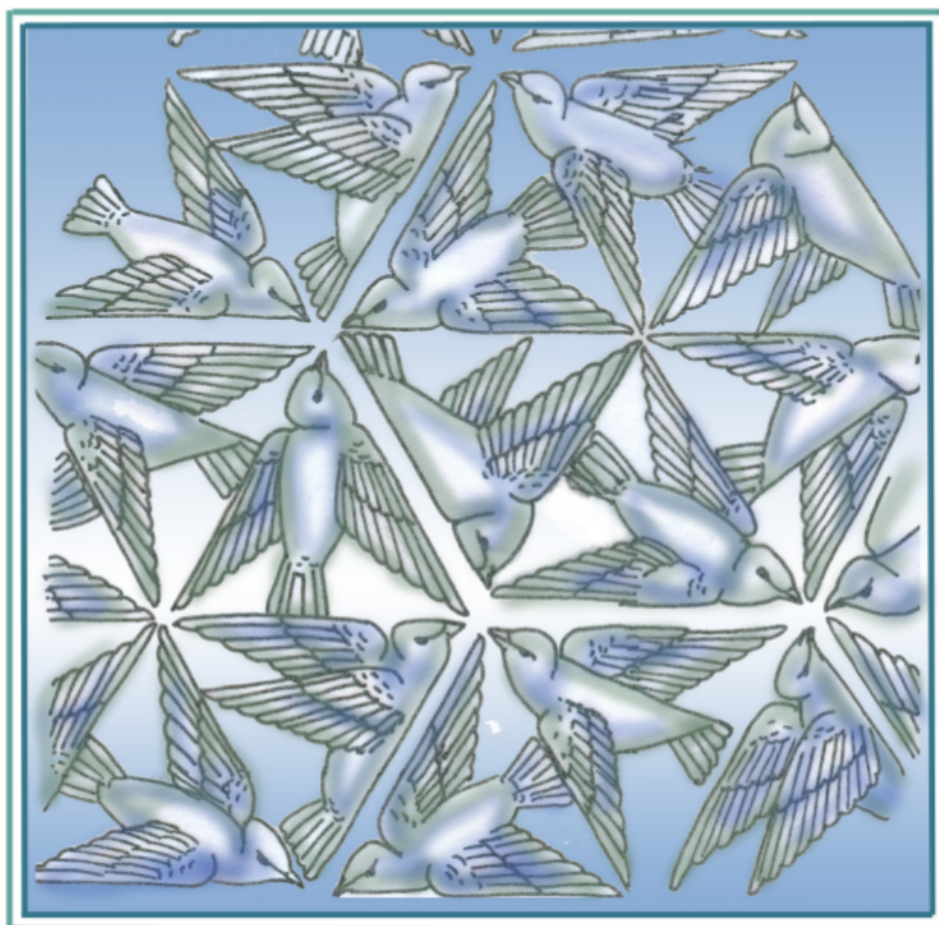
Petri Rosendahl, assistentti, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Numeroon 2/2016 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.3.2016 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.



 SOLMU
MATEMATIIKKALEHTI

matematiikkalehtisolmu.fi