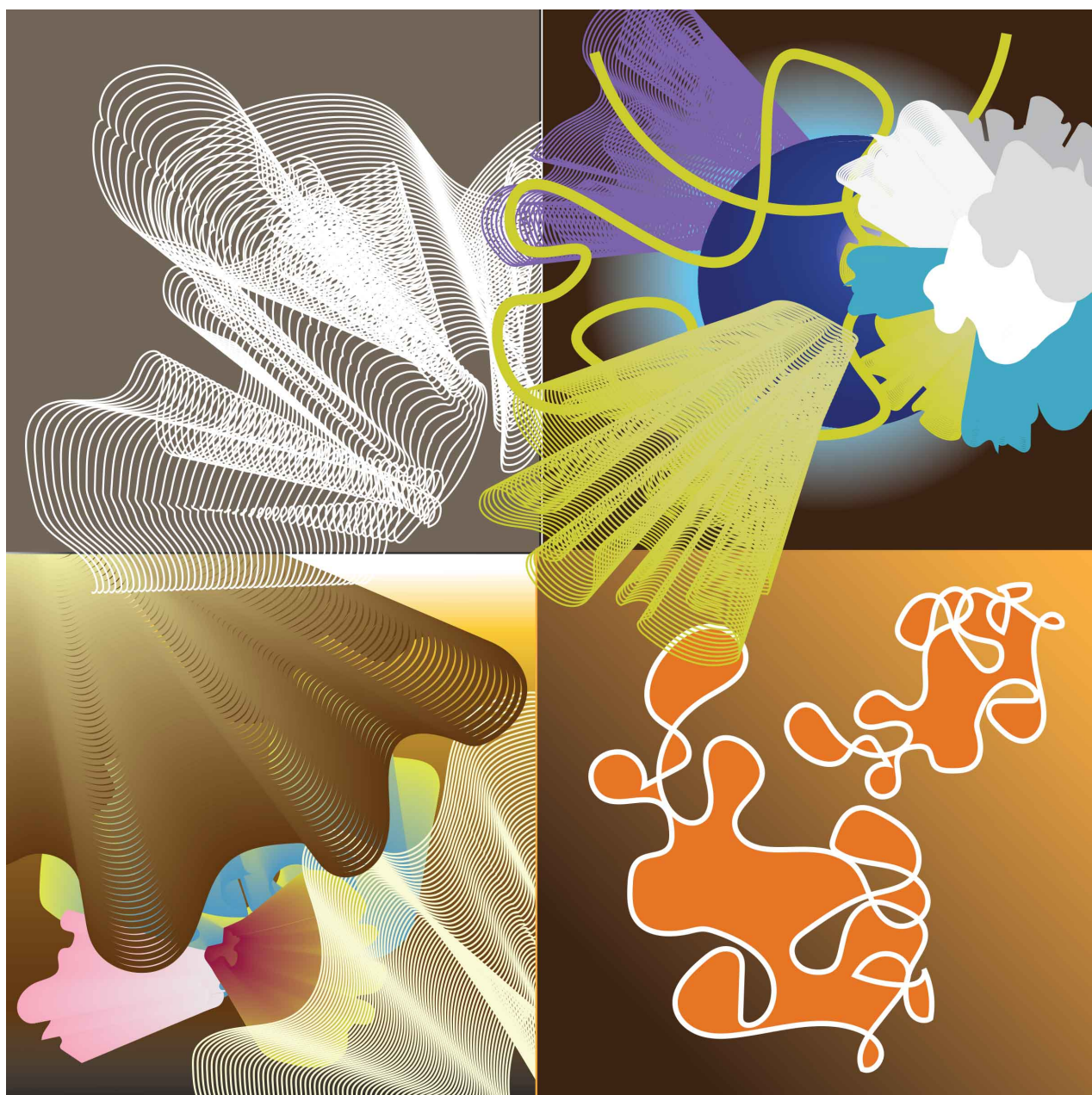


Solmu

Matematiikkalehti
3/2015

matematiikkalehtisolmu.fi



Solmu 3/2015

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

matematiikkalehtisolmu.fi

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, akademilektor, Matematik och statistik, Åbo Akademi

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Camilla Hollanti, apulaisprofessori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, ari.koistinen@metropolia.fi, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, juha.lehtback@jyu.fi, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, jorma.merikoski@uta.fi, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, matti.nuortio@oulu.fi, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Petri Rosendahl, assistentti, petri.rosendahl@utu.fi, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, antti.viholainen@uef.fi, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

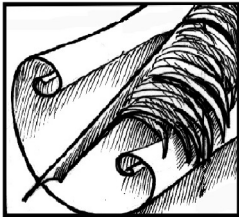
Numeroon 1/2016 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 2.1.2016 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Mikä oikeasti kannattaa? (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	4
Sotapäällikkö ja geometriat (Matti Lehtinen)	5
Homotetia eli venytyskuvaus geometrisissa konstruktioissa (Jani Hannula)	9
Odottelua pysäkillä (Juha Karvanen ja Antti Luoto)	11
Konsonanssi ja dissonanssi musiikissa (Hilla Fred)	16
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Minskissä 14.–20.4.2015 (Mirjam Kauppila ja Esa V. Vesalainen)	19
Hyperbolisesta geometriasta (Riikka Schroderus)	24
Solmun matematiikkadiplomit (Marjatta Näätänen)	30
Kirja-arvio: Lukujen motivoinnista Hilbertin hotelliin (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	31



Mikä oikeasti kannattaa?

Pääkirjoitus

Siirryin elokuun alussa uuteen työpaikkaan Åbo Akademiin. Paljon tehtävistä on samoja kuin ennenkin: opetan ja tutkin. Tutkijana toki tutkin enemmän kuin nykyään lehtorina, ja vastaavasti opetin vähemmän, mutta silti, pääpiirteittäin samat tehtävät. Uusiakin tehtäviä tuli. Siinä, missä tutkijana minulla oli hyvin vähän vastuuta mistään muusta kuin omista tekemisistäni (toki ohjattavista myös), on lehtorina vastuu ihan toisenlaista. Toimin joillekin opiskelijoille *egenlärarena*, omaopettajana.

Omaopettajana luen heidän opintosuunnitelmiaan, tarkastan, että ne ovat kunnossa ja järkeviä, sekä pyrin parhaani mukaan vastaamaan opiskelijoiden kysymyksiin. Osa kysymyksistä on helppoja, kuten kysymys mitä pitää tehdä, jos haluaa tulla tenttimään lukuteorian. Opintosuunnitelmien lukeminen ja järkevien ohjeiden antaminen opiskelijoille on paljon vaikeampaa. Mistä minä voin ihan oikeasti tietää, mikä kullekin on järkevää tai minkä asioiden oppiminen on kaikkein hyödyllisintä pitkällä tähtäimellä?

Aikoinaan, kun ryhdyin opiskelemaan matematiikkaa, pidin itsestään selvänä, että kyllä tästä töitä löytää, ja vielä yliopistolta. Muutamaa vuotta myöhemmin uskoin tähän entistä vahvemmin: näyttihän selvältä, että yliopistoilta vapautuu eläköitymisten myötä paikkoja, ja uskoin, että paikat täytetään. Sen jälkeen rahaa on säästetty, ja moni on joutunut yliopistolta lähtemään. Minulle kävi hyvin, sain yliopistolta työpaikan, jossa todella viihdyn, mutta moni ei ole ollut yhtä onnekas.

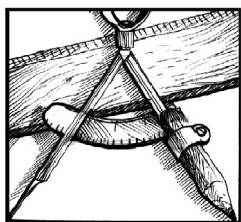
Ilmetselin äidilleni viime talvena, miksei hän käsenyt minua lukemaan tilastotiedettä. Olin yhtäkkiä tajun-

nut tarvitsevani tilastotieteen tietoja ja taitoja, eikä minulla niitä ollut. Äitini kertoi, että kyllä hän oli yrittänyt, mutta en ollut uskonut. En ole koskaan katunut asioita, joita olen opiskellut. Toistuvasti olen katunut niitä, joita en ole opiskellut, tai jotka olen opiskellut vain heikosti.

Mitä siis voin hyvällä omallatunnolla opiskelijoille sanoa? No, vahvasti uskon, että matematiikan opiskelu on hyvä ratkaisu. Perusopinnot on hoidettava kunnialla ja ajallaan. Sen varaan ei ehkä kannata laskea, että jää yliopistolle, vaan varasuunnitelma kannattaa tehdä. Oikeastaan, mikä ikinä se ensisijainen suunnitelma onkaan, niin aina kannattaa olla varasuunnitelma. (Hyviä ideoita ensisijaisiksi suunnitelmiksi ja varasuunnitelmiksi löytyy esimerkiksi Solmun työllisyysnumerosta 2/2014.) Monipuolisuus on hyvä asia. On hyvä opiskella matematiikkaa syvällisesti ja laajasti. Se auttaa monien asioiden ymmärtämisessä ja antaa hyvän pohjan. On fiksua myös lukea kattavasti sivuaineita, eikä ehkä vain ihan sitä pienintä mahdollista määrää, jolla voi juuri ja juuri valmistua, koska niiden sivuaineiden avulla voi saada rakennettua varasuunnitelman ja saada itselleen monista asioista näkemystä. Ei koskaan pidä jättää huomiotta sitä, mikä omasta mielestä on oikeasti kivaa. Aina ei pääse toiveammattiinsa, usein asioiden harjoittelu vaatii vain yksinkertaisesti ”no pain – no gain” -asenteen, mutta jos ei lainkaan nauti siitä, mitä tekee, ei tulokseen luultavasti ole hyvä. Niin ja viimeisenä asiana: töitä on tehtävä.

Mukavaa alkanutta lukuvuotta!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen



Sotapäällikkö ja geometria

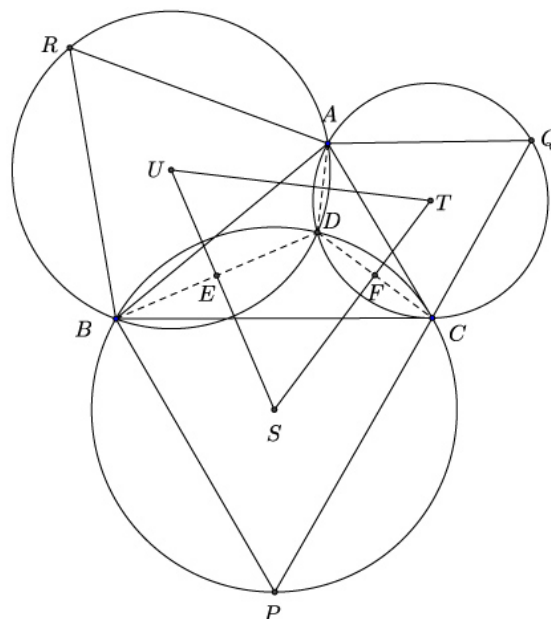
Matti Lehtinen

Valtiomiehiä tai sotapäälliköitä ei yleensä yhdistetä matematiikkaan. Poikkeuksia tietysti on. Suomen kenttätykistön luoja pidettyä tykistönkenraali *Vilho Petter Nenosta* (1883–1960) kunnioitettiin nerokkaana tykistömatemaatikkona. Eläkepäivinänsä hän tiettävästi innostui Fermat’n ongelmasta ja aiheutti matematiikan professori Pekka Juhana Myrbergille kiusallisiakin tilanteita, kenraalin ratkaisuyritykset kun olivat aika epäonnisia, mutta Myrberg ei tätä olisi oikein kehdannut suurmiehelle suoraan sanoa.

Henkilö voidaan ikuistaa matematiikkaan liittämällä hänen nimensä matemaattiseen tulokseen. Pythagoras on kuolematon. Luultavasti ainoa sotapäällikkö ja valtiomies, joka tämän kunnian on osakseen saanut, on itse keisari Napoleon. *Napoleonin lause* on geometrian tulos, joka yksinkertaisimmassa muodossaan on seuraava:

Jos (mielivaltaisen) kolmion sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot, niin niiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärjet.

Napoleonin lause voidaan todistaa monin eri tavoin – tästä vakuuttuu vaikkapa Google-haun avulla. Seuraava todistus on melko helppo (kuva 1). Olkoon ABC kolmio, jossa suurin kulma $\angle CAB < 120^\circ$, ja BPC , CQA ja ARB kolmion ABC sivut kantoina piirretyt tasasivuiset kolmiot. Olkoot S , T ja U näiden kolmioiden keskipisteet. (Tasasivuisen kolmion keskijanojen, korkeusjanojen, kulmanpuolittajien ja sivujen keskinormaalien leikkauspiste on sama, joten keskipiste on oikeutettu



Kuva 1.

nimitys.) Kolmioiden ARB ja CQA ympärysympyrät leikkaavat, paitsi pisteessä A , myös pisteessä D kolmion ABC sisällä. Koska $\angle ARB = \angle CQA = 60^\circ$, niin jännekuiluista $ARBD$ ja $CQAD$ nähdään, että $\angle ADB = \angle ADC = 120^\circ$. Mutta silloin $\angle CDB = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$. Koska $\angle BPC = 60^\circ$, $BPCD$ on jännekuilu. Piste D on siis myös kolmion BPC ympärysympyrällä. Leikatko US ja BD pisteessä E ja TS ja DC pisteessä F . Heti nähdään, että US on BD :n keskinormaali ja ST on DC :n keskinormaali.

Kulmat $\angle DES$ ja $\angle DFS$ ovat siis suoria kulmia. Koska $\angle EDF = 120^\circ$, on kulman $\angle ESF$ oltava 60° . Samoin nähdään, että kolmion STU kärjissä T ja U olevat kulmat ovat $= 60^\circ$, joten kolmio STU on tasasivuinen kolmio. – Jos $\angle CAB \geq 120^\circ$, niin piste D joko yhtyy pisteeseen A tai on kolmion ABC ulkopuolella. Todistuksen kannalta olennainen asia, $\angle CDB = 120^\circ$, toteutuu näissäkin tapauksissa.

Ei ole olemassa mitään todisteita siitä, että Napoleonin lause olisi juuri Napoleonin keksintöä. On arveltu, että Napoleonin matemaattiset taidot eivät olisi riittäneetkään tällaiseen saavutukseen. Varmuudella Napoleonin nimi tiedetään liitetyn lauseeseen 1820-luvun puolivälissä, Napoleonin jo poistuttua näyttämöltä. Napoleon vietti vuodet 1815–21 vankina St. Helenan saarella, jossa hän kuolikin.

Napoleon oli kuitenkin matemaattisesti orientoitunut. Jo upseerikoulussa hänen mieliaineensa olivat matematiikka ja historia, ja myöhemmin hän oli vakuuttunut matematiikan tärkeydestä. Ajan johtavat matemaatikot kuten *Laplace*, *Fourier* ja *Monge* olivat hänen lähipiiriään. Ja sanotaan, että Napoleon oli intohimoinen laskija: ajaessaan keisarina vaunuissaan Pariisissa hän tapasi laskea talojen ikkunoiden lukumääriä – toimi, johon autoilla liikkuvat nykyjohtajat eivät helposti voisikaan ryhtyä. Historiasta toki tiedämme, että Napoleon ei lopulta osannut laskea riittävän hyvin. Sotaretki Venäjälle vuonna 1812 oli katastrofiin päättynyt virhearvio.

Vuonna 1796 Napoleon Bonaparte oli vielä nuori ja eteenpäin pyrkivä kenraali. Hän sai johtaakseen sotajoukon, jonka oli määrä taistella Italiassa Ranskan tuolloisia vihollisia Itävaltaa ja Sardiniaa vastaan. Sotaretkellä Napoleon tapasi italialaisen matemaatikon *Luigi Mascheronin* (1750–1800). Mascheroni oli kehittänyt uudenlaisen tavan suorittaa geometriset piirustustehtävät, jotka antiikista periytyvän tradition mukaan tuli tehdä kahta työkalua, harppia ja viivoitinta käyttäen. Mascheroni pystyi osoittamaan, että kaikki se, mikä on mahdollista harpilla ja viivoittimella, voidaan tehdä myös pelkällä harpilla (pois lukien tietysti suoran piirtäminen). Mascheroni ei tiennyt, että saman keksinnön oli tehnyt jo tanskalainen *Georg Mohr* (1640–97) yli sata vuotta aikaisemmin. Mohr ja hänen teoksensa *Euclides curiosus* olivat täysin unohtuneet. Mohrin kirja löytyi sattumalta antikvariaatista vasta vuonna 1928. Nykyään puhutaan *Mohrin–Mascheronin geometriasta*. Ja Tanskan lukiolaisten vuotuinen matematiikkakilpailu on *Georg Mohr -kilpailu*.

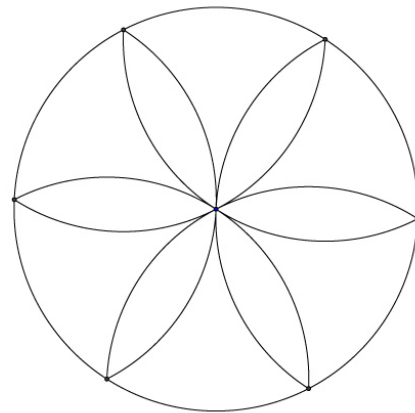
Mascheronin ja Napoleonin tapaamisella oli seurauksia. Mascheroni omisti vuonna 1797 Paviassa julkaisemansa kirjan *Geometria del compasso* eli *Harpin geometria* Napoleonille, ja Napoleon, palattuaan Pariisiin ennen kirjan ilmestymistä, kiusasi ranskalaisia matemaatikkoystäviään Mascheronilta oppimallaan ongelmalla. Se on sittemmin tullut tunnetuksi *Napoleonin ongelmana*:

On etsittävä pelkästään harppia käyttäen ympyrän sisään piirretyn neliön kärkipisteet.

Jos Mascheronin teoria pitää paikkansa – ja pitääähän se, niin kuin voidaan esimerkiksi ns. *inversiokuvauksen* ominaisuuksien perusteella osoittaa – tehtävä voidaan varmasti ratkaista. Mutta tässä ei tarvita kaikkia keinoja.

Jos ympyrän säde on r , niin sen sisään piirretyn neliön lävistäjä on ympyrän halkaisija $2r$. Neliön sivun pituus on siis $r\sqrt{2}$, ja tällainen pituus olisi siis saatava harpin kärkien väliin. Jos r ja $r\sqrt{2}$ olisivat suorakulmaisen kolmion kateetit, hypotenuusa olisi Pythagoraan lauseen nojalla $r\sqrt{3}$. Jos toisaalta löydämme suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa on $r\sqrt{3}$ ja toinen kateetti r , niin kolmion toinen kateetti antaa ongelman ratkaisun.

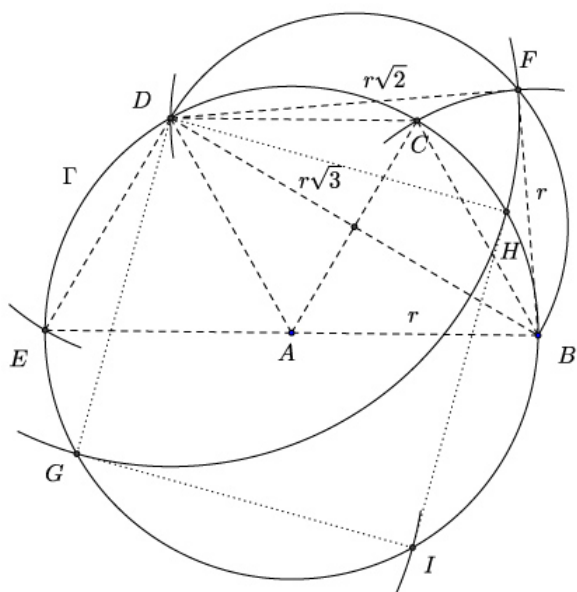
Lähes jokainen harpilla leikitellyt on varmaan joskus piirtänyt ”kuusiterälehtisen kukan”, joka syntyy, kun piirretään 6 ympyränkaarta, joiden säde on sama kuin alkuperäisen ympyrän, mutta keskipisteet ovat alkuperäisen ympyrän ja piirrettyjen kaarien leikkauspisteitä (kuva 2). Tämä yksinkertainen kuvio on avain Napoleonin ongelman ratkaisuun.



Kuva 2.

Olkoon nyt AB jana, jonka pituus on r ja Γ A -keskinen ja B :n kautta kulkeva ympyrä (kuva 3). Piirretään B keskipisteenä r -säteinen ympyrä, joka leikkaa Γ :n pisteessä C ja edelleen C -keskinen r -säteinen ympyrä, joka leikkaa Γ :n pisteessä D . Koska $AC = AD = r$, kolmiot ABC ja ACD ovat tasasivuisia. Pisteet B ja D ovat janan AC keskinormaalilla, joten $BD \perp AC$. Janan BD pituus on siten kaksi r -sivuisen tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituutta, eli $r\sqrt{3}$. Jos nyt piirrämmme puoliympyrän, jonka halkaisija on BD ja merkitsemme F :llä puoliympyrän ja B -keskisen r -säteisen ympyrän leikkauspistettä, niin Thaleen lauseen nojalla $\angle BFD$ on suora kulma. DBF on sellainen suorakulmainen kolmio, jonka tarvitsemme, $DF = r\sqrt{2}$ ja D -keskisen F :n kautta kulkevan ympyrän ja Γ :n leikkauspisteet G ja H ovat kaksi halutun neliön kärkeä.

Yksi kärki on tietysti D ja neljäs kärki I löytyy Γ :n ja G -keskisen D :n kautta kulkevan ympyrän leikkauspisteestä.

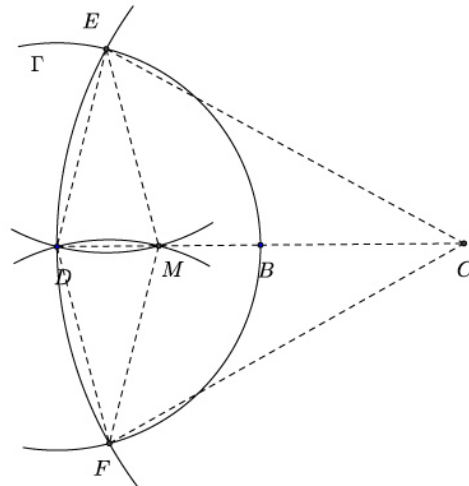


Kuva 3.

On kuitenkin yksi mutta. Miten piirretään se puolimpyrä, jonka halkaisija on DB ? Sitä varten on löydetävä janan DB keskipiste. Yllättävää saattaa olla, että janan puolittaminen pelkällä harpilla vaatii esityökseen janan kaksinkertaistamisen. Kuusiterälehtisen kuvan konstruktio kertoo heti, miten jana kaksinkertaistetaan. Jos kuvassa 3 piirretään vielä yksi ympyrä, nyt D keskipisteenä ja pisteen C kautta, niin tämän ja Γ :n toinen leikkauspiste E on sellainen, että $BE = 2 \cdot BA$. Nythän nimittäin myös ADE on tasasivuinen kolmio, joten $\angle BAE = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, joten E on suoralla AB ja $AE = BA$, joten $BE = 2 \cdot BA$.

Etsitään nyt pelkin harppitempuin piste, joka on annetujen kahden pisteen, esimerkiksi B ja D , välisen janan keskipiste (kuva 4). Tätä varten piirretään D keskipisteenä B :n kautta ympyrä Γ . Edellisessä kapaleessa selostetulla tavalla löydetään piste C , joka on Γ :n ulkopuolella ja jolle $DC = 2 \cdot DB$. Piirretään nyt C keskipisteenä ympyrä D :n kautta. Se leikkaa Γ :n pisteissä E ja F . Kolmiot CED ja CDF ovat nyt tasakylkisiä kolmioita, ja erityisesti sellaisia kolmioita, joiden kylki on kaksi kertaa niin pitkä kuin kanta. Piirretään vielä E ja F keskipisteinä D :n kautta kulkevat ympyrät. Ne leikkaavat toisensa myös pisteessä M . Piirroksien mukaan pisteet D , M ja C ovat janan EF keskinormaalien pisteitä. M on siis suoralla DC . Mutta myös B on suoralla DC . Tästä seuraa, että tasakylkisillä kolmioilla CED ja EDM on yhteinen kantakulma $\angle EDM$. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia. Mutta silloinhan pienemmänkin kolmion kanta eli DM on puolet sen kyljestä DE . DE ja DB ovat molemmat Γ :n

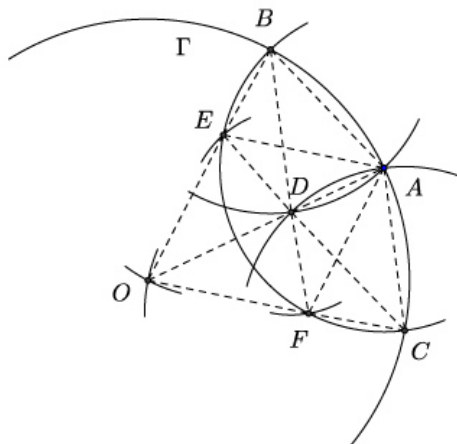
säteitä, joten DM on puolet DB :stä. Janan keskipiste löytyy pelkkää harppia käyttäen, joten Napoleonin ongelma on ratkaistu.



Kuva 4.

Vaan hetkinen vielä! Janan, jonka pituus on $r\sqrt{3}$, määrittämisessä käytettiin hyväksi pistettä A , alkuperäisen ympyrän keskipistettä. Entäpä jos tehtävässä vastassa olisikin vain ympyräviiva Γ ilman tietoa ympyrän säteestä tai keskipisteestä? Jos löydämme Γ :n keskipisteen vain harppia käyttäen, voimme edelleen ratkaista Napoleonin ongelman.

Voimme tehdä näin (kuva 5). Otetaan jokin Γ :n piste A ja piirretään A -keskinen ympyrä. Sen ja Γ :n leikkauspisteet olkoot B ja C . Piirretään B ja C keskipisteinä ympyrät A :n kautta; ne leikkaavat paitsi A :ssa myös pisteessä D . Sitten piirretään D keskipisteinä ympyrä A :n kautta. Se leikkaa A -keskisen ja B :n ja C :n kautta piirretyn ympyrän pisteissä E ja F . Piirretään vielä E ja F keskipisteinä ympyrät A :n kautta. Ne leikkaavat myös pisteessä O . Nyt O on Γ :n keskipiste!



Kuva 5.

Miksi? Riittää, kun osoitamme, että O on yhtä etäällä Γ :n pisteistä A , B ja C . Osoitetaan ensin, että $OB = OC$. Käytetään taas tietoja keskinormaaleista. Selvästi $AE = AF$, joten A on janan EF keskinormaalien piste. Myös $EO = EA = FA = FO$, joten O on EF :n keskinormaalien piste. Mutta E ja F ovat molemmat D -keskisen ympyrän pisteitä, joten myös D on EF :n keskinormaalien piste. O , D ja A ovat siis kaikki samalla suoralla, joka on EF :n keskinormaali. Mutta sekä A että D ovat yhtä etäällä myös pisteistä B ja C , joten AD on myös janan BC keskinormaali. Koska O on suoralla AD , on oltava $OB = OC$. Jotta todistus tulisi valmiiksi, on vielä osoitettava, että $OA = OB$. Tähän tarvitaan hiukan yhdenmuotoisia kolmioita. Piirrokset on tehty niin, että $EO = EA$ ja $DE = DA$. Kolmiot EOA ja DAE ovat siis tasakylkisiä. Edellä huomattiin jo, että D on janalla OA . Näillä tasakylkisillä kolmioilla on siis yhteinen kulma $\angle EAD$, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Näin ollen

$$\frac{OA}{AE} = \frac{EA}{AD}.$$

Mutta $AE = AB$, joten pätee myös

$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AD}. \quad (1)$$

Koska D on janalla AO , kolmioilla OAB ja BAD on yhteinen kulma kärjessä A . Suhdeyhtälöstä (1) seuraa, että kolmiot ovat yhdenmuotoisia (sks). Koska kolmio BAD on tasakylkinen, myös kolmio OAB on tasakylkinen. Siis todellakin $OA = OB$, ja olemme osoittaneet, että harpin avulla löytynyt piste O on Γ :n keskipiste.

Napoleonin ja Mascheronin tapaamisen seuraukset Mascheronille eivät olleet yhtä harmittomia kuin Napoleonille. Yksi Ranskan vallankumouksen kauaskantoisimmista seurauksista oli 1790-luvulla kehitetty metrijärjestelmä. Napoleon värväsi Mascheronin viemään järjestelmää Italiaan, ja Mascheroni matkusti Pariisiin perehtymään tähän uuteen asiaan. Sotaonnen vaihtelut estivät häntä palaamasta kotiseudulle Milanon tienoille. Pariisissa Mascheroni vilustui, sairastui vakavasti ja kuoli.

Napoleonin lausetta on käsitelty Solmussa aiemminkin

Simo Kivelä: Solmu 2/1997

Geometriakulma: Napoleonin lause

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/1997/2/napoleon.html>

(Todistus annetaan harjoitustehtävänä lukijalle, yleistyksiäkin pohdittavaksi.)

Simo Kivelä: Solmu 1/1998

Geometriakulma: Algebran käyttö geometriassa eli Napoleonin lause uudelleen

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/1998/1/geomkulma/>

Matti Lehtinen: Matematiikan historia

Ranskan vallankumouksen ajan matematiikkaa

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/pdf/ranska.pdf>

Matematiikan verkkosanakirja, N (niinkuin Napoleon)

<http://matematiikkalehtisolmu.fi/sanakirja/n.html>

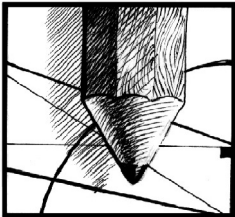
Lukiolaisellekin sopivia, avoimia ja maksuttomia matematiikan ja tilastotieteen MOOC-kursseja

- Johdatus yhteiskuntatilastotieteeseen Helsingin yliopistossa. Kurssi on käynnissä maaliskuulle 2016, mukaan pääsee milloin tahansa:

<http://mooc.helsinki.fi>

- Matriisilaskennan MOOC 2016 Aalto-yliopistossa. Kurssi alkaa 4.1.2016:

<http://mooc.math.aalto.fi>

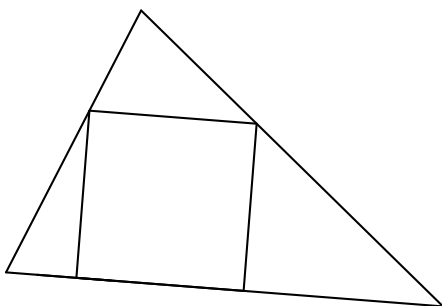


Homotetia eli venytyskuvaus geometrisissa konstruktioissa

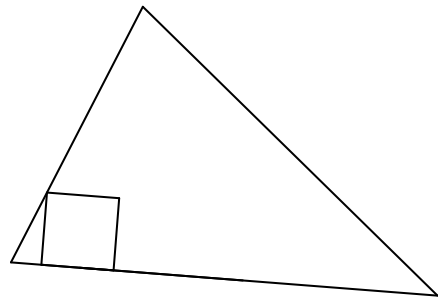
Jani Hannula

lehtori, Metropolia Ammattikorkeakoulu
tohtorikoulutettava, Helsingin yliopisto

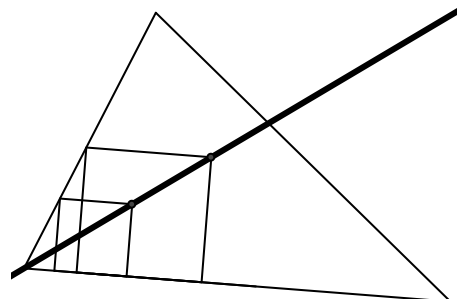
Tarkastellaan seuraavaa geometrista konstruktio-ongelmaa: annetun teräväkulmaisen kolmion sisään on konstruoitava (kuvan mukaisesti) sellainen neliö, jonka kaksi kärkeä ovat kolmion yhdellä sivulla ja kaksi muuta kärkeä ovat kolmion muilla sivuilla.



Tämä mielenkiintoinen ongelma on esitetty mm. George Pólyan ongelmanratkaisun klassikkoteoksessa [2] sekä Kalle Väisälän geometrian oppikirjassa [3]. Kuten moni muukin matemaattinen ongelma, myös esitetty lähtee aukeamaan, mikäli miettii aluksi helpompaa ongelmaa. On ainakin helppoa konstruoida neliö, jonka kaksi kärkeä ovat kolmion yhdellä sivulla ja toinen muista kärjistä on kolmion jommalla kummalla muulla sivulla.



Nyt tehtävänä on oikeastaan vain löytää tällaisten neliöiden joukosta sopivan kokoinen yksilö. Mikäli kolmioita piirtää muutaman kappaleen, saattaa huomata, että ne neliöiden kärjet, jotka jäävät kolmion sisäpuolelle (tai ulkopuolelle) asettuvat samalle suoralle, joka kulkee vieläpä ”sattumalta” kolmion erään kärjen kautta.



Kun tämän huomaa, tehtävä on ratkaistu: voidaan konstruoida neliö, jonka neljäs kärki on saadun suoran ja kolmion kolmannen sivun leikkauspisteessä. Herää kuitenkin kysymyksiä. Mistä tiedämme, että neliöiden kärjet ovat oikeasti samalla suoralla? Ja kääntäen: mistä tiedämme, että viimeisessä vaiheessa konstruoimamme neliö asettuu vaaditulla tavalla (tai konstruoitu nelikulmio on neliö)? Vastaus piilee yhdenmuotoisissa kolmioissa. Se, mitä ratkaisussa voidaan oikeastaan katsoa tapahtuneen, on, että pienempää neliötä *venytettiin* suuremmaksi. Tällaista geometrista kuvausta kutsutaan homotetiaksi.

Homotetia

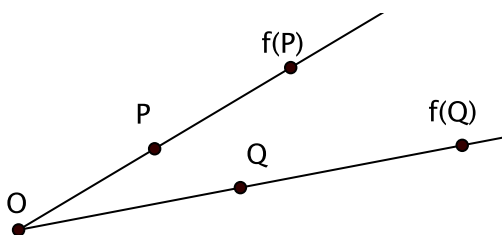
Geometrisia kuvauksia voidaan luokitella sen mukaan, minkälaisia ominaisuuksia kuvauksessa säilyy. Esimerkiksi peilaus on yhtenäisyyskuvaus, jossa esimerkiksi kolmiot kuvautuvat alkuperäisen kolmion kanssa yhteneviksi kolmioiksi. Homotetia sen sijaan kuvaa esimerkiksi kolmiot yhdenmuotoisiksi kolmioiksi eli se on yhdenmuotoisuuskuvaus. Homotetia voidaan määritellä Lehtisen [1] tapaan seuraavasti:

Määritelmä: Olkoon O kiinteä tason piste, P tason piste ja k jana-aritmetiikan alkio (esimerkiksi $\mathbb{R}^2$:ssa reaalityyppi). Määritellään tason pisteille kuvaus f ehdoilla:

1. Jos $P = O$, niin $f(P) = P$.
2. Jos $P \neq O$, niin $f(P)$ on se puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ piste, jolle pätee

$$\frac{Of(P)}{OP} = k.$$

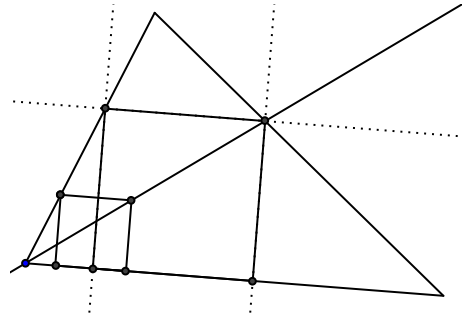
Pistettä O kutsutaan homotetiakeskukseksi ja suhdetta k homotetiasuhteeksi (tai -kertoimeksi). Kuvassa pisteet P ja Q on kuvattu homotetialla f , jossa homotetiakeskuksena on piste O ja homotetiasuhde on 2.



Homotetian idea on siis varsin yksinkertainen, ja onkin kohtuullisen vaivatonta osoittaa, että homotetia on yhdenmuotoisuuskuvaus, joka kuvaa mm. kolmiot yhdenmuotoisiksi kolmioiksi. Homotetian avulla voidaan siis usein ratkaista sellaisia konstruktio-ongelmia, joissa jotakin "apukuviota" on vain skaalattava sopivan kokoiseksi.

Homotetian käyttöä

Palataan vielä alussa esitettyyn konstruktio-ongelmaan. Ajatellaan kolmion kärkeä homotetiakeskuksena ja pienemmän neliön kärkeä homotetiassa kuvattavina pisteinä.



Nyt pitäisi näyttää siltä, että ratkaisun oikeellisuuteen liittyviin kiusallisiin kysymyksiin on mahdollista vastata. Toisaalta, olisiko seuraaviin konstruktioehtoihin nyt mukavat eväät?

1. Kolmion sisään on piirrettävä kolmio, jonka sivut ovat kolmen annetun suoran suuntaiset.
2. Ympyrän sektorin sisään on piirrettävä ympyrä.

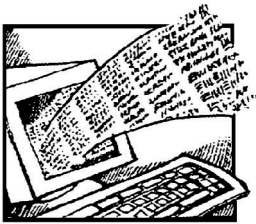
Lisää konstruktio-ongelmia, joissa homotetiasta on iloa, löytyy Väisälän Geometriasta [3, s. 135].

Lopuksi

Tässä homotetiaa ja geometrysten kuvauksien ideaa käsiteltiin pintaraapaisun omaisesti. Tarkemmin geometrisiin kuvauksiin ja niiden ominaisuuksiin voi syventyä esimerkiksi Matti Lehtisen geometrian materiaalin [1] avulla, jossa käsitellään yksityiskohtaisesti yhtenevyyskuvauksia, yhdenmuotoisuuskuvaus ja inversiota ympyrän suhteen. Kiitän professori Juha Oikkosta lukuisista geometrisista rupatteluista erityisesti keväällä 2012!

Viitteet

- [1] Lehtinen, M. Geometrian perusteita <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria2011.pdf> Luettu 31.8.2015
- [2] Pólya, G. Ratkaisemisen taito: kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia.
- [3] Väisälä, K. Geometria <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf> Luettu 31.8.2015



Odottelua pysäkillä

Juha Karvanen ja Antti Luoto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto



Kiirehdit bussipysäkillä. Saapuessasi paikalle kello on 8.04. Arvelet, että bussi ei ole vielä mennyt, mutta et ole täysin varma asiasta. Bussi lähtee pääte pysäkiltään klo 8.00 ja tälle pysäkillä matka kestää yleensä noin kahdeksan minuuttia. Jäät odottelemaan bussia, jonka uskot saapuvan pian. Kymmenen minuutin odottelun jälkeen mieleesi nousee aavistus siitä, että bussi on sitenkin ehtinyt jo ohittaa pysäkin ennen kuin tulit paikalle. Odotteluasi vielä viisi minuuttia olet hyvin varma siitä, että olet myöhästynyt bussista. Seuraava bussi lähtee klo 8.30 ja siihen ainakin ehdit hyvin. Odottelu pysäkillä jatkuu.

Edellä esitettyä arkipäivän tilannetta voi tarkastella todennäköisyyslaskennan keinoin. Tiedämme siis, että bussi lähtee klo 8.00, matkustaja saapuu pysäkillä

klo 8.04 ja seuraava bussi lähtee klo 8.30. Kiinnostuksen kohteena oleva kysymys kuuluu: ”Mikä on jäljellä oleva keskimääräinen odottelu-aika, jos matkustaja on odottanut pysäkillä jo s minuuttia?” Täsmällisempi todennäköisyyslaskennan termi keskimääräiselle odotteluajalle on odotteluajan odotusarvo.

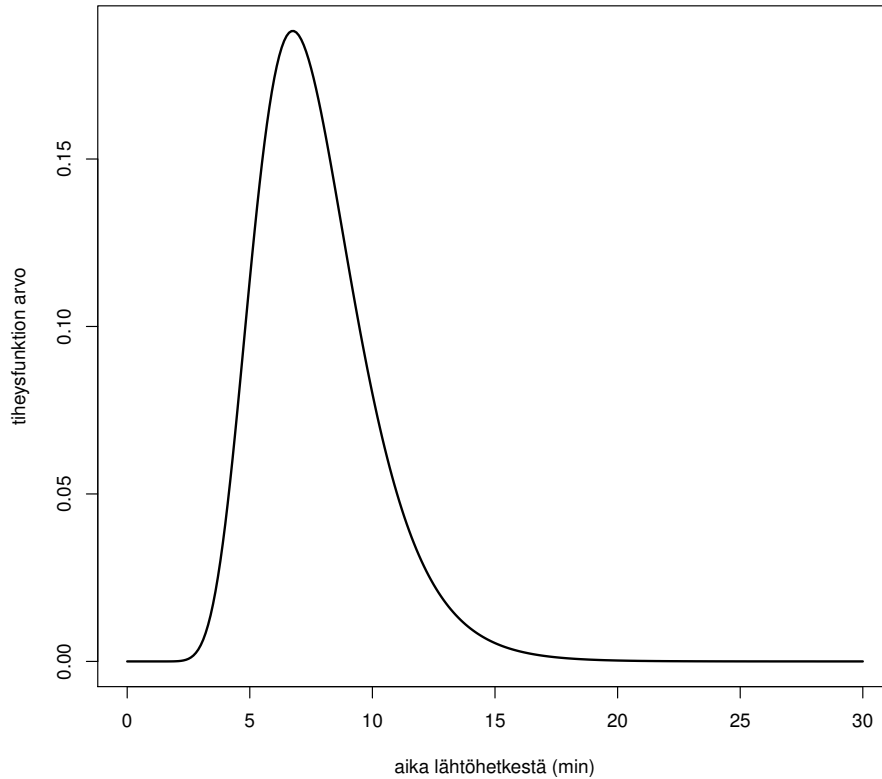
Jotta tehtävän voisi ratkaista, tarvitsemme tiedon ajasta T , joka bussilla kuluu pääte pysäkiltä odottelupysäkillä. Tämä aika ei ole vakio, vaan se vaihtelee riippuen mm. matkustajien ja muun liikenteen määrästä. Keräämällä systemaattisesti havaintoja bussin saapumisaajoista saamme tietoa satunnaismuuttujan T jakaumasta. Havaintoaineiston perusteella matka-ajan jakaumalle voi sovittaa jonkin sopivan mallin, kuten esimerkiksi gamma-jakauman tai log-normaali jakauman.

Oletamme nyt, että tiedämme tämän matka-ajan jakauman olevan log-normaali jakauma. Sanotaan, että T on log-normaali jakautunut parametrein μ ja $\sigma > 0$, $T \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, mikäli tiheysfunktio on

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & t > 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja kertymäfunktio on

$$F_T(t) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{\log t - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, & t > 0 \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases} \quad (1)$$



Kuva 1: Bussin saapumisaikaa kuvaavan log-normaalijakauman tiheysfunktio.

missä Φ on standardinormaalijakauman $\mathcal{N}(0, 1)$ kertymäfunktio. Tyypillinen tapa johtaa log-normaalijakauma on tarkastella muunnosta $T = g(X) = e^X$, missä satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, jolloin tiheysfunktio f_T ratkeaa muuttujanvaihdon avulla. Siis $T \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ mikäli $\log T \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Parametri μ kuvaa jakauman sijaintia ja $\sigma > 0$ on skaalaparametri. Jatkuvan, vain positiivisia arvoja saavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi määritellään kaavoilla

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty t f_T(t) dt$$

ja

$$\text{Var}[T] = \int_0^\infty (t - \mathbb{E}[T])^2 f_T(t) dt.$$

Log-normaalijakauman $\log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ tapauksessa odotusarvoksi ja varianssiksi saadaan

$$\mathbb{E}[T] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{ja} \quad \text{Var}[T] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Kun parametrien arvoiksi kiinnitetään $\mu = 2$ ja $\sigma = 0.3$, saadaan bussin matka-ajan odotusarvoksi $e^{2 + \frac{1}{2} \cdot 0.3^2} \approx 7.73$ minuuttia, joka pyöristettynä on edellä mainittu kahdeksan minuuttia. Jakauman tiheysfunktion kuvaaja on esitetty kuvassa 1. Kuvasta nähdään, että matka-ajan jakauma on vino. Jakauman moodi eli tiheysfunktion huippukohta on $e^{2 - 0.3^2} \approx 6.75$ minuuttia. Kolmas jakauman sijaintia kuvaava tunnuslu-

ku on mediaani, jonka arvo $e^2 \approx 7.39$ minuuttia. Mediaanin kohdalla kertymäfunktio saa arvon 0.5. Yksi-huippuisen symmetrisen jakauman tapauksessa näiden kolmen tunnusluvun arvot olisivat samat, mutta koska log-normaalijakauma on vino jakauma, kaikki kolme tunnuslukua eroavat toisistaan.

Bussin matka-ajan jakaumamallin ollessa selvillä voimme laskea sen perusteella meitä kiinnostavia todennäköisyyksiä. Numeerisiin laskutoimituksiin voi käyttää esimerkiksi avoimen lähdekoodin R-ohjelmistoa, joka on saatavilla osoitteesta www.r-project.org. Todennäköisyys sille, että bussi ohittaa pysäkin ennen kuin kello on 8.04 vastaa todennäköisyyttä, että matka-aika on alle neljä minuuttia. Tämä lasketaan R-ohjelman komennolla `plnorm(4, meanlog=2, sdlog=0.3)` ja tulokseksi saadaan $\mathbb{P}(T < 4) \approx 0.02$. Bussista myöhästyminen on siis mahdollista, mutta ei kovin todennäköistä, kun pysäkillä saavutaan klo 8.04.

Vastaavalla tavalla voidaan laskea todennäköisyys sille, että matka-aika on enemmän kuin $4 + s$ minuuttia. Tämän voi tehdä R-komennolla `1-plnorm(4+s, meanlog=2, sdlog=0.3)`. Koska tehtävän tilanteessa tiedämme, että bussi ei ole saapunut sinä aikana, kun matkustaja odottelee pysäkillä, täytyy päteä joko $T < 4$ tai $T > 4 + s$. Näistä jälkimmäisen mahdollisuuden todennäköisyys pienenee, kun odottelu-aika s kasvaa.

Jos klo 8.00 lähtenyt bussi on jo mennyt, pysäkillä odottelua kestää siihen saakka, kunnes klo 8.30 lähte-

vä bussi saapuu. Odotteluajan $W^{(s)}$ odotusarvoksi saadaan tällöin $\mathbb{E}(W^{(s)}) = 30 - (4 + s) + \mathbb{E}(T) \approx 33.8 - s$. Tarkastelussa rajoitutaan tapauksiin, joissa pysäkillä on odoteltu korkeintaan klo 8.30 asti eli $s \leq 26$.

Jos klo 8.00 lähtenyt bussi ei ole vielä mennyt, jäljellä olevan odotteluajan odotusarvo on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}[T \mid T > s + 4]$. Tämä odotusarvo voidaan laskea analyttisesti tai simuloimalla. Analyttinen ratkaisu edellyttää integrointia, sopivan muuttujanvaihdon ja neliöksi täydentämistä. Lopuksi päädytään tulokseen, joka on ilmaistavissa normaalijakauman kertymäfunktion avulla. Simulointiratkaisu taas edellyttää, että klo 8.00 ja klo 8.30 lähtevien bussien saapumisaikoja generoidaan esimerkiksi R-ohjelmiston avulla suuri joukko, jonka avulla odotteluajan odotusarvo voidaan määrittää likimääräisesti. Tulos on sitä tarkempi, mitä enemmän saapumisaikoja on generoitu.

Ongelman ratkaiseminen analyttisesti

Ongelma keskimääräisen odotteluajan ratkaisemiseksi voidaan muotoilla matemaattisesti todennäköisyyslaskennan käsitteiden avulla. Täsmällisyyden vuoksi esityksessä käytetään todennäköisyysvaruuden ja Borel-mitallisuuden käsitteitä, joiden syvälinen ymmärtäminen ei kuitenkaan ole välttämätöntä esityksen seuraamiseksi. Aiheesta kiinnostunut lukija voi tutustua todennäköisyyslaskennan teoreettisiin perusteisiin tarkemmin esimerkiksi Wikipedia-sivulla ”Todennäköisyysteoria”.

Olkoot T_1, T_2 riippumattomia $\log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia abstraktilla todennäköisyysvaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Satunnaismuuttujat T_1 ja T_2 tulkitaan klo 8.00 (bussi 1) ja klo 8.30 (bussi 2) lähtevien bussien matka-ajoiksi, ja nämä oletetaan siis toisistaan riippumattomiksi. Tiedämme, että matkajalle T_1 pätee joko $T_1 < 4$ tai $T_1 > 4 + s$. Mikäli $T_1 > 4 + s$, seuraavaksi pysäkillä saapuu bussi 1. Tässä tapauksessa joudutaan odottelevaan vielä $T_1 - (4 + s)$ minuuttia. Mikäli puolestaan $T_1 < 4$, pysäkillä saapuu seuraavaksi bussi numero 2, joka saapuu paikalle $T_2 + 30$ minuuttia yli kahdeksan. Odoteltavaa jää siten $T_2 + 30 - (4 + s) = T_2 + 26 - s$ minuuttia. On täten luontevaa määritellä jäljellä oleva odotusaika $W^{(s)}$ deterministisen ajan s ja satunnaisten aikojen T_1 ja T_2 funktiona seuraavalla tavalla: annetulle $s \in [0, 26]$ asetetaan

$$W^{(s)}(\omega) := f(s, T_1(\omega), T_2(\omega)) \\ := \begin{cases} T_2(\omega) + 30 - (4 + s), & \text{jos } T_1(\omega) < 4 \\ 0, & \text{jos } 4 \leq T_1(\omega) \leq 4 + s \\ T_1(\omega) - (4 + s), & \text{jos } T_1(\omega) > 4 + s. \end{cases}$$

Näin määriteltynä $W^{(s)}$ on satunnaismuuttuja avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mikä seuraa kuvauksen $(t_1, t_2) \mapsto$

$f(s, t_1, t_2)$ Borel-mitallisuudesta. Koska ongelman kannalta on merkityksetöntä, mitä arvoja $W^{(s)}$ saa joukossa $\{4 \leq T_1 \leq 4 + s\}$, valittiin yksinkertaisuuden vuoksi vakioarvo 0.

Näillä merkinnöin keskimääräinen odottelu aika, josta käytetään merkintää $e(s)$, on tarkalleen ottaen muuttujan $W^{(s)}$ ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtuma $\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}$. Koska $\mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s]) > 0$, edellä mainittu ehdollinen odotusarvo määritellään klassista ehdollista todennäköisyyttä muistuttavalla kaavalla

$$e(s) = \mathbb{E}[W^{(s)} \mid T_1 \notin [4, 4 + s]] := \frac{\mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}}]}{\mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s])},$$

missä $\mathbf{1}_A$ tarkoittaa indikaattorifunktiota,

$$\mathbf{1}_{\{t_1 \in A\}} = \begin{cases} 1, & \text{jos } t_1 \text{ kuuluu joukkoon } A \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä noudattaen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s]) &= \mathbb{P}(T_1 \leq 4) + \mathbb{P}(T_1 > 4 + s) \\ &= F_T(4) + 1 - F_T(4 + s), \end{aligned}$$

missä F_T on kaavassa (1) määritelty log-normaalijakauman kertymäfunktio. Edelleen, odotusarvon lineaarisuuden ja muuttujien T_1 ja T_2 riippumattomuuden nojalla pätee toinen yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}}] &= \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 < 4\}}] + \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] \\ &= \mathbb{E}[(T_2 + 30 - (4 + s)) \mathbf{1}_{\{T_1 < 4\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[(T_1 - (4 + s)) \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] \\ &= \mathbb{E}[T_2 + 30 - (4 + s)] \mathbb{P}(T_1 < 4) \\ &\quad + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s) \mathbb{P}(T_1 > 4 + s) \\ &= (\mathbb{E}[T_2] + 26 - s) F_T(4) \\ &\quad + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s)(1 - F_T(4 + s)). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$e(s) = \frac{M}{F_T(4) + 1 - F_T(4 + s)}, \quad (2)$$

missä

$$M = (\mathbb{E}[T_2] + 26 - s) F_T(4) + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s)(1 - F_T(4 + s)).$$

Tekemällä muuttujanvaihto $t = e^y$ nähdään, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] &= \int_{4+s}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y - \mu)^2 + 2\sigma^2 y}{2\sigma^2}} dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Neliööntäydennys muuttujan y suhteen puolestaan antaa

$$-(y - \mu)^2 + 2\sigma^2 y = -(y - (\mu + \sigma^2))^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4,$$

joten kaavan (3) oikea puoli yksinkertaistuu lopulta muuttujanvaihtoa $x = \frac{y}{\sigma} - \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}$ ja symmetriaa $\Phi(x) = \Phi(-x)$ soveltaen muotoon

$$\begin{aligned} & \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y-\mu)^2+2\sigma^2y}{2\sigma^2}} dy \\ &= e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y/\sigma-(\mu+\sigma^2)/\sigma)^2}{2}} dy \\ &= e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\frac{\log(4+s)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s)+\mu+\sigma^2}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Siis $\mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4+s\}}] = e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s)+\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)$. Koska lisäksi $\mathbb{E}[T_2] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, kaavaan (2) sijoittamalla saadaan lopulta

$$e(s) = \frac{N}{F_T(4) + 1 - F_T(4+s)},$$

missä

$$\begin{aligned} N &= \left[e^{\mu+\sigma^2/2} + 26 - s \right] F_T(4) \\ &\quad + e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s)+\mu+\sigma^2}{\sigma}\right) \\ &\quad - (4+s)(1 - F_T(4+s)). \end{aligned}$$

Annetuilla parametrien arvoilla $\mu = 2$ ja $\sigma = 0.3$ keskimääräiseksi odotusajaksi saadaan siten esimerkiksi

$$e(s) = \begin{cases} 3.24, & s = 3 \\ 6.27, & s = 7 \\ 18.07, & s = 15 \\ 8.73, & s = 25. \end{cases}$$

Engelman ratkaiseminen simuloimalla

Samaan tulokseen voidaan päästä myös simuloimalla. Tällöin log-normaali jakaumasta generoidaan suuri määrä saapumisaikoja klo 8.00 ja 8.30 lähteville busseille. Olkoon T_1 ensimmäisen ja T_2 toisen bussin matka-aika pysäkillä. Tarkastelusta poistetaan ne tapaukset, joissa ensimmäinen bussi saapuu aikavälillä $[4, 4+s]$. Jokaiselle jäljelle jääneelle n tapaukselle lasketaan odottelu-aika generoitujen saapumisaikojen perusteella. Jos $T_1 > 4+s$ eli ensimmäinen bussi ei ole vielä mennyt, jäljellä oleva odottelu-aika on $W^{(s)} = T_1 - 4 - s$. Jos taas $T_1 < 4$ eli ensimmäinen bussi on jo mennyt, jäljellä oleva odottelu-aika on $W^{(s)} = 30 + T_2 - 4 - s$. Simuloiduista tapauksista laskettu muuttujan $W^{(s)}$ keskiarvo estimoi odotteluajan odotusarvoa. Tuloksen numeerinen tarkkuus riippuu tapausten lukumäärästä n ,

joka puolestaan riippuu simuloinnissa käytettyjen toistojen lukumäärästä.

Simuloinnin voi toteuttaa esimerkiksi alla olevalla R-koodilla:

```
n <- 100000 #toistojen lkm
mu <- 2
sigma <- 0.3
r <- 4
interval <- 30
T1 <- rlnorm(n,mu,sigma)
T2 <- interval + rlnorm(n,mu,sigma)
svec <- 0:30 #odottelu-aikojen vektori
wn <- rep(NA,length(svec)) #tarkasteltavien
#tapausten lkm
wmean <- rep(NA,length(svec)) #odotteluajan
#odotusarvo
wmedian <- rep(NA,length(svec)) #odotteluajan
#mediaani
wq10 <- rep(NA,length(svec)) #odotteluajan
#10 % kvantiili
wq90 <- rep(NA,length(svec)) #odotteluajan
#90 % kvantiili
for(i in 1:length(svec)) #tehdään laskenta
#erikseen jokaiselle s:n arvolla
{
  s <- svec[i]
  valid <- (T1>(s+r) | T1<r) #indikaattori:
  #kuuluuko tarkastelujoukkoon
  wn[i] <- sum(valid)
  intime <- (r < T1[valid]) #indikaattori:
  #bussi ei ole vielä mennyt
  wtime <- intime*(T1[valid]-r-s)+(!intime)*
  (T2[valid]-r-s)
  wmean[i] <- mean(wtime)
  wmedian[i] <- median(wtime)
  wq10[i] <- quantile(wtime,0.1)
  wq90[i] <- quantile(wtime,0.9)
}
```

#Vertaillaan analyttisesti johdettuun

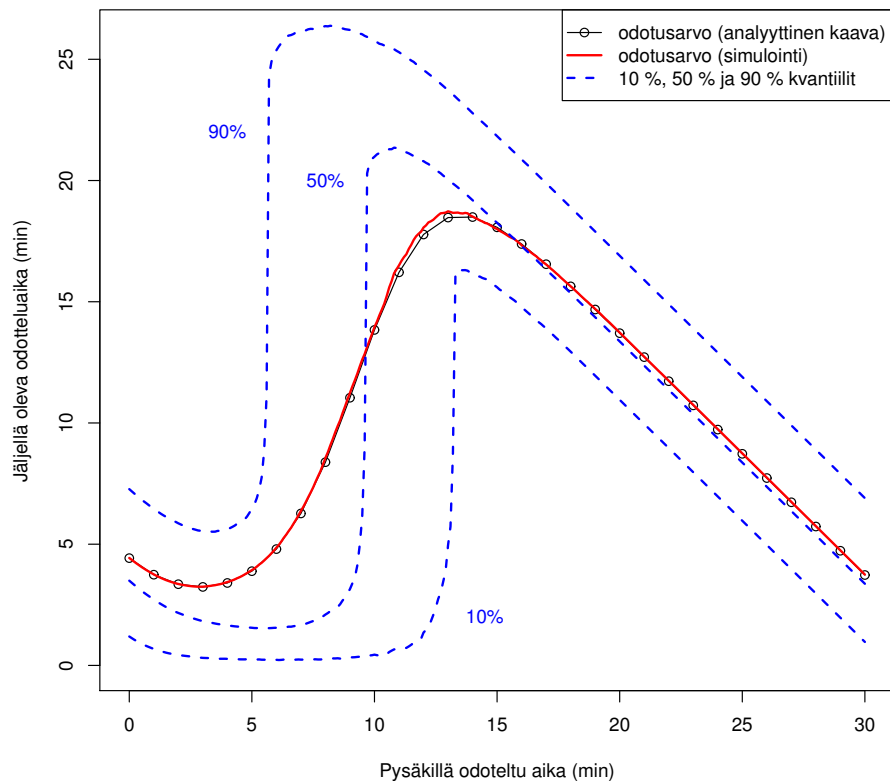
#odotusarvoon, jonka arvoja voi laskea

#seuraavalla funktiolla

```
waitingtime <- function(s,alpha=2,sigma=0.3,
  r=4,interval=30)
```

```
{
  sr <- 1-plnorm(s+r,alpha,sigma)
  fr <- plnorm(r,alpha,sigma)
  E1 <- exp(alpha+sigma^2/2)/sr*
  pnorm((-log(s+r)+alpha+sigma^2)/sigma)-
  (s+r)
  E2 <- interval-r-s+exp(alpha+sigma^2/2)
  E <- sr/(sr+fr)*E1+fr/(sr+fr)*E2
  return(E)
}
```

#Piirretään tuloksista kuva



Kuva 2: Jäljellä olevan odotteluajan odotusarvo, mediaani sekä 10 % ja 90 % kvantiilit pysäkillä odotellun ajan funktiona.

```
s <- 0:30
plot(s,waitingtime(s,r=4),type='o',
     ylim=c(0,26),
     xlab='Pysäkillä odotettu aika (min)',
     ylab='Jäljellä oleva odottelu aika (min)')
lines(svec,wmean,col='red',lwd=2)
lines(svec,wmedian,col='blue',lty=2,lwd=2)
lines(svec,wq10,col='blue',lty=2,lwd=2)
lines(svec,wq90,col='blue',lty=2,lwd=2)
legend('topright',
       legend=c('odotusarvo (analyttinen kaava)',
                'odotusarvo (simulointi)',
                '10 %, 50 % ja 90 % kvantiilit'),
       lty=c(1,1,2),lwd=c(1,2,2),
       pch=c(1,NA,NA),
       col=c('black','red','blue'))
text(4,22,'90%',col='blue')
text(8,20,'50%',col='blue')
text(14.5,2,'10%',col='blue')
```

Odotteluajan odotusarvon lisäksi R-koodissa estimoidaan myös odotteluajan mediaani, 10 % ja 90 % kvantiilit. Mediaani eli 50 % kvantiili tarkoittaa havaintoa, jota pienempiä on 50 % havainnoista. Vastaavasti 10 % ja 90 % kvantiilit tarkoittavat havaintoja, joita pienempiä on 10 % ja 90 % havainnoista. Kvantiilien ratkaiseminen ei onnistu helposti analyttisesti, mutta simuloinnissa ne saadaan laskettua yhden koodirivin lisäyksellä.

Tulokset on esitetty graafisesti kuvassa 2, joka on luotu edellä esitetyllä R-koodilla. Kuvasta nähdään, että analyttisesti laskettu odotusarvo ja simuloimalla laskettu odotusarvo ovat hyvin lähellä toisiaan. Aluksi odotteluajan odotusarvo pienenee, kun s kasvaa, mutta kolmen minuutin odottelun jälkeen (klo 8.07) odotusarvo alkaa kasvaa. Maksimi saavutetaan 14 minuutin odottelun jälkeen (klo 8.18), jonka jälkeen odotusarvo alkaa pienentyä lähes lineaarisena funktiona. Mediaanin ja muiden kvantiilien hyppäykset ovat seurausta jakauman kaksihuippuisuudesta. Todennäköisyys, että ensimmäinen bussi on jo mennyt ylittää 10 % noin kuuden minuutin odottelun jälkeen (klo 8.10), 50 % noin kymmenen minuutin odottelun jälkeen (klo 8.14) klo ja 90 % noin 13 minuutin odottelun jälkeen (klo 8.17).

Esimerkin tarkoituksena on ollut havainnollistaa sitä, kuinka läheisesti todennäköisyyslaskenta liittyy arkipäivän tapahtumiin. Lisäksi tavoitteena on ollut esittää, kuinka jakaumiin liittyviä tehtäviä voidaan ratkaista sekä analyttisesti että simuloimalla. Analyttinen ratkaiseminen ja simulointi täydentävät toinen toistaan. Ratkaisu, joka saadaan kahdella toisistaan riippumattomalla tavalla, on todennäköisemmin oikein kuin vain yhdellä tavalla saatu ratkaisu.

(Esimerkkiä on käytetty harjoitustehtävänä Jyväskylän yliopiston kurssilla Elinaikamallit.)



Konsonanssi ja dissonanssi musiikissa

Hilla Fred¹

Musiikki ja matematiikka liittyvät toisiinsa vahvasti. Kun puhumme musiikin teoriasta, puhumme oikeastaan vain määritellyistä, numeroidenkin avulla ilmaistavista, ihmisen kehittelemistä säännöistä, jollaista matematiikankin voidaan katsoa olevan. Sekä musiikissa että matematiikassa on hyvin perustavanlaatuista säännönmukaisuutta ja kauneutta, jonka tutkimista lähestymme tässä tekstissä harmoniaa ja miellyttävyyttä ilmaisevan konsonanssin käsitteen kautta. Ei liene yllättävää, että esimerkiksi miellyttävän ja harmonisen kuuloiset intervallit perustuvat myös kaikista yksinkertaisimmille geometrisille suhteille.

Äänen ja matematiikan välinen yhteys on fysiikkaa, johon emme tässä tekstissä paneudu perusteita kummemmin. Sen sijaan keskitymme musiikkiin, ja samalla matematiikkaan, taiteena, jonka ilmaisuvoimassa konsonanssilla ja dissonanssilla on suuri rooli.

Ennen kuin voimme käsitellä konsonanssia ja dissonanssia, on käytävä läpi jonkin verran musiikin teorian perusteita. Selvennämme aluksi, mitä tarkoitetaan intervalleilla ja miten ne muodostuvat. Käymme myös läpi lyhyesti, mitä tarkoitetaan asteikoilla ja virityksillä. Kaikki edellä mainitut perustuvat äänen fysikaalisiin ominaisuuksiin, ja näitä fysikaalisia ominaisuuksia on mahdollista havainnollistaa matematiikan keinoin.

Konsonanssi ja dissonanssi eivät ole suinkaan sävelten absoluuttisia ominaisuuksia, vaan käsitys niistä on vaihdellut kulttuureittain, eri historian aikakausina ja

musiikkityylien välillä. Käymme läpi näitä käsityksiä ja sitä, miten matematiikka on vaikuttanut käsitykseen siitä, millainen musiikki on konsonoivaa, miellyttävää ja harmonista.

Musiikin teorian perusteita

Kun käsittelemme musiikin teorian fysikaalista perustaa, emme voi olla keskittymättä erityisesti Pythagoraan havaintoihin musiikin ja matematiikan yhteyksistä – Pythagoras nimittäin käytännössä loi länsimaisen musiikin teorian perusteet.

Pythagoras havaitsi, että soittimen kielten pituudet olivat kääntäen verrannollisia kielestä lähtevän äänen korkeuteen. Tärkeä huomio oli, että mikäli kielen pituus puolitetaan, nousee sävelen korkeus oktaavilla. Käytämme termiä *intervalli*, kun puhumme kahden sävelen välisestä korkeuserosta. Oktaavin ja pohjasävelen välinen suhde on 2 : 1. Tämä tarkoittaa sitä, että 2000 Hz taajuudella soiva ääni on oktaavin päässä 1000 Hz taajuudella soivasta äänestä. Tämä on yhteinen havainto kaikista maailman musiikkijärjestelmistä: oktaavin päässä toisistaan olevat äänet koetaan samaksi [1].

Pythagoras kehitti aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon lisäksi käsitteen *harmonisesta keskiarvosta*, jo-

¹Kirjoittaja on Helsingin yliopiston opiskelija. Teksti on kirjoitettu alun perin Aalto-yliopiston kurssia *Kristallikukkia peilisaleissa – matematiikka kohtaa taiteen ja arkkitehtuurin* varten.

ka lasketaan kaavalla

$$h(x) = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}.$$

Tutkitaan kahden oktaavin päässä toisistaan olevan sävelen välistä keskiarvoa eli lukuja x_1 ja x_2 niin, että $x_2 = 2x_1$:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}} = \frac{4x}{3}.$$

Tuloksena on 4 : 3, joka on intervallina puhdas kvartti. Kun käännämme kvartin, saamme puhtaan kvintin, 3 : 2:

$$\frac{2}{\frac{2}{4x}} = \frac{3x}{2}.$$

Edellä esiteltyt priimi 1 : 1, kvartti 4 : 3, kvintti 3 : 2 ja oktaavi 2 : 1 ovat niin kutsuttuja puhtaita intervaleja: ne on historian saatossa koettu lähes poikkeuksetta harmonisina. Muut intervallit sijoittuvat yhtä lailla kahden oktaavin välille, esimerkiksi suuressa terssissä sävelten välinen suhde on 5 : 4.

Musiikin teoriassa käytetään käsitettä *sävelaskel*. Länsimaisessa taidemusiikissa oktaavissa sävelet ovat kahdentoista puolissävelaskeleen päässä toisistaan, kvartissa viiden ja kvintissä seitsemän. Koska sävelten väliset korkeudet ovat suhteellisia, ei oktaavia ole mahdollista jakaa esimerkiksi kahteentoista osaan niin, että jokainen intervalli olisi puhdas. Kvintit ovat kahden potensseja ja oktaavit puolestaan kolmen monikertoja, joten niiden kerrannaiset eivät kohtaa. Tämän vuoksi on olemassa erilaisia *viritysjärjestelmiä*, joista esimerkkinä voidaan mainita pythagoralainen viritys ja nykyään käytössä oleva tasaviritys. Pythagoralaisessa virityksessä kvinttien puhtaus pyritään maksimoimaan muiden intervallien kustannuksella. Lopputuloksena on, että viimeinen kvintti on komman (12 kvintin ja 7 oktaavin erotuksen) päässä puhtaasta intervallista, ja siten epävireinen ja ulkova. Nykyään käytössä olevassa tasavirityksessä komma jaetaan tasan kaikkien intervallien välille, jolloin jokainen niistä poikkeaa hieman oikeasta, suhteellisesta intervallista. Intervallit muodostuvat tällöin luvun $1 : \sqrt[12]{2}$ potensseista. Ihmiskorva kuitenkin hyväksyy tämän pienoisen virheen [2].

Suhteellisen viritystavan lisäksi tärkeää on kuitenkin myös absoluuttinen vire, jolla tarkoitetaan sen valitun äänen korkeutta, jonka suhteen muut sävelet viritetään. Länsimaisessa musiikissa sävelet viritetään usein niin, että A:n värähtelytaajuus on 440 hertsiä [1].

Sävelasteikon käsitteellä tarkoitetaan musiikkiteoksen pohjana käytettävää rajattua sävelien joukkoa, joista länsimaisessa musiikissa tyypillisimpiä ovat pentatoninen, kromaattinen ja diatoninen. Pentatoninen asteikko muodostuu neljästä puhtaasta kvintistä, kromaatti-

nen sävelasteikko puolestaan on edellä esitelty asteikko, joka jakaa oktaavin kahteentoista puolissävelaskeleen mittaiseen intervalliin. Diatoninen asteikko muodostuu seitsemästä sävelestä, jotka ovat viiden kokosävelaskeleen ja kahden puolissävelaskeleen päässä toisistaan – esimerkiksi pianon valkoiset koskettimet muodostavat diatonisen C-duuriasteikon [3].

Konsonanssi ja dissonanssi

Konsonanssilla tarkoitetaan intervallin harmonisuutta, miellyttävyyttä ja sopusointuisuutta, dissonanssilla vastaavasti riitasointuisuutta, jännitteisyyttä ja epämiellyttävyyttä. Konsonanssi ja dissonanssi ovat jossain määrin kulttuurista, musiikkityylistä ja tilanteesta riippuvaisia, mutta niillä on myös vahva perusta matematiikassa. Tarkastelimme aiemmin eri intervaleja, ja huomaamme nopeasti, että keskimäärin yksinkertaisemmat, pienemmällä kokonaisluvulla ilmaistavat intervallit, esimerkiksi kvintti, 3 : 2, ja suuri terssi, 5 : 4, ovat konsonoivampia kuin esimerkiksi pieni septimi, 16 : 9, tai vähennetty kvintti, 45 : 32. Jälkimmäisiä tosin käytetään runsaasti esimerkiksi bluesmusiikissa, joten konsonanssi ja dissonanssi eivät missään nimessä ole intervallien absoluuttisia ominaisuuksia.

Käsitys konsonanssista ja dissonanssista on muuttunut historian saatossa. Pythagoras kutsui priimiä, kvarttia, kvinttiä, oktaavia ja tuplaoktaavia sinfonioiksi. Näille intervaleille yhteistä on, että ne on mahdollista ilmaista kokonaislukujen 1, 2, 3 ja 4 avulla. Pythagoras hahmotteli myös suurempia, juuri lukusuhteisiin perustuvia yhteyksiä astronomian, geometrian ja musiikin välille. Hän ei pelkästään havainnut geometrisia suhteita musiikissa, vaan oli sitä mieltä, että lukujen ominaisuudet ovat itsessään perusta musiikille [4].

Keskiajalla länsimaisen taidemusiikin teoria kehittyi lähinnä kirkon piirissä ja antiikin ajan tapaan musiikki nojautui puhtaille kvinteille ja oktaaveille. Tritonus, kolmen peräkkäisen kokosävelaskeleen muodostama intervalli, pidettiin paholaisen intervallina, jonka käyttöä välteltiin viimeiseen asti. Nämä kolme kokosävelaskelta ottamalla saamme pohjasävelestä ja viimeisestä sävelestä alennetun kvintin – blues- ja jazzmusiikille keskeisen intervallin.

Keskiajalla terssiä pidettiin dissonoivana intervallina. Tämä muuttui renessanssiajalla, jolloin alettiin käyttää paljon myös terssejä ja sekstejä. Tällöin myös pythagoralaisesta viritysjärjestelmästä oli pakko luopua, ja tilalle kehitettiin nykyisen tasavirityksen kaltaisia viritysjärjestelmiä. Nykymusiikissa erilaisia musiikkityylejä on runsaasti, ja niissä kaikissa on omat, toisistaan radikaalistikin eroavat konventionsa konsonanssin ja dissonanssin suhteen.

Konsonanssi ja dissonanssi eri musiikkityyleissä

Musiikkityyliensä välillä on suuria eroja siinä, miten niissä suhtaudutaan sekä dissonanssiin yleisesti että tiettyihin dissonoiviin intervaleihin. Esimerkiksi pop-musiikissa puhtaat, vahvasti konsonoivat intervallit ovat tyypillisiä. Sen sijaan vaikkapa jazzmusiikki on huomattavasti vapaamielisempää dissonoinnin suhteen, ja monia intervaleja, jotka jossain toisessa musiikkityyliä saattaisivat aiheuttaa suorastaan riitasoinnun tunning, ei jazzissa koeta lainkaan dissonoiviksi.

Eri puolilla maailmaa dissonoiviin intervaleihin suhtaudutaan eri tavalla, vaikka tapa hahmottaa musiikkia suhteellisten sävelten kautta olisikin hyvin samantyyppinen. Viritysjärjestelmä vaikuttaa tähän paljon: erilaisilla viritysjärjestelmillä saattavat eri sävellajit ja sen myötä eri intervallit olla hyvin erilaisia kuin mihin olemme länsimaisessa taidemusiikissa tottuneet. Tähän voivat vaikuttaa myös muut tekijät kulttuurissa. Esimerkiksi kiinan kieli on niin kutsuttu tonaalinen kieli, jossa sävelkorkeus vaikuttaa sanan merkitykseen. Tämä saattaa luonnollisesti muuttaa käsitystä tietyistä intervaleista tai vähintäänkin herkistää sävelkorkeuksien eroille musiikkia kuunnellessa.

Aiemmin mainittu, keskiajalla paheksuttu tritonus on blues- ja jazzmusiikissa tyypillinen intervalli, jonka jännitettä ei tarvitse erikseen purkaa, kuten esimerkiksi klassisessa musiikissa. Vähennetyn kvintin lisäksi bluesissa käytetään paljon myös vähennettyä terssiä ja septimiä. Bluesissa on lisäksi tyypillistä, että edellä mainittuja nuotteja, ”blue notes”, ei välttämättä alenneta täyttää puolisävelaskelta, vaan nuotti voi olla esimerkiksi suurpiirteisen neljännesaskeleen verran matalam-

pi kuin alkuperäinen, diatonaalisen asteikon sävel.

Vahvasti dissonoivaa pientä sekuntia on perinteisesti pidetty hyvin riitasointuisena lähes kaikissa musiikkityyleissä. Kuitenkin esimerkiksi metallimusiikissa ja raskaassa rockissa pientä sekuntia käytetään luomaan vahvaa jännitettä ja mahtipontisuutta. Dissonanssien ylipäänsä on ajateltu kuvaavan jännitteitä ja kärsimystä, joten musiikkityylistä riippumatta niitä käytetään usein kuvaamaan konflikteja ja tehostamaan teoksen dramaattisia kohtia [6]. Dissonanssi ei siis suinkaan ole jotain, mistä pyrkiä eroon, vaan olennainen osa musiikkia ja siihen eläytymistä.

Viitteet

- [1] <http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html> (luettu 2.3.2015)
- [2] <http://www15.uta.fi/arkisto/mustut/mute/vir01.htm> (luettu 7.3.2015)
- [3] <http://www2.siba.fi/mustel/index.php?id=14&la=fi> (luettu 7.3.2015)
- [4] <http://www.students.tut.fi/~varria/pythago.htm> (luettu 7.3.2015)
- [5] <http://www.smithsonianmag.com/smart-news/why-do-people-hate-dissonant-music-and-what-does-it-say-about-those-who-dont-120781501/> (luettu 7.3.2015)
- [6] <http://transcendencethroughmusic.blogspot.fi/2011/04/dissonance-in-heavy-metal.html> (luettu 7.3.2015)

Tehtäviä pohdittavaksi

Punnuksia

Tasapainovaa’alla halutaan saada eroteltua massat välillä 1 g, 2 g, ..., 50 g. Monet painot voi saada yhdistämällä eri painoja, joten viittäkymmentä punnusta ei tarvita. Kahdeksallakin sopivan kokoisella punnuksella selviää, esim. 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g ja 50 g.

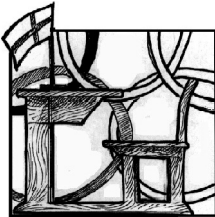
Riittäisikö tehtävään kuuden punnuksen sarja? Entä viiden? Neljän? Kolmen?

Tuhannen tulimmaista

Kuinka monta nollaa on luvun 1000! lopussa? Mikä on luvun viimeinen numero, joka ei ole nolla?

$$1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$$

Tehtävät lähetti Aki Halme.



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Minskissä 14.–20.4.2015

Mirjam Kauppila

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Neljännet Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset pidettiin Minskissä Valko-Venäjällä 14.–20.4.2015. Kyseessä on kansainvälinen kilpailu, jonka tarkoituksena on tarjota tytöille haastava ja mielekäs väliporras kohti kansainvälisiä matematiikkaolympialaisia. Kilpailun formaatti onkin samanlainen kuin kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa: kaksi neljän ja puolen tunnin koetta, joissa molemmissa kolme tehtävää, joiden vaikeustaso kasvaa jyrkästi.

Tänä vuonna Suomea kilpailussa edustivat

- Ella Anttila Helsingin matematiikkalukiosta,
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta ja
- Tara Vaittinen Lahden yhteiskoulusta.

Joukkueen varajohtajana toimi Mirjam Kauppila ja johtajana Esa Vesalainen. Suomen osallistumisen mahdollisti Magnus Ehrnroothin säätiön tuki.

Kilpailun voitti jo neljättä kertaa osallistuva Yhdysvaltain Danielle Wang. Aiemmin hän on voittanut kilpailun kahdesti ja tullut kerran toiselle sijalle. Toinen sija meni Ukrainan Sofiya Dubovalle, joka osallistui toisen kerran ja voitti viimevuotisen kilpailun, ja kolmas sija Ukrainan Nataliia Khotiaintsevalle. Täydelliset tulokset löytyvät osoitteesta [2].

Suomen matka alkoi yllättävillä vaikeuksilla. Lentokentällä osoittautui, että joukkue ei päässyt Moskovaan menevään koneeseen. Periaatteessa kansainvälisillä välilaskuilla Šeremetjevon kentällä ei kai pitäisi tarvita Venäjän viisumia, mutta osoittautui, että lento Moskovasta Minskiin olisi kuitenkin lähtenyt passintarkastuksen väärältä puolelta Venäjän maaperältä... Kaikeksi onneksi joukkueelle kuitenkin järjestyi suora lento Minskiin seuraavalle päivälle, ja kaikki sujui lopulta parhain päin.

Tapahtumassa järjestettiin tällä kertaa kaksi ekskursionta. Kaikille yhtenäisellä ekskursiolla käytiin ihmettelemässä Mirin kaupungissa sijaitsevaa Mirin linnaa 16. vuosisadalta, ja ratkaisuita pisteytettäessä kilpailijat kiersivät Minskiä ihmettelemässä sen eri nähtävyyksiä.

Minskin arkkitehtuuri oli erityisen mieleenpainautuvaa. Talot olivat hyvin vaihtelevilta aikakausilta. Suomessa kerrostaloissa on yleensä yksikäsitteinen määrä kerroksia, mutta Minskissä esiintyi paljon rappusmaisia isoja taloja. Valko-Venäjän kansallisen teknillisen yliopiston arkkitehtuurin tiedekunnan rakennus oli erityisen vaikuttava; sen inspiraationa oli toiminut sähkökitara. Valko-Venäjän kansalliskirjasto puolestaan esitti timanttia; onhan tieto erittäin kallisarvoista.

Ensimmäisen kilpailupäivän tehtävät

Tehtävä 1. Olkoon $\triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio, ja sen pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste D . Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa suoraa CD pisteessä E ja kolmion $\triangle ADE$ ympäripiirrettyä ympyrää ω pisteessä F . Jos $\angle ADF = 45^\circ$, niin osoita, että CF sivuaa ympyrää ω .

Tehtävä 2. *Domino* on 2×1 - tai 1×2 -laatta. Selvitä kuinka monella eri tavalla n^2 dominoa voi asettaa $2n \times 2n$ -shakkilaudalle ilman päällekkäisyyksiä niin, että jokainen 2×2 -neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, jotka ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella.

Tehtävä 3. Olkoot n ja m kokonaislukuja ja suurempia kuin 1, ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_m$ positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät ole isompia kuin n^m . Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut $b_1, b_2, \dots, b_m$, jotka eivät ole isompia kuin n , ja joille

$$\text{sy}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

missä $\text{sy}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ tarkoittaa lukujen $x_1, x_2, \dots, x_m$ suurinta yhteistä tekijää.

Toisen kilpailupäivän tehtävät

Tehtävä 4. Selvitä, onko olemassa ääretöntä jonoa $a_1, a_2, a_3, \dots$ positiivisia kokonaislukuja, jolle kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee yhtälö

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}.$$

Tehtävä 5. Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $m > 1$. Anastasia osittaa kokonaisluvut $1, 2, \dots, 2m$ kaikkiaan m pariin. Sitten Boris valitsee yhden kokonaisluvun jokaisesta parista ja laskee valitsemien kokonaislukujen summan. Osoita, että Anastasia voi valita parit niin, että Borisin saama summa ei voi olla tasan n .

Tehtävä 6. Olkoon H teräväkärkisen kolmion $\triangle ABC$ ortokeskus ja G sen painopiste, ja olkoon $AB \neq AC$. Suora AG leikkaa kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirrettyä ympyrää pisteissä A ja P . Olkoon P' pisteen P peilikuva suoran BC suhteen. Osoita, että $\angle CAB = 60^\circ$ jos ja vain jos $HG = GP'$.

Tehtävien kotimaat. Tehtävä 1 on kotoisin Luxemburgista, tehtävä 2 Turkista, tehtävä 3 Amerikan Yhdysvalloista, tehtävä 4 Japanista, tehtävä 5 Alankomaista ja tehtävä 6 Ukrainasta.

Ratkaisut

Seuraavassa on yksi ratkaisu jokaiseen tehtävään. Lisää erilaisia malliratkaisuita löytää englanniksi kilpailun kotisivuilta [1].

1. Aloitetaan ensin pienellä havainnolla ja tarkastellaan kolmion BCD kulman B vastaista ulkoympyrää, eli sitä ympyrää, joka on eri puolella sivua CD kuin piste B , ja joka sivuaa suoria BC , BD ja CD . Olkoon tämän ympyrän keskipiste I . Koska piste I on yhtä etäällä em. suorista, on pisteen I oltava kulman $\angle CBD$ puolittajalla, ja kulmien $\angle DCB$ ja $\angle BDC$ vieruskulmien puolittajilla. Nämä kolme puolittajaa leikkaavat siis samassa pisteessä I . Koska DF puolittaa suoran kulman $\angle CDA$, ja koska BF puolittaa kulman $\angle CBD$, on itse asiassa oltava $F = I$ ja suora CF puolittaa kulman $\angle DCB$ vieruskulman, eli erityisesti

$$\begin{aligned} \angle FCD &= \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle DCB) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\angle BDC + \angle CBD) \\ &= 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle CBD. \end{aligned}$$

Voimme siis laskea

$$\begin{aligned} \angle EFC &= 180^\circ - \angle FCD - \angle DCB - \angle CBF \\ &= 180^\circ - 45^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle CBD - (90^\circ - \angle CBD) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \angle CBD = 45^\circ. \end{aligned}$$

Lopuksi, kehäkulmalause takaa, että CF sivuaa ympyrää ω pisteessä F , koska sen mukaan pisteen F kautta piirretty ympyrän ω tangentti kohtaa suoran FE samassa kulmassa kuin suora CF , eli kulmassa $\angle EDF = 45^\circ$.

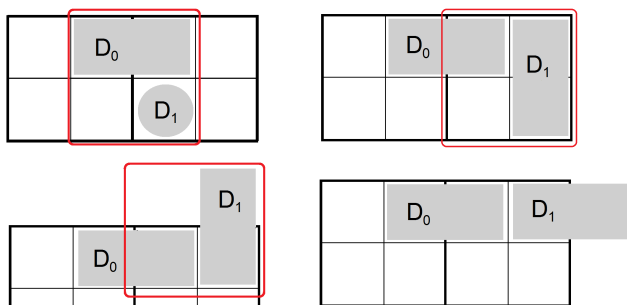
2. Jaamme $2n \times 2n$ -ruudukon 2×2 -neliöihin siten, että lopputuloksena on 2×2 -neliöistä koostuva $n \times n$ -ruudukko. Kutsumme näitä 2×2 -neliöitä *isoiksi ruuduiksi*. Alkuperäisessä ruudukossa on myös 2×2 -neliöitä, jotka eivät ole isoja ruutuja.

Seuraavaksi osoitamme, että jokaisessa isossa ruudussa on täsmälleen yksi domino. Tehtävänannon mukaisesti jokainen 2×2 -neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, eli jokaisesta isosta ruudusta peittyy korkeintaan kaksi ruutua. Dominot peittävät yhteensä $2n^2$ ruutua. Jos yhdestä isosta ruudusta peittyisi vain yksi ruutu, tai ei yhtään ruutua, peitettyjä ruutuja olisi laudalla korkeintaan $1 + (n^2 - 1) \cdot 2$, sillä jokaisessa muista isoista ruuduista, joita on $n^2 - 1$, on korkeintaan kaksi peitettyä ruutua. Koska

$$1 + (n^2 - 1) \cdot 2 = 1 + 2n^2 - 2 = 2n^2 - 1 < 2n^2,$$

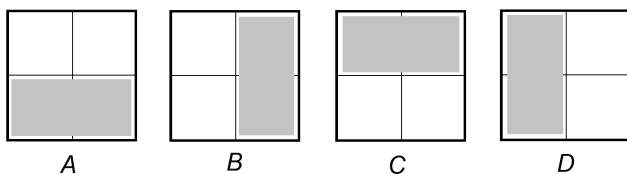
olisi peitettyjä ruutuja vähemmän kuin $2n^2$, mikä tuotaisi ristiriidan. Jokaisessa isossa ruudussa on siis täsmälleen kaksi peitettyä ruutua ja kaksi peittämätöntä.

Tehtävänannon mukaan peittämättömät ruudut ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella, joten peitetyt ruudut ovat myös samalla rivillä tai sarakkeella. Tarkastellaan tapausta, jossa jossakin isossa ruudussa nämä ruudut peittyvät eri dominoilla, jolloin molemmat dominot ovat puoliksi toisessa isossa ruudussa. Tarkastellaan toista näistä dominoista, olkoon se D_0 . Symmetrisyyden perusteella riittää tarkastella tapausta, jossa D_0 peittää oikeanpuoleisen isoruudun vasemman yläkulman. Oikeanpuoleisessa isoruudussa joko vasen alakulma tai oikea yläkulma on peitetty dominolla D_1 . Alla olevasta kuviosta huomaamme, että vain yksi tapa asettaa domino D_1 on tehtävänannon mukainen.



Nyt itse asiassa domino D_1 on samassa asemassa kuin D_0 , joten sama päätelmäketju toistamalla löydämme pakollisen paikan dominolle D_2 . Eli dominoa D_n seuraa domino D_{n+1} . Kuitenkin dominoita on äärellinen määrä ja laudan oikea reuna tulee vastaan, mikä antaa ristiriidan. Jokaisessa isossa ruudussa on siis oltava tasan yksi domino.

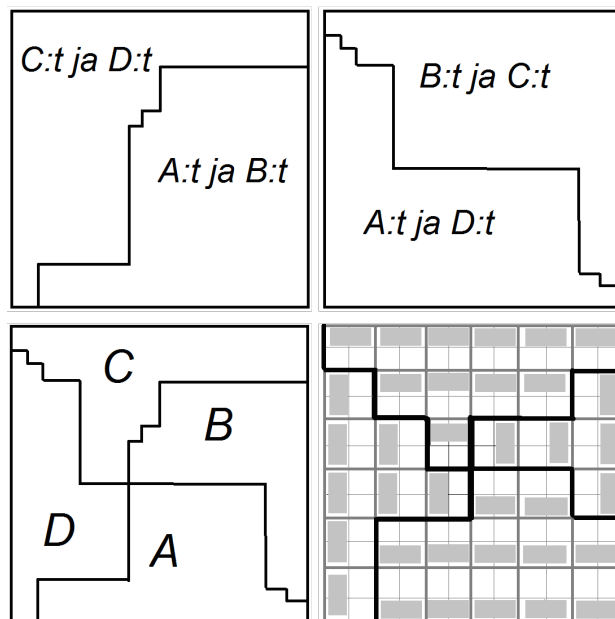
Nyt on neljä vaihtoehtoa, miten domino voi asettua isoon ruutuun, ja merkitsemme niitä seuraavan kuvan mukaisesti A , B , C ja D .



Nyt, jos iso ruutu on A tai B , sen alapuolella ja oikealla puolella olevien isojen ruutujen on myös oltava A tai B . Muuten muodostuisi 2×2 -neliö, jossa olisi vain yksi peittämätön ruutu. Täten kaikki A - ja B -neliöt ovat pakkautuneet oikeaan alareunaan kuvion mukaisesti *rappuslävistäjän*, joka kulkee vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan, alle.

C - ja D -ruudut ovat rappuslävistäjän yläpuolella. Samalla tavalla voidaan päätellä, että kaikki A - ja D -ruudut ovat vasemmassa alanurkassa toisen rappuslävistäjän alla, ja B - ja C -ruudut sen yläpuolella. Nyt

kaikki A -ruudut sijaitsevat molempien rappuslävistäjien alapuolella. Toisaalta B -, C - ja D -ruuduille pätee, että ne sijaitsevat jommankumman rappuslävistäjän yläpuolella. Täten rappuslävistäjien alapuolella sijaitsevat kaikki A -ruudut eikä muuta. Symmetrisellä päättelyllä jokaisella ison ruudun tyypillä on oma alueensa rappuslävistäjien suhteen kuvan mukaisesti. (Voi kuitenkin olla, että rappuslävistäjien alle ei mahdu aiuttakaan A -ruutua, mutta se ei ole ongelma, sillä tällöin ruudukko koostuu pelkästään muunlaisista isoista ruuduista.)



Nyt loppu hämmöttää. Tehtävänanto muuttuu muotoon ”Kuinka monta erilaista rappuslävistäjakombinaatiota on olemassa?”. Väitämme, että vasemmasta alakulmasta oikeaan yläkulmaan menevän rappuslävistäjän voi muodostaa $\binom{2n}{n}$ eri tavalla. Rappuslävistäjä voidaan nimittää ilmaista jonona ykkösiä ja nollia. Rappuslävistäjä alkaa vasemmasta alakulmasta. Jos se menee ylöspäin jonoon lisätään ykkönen, jos se menee oikealle lisätään nolla. Jonossa on yhteensä $2n$ alkioita, joista n kpl ovat ykkösiä. Jokainen jono vastaa yksikäsitteistä rappuslävistäjää ja ykkösten sijainnille jonoissa on $\binom{2n}{n}$ vaihtoehtoa, joten eri rappuslävistäjiä on $\binom{2n}{n}$. Toiselle rappuslävistäjälle toimii vastaava päätteily. Kun molemmat lävistäjät otetaan samanaikaisesti huomioon vaihtoehtoja on yhteensä $\binom{2n}{n}^2$.

3. Jos $a_1 = a_2 = \dots = a_m$, niin voimme valita esim. $b_1 = 2, b_2 = b_3 = \dots = b_m = 1$. Oletetaan siis, etteivät luvut ole yhtä suuria. Nyt pienin luvuista $a_1, a_2, \dots, a_m$ on enintään $n^m - 1$, koska muutoin kaikki luvut olisivat yhtä kuin n^m . Jos pienin luvuista olisi $n^m - 1$, niin jokin toinen luku olisi n^m , ja voisimme valita $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 1$.

Voimme siis huoletta olettaa, että pienin luvuista $a_1, a_2, \dots, a_m$, sanokaamme a_i (missä $i \in \{1, 2, \dots, m\}$),

on enintään $n^m - 2$. Oletetaan, että halutunlaisia lukuja $b_1, b_2, \dots, b_m$ ei ole olemassa. Silloin millä tahansa lukujen $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ valinnalla pätee

$$\text{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \geq n.$$

Toisaalta,

$$\text{syt}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) \leq a_i + b_i \leq n^m - 2 + n,$$

ja siis kyseinen suurin yhteinen tekijä voi saada enintään $n^m - 2 + n - n + 1 = n^m - 1$ eri arvoa.

Luvut $b_1, b_2, \dots, b_m$ voi valita n^m eri tavalla, jolloin kahdella eri valinnalla saadaan sama suurin yhteinen tekijä, jota voimme merkitä vaikkapa kirjaimella d . Mutta koska $d \geq n$, voi jokaisella $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ luvun b_i valita vain enintään yhdellä tavalla siten, että $a_i + b_i$ on jaollinen luvulla d , ja siis luku d voi esiintyä suurimpana yhteisenä tekijänä enintään yhdellä lukujen $b_1, b_2, \dots, b_m$ valinnalla, mikä tuottaa ristiriidan. Täten ei oletus siitä, ettei halutunlaisia lukuja $b_1, b_2, \dots, b_m$ ole olemassa, voi pitää paikkaansa, ja olemme valmiit.

4. Oletetaan, että halutunlainen jono on olemassa. Ensinnäkin yhtälöistä välittömästi seuraa, että

$$a_2 < a_3 < a_4 < \dots,$$

ja siispä myös

$$\begin{aligned} (a_{n+3} - a_{n+1}) - (a_{n+2} - a_n) \\ &= (a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+1} - a_n) \\ &= \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}} - \sqrt{a_n + a_{n-1}} > 0, \end{aligned}$$

kaikilla kokonaisluvuilla $n \geq 3$, ja erityisesti siis

$$a_{n+3} - a_{n+1} > a_{n+2} - a_n.$$

Toisaalta samoille n pätee myös

$$\begin{aligned} 0 &< a_{n+2} - a_n \\ &= (a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n) \\ &= (a_{n+3} - a_{n+2})^2 - (a_{n+2} - a_{n+1})^2 \\ &= (a_{n+3} - a_{n+1}) \\ &\quad \cdot ((a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1})). \end{aligned}$$

Viimeiselle tekijälle pätee

$$\begin{aligned} (a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= \sqrt{a_{n+2} + a_{n+1}} - \sqrt{a_{n+1} + a_n} > 0, \end{aligned}$$

ja kokonaisluvun ollessa kyseessä on siis

$$(a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1}) \geq 1.$$

Mutta nyt

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_{n+1} &= \frac{a_{n+2} - a_n}{(a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+2} - a_{n+1})} \\ &\leq a_{n+2} - a_n, \end{aligned}$$

mikä tuottaa ristiriidan. Täten halutunlaista jonoa ei ole olemassa.

5. Oletetaan ensin, että $n < m^2$ tai $n > m^2 + m$. Anastasia voi tällöin valita osituksen

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2m-1, 2m\}.$$

Olkoon Boriksen valitsemien kokonaislukujen summa s . Nyt pätee

$$m^2 = \sum_{i=1}^m 2i - 1 \leq s \leq \sum_{i=1}^m 2i = m^2 + m.$$

Nyt kun $n < m^2$ tai $n > m^2 + m$ varmasti $s \neq n$.

Oletetaan seuraavaksi, että $m^2 < n < m^2 + m$. Anastasia voi tällä kertaa valita osituksen

$$\{1, 2m\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{2m-2, 2m-1\}.$$

Olkoon jälleen s Boriksen valitsemien kokonaislukujen summa. Jos Boris valitsee ensimmäisestä parista luvun 1, pätee

$$s \leq 1 + 3 + 5 + \dots + 2m-1 = \sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2,$$

jolloin $s \neq n$. Toisaalta jos Boris valitsee luvun $2m$, pätee

$$s \geq 2m + 2 + 4 + \dots + 2m-2 = \sum_{i=1}^m 2i = m^2 + m,$$

ja taas päädytään tilanteeseen, jossa $s \neq n$.

Oletetaan lopuksi, että $n = m^2$ tai $n = m^2 + m$. Anastasia voi valita osituksen

$$\{1, 2m-1\}, \{2, 2m\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots, \{2m-3, 2m-2\}.$$

Boris valitsee pareista luvut $a_1, a_2, \dots, a_m$, missä a_i on toinen i . parin luvuista. Olkoot $s_1 = a_1 + a_2$ ja $s_2 = a_3 + a_4 + \dots + a_m$. Huomaa että Boriksen valitsemien lukujen summa on $s_1 + s_2$. Nyt pätee

$$\begin{aligned} m^2 - 2m &= 3 + 5 + 7 + \dots + 2m-3 \\ &\leq s_2 \leq 4 + 6 + 8 + \dots + 2m-2 = m^2 - m - 2. \end{aligned}$$

Summa s_1 on joko 3, $2m+1$ tai $4m-1$. Jos $s_1 = 3$, pätee

$$s_1 + s_2 \leq 3 + m^2 - m - 2 = m^2 - m + 1 < m^2,$$

jolloin $s_1 + s_2 \neq n$. Jos taas $s_1 = 2m+1$, on

$$\begin{aligned} m^2 &< m^2 + 1 = 2m + 1 + m^2 - 2m \\ &\leq s_1 + s_2 \leq 2m + 1 + m^2 - m - 2 \\ &= m^2 + m - 1 < m^2 + m, \end{aligned}$$

jolloin $s_1 + s_2 \neq n$. Viimeisessä tapauksessa $s_1 = 4m - 1$, jolloin pätee

$$s_1 + s_2 \geq 4m - 1 + m^2 - 2m = m^2 + 2m - 1 > m^2 + m,$$

ja $s_1 + s_2 \neq n$.

6. Olkoon O kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän keskipiste ja R sen säde. Aloitetaan peilaamalla pisteet O , G ja H suoran BC suhteen pisteiksi O' , G' ja H' , jolloin siis tietenkin $GH = GP'$ jos ja vain jos $G'H' = G'P$. Piste H' sijaitsee ympyrän $\triangle ABC$ ympäripiirretyllä ympyrällä; tämä seuraa vaikkapa siitä, että yhdeksän pisteen ympyrä on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän kuva pituudet puolittavassa H -keskisessä homotetiassa.

Kolmio $\triangle H'OP$ on tasakylkinen, ovathan OP ja OH' kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän säteitä, ja siis $G'H' = G'P$ jos ja vain jos G' sijaitsee kulman $\angle H'OP$ puolittajalla. Tehtävänannon ehto $AB \neq AC$ takaa, että $\angle H'AP = \angle H'AG > 0$. Kehäkulmalauseen nojalla $2 \cdot \angle H'AP = \angle H'OP$, ja varmasti $\angle GO'H = \angle H'OG'$, joten edelleen $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle GO'H = \angle H'AP$.

Olkoon piste D suorien OO' ja BC leikkauspiste, jolloin siis $OD = DO'$ ja $OD \perp BC$. Koska myös $AH' \parallel AH \perp BC$ on oltava $\angle ODG = \angle H'AP$, ja nyt tiedämme, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle ODG = \angle GO'H$.

Olkoon seuraavaksi F janan GH keskipiste. Klassinen teoreema Eulerin suorasta sanoo, että pisteet H , G ja O ovat samalla suoralla, piste G on pisteiden H ja O välissä, ja $GH = 2 \cdot OG$. Erityisesti tilanteessamme siis $OG = GF = FH$. Koska D puolittaa janan OO' ja G janan OF , ovat kolmiot $\triangle ODG$ ja $\triangle OO'F$ yhdenmuotoisia, ja $\angle OO'F = \angle ODG$, ja nyt tiedämme, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $\angle OO'F = \angle GO'H$.

Kolmioille $\triangle O'OF$ ja $\triangle O'HG$ pätee $OF = HG$. Oletetaan nyt hetkeksi, että $\angle OO'F = \angle GO'H$. Nyt sinilauseen nojalla kolmioiden $\triangle O'OF$ ja $\triangle O'HG$ ympäripiirretyillä ympyröillä on sama säde. Jos nyt piirretään piste O'' siten, että $OO' \parallel GO''$ ja $FO' \parallel HO''$, niin luonnollisesti pisteen O'' on oltava kolmion $\triangle GO'H$ ympäripiirretyllä ympyrällä, ja siis nelikulmion $GO'O''H$ on oltava symmetrinen janan GH keskinormaalien suhteen. Erityisesti siis $\angle FOO' = \angle HGO'' = \angle O'HG$. Täten kolmio $\triangle O'OH$ on tasakylkinen ja $OO' = O'H = OH' = R$. Toisaalta, jos $OO' = R$, niin silloin varmasti kolmio $\triangle O'OH$ on tasakylkinen, ja $\angle FOO' = \angle O'HG$, jolloin kolmiot $\triangle O'OG$ ja $\triangle O'HG$ ovat yhtenevät (sks), ja $\angle OO'F = \angle GO'H$.

Olemme siis todistaneet, että $GH = GP'$ jos ja vain jos $OO' = R$. Mutta tämä tarkoittaa samaa kuin, että O' on kolmion $\triangle ABC$ ympäripiirretyn ympyrän kehällä. Mutta tämä pitää paikkaansa täsmälleen silloin kun $ABO'C$ on jännenelikulmio, mikä puolestaan pitää paikkaansa täsmälleen silloin kun $\angle BAC + \angle CO'B = 180^\circ$. Mutta kehäkulmalauseen nojalla $\angle CO'B = \angle BOC = 2 \cdot \angle BAC$, eli $GH = GP'$ jos ja vain jos $3 \cdot \angle BAC = 180^\circ$, ja olemme valmiit.

Lähteet ja viitteet

- [1] *Solutions for EGMO 2015 in Belarus*, <https://www.egmo.org/egmos/egmo4/solutions.pdf>.
- [2] *Scoreboard for EGMO 2015 in Belarus*, <https://www.egmo.org/egmos/egmo4/scoreboard/>.

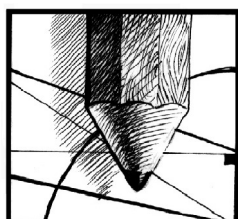
Uutta Verkko-Solmussa

Verkko-Solmun Oppimateriaalit-sivulla

matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html

on ilmestynyt Tevo Laurinollin Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 2: Dynamiikka: liikelait, liikemäärä ja energia:

matematiikkalehtisolmu.fi/2015/SR2_TL.pdf



Hyperbolisesta geometriasta

*Riikka Schroderus*¹

tohtorikoulutettava, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

riikka.schroderus@helsinki.fi

Historia

Hyperboliseen geometriaan, jonka löytämisen historia on värikäs ja monivivahteinen, johti ensimmäisen, Eukleideen mukaan nimetyn, geometrinen järjestelmän kyseenalaistaminen. Geometrian syntyminen esteettisistä ja käytännön tarpeista noin pari-kolme tuhatta vuotta ennen ajanlaskun alkua mm. Egyptissä, Niilin jokilaaksossa oli alku koko matematiikalle. Se, ja samalla koko matematiikka, kehittyi itsenäiseksi tieteenalaksi vasta Antiikin Kreikassa n. 500 eaa. Tällöin konkreettiset *toimintaohjeet* yksittäisiin maanmittaukseen tai verotukseen liittyviin ongelmiin muuttuivat yleisemmin päteviksi kaavoiksi, ja alettiin esittää myös puhtaasti matemaattisia ongelmia ilman yhteyttä arkielämään. Eukleideen kuuluisa *Elementa* oli valmistuessaan (noin 300 eaa.) ensimmäinen kirjallinen teos, joka kattoi koko Antiikin Kreikan siihenastisen matematiikan; geometrian lisäksi myös paljon lukuteoriaa. Eukleideen aikaan ympäröivän maailman tarkastelu keskittyi kirjaimellisesti ruohonjuuritason ja 3-ulotteiseen lähiympäristöön. Täytyy tosin muistaa, että tässä vaiheessa hyväksyttiin (ainakin tiedemiesten keskuudessa) jo Maan pallonmuoto, ja koska navigointikin jo osattiin, niin myös *pallogeometria* oli saanut alkunsa. Elementassa Eukleides esitti viisi *aksioomaa*, jotka määrittelivät meille jo alaluokilta tutun, nykyi-

sin euklidiseksi tasogeometriaksi kutsutun järjestelmän lait.

Eukleidesta kritisoitiin tämän aksiomaattisen järjestelmän epätäydellisyydestä ja aksioomiin perustumattomien oletuksien tekemisestä jo hänen aikanaan, mutta meni pari tuhatta vuotta ennen kuin euklidisen geometrian aksiomat lopulta korjattiin ja täydennettiin mm. D. Hilbertin (1862–1943) toimesta nykyiseen muotoonsa. Kannattaa huomioida, että tuhat vuotta tästä ajanjaksosta eli n. 400–1400 oli myös matematiikan kannalta *pimeää aikaa*, jolloin ei edistystä juurikaan tapahtunut. Matemaatikkoja, joista useimmat siihen aikaan olivat myös fyysikoita ja astronomeja, kuitenkin askarrutti kysymys, kuvaako euklidinen (3-ulotteinen) geometria todella parhaiten maailmaamme.

Erityisesti tasogeometrian aksiomista viides, niin kutsuttu *paralleeliaksiooma* oli herättänyt närkästystä jo Eukleideen ajoista aina 1800-luvulle asti matemaatikkojen parissa, jotka kilvan yrittivät todistaa paralleeliaksioomaa teoreemaksi eli välttämättömäksi seuraukseksi muista aksiomista. Epäonnistuneet yritykset toivat kuitenkin mukanaan paitsi yhtäpitäviä muotoiluja paralleeliaksioomalle, myös koko joukon absurdeilta vaikuttavia seurauksia sille, että paralleeliaksiooma ei pitäisi. Ensimmäisenä hyperbolisen geometrian ”löytäjänä” pidetään italialaista G. G. Saccheria (1667–

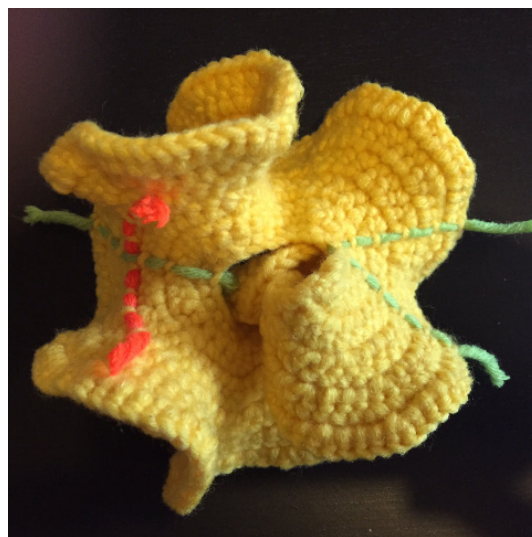
¹Teksti on alun perin kirjoitettu Aalto-yliopiston kurssille *Kristallikukkuja peilisaleissa – matematiikka kohtaa taiteen ja arkkitehtuurin*.

1733), vaikkakaan hän ei sitä itse koskaan ymmärtänyt. Hän epäonnistui yrittäessään osoittaa, että nelikulmioiden, joissa on kaksi suoraa kulmaa ja kaksi terävää kulmaa, olemassaolo johtaa ristiriitaan muiden aksioomien kanssa. Nämä nelikulmiot tunnetaan *Saccherin nelikulmioina*. Sveitsiläinen J. H. Lambert (1728–1777) jatkoi tästä ja tutki puolestaan nelikulmioita, joissa on kolme suoraa kulmaa ja yksi terävä kulma. *Lambertin nelikulmioiden* olemassaolosta hän päätyi seuraukseen, että tällöin minkä tahansa kolmion pinta-ala on radiaaneissa π – (kolmion kulmien summa). Hän myös päätteli aivan oikein, että geometria, jossa paralleeliaksiooma ei päde, vastaa geometriaa pallopinnalla, jonka säde on imaginaarinen! Myös aikansa arvostetuin matemaatikko, saksalainen C. F. Gauss (1777–1855) tutki miltei koko elämänsä ajan paralleeliaksioomatonta geometriaa, mutta ei mainettaan varjelevana perfektionistina julkaissut mielestään epätäydellisiä tuloksiaan. Lopulta Gaussin hyvän ystävän, Wolfgang Bolyain, poika János (1802–1860) ja samoihin aikoihin venäläinen matemaatikko N. Lobachevsky (1792–1856) julkaisivat toisistaan tietämättä tuloksensa *tyhjistä tulleesta maailmasta*, hyperbolisesta geometriasta. Satoja matemaatikkojenvuotia ilmassa roikkunut totuus, että on olemassa täydellisiä geometrisia järjestelmiä, joissa paralleeliaksiooma ei päde, oli vihdoinkin saavutettu. Tosin vasta Gaussin kuoleman jälkeen matemaatikot hyväksyivät paralleeliaksioomatonta geometrisen järjestelmän ja mm. E. Beltrami, H. Poincaré, F. Klein ja B. Riemann tarkensivat ja kehittivät tätä eteenpäin. Vuonna 1868 Beltrami vihdoinkin todisti, että paralleeliaksiooma ei ole seuraus muista aksioomista.

Historian vaiheista kiinnostunut lukija löytää lisätietoa mm. seuraavista, tämänkin osuuden lähteinä olleista, teoksista: Matematiikan historiasta yleisesti saa hyvän kokonaiskuvan M. Lehtisen *Matematiikan historia* -luentomuistiinpanoista [4] ja geometriasta niin matematiikan, kuin historiankin kannalta kirjoittaa M. J. Greenberg kirjassaan *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* [3]. Lennokkaan ja hauskan matkan geometrian kehitysvaiheisiin taas tarjoaa L. Mlodinow pokkarissaan *Euclid's window* [7].

Hyperbolinen vs. euklidinen geometria

Aloitetaan tutustuminen hyperboliseen geometriaan vertaamalla sitä tuttuun euklidiseen geometriaan. Molemmat yleistyvät helposti useampaan ulottuvuuteen, mutta tarkastellaan tässä yksinkertaistuksen vuoksi vain 2-ulotteista tasogeometriaa. Puhumme siis pisteistä ja suorista tasossa. Sekä euklidisesta että epäeuklidisista geometrioista kiinnostuneelle voi suositella jo aiemmin mainittua, paljon myös tehtäviä sisältävää Greenbergin kirjaa [3], tai vielä yleistajuisempaa, ei niin paljon tehtäviin keskittynyttä kerrontaa kaipaa-valle J. Grayn *Ideas of Space* -kirjaa [2].



Kuva 1: Esimerkki hyperbolisesta pinnasta.

Aksiomaattinen järjestelmä matematiikassa tarkoittaa sitä, että asetetaan (mahdollisimman pieni) joukko aksioomia eli *yleisesti hyväksyttyjä totuuksia*, ja näistä aksioomista loogisen päättelyn avulla johdetaan erilaisia tuloksia. Aksioomien täytyy olla toisistaan *riippumattomia*, jolloin mitään niistä ei voida johtaa muista aksioomista, ja aksioomista johdettujen tulosten täytyy olla *ristiriidattomia* keskenään. Euklidinen geometria on esimerkki tällaisesta järjestelmästä. Kannattaa huomata, että aksiomaattinen geometria on abstrakti järjestelmä, joka ei tarvitse yhteyttä fyysikaaliseen maailmaan taikka visualisointia, vaan kaikki todistukset palautuvat aksioomiin, niistä jo johdettuihin tuloksiin ja loogiseen päättelyyn. Kuvat ja geometrian olioiden nimeäminen fyysikaalisesta maailmasta tutuiksi *pisteiksi*, *suoriksi* ja *tasoiksi* ovat vain apukeino havainnollistaa tilannetta, jos toisaalta, koska pisteet ja suorat tasossa toteuttavat tasogeometrian aksioomat, niin geometrian tulokset pätevät niille. Aksiomaattinen geometria ei myöskään itsessään vaadi todistuksiin koordinaatistoa ja algebrallisia keinoja, vaikka nämä toki voidaan yhdistää *analyttiseksi geometriaksi*. Euklidisen tasogeometrian aksioomat nykymuodossaan ja paljon esimerkkejä sekä tehtäviä aksiomaattisesta todistamisesta lukija löytää esimerkiksi Lehtisen luentomuistiinpanoista *Geometrian perusteet* (2013) [5]. Aksiomaattisen järjestelmän perusidea taas on selitetty yleistajuisesti R. Courantin ja H. Robbinsin kirjassa [1, Luku IV].

Eukleideen Elementassa esittämät tasogeometrian aksioomat sanoivat:

- E1. *Mistä tahansa pisteestä voidaan piirtää suora mihin tahansa pisteeseen.* (Tämän on ymmärretty sisältävän implisiittisesti myös tällaisen suoran yksikäsitteisyyden.)
- E2. *Jana voidaan jatkaa suoraksi.*
- E3. *Voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on mikä hyvänsä ja säde mikä hyvänsä.*

E4. *Kaikki suorat kulmat ovat keskenään samat.*

E5. *Oletetaan, että suora leikkaa kahta muuta suoraa siten, että samalle puolelle sitä syntyy kaksi sisäpuolista leikkauskulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Tällöin suorat, jos niitä rajatta jatketaan, kohtaavat toisensa sillä puolen kolmatta suoraa, missä ovat kaksi mainittua kulmaa, jotka ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. (Paralleeliaksioma)*

Paralleeliaksioma esitetään usein myös muodossa

E'5. *Jokaisen suoralle kuulumattoman pisteen kautta kulkee enintään yksi suora, joka on yhdensuuntainen ensimmäisen suoran kanssa.*

Ehkä tutuin esimerkki geometriasta, jossa paralleeliaksioma ei päde, on pallogeometria esimerkiksi maapallon pinnalla. Tällöin ”suoria” ovat kaikki ne ympyrät, joiden keskipiste on pallon keskipiste (esimerkiksi kaikki pituuspiirit). On helppo nähdä, että yllä olevista aksioomista toteutuvat E1–E4. Kun muistetaan, että suorat ovat yhdensuuntaiset, mikäli ne ovat sama suora tai niillä ei ole yhtään yhteistä pistettä, niin huomataan, että paralleeliaksioma ei päde, sillä kaikki pallogeometrian suorat leikkaavat jopa kahdessa pisteessä. Hyperbolinen geometria, jota pidetään monessa mielessä pallogeometrian vastakohtana, saadaan euklidisesta geometriasta korvaamalla paralleeliaksioma negatiivisella, eli

H5. *Jokaisen suoralle kuulumattoman pisteen kautta kulkee vähintään kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia ensimmäisen suoran kanssa.*

Monet tasogeometriasta tutut ilmiöt ovat itse asiassa yhtäpitäviä paralleeliaksioman kanssa, kuten esimerkiksi

- o kolmion kulmien summa on π radiaania ($= 180^\circ$),
- o on olemassa suorakulmioita (= nelikulmio, jossa neljä suoraa kulmaa),
- o on olemassa yhdenmuotoisia kolmioita, jotka eivät ole yhteneviä (eli samankokoisia).

Hyperbolisessa geometriassa siis mikään yllä luetelluista ei toteudu. Esimerkiksi kaikki yhdenmuotoiset kolmiot ovat välttämättä myös yhteneviä ja nelikulmioiden kulmien summa on alle 2π ($= 360^\circ$). Kolmion kulmien summa hyperbolisessa geometriassa saadaan hyvin elegantilla kaavalla

$$(\text{kolmion kulmien summa}) = \pi - (\text{kolmion ala}).$$

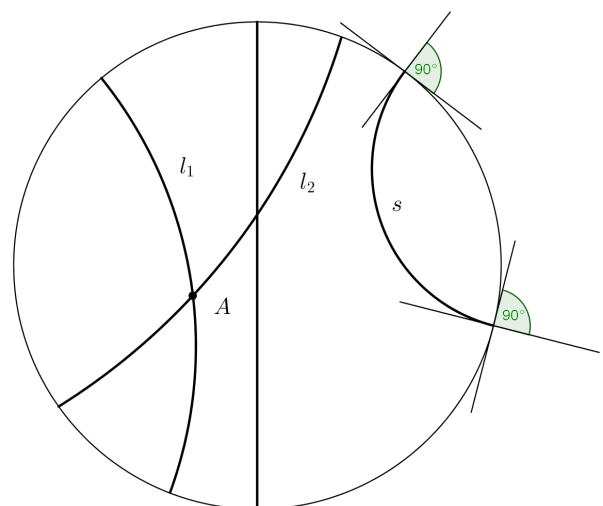
Seuraavassa luvussa tarkastellaan hyperbolisia malleja eli erilaisia visualisointeja, jotka auttavat hahmottamaan paremmin hyperbolista geometriaa. On hyvä pitää mielessä, että riippumatta geometriasta suora eli

geodeesi on aina sellainen, että lyhin reitti kahden pisteen välillä kulkee geodeesia pitkin. Geodeesien ”muoto” riippuu paitsi geometriasta myös valitusta *metriikasta* eli etäisyyden käsitteestä, kuten pian nähdään. Euklidisella etäisyydellä tarkoitetaan jatkossa tuttua Pythagoraan lauseella saatavaa etäisyyttä, jossa kahden (tason) pisteen (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys on määritelty kaavalla $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Hyperbolisen geometrian malleja

Hyperbolista geometriaa voi kahdessa ulottuvuudessa visualisoida ja mallintaa useilla eri tavoilla. Ehkä tunnetuimmat ja käytetyimmät näistä ovat *konforminen* ja *projektiivinen malli*, jotka tarkastelevat hyperbolista geometriaa rajoitetussa, euklidisessa kiekossa. (Huom: Myös euklidista geometriaa voidaan tarkastella tutun, rajoittamattoman tason sijaan rajoitetussa avoimessa kiekossa, jossa suorina ovat tietyt puoliellipsit ja kiekon halkaisijat, ks. esimerkiksi [6].) Molemmat näistä ovat Beltramin (1835–1900) alunperin esittämiä, mutta usein niitä kutsutaan ne uudelleen löytäneiden ja paremmin tunnetuksi tehneiden matemaatikoiden mukaan; konformista mallia kutsutaan Poincarén (1854–1912) ja projektiivista (Beltrami-)Kleinin (1849–1925) kiekkomalliksi. Beltrami sai sentään pitää kokonaan omissa nimissään *puolipallomallin*, joka yhdistää edelliset projektioiden kautta. Tarkastellaan seuraavaksi konformista ja projektiivista mallia, joiden matematiikasta lukija löytää lisätietoja esimerkiksi Greenbergin [3, Luku 7] tai R. Penrosen [8, Luku 2] kirjoista. Lisää visualisointia kaipaavan kannattaa tutustua esimerkiksi kuvataiteilija M. C. Escherin tuotantoon, joka pitää sisällään useita erityisesti konformiseen malliin tehtyjä teoksia.

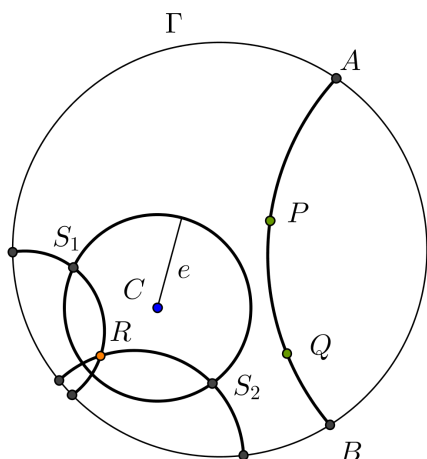
Konforminen malli



Kuva 2: Poincarén kiekko.

Konformisessa mallissa hyperbolisen geometrian pisteinä ovat minkä tahansa euklidisen ympyrän sisäpisteet (eli euklidinen kiekko) ja geodeeseinä ("suorina") sellaiset ympyränkaaret, jotka leikkaavat kiekon reunaa kohtisuorasti, mukaan lukien ympyrän halkaisijat. Nimi 'konforminen' kertoo, että tässä mallissa kulmien koko säilyy verrattuna euklidiseen geometriaan eli esimerkiksi suorat kulmat näyttävät euklidisilta suorilta kulmilta. Kuvasta 2 nähdään hyvin, että euklidisen tasogeometrian paralleeliaksioma ei päde tämän mallin suorille. Merkitään jatkossa tätä ympyrää Γ :lla, jolloin Poincarén kiekon muodostavat kaikki ympyrän Γ sisällä olevat pisteet.

Ympyröitä konformisessa mallissa ovat kaikki Γ :n sisällä olevat euklidiset ympyrät, mutta niiden hyperbolinen keskipiste ei vastaa euklidista keskipistettä (eli ympyrän keskipiste ole Γ :n keskipiste). Määritellään seuraavaksi Poincarén kiekkoon hyperbolinen metriikka euklidisen etäisyyden avulla ja tarkastellaan sitten, miten se vaikuttaa ympyrän hyperboliseen keskipisteeseen ja säteeseen.



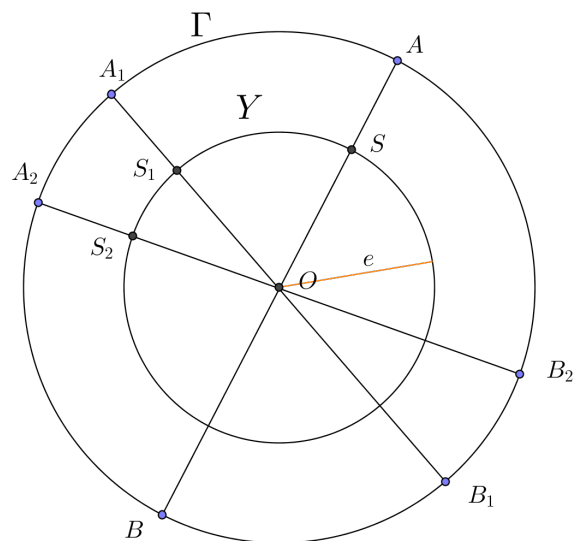
Kuva 3: Etäisyys hyperbolisessa geometriassa.

Olkoot pisteet P ja Q Poincarén kiekon pisteitä ja olkoot A ja B ne pisteet, joissa P :n ja Q :n kautta kulkeva ympyränkaari leikkaa Γ :n (ks. Kuva 3). Merkitään pisteiden P ja Q välistä euklidista etäisyyttä $|PQ|$ (vastaaavasti muiden pisteiden väliset etäisyydet). Nyt pisteiden P ja Q välinen hyperbolinen etäisyys $|PQ|_h$ on

$$|PQ|_h = \log \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|}.$$

Logaritmi-funktion ominaisuuksista seuraa, että pisteiden hyperbolinen etäisyys voi kasvaa mielivaltaisen suureksi pisteiden lähestyessä Poincarén kiekon reunaa. Tästä seuraa mm. se, että Kuvan 3 ympyrän *hyperbolinen keskipiste* R on lähempänä kiekon reunaa (euklidisen etäisyyden mielessä), kuin sen euklidinen keskipiste

C. Poikkeuksen muodostavat ympyrät, joiden keskipiste on Γ :n keskipiste. Tarkastellaan hyperbolista etäisyyttä tällaisen ympyrän avulla.



Kuva 4: O -keskinen ympyrä konformisessa mallissa.

Olkoon Y ympyrä, jonka euklidinen keskipiste on Γ :n keskipiste O ja euklidinen säde e (Kuva 4). Nyt siis kaikille ympyrän Y pisteille S pätee $|OS| = e$. Pisteiden O ja S välinen hyperbolinen etäisyys taas on

$$|OS|_h = \log \frac{|AO| \cdot |BS|}{|BO| \cdot |AS|} = \log \frac{|BS|}{|AS|},$$

missä A ja B ovat pisteen S kautta kulkevan (ympyrän Γ) halkaisijan päätepisteet. Huomataan, että jos S_1 ja S_2 ovat mielivaltaisia ympyrän Y pisteitä, niin

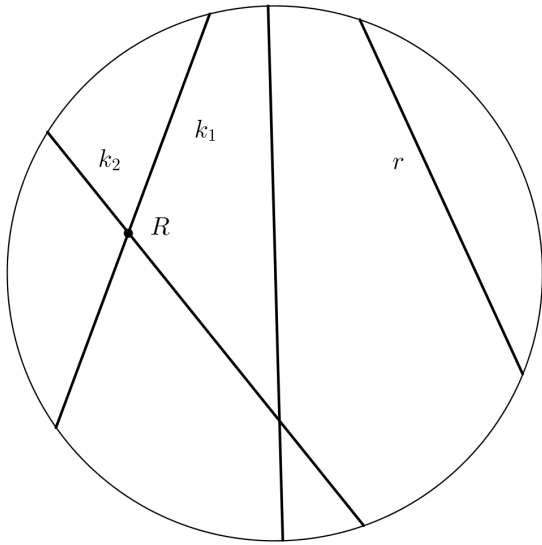
$$\frac{|B_1 S_1|}{|A_1 S_1|} = \frac{|B_2 S_2|}{|A_2 S_2|} \text{ ja siten } |OS_1|_h = |OS_2|_h,$$

kun A_i ja B_i ovat pisteen S_i ($i = 1, 2$) kautta kulkevan halkaisijan päätepisteet. Siis Y :n hyperbolinen keskipiste on todella O ! Toisaalta, jos ympyrän Y euklidista sädettä kasvatetaan (kuitenkin Γ :n sisällä pysyen) eli piste S lähestyy pistettä A , niin Y :n hyperbolinen säde kasvaa rajatta, sillä

$$|OS|_h = \log \frac{|BS|}{|AS|} \longrightarrow \infty, \text{ kun } |AS| \longrightarrow 0.$$

Projektiivinen malli

Hyperbolista geometriaa voidaan visualisoida myös projektiivisellä mallilla, Kleinin kiekolla, jossa tasona on jälleen jokin euklidinen kiekko. Geodeeseja ovat kaikki kyseisen kiekon jänteet, halkaisijat mukaan luetuina. Kuvasta 5 nähdään, että euklidisen geometrian paralleeliaksioma ei päde: Pisteen R kautta voidaan piirtää ainakin kaksi suoraa, k_1 ja k_2 , jotka eivät leikkaa suoraa r .

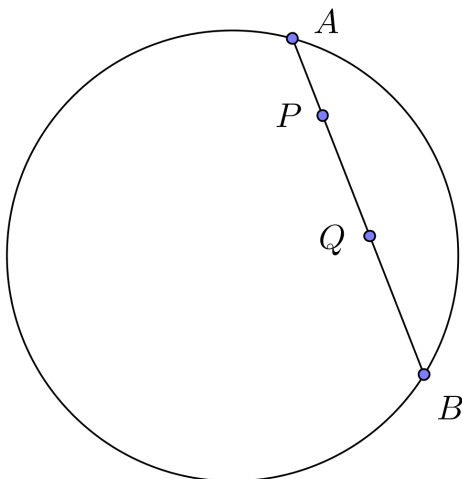


Kuva 5: Kleinin kiekko.

Projektiiviselle mallille voidaan valita metriikka, joka on miltei sama kuin konformisessa mallissa: Olkoot P ja Q pisteitä kiekossa ja A ja B niitä yhdistävän ympyrän janteen päätepisteet ympyrällä. Projektiivisessä mallissa pisteiden P ja Q välinen (hyperbolinen) etäisyys, jota merkitsemme $|PQ|_p$, saadaan kaavalla (ks. myös Kuva 6)

$$|PQ|_p = \frac{1}{2} \log \frac{|AQ| \cdot |BP|}{|AP| \cdot |BQ|}.$$

Ympyröitä tässäkin mallissa ovat euklidiset ympyrät, mutta ympyröiden keskipisteet ovat jälleen lähempänä Kleinin kiekon reunaa, kuin niiden euklidiset keskipisteet, ellei keskipiste ole Kleinin kiekon keskipiste. Samaa tapaan konformisen mallin kanssa, Kleinin kiekon reunan voi ajatella olevan ”äärettömyys”.



Kuva 6: Etäisyys Kleinin kiekossa.

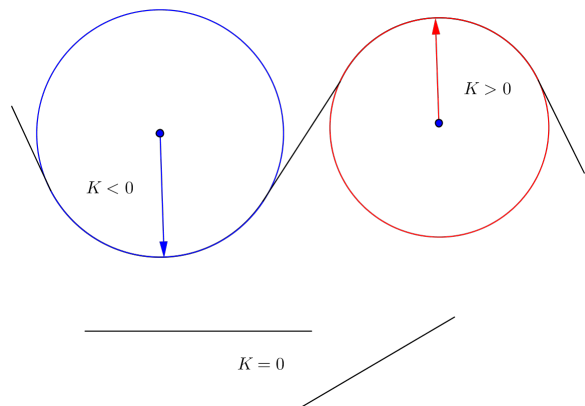
Kuriositeettina mainittakoon, että Kleinin kiekkomallissa hyperbolinen taso voidaan täyttää 7-kulmioilla ja kolmioilla – tämä on mahdotonta euklidisessa tasossa!

Hyperbolinen pinta

Maan pallonmuoto tiedettiin kyllä jo Eukleideen aikaan, mutta Gaussin nimeä kantava *kaarevuus* määriteltiin vasta pari tuhatta vuotta myöhemmin. 1800-luvulla pintoja tutkiva matematiikan ala *differentiaali-geometria* otti suuren harppauksen, kun Gauss osoitti, että kaarevuus on (käyrän) pinnan ominaisuus, joka voidaan laskea myös ilman perspektiiviä (toisesta) kolmannesta ulottuvuudesta. Maapallon gaussinen kaarevuus on likimain positiivinen (vakio) ja se sai matemaatikot pohtimaan, onko olemassa kaarevuudeltaan negatiivisia, ns. *hyperbolisia* pintoja. Hyperbolinen geometria sai nimensä tästä, mutta vasta kun se osattiin yhdistää pintaan, jonka kaarevuus on negatiivinen vakio. Hyperbolisiin pintoihin hyvin käytännönläheisen ja havainnollisen lähestymistavan lukija löytää esimerkiksi Daina Taimiän kirjasta [9], jossa on erityisesti virkkausohjeita hyperbolisen pinnan tuottamiseksi! Kuvassa 8 oleva virkkaus on tehty juuri kyseisestä kirjasta löytyvällä ohjeella.

Kaarevuus

Yksiulotteisen käyrän tapauksessa kaarevuus K tietyssä pisteessä saadaan sen ympyrän säteen R käänteislukuna, $K = 1/R$, joka on sovitettu käyrälle sivuamaan kyseistä pistettä. Valitsemalla käyrälle suunta voidaan erottaa *positiivinen* ja *negatiivinen* kaarevuus. Kuvassa 7 käyrän kaarevuus on positiivinen, kun sovitettu ympyrä on käyrän alapuolella (”kukkula”), ja negatiivinen, kun sovitettu ympyrä on käyrän yläpuolella (”kuoppa”).



Kuva 7: Käyrän kaarevuus.

Mitä suurempi säde kaarevuuden kertovalla ympyrällä on, sitä pienempi kaarevuus on itseisarvoltaan. Toisin

sanoen, kun $R \rightarrow \infty$, niin $K \rightarrow 0$. Tapaus $R = \infty$ vastaa suoran viivan tilannetta, eli suoran viivan kaarevuus on 0.

2-ulotteisen pinnan (gaussinen) kaarevuus tietyssä pisteessä saadaan yksiulotteisen kaarevuuden avulla: Asetetaan pinnan pisteeseen, jossa kaarevuus halutaan selvittää, normaalivektori (vektori, joka on kohtisuorassa pisteeseen asetettua tangenttitasoa vastaan). Kaikkien normaalivektorin sisältävien tasojen leikkaukset pinnan kanssa ovat yksiulotteisia käyriä, joille voidaan laskea kaarevuus edellä mainitulla tavalla. Valitaan kaikista näistä suurin ja pienin kaarevuus, niin sanotut *pääkaarevuudet* K_{max} ja K_{min} . Pinnan kaarevuus K kyseisessä pisteessä saadaan näiden tulona:

$$K = K_{max} \cdot K_{min} = \frac{1}{R_{min} R_{max}}.$$

Tasoa vastaa tilanne, missä molemmat pääkaarevuudet ovat 0, joten tason kaarevuus $K = 0$. Yllä olevasta kaarevuuden kaavasta nähdään, että pinnan kaarevuuden etumerkki riippuu pääkaarevuuksista: Jos ne ovat etumerkiltään samat, niin kaarevuus on positiivinen, ja muutoin negatiivinen. Esimerkiksi pallopinnan jokaisessa pisteessä molemmat pääkaarevuudet ovat $1/R$, missä R on pallon säde. Siis pallopinnalla on kaikkialla positiivinen vakiokaarevuus $1/R^2$. *Hyperboliseksi pinnaksi sanotaan pintaa, jonka kaarevuus on jokaisessa pinnan pisteessä sama negatiivinen luku.* Hyperbolinen geometria sai nimensä tästä, kun ymmärrettiin, että tällaisella pinnalla pätevät hyperbolisen geometrian lait.

Esimerkkejä

Jotta hyperbolisen geometrian lait toimivat pinnalla, on oleellista, että sen kaarevuus on negatiivinen *vakio*. Yksi ensimmäisistä keksityistä hyperbolisista pinnoista oli *pseudopallo*. Nimensä pseudopallo on saanut siitä, että sen kaarevuus vastaa sellaisen pallopinnan kaarevuutta, jonka säde on imaginaarinen – aivan kuten Lambert arveli! Jos siis pseudopallo on pallo, jonka säde on iR , missä $i = \sqrt{-1}$ on imaginaariyksikkö, niin pseudopallon kaarevuus on $K = 1/(iR)^2 = -1/R^2$. Usein *hyperbolinen paraboloidi*, ns. satulapinta, tulee mieleen hyperbolisista pinnoista puhuttaessa. Vaikka sen kaarevuus onkin kaikkialla negatiivinen, kaarevuus ei kuitenkaan ole vakio, joten se ei ole hyperbolinen pinta.

Kuvassa 8 on yksi esimerkki hyperbolisesta pinnasta, jossa pintaan värillisillä langoilla merkittyjen yksiulotteisten pääkaarevuuksien nähdään olevan erimerkkiset.

Maapallollamme elävät kasvitkin ovat ymmärtäneet hyperbolisen pinnan mahdollisuudet. Esimerkiksi lehtikaalin tai korallien muoto muistuttaa hyperbolista pintaa. Tämän ominaisuuden hyöty kasveille on, että ne

saavat enemmän pinta-alaa käyttöön imeäkseen ravinteita.



Kuva 8: Esimerkki hyperbolisesta pinnasta.

Lopuksi

Hyperbolisen geometrian löytyminen mullisti geometrian avaten tien uusille aksiomaattisille järjestelmille ilman riippuvuutta euklidiseen geometriaan. Tämä on johtanut kokonaan uusille urille matematiikassa. Lisäksi analyysin yhdistäminen geometriaan on tuonut aivan uusia ulottuvuuksia tutkimuskysymyksiin. Kaarevuuden käsitteen mukaantulo aloitti differentiaaligeometrian, joka on erittäin aktiivinen tutkimusala tänäkin päivänä. Hyperbolinen geometria ei ole pelkästään matemaatikoiden abstrakti kuvitelma tai taiteilijoiden leikkikenttä. Voimme nimittäin ymmärtää Einsteinin suppeaa suhteellisuusteoriaa, ja sitä kautta havaitsemaamme maailmaa, hyperbolisen geometrian avulla (ks. esim. [8, Luku 18])! Reilussa sadassa vuodessa näkökulmamme on laajentunut maailmasta koko maailmankaikkeuteen, jonka geometriaa yritetään parhailaan kiivaasti selvittää. Osa fyysikoista uskoo maailmankaikkeuden rakenteen selittyvän ns. säieteorialla, jonka lähtökohtana on 9-, 10-, 11- tai jopa 26-ulotteinen aika-avaruus. On vaikea kuvitella, että kuvamme maailmankaikkeudesta olisi kehittynyt näin pitkälle, mikäli hyperbolista geometriaa ei olisi koskaan löydetty.

Viitteet

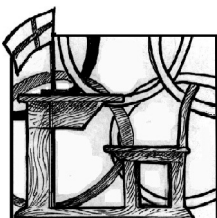
- [1] Richard Courant & Herbert Robbins. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, New York, second edition, 1996.
- [2] Jeremy Gray. *Ideas of space. Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*. The Clarendon Press,

- Oxford University Press, New York, second edition, 1989.
- [3] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [4] Matti Lehtinen. *Matematiikan historia*. Luentomoniste, 2000.
- [5] Matti Lehtinen. *Geometrian perusteet*. Luentomoniste, 2013.
- [6] Adolf Mader. A Euclidean model for Euclidean geometry. *Amer. Math. Monthly* **96**(1): 43–49, 1989.
- [7] Leonard Mlodinow. *Euclid's window. The story of geometry from parallel lines to hyperspace*. Free Press, New York, 2001.
- [8] Roger Penrose. *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. Alfred A. Knopf, Inc., New York, 2005.
- [9] Daina Taimiņa. *Crocheting adventures with hyperbolic planes*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2009.

Kuvat

Kuvat 1 ja 8 ©Riikka Schroderus (virkkaus on tehty kirjan [9] ohjeella).

Kuvat 2, 3, 4, 5, 6 ja 7 on piirretty Geogebraalla (ohjelmisto on ladattavissa osoitteessa <http://www.geogebra.org>).



Solmun matematiikkadiplomit

Marjatta Näätänen

Eri puolille Suomea levinneiden matematiikkadiplomien tehtävät ovat osoitteessa

matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html

Tehtäviä on 9 tasoa. Alimmat ovat koulun alkuun, ylimmissä riittää pohtimista lukiolaisillekin. Opetta-

jien kiittävän palautteen mukaan oppilaat, sekä tytöt että pojat, laskevat innoissaan tehtäviä. Erityisesti on kiitetty sitä, että mukana on myös haastavia tehtäviä ja että tehtävät ovat monipuolisia. Esimerkiksi tason VIII ensimmäinen tehtävä käsittelee tarkemmin Suomen Pisa-menestystä. Opettajille lähetetään pyynnöstä vastaukset.



Lukujen motivoinnista Hilbertin hotelliin

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Åbo Akademi

Steven Strogatz *Ihana X*. Art House, 2014, 328 s.

Kirjan tavoitteena on selittää matematiikkaa yleisjaisesti, sekä selittää lukuisia matematiikan sovelluskohteita. Kirjan kirjoittaja Steven Strogatz on Cornellin yliopiston professori. Hän on kirjoittanut kolumneja matematiikasta The New York Times -lehteen, ja osa kirjan teksteistä on juurikin näitä kolumneja. Kirjan kieli on sujuvaa, miellyttävää ja nopealukuista.

Kirjan lukeminen ei vaadi minkäänsorttisia matemaattisia esitietoja. Kirja lähtee liikkeelle siitä, että perustellaan lukujen mielekkyys (on helpompi sanoa ”kuusi kalaa” kuin ”kala kala kala kala kala kala”), ja tämän jälkeen kerrotaan, mitä iloa on yhteenlaskusta. Vaikka kirjan alku onkin hyvin alkeista lähtevä ja hyvin verkainen, uskon, että paikoin kirjan lukeminen ja todella ymmärtäminen vaatii matemaattista ajattelua, vaikkakaan ei konkreettisia matemaattisia pohjatietoja. Toisaalta, luultavasti omalla koulutuksellani luen kirjaa erilailla kuin sitä olisin lukenut vaikka 20 vuotta sitten, ja ehkä jään enemmän pohtimaan yksittäisten virkkeiden merkitystä kuin olisi tarkoitus.

Tavoite, ettei mitään matemaattisia esitietoja vaadita, on hyvin kunnianhimoinen. Sanoisin, että Strogatz onnistuu tässä tavoitteessa hyvin. Tästä syystä kirja sopii mainiosti ihan kenelle tahansa luettavaksi (eli ennen kaikkea tyrkättäväksi niille ihmisille, jotka ihmet-

televät, että mitä siellä yliopistolla oikein tehdään, mitä hyötyä tästä matematiikasta ikinä on, ja liittykö se oikeasti edes yhtään mihinkään, kuten myös niille, jotka kovasti haluaisivat nähdä edes hiukan matematiikan kauneutta, mutta se on hankalaa, koska koulut ovat muinoin jääneet kesken). Toisaalta tällä tavoitteella on hinta: jos matematiikan perustiedot ovat hallussa, on paikoin hieman turhauttavaa lukea kovin yksinkertaistavaa selitystä omasta mielestään perusasioista. Selitykset ovat lyhyitä, joten niiden takia ei kirjaa kannata jättää lukematta.

Itselleni kirjan parasta antia olivat kuvaukset erilaisista sovelluksista. Sovelluksia on käyty läpi valtavan laajasti, ja joukkoon on ujutettu myös paloja matematiikan historiaa. Osa sovelluksista on todennäköisesti kirjoitettu vähemmän tosissaan (ensimmäiseksi ei ainakaan minulla tulisi mieleen pohtia ryhmäteorian sovelluksena patjan kääntämistä), mutta näiden omituisempien sovellusten ansio on niiden kyky havainnollistaa matematiikkaa. Todellinen sovellus on hyödyllinen, muttei aina niin havainnollistava maallikolle.

Kaiken kaikkiaan kirja on vetävästi kirjoitettuyleis-tajuinen esitys matematiikasta, jota lukiessa ei todellakaan ole tylsää. Kirja soveltuu paitsi harrastelijoille (tai aloittelijoille), myös matemaattisen yleissivistyksen, esimerkkien ja opetusideoiden hankintaan ammatilaisellekin.