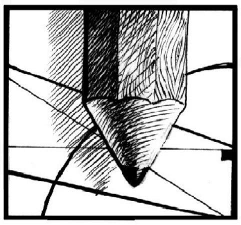
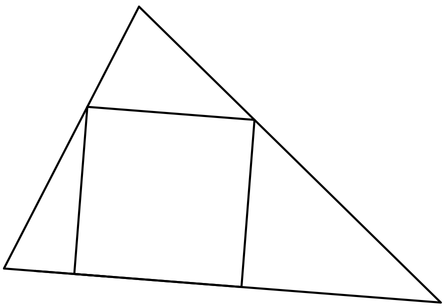


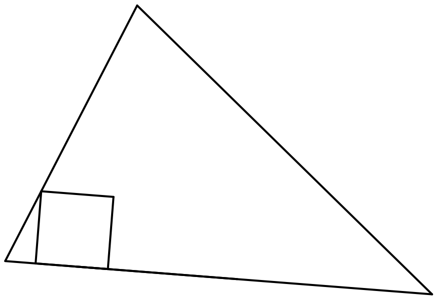
Homotetia eli venytyskuvaus geometrisissa konstruktioissa

Jani Hannula
lehtori, Metropolia Ammattikorkeakoulu
tohtorikoulutettava, Helsingin yliopisto

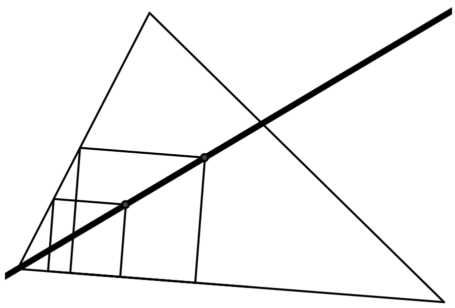
Tarkastellaan seuraavaa geometrista konstruktio-ongelmaa: annetun teräväkulmaisen kolmion sisään on konstruoitava (kuvan mukaisesti) sellainen neliö, jonka kaksi kärkeä ovat kolmion yhdellä sivulla ja kaksi muuta kärkeä ovat kolmion muilla sivuilla.



Tämä mielenkiintoinen ongelma on esitetty mm. George Pólyan ongelmanratkaisun klassikkoteoksessa [2] sekä Kalle Väisälän geometrian oppikirjassa [3]. Kuten moni muukin matemaattinen ongelma, myös esitetty lähtee aukeamaan, mikäli miettii aluksi helpompaa ongelmaa. On ainakin helppoa konstruoida neliö, jonka kaksi kärkeä ovat kolmion yhdellä sivulla ja toinen muista kärjistä on kolmion jommalla kummalla muulla sivulla.



Nyt tehtävänä on oikeastaan vain löytää tällaisten neliöiden joukosta sopivan kokoinen yksilö. Mikäli kolmioita piirtää muutaman kappaleen, saattaa huomata, että ne neliöiden kärjet, jotka jäävät kolmion sisäpuolelle (tai ulkopuolelle) asettuvat samalle suoralle, joka kulkee vieläpä ”sattumalta” kolmion erään kärjen kautta.



Kun tämän huomaa, tehtävä on ratkaistu: voidaan konstruoida neliö, jonka neljäs kärki on saadun suoran ja kolmion kolmannen sivun leikkauspisteessä. Herää kuitenkin kysymyksiä. Mistä tiedämme, että neliöiden kärjet ovat oikeasti samalla suoralla? Ja kääntäen: mistä tiedämme, että viimeisessä vaiheessa konstruoimamme neliö asettuu vaaditulla tavalla (tai konstruoitu nelikulmio on neliö)? Vastaus piilee yhdenmuotoisissa kolmioissa. Se, mitä ratkaisussa voidaan oikeastaan katsoa tapahtuneen, on, että pienempää neliötä *venytettiin* suuremmaksi. Tällaista geometrista kuvausta kutsutaan homotetiaksi.

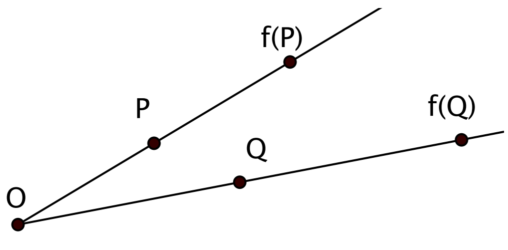
Homotetia

Geometrisia kuvauksia voidaan luokitella sen mukaan, minkälaisia ominaisuuksia kuvauksessa säilyy. Esimerkiksi peilaus on yhtenäisyyskuvaus, jossa esimerkiksi kolmiot kuvautuvat alkuperäisen kolmion kanssa yhteneviksi kolmioiksi. Homotetia sen sijaan kuvaa esimerkiksi kolmiot yhdenmuotoisiksi kolmioiksi eli se on yhdenmuotoisuuskuvaus. Homotetia voidaan määritellä Lehtisen [1] tapaan seuraavasti:

Määritelmä: Olkoon O kiinteä tason piste, P tason piste ja k jana-aritmetiikan alkio (esimerkiksi $\mathbb{R}^2$:ssa reaaliluku). Määritellään tason pisteille kuvaus f ehdoilla:

1. Jos $P = O$, niin $f(P) = P$.
2. Jos $P \neq O$, niin $f(P)$ on se puolisuoran $\overrightarrow{OP}$ piste, jolle pätee
$$\frac{Of(P)}{OP} = k.$$

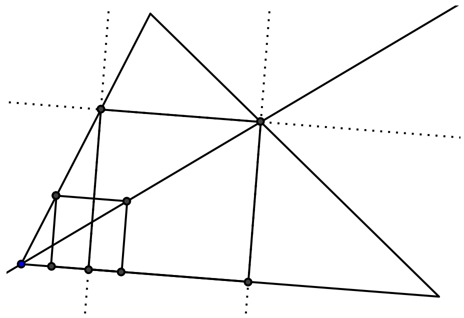
Pistettä O kutsutaan homotetiakeskukseksi ja suhdetta k homotetiasuhteeksi (tai -kertoimeksi). Kuvassa pisteet P ja Q on kuvattu homotetialla f, jossa homotetiakeskuksena on piste O ja homotetiasuhde on 2.



Homotetian idea on siis varsin yksinkertainen, ja onkin kohtuullisen vaivatonta osoittaa, että homotetia on yhdenmuotoisuuskuvaus, joka kuvaa mm. kolmiot yhdenmuotoisiksi kolmioiksi. Homotetian avulla voidaan siis usein ratkaista sellaisia konstruktio-ongelmia, joissa jotakin ”apukuviota” on vain skaalattava sopivan kokoiseksi.

Homotetian käyttöä

Palataan vielä alussa esitettyyn konstruktio-ongelmaan. Ajatellaan kolmion kärkeä homotetiakeskuksena ja pienemmän neliön kärkiä homotetiassa kuvattavina pisteinä.



Nyt pitäisi näyttää siltä, että ratkaisun oikeellisuuteen liittyviin kiusallisiin kysymyksiin on mahdollista vastata. Toisaalta, olisiko seuraaviin konstruktiotehtäviin nyt mukavat eväät?

1. Kolmion sisään on piirrettävä kolmio, jonka sivut ovat kolmen annetun suoran suuntaiset.
2. Ympyrän sektorin sisään on piirrettävä ympyrä.

Lisää konstruktio-ongelmia, joissa homotetiasta on iloa, löytyy Väisälän Geometriasta [3, s. 135].

Lopuksi

Tässä homotetiaa ja geometristen kuvauksien ideaa käsiteltiin pintaraapaisun omaisesti. Tarkemmin geometrisiin kuvauksiin ja niiden ominaisuuksiin voi syventyä esimerkiksi Matti Lehtisen geometrian materiaalin [1] avulla, jossa käsitellään yksityiskohtaisesti yhtenevyyskuvauksia, yhdenmuotoisuuskuvauksia ja inversiota ympyrän suhteen. Kiitän professori Juha Oikkosta lukuisista geometrisista rupatteluista erityisesti keväällä 2012!

Viitteet

[1] Lehtinen, M. Geometrian perusteita `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria2011.pdf` Luettu 31.8.2015

[2] Pólya, G. Ratkaisemisen taito: kuinka lähestyä matemaattisia ongelmia.

[3] Väisälä, K. Geometria `http://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria.pdf` Luettu 31.8.2015