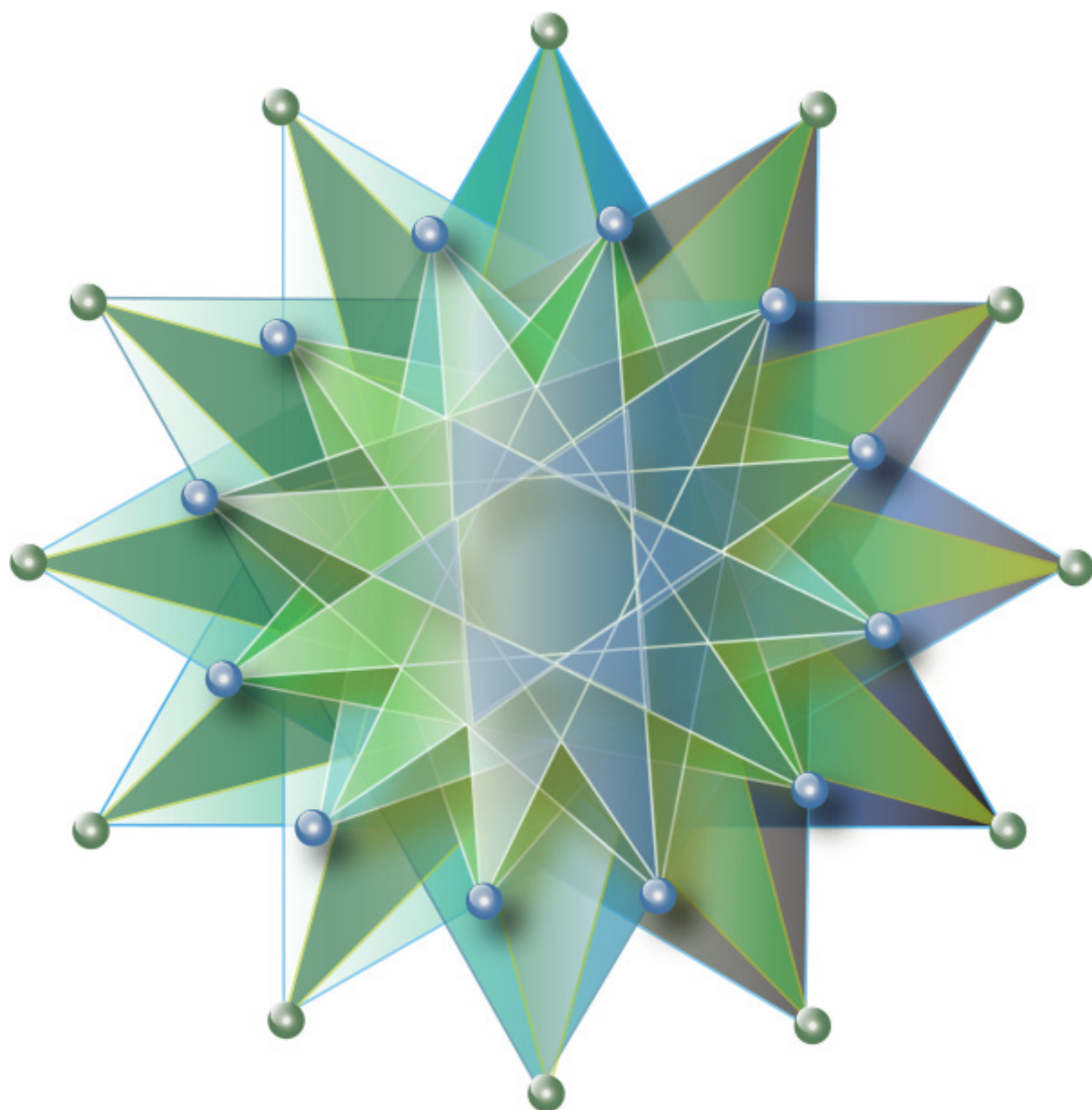


# Solmu

Matematiikkalehti  
2/2015

[matematiikkalehtisolmu.fi](http://matematiikkalehtisolmu.fi)



## Solmu 2/2015

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

*matematiikkalehtisolmu.fi*

Päätoimittaja:

*Anne-Maria Ernvall-Hytönen*, tutkija, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

*Juha Ruokolainen*, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

*toimitus@matematiikkalehtisolmu.fi*

Toimittajat:

*Pekka Alestalo*, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

*Sirkka-Liisa Eriksson*, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

*Aapo Halko*, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

*Camilla Hollanti*, apulaisprofessori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

*Marjatta Näätänen*, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

*Heikki Pokela*, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

*Antti Rasila*, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

*Mikko Sillanpää*, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

*Samuli Siltanen*, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

*Kimmo Vehkalahti*, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

*Esa Vesalainen*, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

*Heikki Apiola*, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

*Mika Koskenoja*, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

*Liisa Näveri*, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

*Marjaana McBreen*

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

*Ari Koistinen*, FM, ari.koistinen@metropolia.fi, Metropolia Ammattikorkeakoulu

*Juha Lehtbäck*, tutkijatohtori, juha.lehtback@jyu.fi, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

*Jorma K. Mattila*, professori, jorma.mattila@lut.fi, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

*Jorma Merikoski*, emeritusprofessori, jorma.merikoski@uta.fi, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

*Matti Nuortio*, tutkijatohtori, matti.nuortio@oulu.fi, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

*Petri Rosendahl*, assistentti, petri.rosendahl@utu.fi, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

*Antti Viholainen*, tutkijatohtori, antti.viholainen@uef.fi, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

Matematiikan opetus on nyt Suomessa suurten muutosten kohteena. Solmun toimitus haluaa tukea laajaa keskustelua aiheesta, jotta eri näkökohdat tuodaan esille. Julkaistavat kirjoitukset eivät ole toimituskunnan, vaan kirjoittajien kannanottoja.

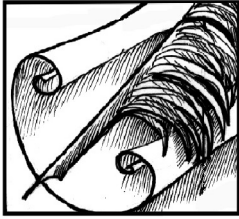
Numeroon 3/2015 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 31.8.2015 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

**Huom!** Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

## Sisällys

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Pääkirjoitus: Voisiko ruotsalaisten virheistä oppia? (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) .....            | 4  |
| Kirja-arvio: Algebraa sarjakuvana (Tarja Shakespeare) .....                                        | 5  |
| Rupattelua derivaatasta (Jorma Merikoski) .....                                                    | 7  |
| Koodausta kouluun, miksi siitä kannattaa iloita? (Vuokko Kangas) .....                             | 10 |
| Ohjelmointi osana opetusta (Minna Kukkonen ja Kati Sormunen) .....                                 | 12 |
| Peruskoulun ohjelmointiopetus (Juha Taina) .....                                                   | 14 |
| Turmeleeko ohjelmointi nuorisomme? (Antti Laaksonen) .....                                         | 16 |
| Neperin luvun kahdet kasvot (Pekka Alestalo) .....                                                 | 21 |
| Mihin ruutuja tarvitaan? (Kalle Nahkala) .....                                                     | 24 |
| Kirja-arvio: Pólyan klassikko suomeksi (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) .....                          | 26 |
| Arvioita karakterisummille: Pólya-Vinogradovin epäyhtälö ja sen parannuksia (Jesse Jääsaari) ..... | 28 |
| Osittaissummauksella ikävien summien kimppuun (Anne-Maria Ernvall-Hytönen) .....                   | 34 |
| Matematiikan verkkosanakirja (Juha Ruokolainen) .....                                              | 38 |



## Voisiko ruotsalaisten virheistä oppia?

### Pääkirjoitus

Noin vuosi sitten tutkijat Christian Bennet ja Madeleine Löwing kirjoittivat perusteellisen ja pitkän artikkelin Dagens Nyheterin yleisönosastolle. Tekstin otsikko oli *Gymnasister har svårt klara matematik för mellanstadiet*, eli lukiolaisilla on ongelmia 4.–6. luokan matematiikassa. Otsikosta onkin revitty paljon keskustelua, varsinkin kun Expressen samoihin aikoihin julkaisi testitehtävien listan, eli ne tehtävät, joiden osaamista Bennet ja Löwing olivat mitanneet. Kyllähän se pahalta näytti: esimerkiksi 38 prosenttia oppilaista ei ollut osannut laskea  $7 \cdot 8 + 5$ .

Tämä ei kuitenkaan mielestäni ole tekstin mielenkiintoisin asia, eikä siitä varsinkaan saa hedelmällistä keskustelua, vaan lähinnä kauhistelua. Paljon mielenkiintoisempaa pidänkin kirjoittajien esittämää kokoaiskuvaa Ruotsin matematiikan osaamisen kehityksestä ja satsauksista. Niistä nimittäin voisi oppia jotain.

1980-luvun loppupuolelta alkaen on matematiikan opetukseen laitettu lisää ja lisää rahaa. Vuodesta 1995 lähtien on sekä TIMSS- että PISA-tutkimuksessa ruotsalaisten tulos tippunut. Vuonna 2012 oli Ruotsin tulos PISA-tutkimuksen matematiikan osiossa merkittävästi OECD-maiden keskiarvon alla. Vertailun vuoksi: Suomen tulos PISA-tutkimuksessa on tippunut, mutta Suomi pärjää yhä kansainvälisesti erittäin hyvin. TIMSS-tutkimuksessa vuonna 2012 kahdeksaluokkalaisten suomalaisten matematiikan osaaminen oli Euroopan kärkeä (keskiarvoin mitaten), <http://ktl.jyu.fi/img/portal/23455/d106.pdf>.

Bennet ja Löwing lisäksi kirjoittavat, että oppilaiden matematiikan osaamisen kannalta ainoat oikeasti merkitsevät asiat ovat opettajan tiedot matematiikassa, opettajan opetustaito sekä realistiset odotukset. Esimerkiksi luokkakooalla tai arvostelulla on vain marginaalinen vaikutus. Lisätunneillakin on merkitystä vain silloin, kun ne käytetään järkevästi (tämä on sinänsä

loogista – sääli, etteivät kirjoittajat kertoneet esimerkkejä huonosta ja hyvästä käytöstä ylimääräisille oppitunneille).

Ruotsissa rahaa on käytetty vuosien saatossa paljon esimerkiksi opettajien täydennyskoulutukseen. Lisäksi on perustettu kansallinen keskus matematiikan opetukselle. On kuitenkin unohdettu tarkastella oppilaiden perusvalmiuksia, ja keskitytty pitkälti siihen, miten matematiikkaa opetetaan. Toki on tärkeää huomioida, miten opetetaan, mutta jos opetus on esimerkiksi aivan väärän tasoista, ei opetustaito paljon pelasta.

Näin taloudellisesti tiukkoina aikoina on toki tavallaan mukavaa kuulla, että raha ei tuo onnea. Tämä on kuitenkin ehkä väärä johtopäätös. Ongelma lienee se, että rahaa on käytetty väärin. Täydennyskoulutus on varmasti hyvää, mutta vain, jos perusta on kunnossa. Voisi olla järkevää käyttää rahaa aineenopettajien ja luokanopettajien koulutukseen, jolloin varmistettaisiin, että kaikkien tulevien opettajien matematiikan perustiedot ovat kunnossa. Järkevää voisi myös olla lisätä keskustelua eri koulutusasteiden välillä, jotta opettajat aina uuden koululuokan käsiinsä saadessaan tietäisivät, mitä oppilaat osaavat ja mitä eivät. Jos rahaa olisi, opettajien palkkaakin voisi nostaa, sillä opettajat tekevät tärkeää työtä. Ihminen, joka kokee, että hänen työtään arvostetaan, tekee myös usein parempaa työtä, ja on innostuneempi kehittymään entisestään.

Kolikolla on myös toinen puoli. Ennen kuin ryhdymme liian ylpeiksi ihmeteltyämme, miten ruotsalaiset ovat hukanneet läjän rahaa ja heikentäneet matematiikan osaamistaan, on syytä muistaa, että ruotsalaiset voittavat tätä nykyä ihan kirkkaasti suomalaiset kansainvälisissä matematiikkakilpailuissa. Vielä kun tietäisi, mitä siitä taas pitäisi oppia.

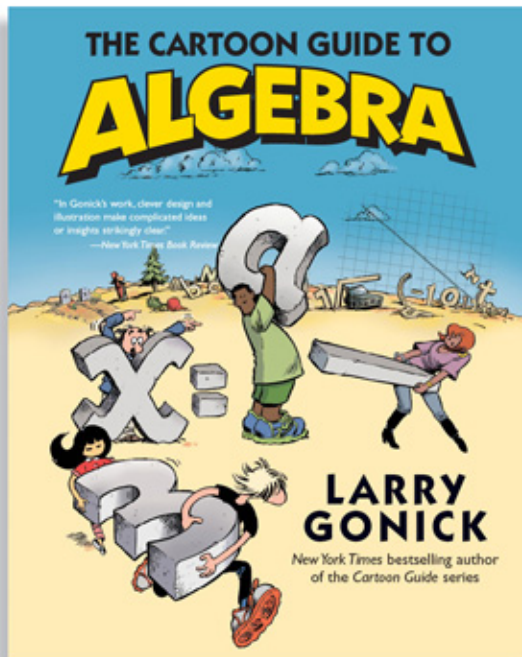
Anne-Maria Ernvall-Hytönen



## Algebraa sarjakuvana

*Tarja Shakespeare*

**Larry Gonick: The Cartoon Guide to Algebra**, HarperCollins Publishers, 2015, 233 sivua. Hinta Adlibris-verkkokirjakaupassa 14,10 euroa. Kirja on englanninkielinen.



Piirtäjä Larry Gonick on Harvardista valmistunut matemaatikko. Jo opiskeluaikana sarjakuva kiehtoi häntä perinteisten oppikirjojen ollessa hänen mielestään tyl-

siä. Hän on piirtänyt yli neljäkymmenen vuoden ajan humoristisia historian ja luonnontieteiden tietokirjoja.

Algebra-kirja jatkaa Gonickin persoonallista kerrontatyyliä. Kirjan päähenkilönä ja tutorina on piirtäjä Larry Gonick nuhruisessa pikkutakissaan. Muita hahmoja ovat Celia, pojat Jesse ja Kevin sekä Momo-tyttö. Sivuille on päässyt seikkailemaan myös René Descartes, Pythagoras, Al-Khwarizmi, karvainen nimittäjä ja muuttuja  $x$ .

Lukujen lopussa on harjoitustehtäviä ja kirjan lopussa on ratkaisut valittuihin tehtäviin.

Kirja alkaa räväkästi  $12 \times 12$  -kertolaskutaululla, jonka jälkeen pohditaan aritmetiikan ja algebran eroavaisuutta. Ala-asteella opiskeltava aritmetiikka on yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella olevien numeroiden yhdistelemistä, jotta saadaan vastaus tuntemattomaan kysymykseen yhtäsuuruusmerkin oikealle puolelle. Algebrassa tuntematon vastaus voi olla missä kohdalla yhtälöä tahansa, siis myös vasemmalla puolella. Algebrassa yhtälöä pitää myöhentää sovittujen sääntöjen mukaan, jotta tuntematon  $x$  saadaan yhtäsuuruusmerkin vasemmalle puolelle ja aritmetiikkaosuus oikealle puolelle.

Aritmetiikan perusteet käydään läpi huolellisesti valituilla pilke silmäkulmassa -esimerkeillä. Jesse toteaa jalan mittaamisongelmaan, että jalkaterän amputaatio on varmasti kivuliaampi kuin murtoluvut. Yhteen- ja vähennyslasku havainnollistetaan vektorien avulla ja kertolasku Celian vedonlyöntiharrastuksella.

Lausekkeisiin ja muuttujiin päästään kiinni vertaamalla yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua kuin jos heikoille luvuille tehtäisiin leikkausoperaatio. Tämän taita kirjahyllyn rakentamiseen tarvitaan ensin kirurgi, jotta laskujärjestysäännöt saadaan selville. Peruslaskulait liitännäisyys, vaihdannaisuus sekä osittelulaki perustellaan.

Algebran keksijä Al-Khwarizmi (780–850) esittelee kehittämänsä varsivaakateorian, jonka jälkeen itse mestari valepuvussa, muuttuja  $x$ , astuu peliin. Yhtälön ratkaisun vaiheet käydään läpi. Tosielämän ongelmissa ratkotaan kirjahyllyyn tarvittava materiaaimitrimäärä, Momon ja Celian tuntipalkat, Celian ja Jessen verkkosivun tekemispalkkion jakaminen eri tavoin ja rakennuttajan kuoleman aiheuttama saatava rakentajalle.

Celian ostosmatka Naula- & Kynsisalonkiin vie lukijan yhtälöparien ratkaisumailmaan. Gonick esittelee kolme eri ratkaisumenetelmää.

René Descartes pussihousuineen ja peruukkeineen 1600-luvulla halusi piirtää yhtälöt graafisesti ja kehitti suorakulmaisen koordinaatiston. Kevin kiipeää rinnettä tutustuen positiiviseen kulmakertoimeen, kun Jesse laskettelee skeittilaudalla mäkeä negatiivisen kulmakertoimen antaessa vauhtia. Muiden on oltava varuillaan, kun Gonick pyörittelee suoria ja suoran yhtälöitä kuin keppejä ilmassa.

Mono ja Celia vievät lukijan eksponenttien maailmaan, jossa potenssit ja niiden laskusäännöt tulevat tutuiksi.

Laskutoimitukset rationaalilausekkeilla -luvussa tavaataan karvainen ja kalju nimittäjä. Nimittäjien pienintä yhteistä jaettavaa harjoitellaan muuttajan  $x$  sisältyessä nimittäjään.

Verrannon kuvaamisessa ahnaat hyönteiset ovat oiva apuväline. Ne syövät kakunpalan hetkessä. Verrannonkin voi kuvata ajan funktiona, jolloin suoran yhtälön voi piirtää suorakulmaiseen koordinaatistoon. Vauhti ja nopeus tulevat tutuiksi ranskalaisessa pankkiryöstöesimerkissä.

Keskiarvoon pureudutaan ositetun sähkölaskun muodossa. Rakennuksessa asuva asukas päätti maksaa kus-

takin sähkölaskusta 22 % joka kuukausi, vaikka talvella kulutus on suurempi. Mikä ero on painotetulla keskiarvolla?

Pythagoras ja ballistinen lentorata johdattavat lukijan toisen asteen yhtälöihin ja niiden sieventämiseen. Yhtälön juuret ovat kuin kasvin juuret. Ne ovat hyvä aasinsilta peruslaskutoimituksiin neliöjuurilla.

Toisen asteen yhtälö ratkaistaan ensin babylonialaisella ja sitten modernilla algebrallisella tavalla. Tutustutaan yhtälön neliöksi täydentämisen menetelmään. Ja lopuksi Pascalin kolmio on kuin joulukuusi, joka on täynnä makeisia, kunhan vain oppii löytämään ne.

Onnistuuko algebran oppikirjan tekeminen sarjakuvena? Kyllä.

Gonick on onnistunut tasapainottelemaan pienten, mieltävirkeistävien yksityiskohtaisten piirteiden kanssa ja varsinaisen algebran laskusääntöteorian kanssa hyvin. Kirjan tunnistaa matematiikan algebran oppikirjaksi. Yhtälön juurista puhuttaessa piirroksissa kasvien lehdissä on kuvattu yhtälön termit ja kasvien juurissa on yhtälön juuret. Tasapainotehtävissä leikitään leikkikentän keinulaudalla. Gonick on pyrkinyt avaamaan käsitteiden konkreettisuuden kuvien kautta lukijalle. Visuaaliselle oppijalle tästä on paljon hyötyä, koska muistijälkiä jää paljon.

Kenelle kirja on tarkoitettu? Tämä on yläastelaiselle oiva algebran oppikirja muuttujan  $x$  maailmaan. Kirja saa suupielen virneeseen toistuvasti. Kirjaa voi käyttää myös matematiikan valinnaisaineessa tai ammatillisten opintojen matematiikan opiskelun tukena. Niin ja kirjassa on vain ja ainoastaan yksi pizzapiirros muistuttamassa koulukirjojen murtolukuopeista.

Jos sarjakuvamaailma oppikirjana kiehtoo sinua, niin Larry Gonickin kirjat *The Cartoon Guide to Chemistry*, *Physics* ja *Statistics* ovat lukion ja yliopiston peruskurssin tasoa. *The Cartoon Guide to Calculus* -kirjan ensimmäisten painosten errata ja harjoitustehtävien vastaukset löytyvät osoitteesta <http://www.larrygonick.com/titles/science/cartoon-guide-to-calculus-2/>

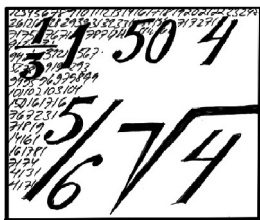
## Verkko-Solmu on muuttanut

Verkko-Solmun uusi osoite on

`matematiikkalehtisolmu.fi`

Toimituksen uusi osoite on

`toimitus(at)matematiikkalehtisolmu.fi`



## Rupattelua derivaatasta

**Jorma Merikoski**

Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto  
jorma.merikoski@uta.fi

### Johdanto

Derivaatta ilmestyi vuonna 1941 lukion pitkän matematiikan oppiennätyksiin (kuten silloin sanottiin), mutta funktion suurin ja pienin arvo voitiin yksinkertaisissa tapauksissa määrittää jo sitä ennen. Silloin käytettiin lehtori K:n [2, 3] kuvaamaa menetelmää, joka mielestäni ansaitsee laajemmankin käsittelyn. Tämä on ensimmäinen aiheeni.

Toinen aihe ei liity ensimmäiseen, mutta tällaisessa rupattelussa voi vapaasti assosoida. Ilman kuljettajaa kulkevaa autoa ollaan kehittämässä [5], mutta mustapartainen mies on jo tehnyt ekologisesti paremman keksinnön: ilman autoa kulkevan kuljettajan [4, s. 13]. Ääriarvo ilman derivaattaa sai puolestaan ”harmaapartaisen miehen” pohtimaan derivaattaa ilman mitä? Derivaatan määritelmässä ei tietenkään tarvita ääriarvon käsitettä, mutta entä derivaatta ilman *raja-arvoa*? Seläistä derivaattaa ei ole lukiomatematiikassa, mutta derivaatan käsite, kuten matematiikka yleensäkin, on paljon laajempi ja monimuotoisempi kuin miltä lukiossa näyttää.

### Suurin ja pienin arvo ilman derivaattaa

Yhden reaaliuuttujan reaali funktion  $f$  suurin ja pienin arvo voidaan joskus määrittää seuraavalla tempulla. Muodostetaan  $y$ :tä koskeva välttämätön ja riittävä

ehto sille, että yhtälöllä  $y = f(x)$  on (reaalinen) ratkaisu  $x$ . Jos tämä ehto saadaan sellaiseen muotoon, että  $y$  kuuluu tiettyyn väliin tai tiettyjen välien yhdisteeseen, niin saadaan itse asiassa  $f$ :n koko arvojoukko.

Väisälä [7] sanoo esipuheessa, että tämä ”alkeellinen keino” voidaan sivuuttaa, jos tietyt derivaattaa koskevat asiat käsitellään. Kun ne lisättiin oppiennätyksiin vuonna 1960, se jäi pois kirjan uudistetusta versiosta.

Tarkastelemme esimerkkinä funktiota

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$$

[7, s. 23, esim. 2]. Tutkimme siis, millä  $y$ :n arvoilla yhtälöllä  $y = f(x)$  eli yhtälöllä

$$yx^2 - 6x + 4y = 0 \quad (1)$$

on ratkaisu  $x$ .

Tapauksessa  $y = 0$  ratkaisu on  $x = 0$ . Tapauksessa  $y \neq 0$  ratkaisu on olemassa, jos ja vain jos diskriminantti  $36 - 16y^2 \geq 0$ , mikä toteutuu, jos ja vain jos  $-\frac{3}{2} \leq y < 0$  tai  $0 < y \leq \frac{3}{2}$ . Siis kaikkiaan  $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ . Tämä on  $f$ :n arvojoukko, joten  $y = \frac{3}{2}$  on  $f$ :n suurin arvo ja  $y = -\frac{3}{2}$  pienin. Sijoittamalla ne yhtälöön (1) saamme maksimikohdaksi  $x = 2$  ja minimikohdaksi  $x = -2$ .

(Väisälä kirjoittaa huolellisesti ja pedagogisella taidolla, mutta en malta olla huomauttamatta, että häneltä

on tässä esimerkissä jäänyt pois tapauksen  $y = 0$  vaatima erityistarkastelu. Hän siis käsittelee pelkkää diskriminanttiehtoa, mikä kylläkin antaa oikean vastauksen.)

Alkeellisen menetelmän käyttökelpoisuus taitaa rajoittua enimmäkseen sellaisiin tapauksiin, joissa yhtälö  $y = f(x)$  on yhtäpitävä erään toisen asteen yhtälön kanssa.

Toisena esimerkkinä tarkastelemme yleistä toisen asteen polynomia

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

missä  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ja  $a > 0$ . Yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = y \quad (2)$$

on ratkaisu, jos ja vain jos diskriminantti  $b^2 - 4a(c - y) \geq 0$ . Koska  $a > 0$ , tämä pätee, jos ja vain jos

$$y \geq c - \frac{b^2}{4a}.$$

Siis  $f$ :n arvojoukko on  $[c - \frac{b^2}{4a}, \infty[$ , joten suurinta arvoa ei ole ja pienin arvo  $y = c - \frac{b^2}{4a}$ . Kun sijoitamme tämän arvon yhtälöön (2), saamme minimikohdaksi  $x = -\frac{b}{2a}$ . Paraabelin (2) huipun koordinaatit voidaan siis määrittää näinkin.

## Derivaatta ilman raja-arvoa

Tarkastelemme (reaalikertoimista) polynomia

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Sijoitamme  $x$ :n paikalle  $(x+h)$ :n ja kehitämme saadun lausekkeen  $h$ :n polynomiksi. Määrittelemme [6, s. 151–152], että  $p(x)$ :n derivaatta  $p'(x)$  on  $h$ :n kerroin tässä polynomissa. Siis

$$p(x+h) = p(x) + p'(x)h + h:n \text{ korkeampien potenssien termit.}$$

Helppo lasku osoittaa, että

$$p'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}, \quad (3)$$

joten määritelmä on yhtäpitävä polynomin derivaatan tavanomaisen määritelmän kanssa, ja tavanomaiset derivoimissäännöt ovat voimassa. Jos siis  $p$  ja  $q$  ovat polynomeja ja  $c$  on vakio, niin

- (i)  $(p+q)' = p' + q'$ ,
- (ii)  $(cp)' = cp'$ ,
- (iii)  $(pq)' = p'q + pq'$ .

Itse asiassa voimme määritellä polynomin derivaatan suoraan lausekkeella (3), jolloin sijoitustempua ei tarvita.

Tämä pyörittely olisi nollatutkimusta, ellei selvitetäisi, miksi derivaatta kannattaa määritellä näin. Tavanomaisen määritelmän motivaatioita on yllin kyllin: tangentti, nopeus, ääriarvot ym. Kun niihin ei nyt päästä käsiksi, mikä on tämän määritelmän motivaatio?

Väisälä vastaa [6, s. 151]: ”Tarkoituksena on näyttää, että algebrassa selviydytään ilman raja-arvo-käsitettä, kun on kysymys polynomin derivaatasta”. Kun polynomeja tutkitaan, derivaattaa tarvitaan mm. nollakohdan kertaluvun yhteydessä. Kun polynomeja tutkitaan algebrallisesti, ei käytetä analyyttisiä menetelmiä, jolloin derivaatta kannattaa määritellä kuten edellä. Lisäksi tämä määritelmä toimii silloinkin, kun polynomit eivät ole reaalikertoimisia vaan niiden kertoimet ovat mielivaltaisessa renkaassa.

Entä jos yritämme määritellä polynomin derivaatan aksiomaattisesti ottamalla aksiomiksi säännöt (i)–(iii) ja tarvittaessa lisää? Katsomme parilla esimerkillä, mitä voidaan todistaa näiden aksiomien perusteella ja mitä ei voida. Merkitsemme  $e_n$ :llä peruspolynomia  $e_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Siis  $e_0(x) = 1$  (polynomi, joka on identtisesti 1) ja  $e_1(x) = x$ .

Aksiomasta (iii) seuraa, että  $e'_0 = 0$  (nollapolynomi). Nimittäin sijoittamalla  $p = e_1$ ,  $q = e_0$ , jolloin  $pq = e_1$ , saamme

$$e'_1 = e'_1e_0 + e_1e'_0 = e'_1 + e_1e'_0.$$

Siis  $e_1e'_0 = 0$  ja edelleen  $e'_0 = 0$ .

Todistaaksemme, että jokaisen vakiopolynomin  $p(x) = c$  derivaatta on nollapolynomi, tarvitsemme myös aksiomaa (ii), josta seuraa

$$(pe_1)' = (ce_1)' = ce'_1.$$

Toisaalta aksioman (iii) mukaan

$$(pe_1)' = p'e_1 + pe'_1 = p'e_1 + ce'_1.$$

Näin ollen  $p'e_1 = 0$  ja edelleen  $p' = 0$ .

Emme voi todistaa aksiomilla (i)–(iii), että  $e'_1 = e_0$  (eli  $x' = 1$ ). Lisäämme tämän aksiomaksi

$$(iv) \quad e'_1 = e_0.$$

Todistamme potenssin derivoimissäännön  $e'_n = ne_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (Jos  $n = 0$ , niin  $e_{n-1}$  ei ole polynomi.) Käytämme induktiota. Arvolla  $n = 1$  väite on juuri (iv). Jos väite pätee arvolla  $n$ , niin polynomille  $e_{n+1}(x) = xe_n(x)$  on aksiomien (iii) ja (iv) perusteella

$e'_{n+1}(x) = e_n(x) + xe'_n(x) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n$ , joten väite pätee arvolla  $n+1$ .



Voimme todistaa kaikki muutkin polynomin derivaatan ominaisuudet, sillä [1, s. 145] aksioomat (i)–(iv) määrittävät polynomin derivaatan täysin. Toisin sanoen, jos jokaista polynomia  $p$  vastaa sellainen polynomi  $p^\sim$ , että

$$(i) \quad (p + q)^\sim = p^\sim + q^\sim,$$

$$(ii) \quad (cp)^\sim = cp^\sim,$$

$$(iii) \quad (pq)^\sim = p^\sim q + pq^\sim,$$

$$(iv) \quad e_1^\sim = e_0,$$

niin  $p^\sim = p'$ .

Nimittäin potenssin derivoimissäännön perusteella myös  $e_n^\sim = ne_{n-1}$ , joten  $e_n^\sim = e_n'$  kaikilla  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Aksioomista (i) ja (ii) seuraa nyt, että kaikille muillekin polynomeille  $p$  on  $p' = p^\sim$ .

## Viitteet

- [1] P. M. Cohn, *Algebra, Volume I*, John Wiley, 1974.
- [2] Lehtori K., Laskutikulla silmään, *Solmu* 3/2013, 30.
- [3] Lehtori K., Vuoden 1934 ylioppilaskoetehtävä, *Solmu* 1/2015, 30.
- [4] Olli, *Mustapartainen mies herättää pahennusta*, Otava, 1975.
- [5] V. Vanhalakka, Auto, joka oppii, *Aamulehti* 73/2015, A4–A8.
- [6] K. Väisälä, *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Otava, 1950.
- [7] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II, pitempi kurssi*, 4. p., WSOY, 1956.

## Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta [matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html](http://matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html) löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näättänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

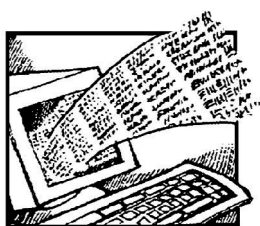
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



## Koodausta kouluun, miksi siitä kannattaa iloita?

**Vuokko Kangas**

Luokanlehtori, matematiikka, Oulun Normaalikoulu perusaste 0–6, Linnanmaa

Olen iloinen, että Linda Liukas sai lastenkulttuurin valtionpalkinnon. Hän on tehnyt niin paljon lasten ongelmanratkaisutaitojen kehittämisen hyväksi. ”Tiesittekö esimerkiksi, että maailman ensimmäisenä ohjelmoijana pidetään naista nimeltä Ada Lovelace? Hän oli 1800-luvun alussa eläneen runoilijan lordi Byronin ja tämän matemaattikovaimon tytär. Lovelace kirjoitti varhaisen mekaanisen tietokoneen kuvauksen. Linda Liukas on riemuissaan paitsi ensimmäisen ohjelmoijan sukupuolesta, myös tämän taiteellisista geeneistä. Ensimmäiset modernin ajan ohjelmoijat olivat hekin naisia. Toisen maailmansodan aikaan, kun miehet olivat rintamalla, naiset laskivat ammusten ballistisia kertoimia.” Näin kirjoittaa uusin Image-lehti Linda Liukkaan haastattelusta.

Olen myös kovin iloinen, että koodaus tuntuu innostaneen monia matematiikanopettajia, kuten esim. Tiina Partasta, joka jakaa Facebookin ja bloginsa kautta auliisti löytöjään myös muille. ([koodauksenabc.blogspot.fi](http://koodauksenabc.blogspot.fi))

Kaikkein iloisin olen kuitenkin siitä, että OPH on ottanut vihdoin koodauksen mukaan suunnitelmiinsa perusopetuksen opetussuunnitelmaluonnoksessaan. On pitkään valiteltu sitä, kuinka nykyinen systeemi johtaa vain pintaoppimiseen ja ulkoa opettelemiseen syvällisten ajattelun taitojen jäädessä taka-alalle. Kun matematiikassa yrittää ohjata oppilaita todistamaan ja johtamaan erilaisia asioita, saattaa tulla kommentti, että etkö sä vain voisi sanoa, mikä se vastaus on, niin ei tarttis ajatella. Hyvän aika, tehtävillähän halutaan saada lapset juuri ajattelemaan ja oppimaan, ei tehtä-

villä itsessään ole mitään arvoa!

Tulevaisuudessa tarvitaan moniosaaajia. Olen matemaatikko ja luokanopettaja, enkä mikään koodauksen asiantuntija. Koska olen opinnoissani ja työssäni tutustunut koodauksen saloihin ja nähnyt joidenkin oppilaideni ja omien lasteni kehittyvän ammatilaiskoodareiksi, uskallan rohkaista kaikkia muitakin innostumaan.

### Motivointia

Motivaatio on tärkein oppimista edistävä tekijä. Jos teini-ikäisille oppilaille esittää haastavan matemaattisen ongelman, saa melko varmasti kuulla kysymyksen, että missä näitä oikein tarvitaan. Vaikka olisi joka tunti muistuttanut syvällisten ajattelun taitojen tarpeellisuudesta ja käyttänyt kaikki mahdolliset motivointitaitonsa, eivät ihan kaikki kuitenkaan kiinnostu tai innostu. Jos sen sijaan oppilaat suorastaan ryntäävät ratkomaan ongelmia, näyttävät tuloksiaan toisilleen ja kyselevät toisiltaan ja joka puolelta kuuluu, että ”voitko opettaja tulla neuvomaan”, ei jää epäselväksi, oppiikohan tässä mitään. Tietokoneet, tabletit, pelit ja koodaus kiehtovat nykyajan lapsia. Koodaukseen ja pelillisyyteen liittyy sellainen uutuudenviehätys tai jokin muu oppilaita kiinnostava salaperäinen juttu, jota kannattaisi ehdottomasti hyödyntää. Lapset ja nuoret haluavat päästä peleissään yhä korkeammille ”leveille” ja kisailla leikkimielisesti. Näille tasoille pyrkiessään he ovat valmiita aloittamaan alusta, pohtimaan ja punnitsemaan ratkaisujaan yhä uudelleen ja uudelleen, kat-

somaan asioita toisesta näkökulmasta, pyytämään jopa opettajalta tai kavereilta lisävihjeitä!

## Tukea erityisoppilaille

Kerran, kun osallistuimme kuudesluokkalaisten kanssa koodaustuntiin ([learn.code.org](http://learn.code.org), [koodaustunti.fi](http://koodaustunti.fi)), eräs tehostetussa tuessa oleva oppilas tuli luokseni saatuaan tällaisen palautteen: ”Hienoa, olet osannut ratkaista tehtävän 11 loholla. Tämän tehtävän olisi kuitenkin voinut ratkaista käyttämällä vain seitsemää lohkoa. Haluatko jatkaa eteenpäin vai yrittää uudelleen?” Oppilaani oli jo kerran yrittänyt uudelleen, mutta ei halunnut luovuttaa. Kun oppilas oli jo valmiiksi pohtinut asiaa ja alkoi selittää ratkaisuehdotustaan minulle, hän yhtäkkiä huomasi itsensä, että hän voi lisätä yhden toistolauseen, ja voi sitä riemua, kun ohjelma toimi seitsemällä loholla!

## Mielekkyyttä oppimiseen

Yhteiskunnalla on kysyntää koodaustaidoille. Koodaajia voisi löytyä lisää, jos oppilaat edes tietäisivät, mitä se tarkoittaa. Kun koulun tietotekniikan tunneilla opiskellaan muotoilemaan hienoja Word-dokumentteja tai tekemään yksinkertaisia Excel-taulukoita, tämä oppiaine koetaan usein tylsäksi, ja lapset eivät opi ”Computational Thinking”-ia, joka on jotakin aivan muuta. Miten voimme löytää potentiaaliset koodaajat, jollei asiasta anneta edes makupaloja peruskoulussa? Juuri tällaista tutustumiskurssia ollaan nyt tuomassa peruskouluun, toivottavasti mahdollisimman monen oppiaineen sisältöihin. Koodaus ei oikeasti ole pois miltään muulta tärkeän asian oppimiselta, vaan se tuo iloa ja mielekkyyttä oppimiseen niin, että oppilaat voisivat esimerkiksi kehittää jakolaskualgoritmin itse sen sijaan, että he opettelevat sen ulkoa ymmärtämättä koskaan, mistä on kyse.

## Sopii kaikille

Yksi yleinen näkökulma on, että kaikista ei tarvitse tulla koodareita. Eikä toki tarvitsekaan. Muut saavat käsityksen siitä, miten erilaiset tietokoneohjelmat toimivat. Kun perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden luonnokset julkaisiin keväällä 2014, alkoi sekä opettajainhuoneissa että sosiaalisessa mediassa keskustelu. (Ohjelmoinnin osuus luonnoksista löytyy osoitteesta [www.opinsys.fi/ohjelmointi-ja-perusopetuksen-opetussuunnitelman-perusteet](http://www.opinsys.fi/ohjelmointi-ja-perusopetuksen-opetussuunnitelman-perusteet)) Suuri osa opettajista oli ohjelmointiin liittyvistä kohdista innoissaan, mutta paljon asia herätti myös hämmennystä. Pedagogit, jotka olivat tehneet koodauskokeiluja luokissaan, kertoivat onnistumisen kokemuksistaan ja siitä, kuinka koodaus lisää oppimisen iloa, ahaa-elämyksiä ja saa lapset kuin itsestään kehittämään loogisen ajattelun ja ongelmanratkaisun taitojaan. Koska jostain syystä

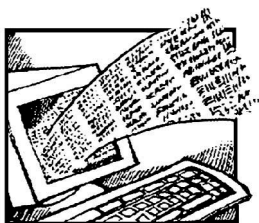
koodaus oli sisällytetty vain matematiikan ja käsitöiden oppisisältöihin, liittyi moneen keskusteluun pelko matematiikan oppimisen tason laskusta. ”Oikeaa” koodausta opettaneet ja harrastaneet ihmiset olivat sitä mieltä, että koodaus on oikeasti niin vaikeaa, että tällainen leikkikoodaus ja Scrabble tuhoavat lasten aivot. (Vähän samanlaista kiistaa on käyty esimerkiksi siitä, pitäisikö koulussa olla englantilais- vai saksalaisotteinen nokkahuilu.) Kuitenkin juuri tällainen leikkikoodaus on motivoivaa ongelmanratkaisua.

## Tulevaisuuden yhteiskuntaa varten

Joillakin foorumeilla puhutaan niin paljon koodauksesta, että luullaan koko OPS:n olevan vain sitä. Tulevaisuutta on vaikea ennustaa, mutta OPS-luonnosta on pyritty tekemään laajapohjaisesti pohtien, millaisia asioita nykyisyydessä kannattaisi parantaa. Mahdollistamalla erilaisia oppimistilanteita teemme palveluksen paitsi oppijoille myös tulevaisuuden yhteiskunnalle. Olen useiden muiden kanssa sitä mieltä, että me suomalaiset opettajat olemme maailman huippuluokkaa. Me kyllä osaamme opettaa. Ongelma vain on, ettei nuoria kiinnosta. Meidän annostellessamme heille niitä asioita, joita meidän on koulutettu opettamaan, suuri osa lipuu ohi korvien, koska nuorten mielet ovat vallanneet kokonaan muut asiat. Mutta kun heille on syttynyt tarve osata jotakin, ei ole mitään ongelmaa saada heitä kuuntelemaan, pohtimaan ja ratkaisemaan ongelmaa.

## Miten voi aloittaa?

Ykkös-kakkosluokkalaisten kanssa olemme opiskelleet Bee-Bot-robottien kanssa aarteensintää ja erilaisia toisten antamien reittien toteutusta ja testausta. Tämä oli hauskaa, mutta samalla myös haastavaa. Robotit ja leikkikalut saavat lapset yrittämään aina uudelleen ja uudelleen, mutta jos minä opettajana sanon, että nyt tuli virhe, aloita alusta, oppilaat lannistuvat. Kolmasluokkalaisten kanssa pidimme pienen Scrabble-jakson, ja muutama oppilas syttyikin ideasta, tehden pieniä ohjelmanpätkiä, joissa kyselivät toisiltaan yksinkertaisia laskutehtäviä. Tällöin kuitenkin kolmasluokkalaisista suurin osa kertoi mieluummin pelaavansa valmiita oppimisleikkejä kuin ”koodailevansa” niitä itse. Opettajan kannalta merkittävin edistysaskel oli, kun löysin [koodaustunti.fi](http://koodaustunti.fi):n suomenkielisen version 2013. Sen jälkeen Hour of Code -sivustolta olen löytänyt materiaalia enemmän kuin olisin ehtinyt koskaan käyttää. Myös koodaustunti-sivustoa on päivitetty jatkuvasti. Tänä vuonna koulussamme järjestettiin vapaaehtoisvoimin kaikille alakoululaisille kaksoistunti koodausta, ja innostus tuntuu vain leviävän! Ennen kaikkea innostavat koodauskokeilut ovat opettaneet minulle itselleni paljon oppimisesta ja opettamisesta. Kannustankin kaikkia käymään ainakin koodaustunnin ensimmäiset jaksot läpi – se on palkitsevaa, uskokaa pois!



## Ohjelmointi osana opetusta

*Minna Kukkonen ja Kati Sormunen*

Innokas-koordinaattorit

Ohjelmoinnin tulo osaksi 2016 vuoden opetussuunnitelmaa mietityttää meitä monia. Millä tavalla ohjelmoinnin tulisi näkyä oppilaiden arjessa? Miksi ohjelmointia tarvitaan? Mitä ohjelmoinnilla tarkoitetaan?

Ohjelmointi pitää sisällään paljon muutakin kuin koodin kirjoittamista. Pienten oppilaiden kanssa on hyvä lähteä liikkeelle ajattelun taitojen kehittämisestä ja ongelmanratkaisusta. Kaikkeen toimintaan on hyvä kytkeä mukaan pelillisyyttä ja leikillisyyttä, joiden kautta tarttumapinta on lapsille sopivaa ja innostavaa. Monet varhaiskasvatuksesta ja alkuopetuksesta tutut pelit ja leikit pitävät sisällään ohjelmoinnillisen ajattelun aineksia. Kaverille ohjeiden antamisessa lapsi purkaa ongelmaa osiin, kehittää samankaltaisena toistuvia kaavoja ja tulee jopa luoneeksi algoritmeja. Toimintojen jälkeen aikuinen pohtii yhdessä lasten kanssa, millaisilla asioilla on merkitystä halutun toiminnan aikaansaamisessa. Pohdinnassa törmätään käsitteiden ymmärtämiseen, mittasuhteiden tarkkuuksiin ja monenlaisiin muihin muuttujiin. Miksi toinen etenee pidemmälle, vaikka ohjeena on mennä viisi askelta eteenpäin. Entä miksi oikealle kääntyessä toinen kääntyy vain vähän ja toinen enemmän? Selkeiden ja yksiselitteisten ohjeiden ja käskyjen antaminen johdattelee ymmärtämään ohjelmointia ja sen tarkkuusvaatimuksia. Ajattelun taitojen kehittämiseen on myös laadittu monenlaista tukimateriaalia ja välineitä. Esimerkiksi unkari-laisesta Varga-Neményi -matematiikan opetusmenetelmästä löytyy paljon ajatteluntaitoja kehittäviä harjoituksia.

Ajatteluntaitojen lisäksi on tärkeää pohtia, miten oh-

jelmointi näyttäytyy meidän jokaisen arkipäivässä. Tausta-ajatuksena on jakaa ymmärrystä ihmisen rakentaman maailman toimivuudesta ja ohjelmoinnin merkityksestä siinä. Kohtaamme arjessa päivittäin toimivia laitteita ja asioita, joiden toimimisen taustalla on automaatiota ja robotiikkaa, jotka puolestaan kätkevät taakseen ohjelmointia ja koodausta.

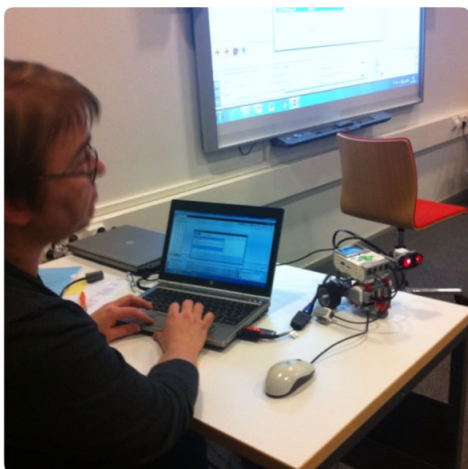


*Ongelmanratkaisua Innokas-verkoston Kiinnostaako koodaus ja robotiikka -jatkokoulutuksessa, kouluttajina Pii Pelander ja Erkki Hautala.*

Tässä yhteydessä tulee mukaan luontevasti erilaiset ohjelmointiympäristöt, jotka valitaan oppilasryhmän ja oppimistehtävän tarpeiden mukaan. Omia pelejä voi ohjelmoida esimerkiksi Scratch Juniorissa, Scratchissä

tai Hopscotchissa. Robotteja voi ohjelmoida taistelemaan, ratkomaan haasteita tai tanssimaan legorobotiikan avulla, Arduinoilla voidaan rakentaa liikennevaloja tai hakkeroida leluja ja Spherolla leikitellä vikkelen pallon avulla monin tavoin.

Eri oppiaineissa ohjelmointi ja robotiikka sopii luontevasti osaksi opetusta ja innostaa oppimaan uudella tavalla! Fysiikassa voidaan yhdistää robotiikkaa ja ohjelmointia osaksi kokonaisuuksia ja ilmiöiden ymmärtämistä.



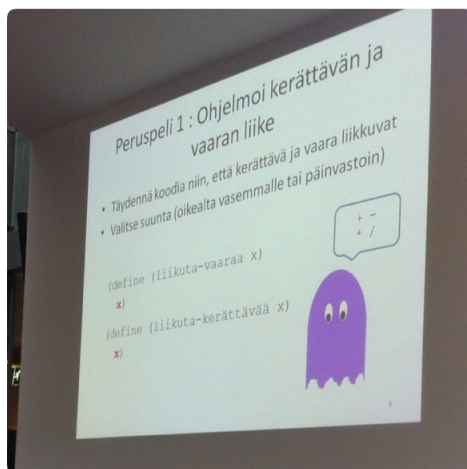
*Aineenopettaja, Innokas-kouluttaja Piia Pelander opastaa legorobotiikan hyödyntämistä fysiikan opetuksessa.*

Data Logging -ohjelmistoa voidaan hyödyntää esimerkiksi mittaamisen ymmärtämisessä. Miten mahtaa moottorin teho vaikuttaa kuljettuun matkaan ja siihen käytettyyn aikaan? Entä millaisia kuvaajia saatkaan aikaan tuomalla liikuteltavaa kohdetta kohti ultraäänisensoria eri tavoin?



*Opettaja tutkimassa ultraäänisensorin ja sitä lähestyvän kohteen tuottamaa graafia.*

Racket -ohjelmoinnin avulla voidaan pohtia esimerkiksi pelien taakse kätkeytyvää matemaattista ongelmanratkaisua. Samainen ohjelma taipuu kuvataiteeseen tuomalla uutta näkökulmaa geometrisena taiteena. Kannattaa tutustua!

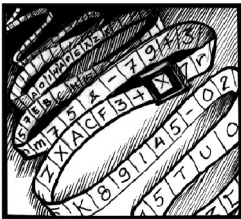


*Racket-ohjelmalla voidaan ohjelmoida pelejä ja tutkia pelien taakse kätkeytyviä matemaattisia ongelmia.*



*Aineenopettaja, Innokas-kouluttaja Tiina Partanen opastaa Racketin käyttöä.*

Monien eri ohjelmien ja ohjelmointikielten kautta saamme ymmärrystä siitä, miten moni asia maailmassamme on rakentunut. Ihmisen rakentaman ympäristön toiminnassa tarvitaan ihmisiä, jotka pystyvät kehittämään ympäristössämme tarvittavia laitteita ja välineitä ja niiden toimivuutta. Kehittyvä ympäristö vaatii myös uuden keksimistä ja innovointia. Ihan kaikista nuoristamme ei tarvitse tulla ohjelmoijia, mutta kaikkien meidän on hyvä ymmärtää sitä, miten ympäristömme toimii. Innostutaan ja innovoidaan ohjelmoinnin avulla!



## Peruskoulun ohjelmointiopetus

*Juha Taina*

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

Osaatko sanoa, mitä seuraava koodi tekee?

```
L1:   LDX #MSG
L2:   LDA #I
      BEQ L3
      BSR PRINT
      DECA
      STA #I
      JMP L2
L3:   RTS

MSG   FCC 'Hello, World!'
      FCB 0
```

Mahdollisesti. Osaatko kirjoittaa vastaavaa koodia? Mahdollisesti. Tarvitseeko sinun kirjoittaa vastaavaa koodia? Luultavasti ei.

Edellinen esimerkki on Motorolan 6809-prosessorin symbolista konekieltä. Minä opettelin 1980-luvulla ohjelmoinnin perusteet sillä kielellä, mutta en oppinut tekemään ohjelmistoja. 6809-assemblerin aikoina ohjelmistojen teon työkalut olivat vaikeita oppia ja käyttää, mutta laitteet olivat (melko) yksinkertaisia ohjelmoida ja käytössä olleet järjestelmät eivät juuri vaatineet erityisosaamista.

Tänään ohjelmistojen teon työkalut ovat selkeitä ja teoria hallittua, mutta laitteet ja järjestelmät ovat monin verroin 6809-aikaa monimutkaisempia, puhumattakaan kaikista tarpeellisista apuohjelmistoista, kirjastoista ja rajapinnoista. Vielä kun tarkastellaan moder-

nia tapaa tehdä ohjelmistoja, saadaan mukaan ainakin ajanhallintaa, vaatimusten määrittelyä, muutostenhallintaa, eri tasoista suunnittelua ja suunnittelumalleja, useaa eri tyyppistä testausta, elinkaariajattelua, vihreitä arvoja ja henkilöhallintaa. Vähemmästäkin menee pyörälle päästään. Ohjelmistojen teko on nyt ja oli 6809-aikana vaikeaa, ja laadukkaiden ohjelmistojen teko on erityisen vaikeaa.

Ymmärrän, että peruskoulussa tavoitteena on enemmän esitellä ohjelmointia kuin tehdä oppilaista ohjelmistojen tekijöitä. Tämä on hyvä asia, sillä jokaisen tulisi ainakin jossain määrin ymmärtää, mitä tietojärjestelmän sisällä tapahtuu. Kuitenkin ilman selkeää teoreettista pohjaa ja pintaa syvemmälle menevää opetusta ohjelmistojen teosta ja toiminnasta käsiteltävä asia jää helposti irrallisten faktojen ulkoa opetteluksi ja valmiiden osien mekaaniseksi yhdistämiseksi. Ohjelmistojen teon opettamiseen tarvitaan enemmän kuin ohjelmoinnin opettamista.

Opettajalla on suurin rooli opetuksen onnistumisessa. Mitä tapahtuu, kun opettaja saa opetettavaksi uuden alueen, jota hän ei hallitse, joka ei kiinnosta häntä ja jossa osa oppilaista tietää selvästi häntä enemmän? Opettaja ahdistuu ja oppilaat turhautuvat. Ahdistunut opettaja ei jaksa innostua oppilaiden oppimisesta, ja turhautunut oppilas viettää mieluummin aikaa pelaamalla tai sosiaalisessa mediassa kuin seuraamassa hänelle triviaalia opetusta. Pahimmassa tapauksessa ohjelmoinnin opetuksesta tulee välttämätön paha, joka ei hyödytä ketään ja vain vie tunteja muilta aineilta.

On kuitenkin alue, johon peruskoulussa annettava ohjelmointiopetus sopii hyvin: ryhmätyöskentely ja ryhmätyötaitojen opettelu. Nykyaikainen ohjelmistokehitys vaatii ryhmätyöskentelyä, ja tätä on mahdollista harjoitella ohjelmistojen teon ohessa. Yhdessä tekeminen ei synny itsestään vaan vaatii ohjausta ja harjoittelua. Yhteisen ohjelmiston teko on erinomainen tapa harjoitella ryhmätyöskentelyä ja vastuun ottamista.

Ryhmätyöskentelyn voi ottaa mukaan ohjelmistojen teon opetukseen alusta alkaen. Opiskelijoiden motivaatio paranee, kun he saavat pohtia ohjelmistojen tekoon liittyvää teoriaa, ongelmia ja ratkaisuja yhdessä. Sopivilla aktivoivilla pienillä harjoituksilla opiskelijoiden mielenkiinto saadaan pysymään yllä, ja samalla saadaan opetettua ohjelmoinnin lisäksi ainakin suunnittelua ja testausta. Näin oppilaat saavat kokonaiskuvan ohjelmistojen teosta sekä ennen kaikkea kokemusta yhdessä oppimisesta, yhteistyöstä ja ryhmätyöskentelystä.

Oikean ohjelmointikielen käyttö ohjelmistojen teossa ei ole välttämätön, vaan hyvin suunnittelella ohjelmistojen tekoa on mahdollista opetella ja harjoitella valmiiden ohjelman osien avulla. Opettajan ei tarvitse olla ohjelmoinnin ammattilainen, vaan ohjelmointitaitoa tärkeämpiä ominaisuuksia hänellä ovat ryhmätyö-

taidot, ryhmädynamiikan hallinta ja suurten kokonaisuuksien ymmärtäminen.

Eniten oppilaat hyötyvät opetuksesta, jos he saavat käyttää mielikuvitustaan, tehdä konkreettisia asioita ja nähdä töidensä tulokset. Niinpä heti teorian alusta asti on tärkeää, että oppilaat pohtivat ja tekevät asioita yhdessä. Esimerkiksi kumpi seuraavista tehtävistä luultavasti motivoisi oppilaita enemmän: ”Minkälaisia tietokoneita on sinun elämässäsi ja mitä kaikkea niillä tehdään?” vai ”Minkälainen tietokoneohjelma auttaisi sinua selviämään matematiikan läksyistä? Mitä kaikkea ohjelma voisi osata ja mitä sinun pitäisi tehdä itse?” Entä ”Miksi tietokoneohjelmat toimivat joskus väärin? Minkälaisia kokemuksia sinulla on väärin toimivista ohjelmista?” vai ”Pekan mopossa on tietokoneohjelma, joka huolehtii kaasusta, jarrusta ja vilkuista. Mistä tiedät, että Pekan mopon tietokoneohjelma toimii oikein ja miten varmistat asian?”

Kaiken kaikkiaan ohjelmistojen teon opetus peruskoulussa olisi oikein toteutettuna erittäin hyvä asia. Opetuksesta ja oppimisesta on mahdollista tehdä erittäin palkitsevaa sekä oppilaille että opettajille, mutta ei ilman työtä ja huolellista suunnittelua. Toivotaan, että kaikki tulee menemään parhain päin.

## Tehtäviä Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisista 14.–20.4.2015

1. Olkoon  $\triangle ABC$  teräväkulmainen kolmio, ja olkoon sen pisteestä  $C$  piirretyn korkeusjanan kantapiste  $D$ . Kulman  $\angle ABC$  puolittaja leikkaa suoraa  $CD$  pisteessä  $E$  ja kolmion  $\triangle ADE$  ympäripiirrettyä ympyrää  $\omega$  pisteessä  $F$ . Jos  $\angle ADF = 45^\circ$ , niin osoita, että  $CF$  sivuaa ympyrää  $\omega$ .
2. Domino on  $2 \times 1$  tai  $1 \times 2$  -laatta. Selvitä kuinka monella eri tavalla  $n^2$  dominoa voi asettaa  $2n \times 2n$  -shakkilaudalle ilman päällekkäisyyksiä niin, että jokainen  $2 \times 2$  -neliö sisältää ainakin kaksi peittämätöntä ruutua, jotka ovat samalla rivillä tai samalla sarakkeella.
3. Olkoot  $n$  ja  $m$  kokonaislukuja ja suurempia kuin 1, ja olkoot  $a_1, a_2, \dots, a_m$  positiivisia kokonaislukuja, jotka eivät ole isompia kuin  $n^m$ . Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , jotka eivät ole isompia kuin  $n$ , ja joille

$$\text{sy}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m) < n,$$

missä  $\text{sy}(x_1, x_2, \dots, x_m)$  tarkoittaa lukujen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  suurinta yhteistä tekijää.



## Turmeleeko ohjelmointi nuorisomme?

**Antti Laaksonen**

Tietojenkäsittelytieteen laitos, Helsingin yliopisto  
ahslaaks@cs.helsinki.fi

Uuden peruskoulun opetussuunnitelman mukaan syksystä 2016 alkaen matematiikan tunneilla opetetaan myös ohjelmointia. Tulisiko matematiikan ystävän olla huolestunut tästä muutoksesta? Miksi ohjelmointia opetetaan nimenomaan matematiikan tunneilla? Entä heikkeneekö koululaisten matematiikan osaaminen ennestään, kun tietokoneen käyttö lisääntyy?

Tämän kirjoituksen tarkoituksena on näyttää, mitä tekemistä ohjelmoinnilla on matematiikan kanssa. Syy siihen, miksi ohjelmointia opetetaan matematiikan tunneilla, on loppujen lopuksi yksinkertainen: ohjelmointi on matematiikan osa-alue. Tämän vuoksi ohjelmoinnilla on paikkansa matematiikan opetuksessa siinä missä vaikkapa algebralla ja analyysillä.

Eräs käsitys ohjelmoinnista on, että se on lähinnä pelailua ja viihteellistä puuhailua. Tällöin ohjelmointi toimisi uhkana ”kunnolliselle” matematiikalle. Tämä käsitys on kuitenkin yhtä oikea, kuin että geometria on joutavaa piirtelyä tai todennäköisyyslaskenta on noppien heittelyä tai uhkapeliä. Ohjelmointi on tärkeä matemaatikon työkalu, minkä lisäksi se opettaa syvällistä matemaattista ajattelua ja antaa uuden näkökulman perinteiseen matemaattiseen todistamiseen.

Ohjelmointi ei ole siis matematiikan vihollinen, vaan ohjelmoinnin osaaminen tukee muuta matematiikkaa ja päinvastoin. Tutustutaan seuraavaksi ohjelmointiin muutamien tehtävien kautta.

### Simulointi

Tietokoneen vahvuutena on, että se pystyy laskemaan tehokkaasti ja luotettavasti. Siksi ohjelmoinnin avulla pystyy tutkimaan matemaattista ilmiötä simuloimalla sitä. Tarkastellaan esimerkiksi seuraavaa todennäköisyyslaskennan tehtävää:

**Tehtävä 1:** Lukujonossa  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jokainen luku on satunnainen reaaliluku tasaisesta jakaumasta välillä  $[-10, 10]$ . Mikä on odotusarvo lukujonon suurimmalle peräkkäisten lukujen summalle?

Esimerkiksi lukujonon  $-1, 5, -2, 7, 1, -5, 3$  suurin summa on 11, joka saadaan valitsemalla luvut  $5, -2, 7, 1$ . Myös tyhjä summa on sallittu, minkä vuoksi suurin summa ei ole koskaan negatiivinen.

Merkitään  $e(n)$  suurimman summan odotusarvoa, kun lukujonossa on  $n$  lukua. Odotusarvon  $e(1)$  voi laskea kahdessa osassa. Jos  $x_1 > 0$ , suurin summa on  $x_1$  ja odotusarvo on 5, ja jos  $x_1 \leq 0$ , suurin summa on tyhjä summa ja odotusarvo on 0. Molemmat tapaukset ovat yhtä todennäköisiä, joten  $e(1) = 5/2$ .

Odotusarvon  $e(2)$  voi myös laskea samalla idealla. Jos  $x_1 > 0$  ja  $x_2 > 0$ , suurin summa on  $x_1 + x_2$  ja odotusarvo on 10. Jos  $x_1 > 0$  ja  $x_2 \leq 0$ , suurin summa on  $x_1$  ja odotusarvo on 5. Samoin tapahtuu symmetrisesti, jos  $x_1 \leq 0$  ja  $x_2 > 0$ . Lopulta jos  $x_1 \leq 0$  ja



$x_2 \leq 0$ , odotusarvo on 0. Kaikki tapaukset ovat yhtä todennäköisiä, joten  $e(2) = 20/4 = 5$ .

Suuremmilla  $n$ :n arvoilla odotusarvon laskeminen perinteisen todennäköisyyslaskennan keinoin muuttuu hankalaksi, koska osatapausten määrä ja mutkikkuus kasvavat räjähdysmäisesti. Kuitenkin ohjelmoinnin avulla pystyy saamaan nopeasti käsityksen, millaisia suurempien tapausten odotusarvot ovat.

Seuraavan Python-kielisen koodin avulla pystyy tutkimaan suurimman summan odotusarvoa millä tahansa  $n$ :n arvolla. Funktio `laske` luo satunnaisen  $n$  luvun jonon ja laskee sen suurimman summan. Pääohjelma kutsuu funktiota annetun määrän kertoja ja tulostaa odotusarvon  $e(n)$  arviona tulosten keskiarvon.

```
from random import uniform

def laske(n):
    p = t = 0
    for i in range(n):
        t = max(t,0)
        t += uniform(-10,10)
        p = max(p,t)
    return p

print "Montako lukua?",
n = input()
print "Montako kertaa?",
r = input()
s = 0
for i in xrange(r):
    s += laske(n)
print "Odotusarvo:", s/r
```

Ohjelman suoritus voi näyttää seuraavalta:

```
Montako lukua? 2
Montako kertaa? 10
Odotusarvo: 5.56135787434
```

```
Montako lukua? 2
Montako kertaa? 1000
Odotusarvo: 4.93420070081
```

```
Montako lukua? 2
Montako kertaa? 1000000
Odotusarvo: 5.00334192257
```

Ohjelman antaman tuloksen tarkkuus riippuu siitä, montako kertaa simulaatio toistetaan. Käytännössä esimerkiksi miljoona toistokertaa antaa hyvän arvion odotusarvon suuruudesta. Tällaiseen simulaatioon menee noin sekunti aikaa nykyaikaisella tietokoneella.

Seuraava taulukko sisältää odotusarvon  $e(n)$  arvioita, kun  $n = 1, 2, \dots, 10$  ja simulaatio on toistettu miljoona kertaa kullekin  $n$ :n arvolle.

| jonon pituus $n$ | odotusarvon $e(n)$ arvio |
|------------------|--------------------------|
| 1                | 2,49599                  |
| 2                | 5,00334                  |
| 3                | 7,19607                  |
| 4                | 9,11295                  |
| 5                | 10,78403                 |
| 6                | 12,30602                 |
| 7                | 13,71431                 |
| 8                | 15,00966                 |
| 9                | 16,22160                 |
| 10               | 17,38309                 |

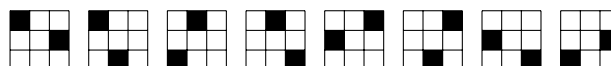
Tietokoneen simulaatio on hyvä apuneuvo ongelman tutkimisessa. Ensinnäkin simulaatio vahvistaa käsin lasketut arvot  $e(1) = 5/2$  ja  $e(2) = 5$ , ja jos koettaisimme laskea lisää arvoja tarkasti, voisimme jälleen verrata tuloksia tietokoneen arvoihin. Todennäköisyyslaskenta on ihmiselle epäintuitiivista, mutta tietokone pystyy suorittamaan laajan toistokokeen ilmiöstä ja antaa siksi varmasti luotettavan tuloksen.

## Johtaminen

Seuraavassa tehtävässä ohjelmointi tarjoaa oikotien kombinatoriikan kaavan johtamiseen. Ideana on selvittää ohjelmoinnin avulla pienten tapausten tuloksia ja päätellä niistä yleinen kaava.

**Tehtävä 2:** Monellako tavalla kaksi kuningatarta voidaan sijoittaa  $n \times n$ -kokoiselle shakkilaudalle siten, että ne eivät uhkaa toisiaan?

Esimerkiksi jos  $n = 3$ , sijoitustapoja on 8:



Luonteva ensimmäinen askel tehtävän ratkaisussa on tutkia ratkaisujen määrää eri  $n$ :n arvoilla. Käsin tehtynä tämä olisi työlästä ja virhealtista, joten laskenta on järkevää antaa tietokoneen tehtäväksi. Seuraava raakaan voimaan perustuva koodi laskee kuningattarien sijoitustapojen määrän annetulle  $n$ :n arvolle.

```
print "Laudan koko:",
n = input()
t = 0
for x1 in range(n):
    for y1 in range(n):
        for x2 in range(n):
            for y2 in range(n):
                if x1 == x2 or y1 == y2:
                    continue
                if abs(x1-x2) == abs(y1-y2):
                    continue
                t += 1
print "Tulos:", t/2
```

Koodi käy läpi kaikki tavat valita kuningattarien paikat niin, että ensimmäisen kuningattaren paikka on  $(x_1, y_1)$  ja toisen kuningattaren paikka on  $(x_2, y_2)$ . Koodi tarkistaa kuningattarien uhkaamisen kolmen ehdon perusteella. Ensinnäkin jos  $x_1 = x_2$  tai  $y_1 = y_2$ , kuningattaret ovat samalla pysty- tai vaakarivillä. Lisäksi jos  $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$ , kuningattaret uhkaavat toisiaan sivusuunnasta. Jos kuningattaret eivät uhkaa toisiaan, koodi lisää laskurin  $t$  arvoa. Lopuksi koodi tulostaa arvon  $t/2$ , koska jokainen sijoitustapa tulee laske-  
tuksi kahteen kertaan.

Koodin suoritus näyttää esimerkiksi seuraavalta:

Laudan koko: 3

Tulos: 8

Laudan koko: 8

Tulos: 1288

Laudan koko: 20

Tulos: 67260

Laudan koko: 50

Tulos: 2920400

Koodin perusteella syntyy seuraava taulukko tuloksista, kun laudan koko on  $1, 2, \dots, 10$ :

| laudan koko ( $n$ ) | sijoitustavat |
|---------------------|---------------|
| 1                   | 0             |
| 2                   | 0             |
| 3                   | 8             |
| 4                   | 44            |
| 5                   | 140           |
| 6                   | 340           |
| 7                   | 700           |
| 8                   | 1288          |
| 9                   | 2184          |
| 10                  | 3480          |

Mikä sitten olisi yleinen kaava sijoitustapojen määrälle? Koodissa on neljä sisäkkäistä silmukkaa, minkä vuoksi hyvä oletus on, että kaava olisi 4. asteen polynomi muotoa  $p(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ .

Koodin ansiosta meillä on jo tuloksia pienille  $n$ :n arvoille, ja voimme päätellä kaavan niiden avulla. Kaavassa on viisi tuntematonta muuttujaa, joten tarvitaan viisi laskettua tulosta niiden päättämiseen. Yksinkertaisin valinta on käyttää tuloksia  $p(1), p(2), \dots, p(5)$ , joista saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \\ p(3) = 8 \\ p(4) = 44 \\ p(5) = 140 \end{cases}$$

eli auki kirjoitettuna

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 8 \\ 256a + 64b + 16c + 4d + e = 44 \\ 625a + 125b + 25c + 5d + e = 140 \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -5/3 \\ c = 3/2 \\ d = -1/3 \\ e = 0 \end{cases}$$

joten polynomiksi tulee

$$p(n) = n^4/2 - 5n^3/3 + 3n^2/2 - n/3.$$

Tämä polynomi täsmää myös suurempiin laskettuihin arvoihin, esimerkiksi  $p(8) = 1288$ , kuten kuuluukin.

Nyt kun kombinatorinen kaava on löytynyt, sen voi vielä todistaa täsmällisesti. Todistaminen onkin mukavaa, kun kaava on valmiiksi tiedossa. Yksi mahdollisuus todistaa polynomikaava on näyttää, että se on sama kuin seuraava rekursiivinen funktio:

$$r(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ r(n-1) + 2(n-1)^2(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Rekursiivinen funktio laskee sijoitustapojen määrää kerros kerrallaan. Ensinnäkin jos  $n = 1$ , ei ole mitään tapaa sijoittaa kahta kuningatarta shakkilaudalle. Tapauksessa  $n > 1$  mahdolliset tilanteet ovat

- molemmat kuningattaret ovat vasemman yläkulman  $(n-1) \times (n-1)$ -shakkilaudan alueella, jolloin tapoja on  $r(n-1)$ ,
- toinen kuningatar on alareunassa ja toinen kuningatar on oikeassa reunassa, jolloin tapoja on  $(n-1)(n-2)$ ,
- toinen kuningatar on oikeassa alakulmassa ja toinen kuningatar on  $(n-1) \times (n-1)$ -alueella, jolloin tapoja on  $(n-1)(n-2)$ , ja
- toinen kuningatar on alareunassa tai oikeassa reunassa (ei oikeassa alakulmassa) ja toinen kuningatar on  $(n-1) \times (n-1)$ -alueella, jolloin tapoja on  $2(n-1)(n-2)^2$ .

Laskemalla yhteen nämä kaikki tapaukset saadaan tulokseksi  $r(n-1) + 2(n-1)^2(n-2)$ .

Tässä vaiheessa on hyvä varmistaa ohjelmoimalla, että rekursiivinen kaava on varmasti oikein:

```
def r(n):
    if n == 1:
        return 0
    else:
        return r(n-1)+2*(n-1)**2*(n-2)
```

```
print "Laudan koko:",
n = input()
print "Tulos:", r(n)
```

Koodi antaa samoja tuloksia kuin alkuperäinen koodi, eli kaikki on hyvin. Lisäksi koodin etuna on, että sillä voi laskea tehokkaasti myös suurempia tapauksia kuin alkuperäisellä koodilla. Esimerkiksi:

```
Laudan koko: 500
Tulos: 31042041500
```

Viimeinen vaihe todistuksessa on näyttää, että polynomikaava  $p(n)$  ja rekursiivinen kaava  $r(n)$  ovat samat. Tämä on suoraviivainen induktiotodistus, jonka lukija voi halutessaan tarkistaa.

Lopuksi polynomikaavan voi muuntaa ohjelmaksi:

```
def p(n):
    return (3*n**4-10*n**3+9*n**2-2*n)/6

print "Laudan koko:",
n = input()
print "Tulos:", p(n)
```

Tämän koodin avulla voimme laskea tehokkaasti hyvin suuria tapauksia:

```
Laudan koko: 123456789
Tulos: 116152858263002358622156881764124
```

Ohjelmointi ja matemaattinen päättely kulkivat käsi kädessä tässä tehtävässä. Ohjelmoinnin avulla pystyimme johtamaan polynomikaavan tehtävän ratkaisuun sekä tarkistamaan, että rekursiivinen kaava on oikein. Toisaalta matemaattisen päättelyn avulla pystyimme todistamaan kaavan sekä saimme aikaan ohjelmia, jotka toimivat huomattavasti nopeammin kuin alkuperäinen raakaan voimaan perustuva toteutus.

Yleensäkin ohjelmoinnissa matemaattinen päättely on avain tehokkaiden algoritmien luomiseen. Mitä paremmin ohjelmoija ymmärtää ongelman matemaattisen luonteen, sitä nopeamman koodin hän voi saada aikaan.

## Todistaminen

Äskeisissä tehtävissä tietokone on toiminut matemaatikon apuna nopeasti laskevana työjuhtana. Mutta mitä tekemistä ohjelmoinnilla on syvällisemmän matemaattisen ajattelun kanssa? Viimeinen tehtävämme antaa näytteen tästä asiasta.

**Tehtävä 3:** Sinulle on annettu luvut  $1, 2, 3, \dots, n$  ja tehtäväsi on jakaa luvut kahteen joukkoon niin, että molemmissa joukoissa lukujen summa on sama. Onko tehtäväsi mahdollinen?

Esimerkiksi jos  $n = 8$ , tehtävä on mahdollinen, koska voidaan valita joukot  $A = \{3, 7, 8\}$  ja  $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ . Nyt molemmissa joukoissa lukujen summa on 18. Jos taas  $n = 9$ , tehtävä ei ole mahdollinen, koska lukujen  $1, 2, 3, \dots, 9$  summa on 45 eikä lukuja voi jakaa kahteen joukkoon, joiden summa olisi sama.

Ohjelmoijan näkökulmasta tehtävänä on laatia ohjelma, jossa käyttäjä antaa luvun  $n$  ja tietokoneen tulee esittää lukujen jako tai todeta, ettei se ole mahdollista. Seuraava koodi toteuttaa kyseisenlaisen ohjelman:

```
print "Anna luku:",
n = input()
s = sum(range(1,n+1))
if s%2 == 1:
    print "Mahdotonta!"
    exit()
A, B = [], []
u = s/2
for x in range(n, 0, -1):
    if x <= u:
        u -= x
        A.insert(0, x)
    else:
        B.insert(0, x)
print "Joukko A:", A
print "Joukko B:", B
```

Ohjelman suoritus voisi edetä seuraavasti:

```
Anna luku: 8
Joukko A: [3, 7, 8]
Joukko B: [1, 2, 4, 5, 6]
```

Tai seuraavasti:

```
Anna luku: 9
Mahdotonta!
```

Tai seuraavasti:

```
Anna luku: 12
Joukko A: [6, 10, 11, 12]
Joukko B: [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]
```

Ohjelma laskee ensin summan  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  muuttujaan  $s$ . Jos summa on pariton, jako ei ole mahdollinen ja ohjelma päättyy. Muuten ohjelma jakaa luvut  $1, 2, 3, \dots, n$  joukkoihin  $A$  ja  $B$  siten, että kummankin joukon summaksi tulee  $s/2$ .

Muuttuja  $u$  pitää kirjaa, paljonko joukon  $A$  summasta puuttuu vielä. Ohjelma käy läpi muuttujalla  $x$  luvut  $n, n-1, n-2, \dots, 1$  ja lisää luvun  $x$  joukkoon  $A$ , jos se mahtuu sinne, ja muuten joukkoon  $B$ . Lopulta kaikki luvut on lisätty jompaankumpaan joukkoon ja muuttujan  $u$  arvona on 0, joten jako on onnistunut. Muuttuja  $u$  saavuttaa aina arvon 0, koska joka askeleella käytettävissä on kaikki luvut  $1, 2, 3, \dots, x$  jäljellä olevan summan muodostamiseksi.

Tämä ohjelma on tarkemmin katsoen epätavallisessa muodossa oleva matemaattinen todistus, koska se sisältää yleisen algoritmin, miten luvut  $1, 2, 3, \dots, n$  saadaan jaettua kahteen joukkoon, joiden summa on sama. Ohjelman etuna perinteiseen todistukseen verrattuna on, että se näyttää esimerkin jakotavasta annetulla  $n:n$  arvolla. Ohjelma tarjoaa siis näkymän todistuksen sisälle, ja todistuksessa käytettyä konstruktiota voi testata helposti millä tahansa  $n:n$  arvolla.

## Lopuksi

Ohjelmoinnin opetuksen aloittamiseen kouluissa liittyy haasteita, koska ohjelmointi tuli opetussuunnitelmaan melko yllättäen ja kyseessä on monelle vieras aihe-alue. Kuitenkin asia, josta *ei* tarvitse murehtia, on, että

ohjelmointi tekisi hallaa matematiikalle. Ohjelmointiin kätkeytyy rikas matemaattinen maailma, josta tämän kirjoituksen sisältö on antanut vain pientä esimakua.

## Aiheeseen liittyvää

- Ohjelmointiputkan opas Python-ohjelmointiin: [http://www.ohjelmointiputka.net/oppaat/opas.php?tunnus=python\\_01](http://www.ohjelmointiputka.net/oppaat/opas.php?tunnus=python_01)
- MAOLin Datatähti-ohjelmointikilpailu peruskoulun ja lukion oppilaille: <http://www.maol.fi/kilpailut/4tieteenkisat/datatahti/>
- Bentley, J.: *Programming Pearls*, 2. painos, Addison-Wesley, 1999.
- Skiena, S. ja Revilla, M.: *Programming Challenges*, Springer, 2003

## Solmun matematiikkadiplomit

Peruskoululaisille tarkoitettut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

`matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html`

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteella

`marjatta.naatanen(at)helsinki.fi` tai `juha.ruokolainen(at)helsinki.fi`

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä:

Lukujärjestelmistä

Desimaaliluvut, mitä ne oikeastaan ovat?

Murtolukujen laskutoimituksia

Negatiivisista luvuista

Hiukan osittelulaista

Lausekkeet, kaavat ja yhtälöt

Äärettömistä joukoista

Erkki Luoma-aho: Matematiikan peruskäsitteiden historia

Funktiosta

Gaussin jalanjäljissä

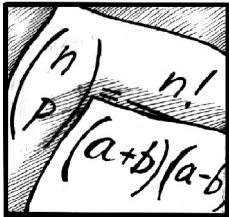
K. Väisälä: Algebra

Yläkoulun geometriaa

Geometrisen todistamisen harjoitus

K. Väisälä: Geometria

Lukuteorian diplomitehtävät



## Neperin luvun kahdet kasvot

**Pekka Alestalo**

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

### Johdanto

Kirjoitin Solmu-lehden numerossa 2/2013 binomikaavasta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

kun  $n \in \mathbf{N}$  ja  $a, b \in \mathbf{R}$ , ks. [1]. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esittää kaavan sovelluksena suoraviivainen perustelu sille, että Neperin luvun määrittelevä jono  $(e_n)$ ,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on nouseva ja ylhäältä rajoitettu. Jonon suppeneminen seuraa silloin helposti. Samalla nähdään, että Neperin lukuun päädytään kahden erilaisen raja-arvon kautta:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Tätä tietoa käytettiin mm. viime vuoden viimeisessä Solmun numerossa, jossa todistettiin luvun  $e$  irrationaalisuus, ks. [2, s. 13].

### Jono $(e_n)$ on nouseva

Tarkastellaan lauseketta  $7!/3!$ . Kun kertomat lasketaan auki, niin saadaan

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4,$$

koska  $3 \cdot 2$  supistuu pois. Samalla periaatteella nähdään, että

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1),$$

koska nimittäjä supistaa pois osoittajan loppuosan.

Sovelletaan tätä havaintoa binomikaavan yleiseen termiin, kun lauseke  $(1 + 1/n)^n$  lasketaan auki. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tällöin siis

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

jolloin tietysti

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \quad (4)$$

Jokaisella  $j = 1, 2, \dots, k-1$  on voimassa

$$\frac{j}{n} > \frac{j}{n+1}, \text{ joten } 1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}.$$

Tämän vuoksi jokainen summan (2) termi on pienempi kuin vastaava summan (3) termi, kun  $k = 0, 1, \dots, n$ . Lisäksi  $e_{n+1}$ -summassa on yksi ylimääräinen positiivinen termi (4), joka vastaa viimeistä summausindeksiä  $k = n+1$ . Johtopäätös:  $e_n < e_{n+1}$  kaikilla  $n \in \mathbf{N}$ , joten jono  $(e_n)$  on nouseva.

## Jono $(e_n)$ on ylhäältä rajoitettu

Merkitään

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Koska  $1 - j/n < 1$  kaikilla  $j = 1, \dots, n-1$ , niin arvoilla  $n \geq 1$  yhtälöstä (2) saadaan epäyhtälö  $e_n < s_n$ . Arvoilla  $k \geq 3$  on voimassa

$$k! = k(k-1)(k-2) \dots 2 > 2^{k-1},$$

koska tulon termit viimeistä lukuun ottamatta ovat suurempia kuin 2. Geometrisen sarjan ( $q = 1/2$ ) summaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &< \frac{5}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 3 \end{aligned}$$

kaikilla  $n$ . Yhdistämällä tulokset todetaan, että

$$e_n \leq s_n < 3 \quad (5)$$

kaikilla  $n$ , joten jono  $(e_n)$  on ylhäältä rajoitettu.

**Tehtävä.** (vrt. kevään 2015 pitkän matematiikan YO-tehtävä 15) Perustele edellä saatu tulos käyttämällä epäyhtälöä  $k! > k(k-1)$ , kun  $k \geq 3$ .

## Neperin luku

Jono  $(e_n)$  on siis nouseva ja ylhäältä rajoitettu. Reaalilukujen aksiomista seuraa silloin, että raja-arvo

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (6)$$

on olemassa. Tämä on kirjoitelman päähenkilö *Neperin luku*  $e$ . Koska  $e_1 = 2$ , niin sivutuotteena saimme myös arviot  $2 < e < 3$ .

Kaavan (5) perusteella jono  $(s_n)$  on ylhäältä rajoitettu ja selvästi myös nouseva. Lisäksi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e.$$

Osoitetaan vielä, että tässä on voimassa yhtäsuuruus, jolloin kaava (1) on kokonaan todistettu.

Tarkastellaan uudelleen yhtälöä (2). Valitaan kiinteä indeksi  $n$  ja tarkastellaan sen jälkeen indeksin arvoja  $m > n$ . Tällöin

$$e_m > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{k-1}{m}\right),$$

koska summan lopusta on jätetty pois indeksejä  $k = n+1, \dots, m$  vastaavat positiiviset termit. Pidetään edelleen indeksi  $n$  kiinteänä, mutta otetaan epäyhtälön molemmista puolista raja-arvo, kun  $m \rightarrow \infty$ . Koska äärellisen summan termeistä voidaan ottaa erikseen raja-arvo, niin tuloksena on epäyhtälö  $e \geq s_n$ , joka pätee kaikilla  $n$ . Kun tästä otetaan raja-arvo  $n \rightarrow \infty$ , saadaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq e.$$

Käänteinen epäyhtälö todistettiin jo aikaisemmin, joten kaava (1) on tosi.

## Pohdintoja

Kaikissa vanhemmissa yliopistojen oppikirjoissa Neperin lukua käsitellään joko yllä mainitulla tai sitä hyvin lähellä olevalla tavalla; ks. viitteet [3], [4] ja [5]. Uudemmissa kirjoissa tästä on luovuttu. Syynä lienee se, ettei sarjoja haluta käsitellä vielä näin aikaisessa vaiheessa differentiaali- ja integraalilaskennan kurssia.

Oman kokemuksen mukaan sarjojen välttely kurssin alussa on aivan turhaa, koska ne on kuitenkin käsiteltävä jossakin vaiheessa ja toisaalta niiden avulla voidaan yksinkertaistaa monia kohtia. Erityisen selvästi tämä tulee esille eksponenttifunktion  $e^x$  kohdalla, josta ajattelin jatkaa jossakin seuraavista numeroista.

## Viitteet

[1] P. Alestalo: Binomikaava. Solmu 2/2013, s. 18–20.

[2] A.-M. Ernvall-Hytönen: Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia. Solmu 3/2014, s. 12–15.

[3] E. Lindelöf: Johdatus analyysiin. Mercatorin Kirjapaino 1942 (s. 204 alkaen)

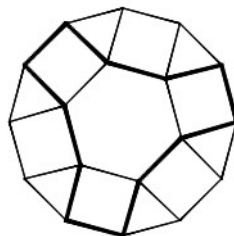
[4] P.J. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja. Otava 1952 (s. 119 alkaen)

[5] K.A. Poukka: Korkeamman matematiikan alkeiskurssi. WSOY 1953 (s. 211 alkaen)

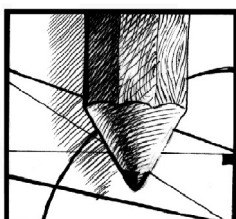
[http://fi.wikipedia.org/wiki/John\\_Napier](http://fi.wikipedia.org/wiki/John_Napier)

## Tehtäviä Helsingin seitsemäsluokkalaisten matematiikkakilpailusta 9.–13.2.2015

6. Luku 100 kirjoitetaan kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana. Mikä on luvuista suurempi?  
a) 15   b) 50   c) 51   d) 75   e) Lukua 100 ei voi kirjoittaa kahden peräkkäisen kokonaisluvun summana.
11. Ankkalinnan ja Hanhivaaran välillä kulkevia junia lähtee kummassakin kaupungissa tunnin välein tasatunnein. Matka kestää tasan 4 tuntia. Matti matkusti junalla Ankkalinnasta Hanhivaaraan ja katseli junan ikkunasta koko matkan ajan. Montako Hanhivaarasta Ankkalinnasta matkalla olevaa junaa hän näki matkansa aikana? (Tässä mahdollisia juuri Ankkalinnasta saapumassa olevia tai Hanhivaarasta lähdössä olevia junia ei oteta huomioon.)  
a) 3   b) 4   c) 5   d) 6   e) 7
12. Seuraavassa kuviossa on säännöllinen kuusikulmio, neliöitä ja tasasivuisia kolmioita. Kuinka suuri osuus kuvion pinta-alasta on paksun viivan sisällä?



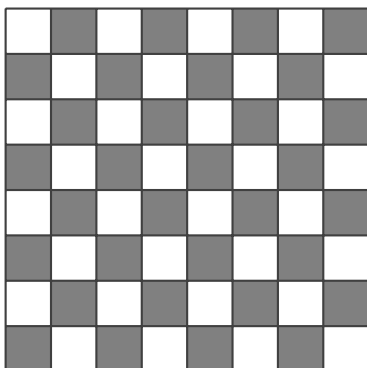
- a) 45 %   b) 50 %   c) 55 %   d) 60 %   e) 65 %



## Mihin ruutuja tarvitaan?

*Kalle Nahkala*

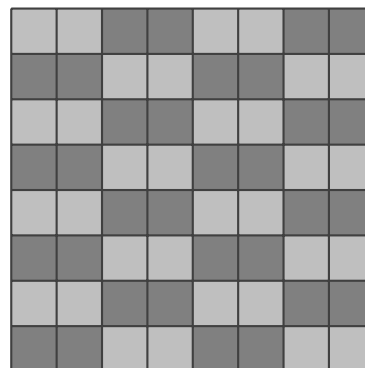
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Turun yliopisto



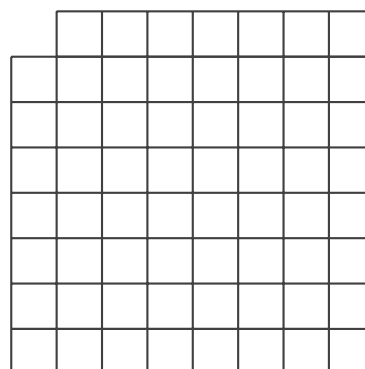
Shakkilaudan tuntee lähes jokainen. Jotkut voivat tuntea sen enemmän tammilautana tai ruutulippuna, mutta kuvio on joka tapauksessa useimmille tuttu. Aina-kin shakin sääntöjen kannalta juuri tällainen ruudutus on ehkä hieman yllättävästi kuitenkin melko tarpeeton. Ruutujen värityksen voisi tehdä jollain toisella tavalla tai vaikka kokonaan unohtaa, ja peli jatkuisi silti aivan niin kuin ennenkin. Mihin ruutuja siis voisi tarvita?

### Kyllä niitä tarvitaan

Laatoitusongelmissa yritetään selvittää, voiko tietyn muotoisen alueen peittää tietynlaisilla laatoilla. Esimerkiksi tavallisen kokoinen shakkilauta voidaan helposti peittää  $2 \times 1$  -laatoilla:



Jos samasta laudasta kuitenkin poistetaan kaksi ruutua vastakkaisista kulmista, tilanne mutkistuu:

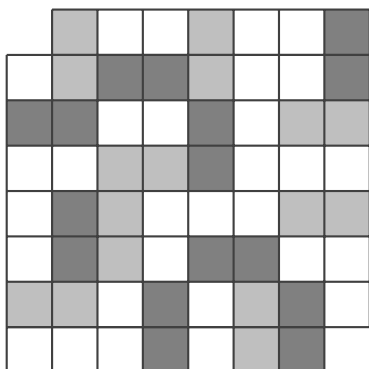


Jos sopiva peittävä laatoitus on olemassa, tarvitaan siihen varmasti yksi  $2 \times 1$  -laatta vähemmän, siis 31 laat-



taa. Kokonaisella laudalla sopiva laatoitus löytyy helposti kokeilemalla, mutta leikatulla laudalla erilaiset kokeilut osoittautuvat jo hieman pulmallisiksi; muutama ensimmäinen yritys lähes varmasti epäonnistuu. Herää helposti kysymys ”Kauanko tätä pitää vielä jatkaa?”

Jaetaan nyt lauta 14 samankokoiseen neliöön ja kahteen kulmista vajaaseen neliöön ja asetetaan vapaasti valiten jokaiseen neliöön yksi  $2 \times 1$  -laatta. Mahdollisia asetelmia saadaan näin  $4^{14} \times 2^2 = 1073741824$ , sillä pienessä neliössä  $2 \times 1$  -laatta voidaan asettaa neljään eri paikkaan ja kulmissa kahteen.



*Eräs mahdollinen vajaa laatoitus.*

Vaikka osa vajaista laatoituksista onkin selvästi mahdollottomia täydentää loppuun, on kokeiltavia vaihtoehtoja silti valtavasti, ehkä jopa liikaa raapusteltavaksi sivun marginaaleissa.

Tälle ongelmalle saadaan kuitenkin nopea päätös shakkiruudutuksella; shakkilaudalla yksi  $2 \times 1$  -laatta peittää aina yhden mustan ja yhden valkoisen ruudun. Laudan vastakkaiset kulmat ovat kuitenkin samanväriset, jolloin kulmista leikatulla laudalla on 30 valkoista ja 32 mustaa ruutua. Peittävää laatoitusta ei siis ole olemassa.

Shakkilauta ja  $2 \times 1$  -laatat eivät suinkaan ole mikään ainutlaatuinen ongelma. Lähinnä mielikuvitus on rajana keksittäessä erimuotoisia laattoja ja ruudutuksia. Tarkastellaan lähemmin vielä seuraavia laattoja:



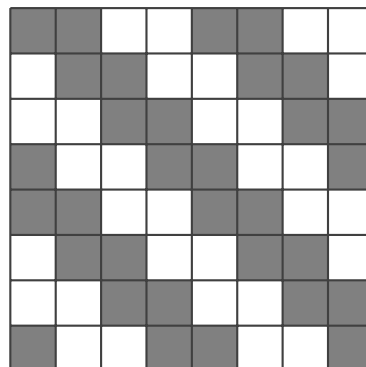
$4 \times 1$  -laatta

ja



$2 \times 2$  -laatta

$7 \times 4 + 9 \times 4 = 64$ , joten seitsemän pitkää ja yhdeksän neliömäistä laattaa voisivat periaatteessa yhdessä peittää täydellisesti  $8 \times 8$  -ruudukon. Shakkiruudutuksen sijaan valitaan nyt ruudukolle seuraava väritys:



Laudalla on yhteensä 32 mustaa ruutua.  $4 \times 1$  -laatta peittää aina kaksi ja  $2 \times 2$  -laatta aina joko yhden tai kolme mustaa ruutua. Merkitään yhden mustan peittävien neliölaattojen määrää muuttujalla  $a$  ja kolme peittäviä laattoja muuttujalla  $b$ . Seitsemällä pitkällä ja yhdeksällä neliölaatalla saadaan nyt yhtälö

$$\begin{aligned} 7 \times 2 + a + 3b &= 14 + (a + b) + 2b \\ &= 14 + 9 + 2b = 23 + 2b = 32. \end{aligned}$$

Yhtälö on ristiriitainen, sillä  $23 + 2b$  on pariton ja 32 parillinen luku. Peittävää laatoitusta ei siis ole.

Käytetyn kaltainen päättely on erityisen tarpeellista, jos laatoitettava alue on suuri; pariteettia havainnollistavat yhtälöt pysyvät kaikenkokoisilla alueilla oleellisesti samanlaisina.

## Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



## Pólyan klassikko suomeksi

*Anne-Maria Ernvall-Hytönen*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

**George Pólya.** *Ratkaisemisen taito.* Art House, 2014.



George Pólyan *Ratkaisemisen taito* (englanninkielinen alkuteos *How to solve it*) on ongelmanratkaisun klassikkoteos. Se on julkaistu ensimmäisen kerran vuonna 1945, ja se on käännetty kustantajan mukaan yli kolmellekymmenelle kielelle. Kirjan on suomeksi kääntänyt englannista Johanna Järnström. Käännös on luonteva, ja kieli sujuvaa. On hieman järkyttävää, että

suomennos ilmestyi vasta vuonna 2014. Tekisi mieleeni sanoa, että hyvää kannattaa odottaa, mutta itse olisi kyllä halunnut saada teoksen suomeksi käsiini jo matematiikkakilpailu-urani aktiiviaikoina.

Teos esittelee valtavan repertuaarin ongelmanratkaisun tekniikoita, tosin varsinaisesti kyse ei ole ainoastaan ongelmanratkaisun tekniikoista, vaan pikemmin matemaattisen ajattelun konkretisoinnista. Osa näistä tekniikoista on hyvin konkreettisia, kuten matemaattinen induktio. Osa menetelmistä on puolestaan hyvin paljon abstraktimpia, kuten ennen alkuperäistä ongelmaa vastaavan, mutta helpomman ongelman ratkaiseminen, ja vasta sen jälkeen alkuperäisen ongelman kimppuun käyminen. Kirjan vahvuus on ideoiden elegantti ja konkreettinen paketointi nätiksi kokonaisuuksiksi, ja sellaisten ideoiden konkreettinen esittäminen, joita harvoin esitetään, ja joita harvoin ehkä edes kovin konkreettisesti ajatellaan (vaikka ne päässä ovatkin). Kirja ei myöskään tyydy vain ongelmanratkaisun tekniikoiden esittämiseen, vaan kirjan aluksi opastetaan myös opettajaa opettamaan (ennen kaikkea ongelmanratkaisua).

Oletetut esitiedot ovat hyvin vähäiset, ja ideat on havainnollistettu esimerkein, ja esimerkit ovat miellyttävän yksinkertaisia ja konkreettisia: ne sopivat hyvin vaikka lukiolaiselle. Aihepiirit ovat esimerkiksi alkeellista lukujonojen käsittelyä, klassista geometriaa, yhtälöitä, ja muuta hyvin havainnollista. Konkreettisten tekniikoiden käyttö saadaan näillä hyvin valaistua. Sen sijaan abstraktimpien ideoiden valaiseminen yhdellä tai

kahdella esimerkillä on mahdotonta. Ne ideat pitää vain jäädä päähän niin, että niitä ymmärtää soveltaa sopivassa tilanteessa. Se vaatii varmasti paljon matemaattista silmää, eikä siihen ole oikotietä.

Ratkaisemisen taito ei ole tehtäväkirja. Tämä tarkoittaa sitä, että toisaalta sitä on leppoisa lukea, sillä sitä voi lukea kuin romaania. Toisaalta tämä tarkoittaa sitä, että todella oppiakseen ideat on etsittävä harjoitustehtäviä muualta.

Tutkijana minua miellyttää suunnattomasti abstraktien, metatason ideoiden esittely. Niitä löytyy hyvin harvasta lähteestä. Lisäksi ne on konkretisoitu kauniisti, ja niitä on kiva lukea. Toisaalta niiden lukeminen ymmärtäen vaatii ehkä tiettyä matemaattista kypsyyttä, jota ei esimerkiksi välttämättä lukiolaisella ole, ja tämä mahdollisesti hieman verottaa kirjan kohderyhmää. Tästä huolimatta sanoisin, että kirja sopii mainiosti myös lukiolaiselle. Silloin sitä on vain luettava niin, että ihan kaikkea ei ehkä osaa heti soveltaa, mutta mikäli tekniikat ja periaatteet jäävät edes jollain tasolla takaraivoon, on niistä varmasti myöhemmin paljon iloa.

Uskoisin kirjan tuottavan huomattavasti iloa esimerkiksi matematiikan opettajalle, joka haluaisi tarjota hieman jotain ekstraa motivoituneille oppilaille. Tällaiseen käyttöön kirja sopisi mainiosti jo yläkoulussa, sillä kirjan yksinkertaisimmat esimerkit ja ideat ovat todella alkeellisia, sekä silloin opettaja voisi valita sieltä sopivat kohdat ja tarjoilla ne oppilaille sopivina palasina.

Toinen ilmeinen kohderyhmä kirjalle ovat matematiikasta innostuneet lukiolaiset. Soisin mahdollisimman monen matematiikkakilpailijan lukevan kirjaa. Itse asiassa aion käyttää kirjaa olympiavalmennuksessa. Kirja sopii mainiosti myös esimerkiksi yliopiston opiskelijoille, sillä monet tekniikat ovat sellaisia, että niitä ei varsinaisesti esitetä ikinä missään, paitsi tehtävien ratkaisuihin hautautuneina, mutta jossain vaiheessa (viimeistään tutkijana toimiessa) ihmisen oletetaan ne tuntevan.

Kolmas ilmeinen kohderyhmä kirjalle ovat matematiikan harrastajat. Harva kirja on yhtä aikaa syvällinen ja vähillä esitiedoilla luettava, ja lisäksi käsittelee matematiikkaa sekä konkreettisesti että metatasolla.

## Seitsemäsluokkalaisten alueellisen matematiikkakilpailun parhaat sijoitukset vuonna 2015

### Helsinki

1. Paavo Kärki, Helsingin suomalainen yhteiskoulu
2. Asla Heiskanen, Mankkaan koulu
3. Patrik Myller, Lahden yhteiskoulu
4. Aiki Honda, Vartiokylän yläaste
4. Sonja Häggman, Munkkiniemen yhteiskoulu

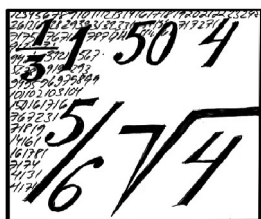
### Oulu

1. Hermann Huhtamäki, Ähtärin yhtenäiskoulu
2. Sauli Salminen, Oulun kristillinen koulu
3. Kerkko Konola, Oulun normaalikoulu
4. Petteri Kippo, Oulun kristillinen koulu
5. Konsta Heikkilä, Kirkonkylän yhtenäiskoulu

### Turku

1. Suosanna Suoranta, Puolalan koulu
2. Elias Pitkänen, Maunun koulu
3. Toni Jokinen, Turun Lyseo
3. Olli Salonen, Maunun koulu
5. Noora Vettervik, Liedon keskuskoulu

Järjestäjät: Helsingin yliopisto, Matematiikan olympiavalmennus, OuLUMA-keskus, Oulun yliopisto, Summamutikka-keskus ja Turun yliopisto



## Arvioita karakterisummille: Pólya-Vinogradovin epäyhtälö ja sen parannuksia

Jesse Jääsaari

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

### Johdanto

Alkuluvut ovat analyttisen lukuteorian keskeinen tutkimuskohde. Jo Eukleides todisti, että alkulukuja on äärettömän monta. Ensimmäinen huomio on, että lukua kaksi lukuunottamatta kaikki alkuluvut ovat parittomia. Yhdistettynä Eukleideen havaintoon niiden äärettömyydestä tämä tarkoittaa, että jonossa  $\{2n+1\}_{n \geq 0}$  on äärettömän monta alkulukua. Tästä herää luonnollinen jatkokysymys: millä muilla aritmeettisilla jonoilla  $\{an+b\}_{n \geq 0}$ , jotka koostuvat positiivisista kokonaisluvuista  $b, a+b, 2a+b, 3a+b, \dots$ , on tämä ominaisuus? Mikäli lukujen  $a$  ja  $b$  suurin yhteinen tekijä  $d$  on aidosti suurempi kuin yksi, niin jokainen jonon termi on jaollinen luvulla  $d$ , ja siten jonossa on korkeintaan yksi alkuluku. Mutta mitä tapahtuu, jos  $d=1$ ?

P. Dirichlet osoitti edistyneitä analyttisen lukuteorian keinoja käyttäen, että tässä tapauksessa jonosta  $\{an+b\}_{n \geq 0}$  löytyy todella äärettömän monta alkulukua. Todistuksessa hän joutui erottamaan muista luvuista ne luvut, jotka antavat jakojäännöksen  $a$  luvulla  $n$  jaettaessa. Luonnollinen tapa tehdä tämä on muodostaa joukon  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\}$  karakteristinen funktio eli sellainen funktio, joka saa arvon yksi tässä joukossa ja muualla arvon nolla. Valitettavasti tämä menetelmä ei kuitenkaan toimi. Sen sijaan Dirichlet määritteli toisenlaiset funktiot, joille myöhemmin löydettiin yhteyksiä myös muuhun matematiikkaan.

Dirichlet'n määrittelemiä funktioita kutsutaan *Dirichlet'n karaktereiksi*, ja tämän artikkelin tarkoituksena on tarkastella niiden summan suuruusluokkaa.

Tarkemmin sanottuna tässä artikkelissa tarkastellaan karakterisummaa

$$S_\chi(t) := \sum_{n \leq t} \chi(n),$$

missä  $\chi$  on Dirichlet'n karakteri. Eräs syy tarkastella karakterisummaa on esimerkiksi se, että ne liittyvät läheisesti alkulukujen jakautuneisuuteen aritmeettisissa jonoissa. Todistukset on yritetty kirjoittaa mahdollisimman yksityiskohtaisesti aiheen vaikeuden huomioon, mutta silti joidenkin yksityiskohtien täydentäminen on jätetty lukijalle harjoitustehtäväksi.

### Merkintöjä

Käydään nopeasti läpi käytettävät merkinnät. Olkoot  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  funktioita. Vinogradovilta peräisin oleva merkintä  $f \ll g$  tarkoittaa, että on olemassa vakio  $C$  siten, että  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Jos vakio  $C$  riippuu jostakin parametrasta  $\varepsilon$ , niin merkitään  $f \ll_\varepsilon g$ .

Kuten tavallista, kompleksiluvun  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , konjugaattia merkitään  $\bar{z} = x - iy$  ja reaali-osaa merkitään  $\Re z = x$ . Lisäksi positiivisten kokonaislukujen  $a$

ja  $b$  suurinta yhteistä tekijää merkitään suurella  $(a,b)$ . Merkintä  $e(x)$  tarkoittaa samaa kuin  $e^{2\pi ix}$ , kun  $x \in \mathbb{R}$ .

Tarvitsemme vielä muutaman aritmeettisen funktion määritelmän. Möbiuksen funktio  $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  määritellään seuraavasti: Jos luvulla  $n$  on alkutekijähajotelma  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , niin

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{jos } n \text{ on neliövapaa,} \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Esimerkiksi siis  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(4) = 0$  ja  $\mu(p) = -1$ , kun  $p$  on alkuluku. Määrittelemme vielä Eulerin funktion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tulona

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

kun luvulla  $n$  on alkulukuhajotelma  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ . Lukijalle jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että itse asiassa  $\varphi(n)$  kertoo niiden välin  $[1, n]$  kokonaislukujen lukumäärän, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä luvun  $n$  kanssa. Lopuksi, summaustapa  $\sum_{n \leq t}$  tarkoittaa, että summa otetaan niiden positiivisten kokonaislukujen yli, jotka ovat korkeintaan  $t$ .

## Dirichlet'n karakterit

Olkoon  $q$  kiinnitetty positiivinen kokonaisluku. Määritellään funktio  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  seuraavilla kolmella ehdolla:

1.  $\chi(n+q) = \chi(n)$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Jos  $(n, q) > 1$ , niin  $\chi(n) = 0$ , ja muuten  $\chi(n) \neq 0$ .
3.  $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$  kaikilla  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Tällaista funktiota kutsutaan *Dirichlet'n karakteriksi modulo  $q$*  ja sitä merkitään  $\chi \pmod{q}$ . Jatkossa Dirichlet'n karaktereja kutsutaan yksinkertaisesti vain karaktereiksi<sup>1</sup>.

Katsotaan seuraavaksi esimerkkejä karaktereista. Jos  $q = 1$ , niin löytyy vain yksi karakteri:  $\chi(n) = 1$  kaikilla  $n \in \mathbb{Z}$ . Tätä kutsutaan *triviaalikarakteriksi*. Kun  $q = 5$ , karaktereita löytyy peräti neljä kappaletta, jotka on lueteltu alla olevassa taulukossa (vasemmanpuolimmaisessa sarakkeessa on karakteri ja ylimmällä rivillä on karakterin arvot  $\chi(n)$ ; muut arvot saadaan 5-jaksollisuuden avulla, ts.  $\chi(n) = \chi(n+5)$  kaikilla kokonaisluvuilla  $n$ ):

| $\chi/n$ | 0 | 1 | 2    | 3    | 4    |
|----------|---|---|------|------|------|
| $\chi_1$ | 0 | 1 | 1    | 1    | 1    |
| $\chi_2$ | 0 | 1 | $i$  | $-i$ | $-1$ |
| $\chi_3$ | 0 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1    |
| $\chi_4$ | 0 | 1 | $-i$ | $i$  | $-1$ |

Tässä luku  $i$  on imaginääriyksikkö eli kompleksiluku, jolla on ominaisuus  $i^2 = -1$ . Karaktereja modulo 5 on siis neljä kappaletta. Yleisemmin voidaan todistaa, että karaktereja modulo  $q$  on täsmälleen  $\varphi(q)$  kappaletta ([1] s. 138–139).

Siten myös karaktereja modulo 10 on  $\varphi(10) = 4$  kappaletta. Yksi niistä on tietysti pääkarakteriksi ja toinen karakteri määräytyy arvoista  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi(1) = 1$ ,  $\chi(2) = 0$ ,  $\chi(3) = i$ ,  $\chi(4) = 0$ ,  $\chi(5) = 0$ ,  $\chi(6) = 0$ ,  $\chi(7) = -i$ ,  $\chi(8) = 0$  ja  $\chi(9) = -1$ . Lukijalle jätetään harjoitukseksi löytää puuttuvat kaksi karakteria (mod 10).

Esitetään sitten muutamia määritelmiä. Karakteri  $\chi \pmod{q}$  on *pääkarakteriksi*, jos  $\chi(n) = 1$ , kun  $(n, q) = 1$ , ja  $\chi(n) = 0$  muuten. Pääkarakterille varataan merkin  $\chi_1$ . Karakteri on *primitiivinen*, jos jokaisella luvun  $q$  aidolla tekijällä  $d \neq q$  löytyy  $0 \leq a \leq q-1$  siten, että  $a \equiv 1 \pmod{d}$  ja  $\chi(a) \neq 1$ . Karakterin *johtaja* puolestaan on pienin positiivinen kokonaisluku  $b$ , joka on luvun  $q$  tekijä ja jolla on ominaisuus  $\chi(n+b) = \chi(n)$  kaikilla  $n$ , joilla  $(n, q) = (n, b) = 1$ . Lopuksi, karakterin *kertaluku* on pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , jolla  $\chi^n$  on pääkarakteriksi modulo  $q$ .

## Pólya-Vinogradovin arvio

Aloitetaan tarkastelu katsomalla millaisia arvioita suu-reelle  $|\mathcal{S}_\chi(t)|$  saadaan vähällä vaivalla. Jos  $\chi \pmod{q}$  on pääkarakteriksi, niin saadaan helposti

$$\mathcal{S}_\chi(t) = \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor \varphi(q) + \varphi \left( t - \left\lfloor \frac{t}{q} \right\rfloor q \right),$$

jos tulkitaan, että  $\varphi(0) = 0$ . Tämän todistus on harjoitustehtävä (vihje: kirjoita  $t = kq + r$ , missä  $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ,  $0 \leq r < q$ , ja huomaa, että  $(a, q) = 1$ , jos ja vain jos  $(a+q, q) = 1$ ). Erityisesti, jos  $q$  on alkuluku, niin  $\mathcal{S}_\chi(q) = q - 1$ .

Siten jätämme pääkarakterin pois tarkastelusta. Ensimmäistä arviota varten tarvitsemme seuraavan tuloksen.

**Lemma 1.** Olkoon  $\chi \pmod{q}$  karakteri, joka ei ole pääkarakteriksi. Tällöin

$$\sum_{n=1}^q \chi(n) = 0.$$

*Todistus.* Koska  $\chi$  ei ole pääkarakteriksi, niin löytyy kokonaisluku  $m$  siten, että  $\chi(m) \neq 0, 1$ . Koska  $\chi(n) = 0$ , kun  $(n, q) > 1$ , niin summaus voidaan ajatella yli lukujen  $1 \leq n \leq q$ , joilla  $(n, q) = 1$ . Kun  $n$  käy läpi nämä

<sup>1</sup>Yleisesti näin ei tehdä, sillä matematiikassa on monia muitakin karaktereja.

luvut, niin samoin käy  $m' = mn \pmod{q}$ . Siten karakterin täyden multiplikatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\chi(m) \sum_{n=1}^q \chi(n) &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq q \\ (n,q)=1}} \chi(mn) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq m' \leq q \\ (m',q)=1}} \chi(m') = \sum_{n=1}^q \chi(n).\end{aligned}$$

Koska  $\chi(m) \neq 1$ , niin väite seuraa.  $\square$

Koska karakterin itseisarvo on korkeintaan yksi, saadaan kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \leq \sum_{n \leq t} |\chi(n)| \leq t.$$

Toisaalta, koska luvuista  $\chi(0), \chi(1), \dots, \chi(q-1)$  tasan  $\varphi(q)$  kappaletta ovat nollasta poikkeavia, niin yllä olevan huomion ja Lemman 1 nojalla

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \leq \min(t, \varphi(q)).$$

Tämä tunnetaan *triviaaliestimaattina*. Yleisesti se on paras mahdollinen arvio, sillä pääkarakterilla  $\chi_1 \pmod{q}$  pätee  $|\mathcal{S}_{\chi_1}(q)| = \varphi(q)$ . Tätä arviota on parannettu aikojen saatossa ei-pääkarakterilla. Tässä artikkelissa todistetaan ensimmäinen epätriviaali arvio ei-pääkarakterille, joka tunnetaan Pólya-Vinogradovin epäyhtälönä. Nimensä se on saanut G. Pólyalta ja I.M. Vinogradovilta, jotka todistivat kyseisen arvion toisistaan riippumatta vuonna 1918 [6], [7]. Tätä varten johdetaan ensin sarjaesitys primitiiviselle karakterille  $\chi \pmod{q}$ . Merkitään

$$\tau(\chi) := \sum_{a=1}^q \chi(a) e\left(\frac{a}{q}\right).$$

Suuretta  $\tau(\chi)$  kutsutaan karakteriin  $\chi \pmod{q}$  liittyväksi *Gaussin summaksi*.

**Lemma 2.** Olkoon  $\chi \pmod{q}$  primitiivinen karakteri. Tällöin

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

kaikilla kokonaisluvuilla  $n$ .

*Todistus.* Todistetaan väite ensin niille luvuille  $n$ , joille  $(n, q) = 1$ . Harjoitustehtävänä lukija voi todeta, että jokaisella  $n \in \mathbb{Z}$ , jolla  $(n, q) = 1$ , löytyy kokonaisluku  $\tilde{n}$  siten, että  $n\tilde{n} \equiv 1 \pmod{q}$ , jolloin  $\chi(\tilde{n}) = \bar{\chi}(n)$ . Tällöin

$$\begin{aligned}\chi(n)\tau(\bar{\chi}) &= \chi(n) \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{m}{q}\right) \\ &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(\tilde{n}m) e\left(\frac{m}{q}\right) \\ &= \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Näytetään sitten, että  $\tau(\bar{\chi}) \neq 0$ . Osoitetaan, että itse asiassa  $|\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{q}$  primitiivisellä  $\chi \pmod{q}$ . Tätä tietoa tullaan tarvitsemaan myöhemmin.

Identiteetistä (1) seuraa, että

$$\begin{aligned}|\chi(n)|^2 |\tau(\bar{\chi})|^2 &= \sum_{m=1}^q \sum_{m'=1}^q \bar{\chi}(m) \chi(m') e\left(\frac{n(m-m')}{q}\right).\end{aligned}$$

Summaamalla yli lukujen  $n = 1, \dots, q$ , käyttäen tietoa, että lukujen  $|\chi(n)|^2$  summa näiden lukujen yli on  $\varphi(q)$ , sekä tietoa, että

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(m) \chi(m') e\left(\frac{n(m-m')}{q}\right) \\ + \bar{\chi}(m') \chi(m) e\left(\frac{n(m'-m)}{q}\right) = 0,\end{aligned}$$

ellei  $m \equiv m' \pmod{q}$ , saadaan

$$\varphi(q) |\tau(\bar{\chi})|^2 = q \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) \chi(m) = q\varphi(q),$$

mistä haluttu yhtälö  $|\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{q}$  seuraa. Huomauteaan vielä, että myös  $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ , sillä  $\chi \pmod{q}$  on primitiivinen, jos ja vain jos karakteri  $\bar{\chi} \pmod{q}$  on primitiivinen.

Jakamalla luvulla  $\tau(\bar{\chi})$  saadaan

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(h) e\left(\frac{mn}{q}\right), \tag{2}$$

mikä oli lemmän väite.

Osoitetaan sitten, että kaava (2) pätee myös niillä luvun  $n$  arvoilla, joilla  $d := (n, q) > 1$ . Tässä tapauksessa  $\chi(n) = 0$  ja siksi riittää osoittaa, että

$$\sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right) = 0.$$

Kirjoitetaan  $q = q'd$ . Tarkastellaan lukuja  $h = q' \cdot a + b$ , missä  $a = 0, 1, \dots, d-1$  ja  $b = 0, 1, \dots, q'-1$ . Kun  $a$  ja  $b$  käyvät läpi kaikki mahdolliset näiden lukujen yhdistelmät, niin  $m$  käy läpi kaikki joukon  $\{0, 1, \dots, q-1\}$  alkioit. Siten

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right) &= \sum_{b=0}^{q'-1} \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(q'a + b) e\left(\frac{(q'a + b)n}{q}\right) \\ &= \sum_{b=0}^{q'-1} e\left(\frac{bn}{q}\right) \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(q'a + b),\end{aligned}$$

koska  $\frac{q'an}{q}$  on kokonaisluku.

Nyt riittää osoittaa, että kiinnitetyllä  $q'$  kaava

$$\sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(q'a + b) = 0 \quad (3)$$

on voimassa jokaisella kokonaisluvulla  $b$ . Tarkastellaan yhtälön (3) vasenta puolta  $b$ :n funktiona. Tällöin se on  $q'$ -jaksollinen (tämä jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi). Olkoon  $c$  sellainen kokonaisluku, että  $(c, q) = 1$  ja  $c \equiv 1 \pmod{q'}$ . Käyttäen  $q'$ -jaksollisuutta saadaan

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(c) \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(q'a + b) &= \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(cq'a + cb) \\ &= \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(aq' + cb) \\ &= \sum_{a=0}^{d-1} \bar{\chi}(q'a + b). \end{aligned} \quad (4)$$

Huomataan, että primitiivisellä  $\chi \pmod{q}$  on voimassa  $\chi(n + q') \neq \chi(n)$  jokaisella  $q$ :n aidolla tekijällä  $q'$ , kaikilla  $n$ , joilla  $(n, q) > 1$  (tämä on taas jätetty harjoitustehtäväksi lukijalle). Tästä seuraa, että on olemassa kokonaisluvut  $c_1$  ja  $c_2$  siten, että  $(c_1, q) = (c_2, q) = 1$ ,  $c_1 \equiv c_2 \pmod{q'}$  ja  $\chi(c_1) \neq \chi(c_2)$ . Siten on olemassa kokonaisluku  $c \equiv c_1 \bar{c}_2 \pmod{q'}$ , jolla  $\bar{\chi}(c) \neq 1$ ,  $c \equiv 1 \pmod{q'}$  ja  $(c, q) = 1$ . Valitsemalla tämän  $c$ :n yhtälössä (4) saadaan yhtälö (3). Näin ollen lemmän todistus on viimein valmis.  $\square$

Nyt voidaan muotoilla ja todistaa Pólya-Vinogradovin lause. Seuraamme kirjan [1] todistusta. Huomionarvoista on, että tämä raja on huomattavasti parempi kuin triviaaliestimaatin antama yläraja, sillä logaritmi kasvaa paljon hitaammin kuin neliöjuuri.

**Lause 3.** Olkoon  $\chi \pmod{q}$  ei-pääkarakter. Tällöin

$$\mathcal{S}_\chi(t) \ll \sqrt{q} \log q.$$

*Todistus.* Oletetaan ensin, että  $\chi$  on primitiivinen. Lemman 2 perusteella sillä on esitys sarjana

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^q \bar{\chi}(m) e\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Summaamalla lukujen  $n \leq t$  yli saadaan

$$\mathcal{S}_\chi(t) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^{q-1} \bar{\chi}(m) \sum_{n \leq t} e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

koska  $\chi(q) = 0$ . Ottamalla itseisarvot puolittain, kertomalla luvulla  $\sqrt{q}$  ja käyttämällä tietoa  $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$  saadaan

$$\sqrt{q} \cdot |\mathcal{S}_\chi(t)| = \left| \sum_{m=1}^{q-1} \sum_{n \leq t} e\left(\frac{mn}{q}\right) \right|,$$

mistä kolmioepäyhtälöön avulla saadaan

$$\sqrt{q} \cdot |\mathcal{S}_\chi(t)| \leq \sum_{m=1}^{q-1} \left| \sum_{n \leq t} e\left(\frac{mn}{q}\right) \right|. \quad (5)$$

Merkitään

$$f(m) := \sum_{n \leq t} e\left(\frac{mn}{q}\right).$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} f(q-m) &= \sum_{n \leq t} e\left(\frac{n(q-m)}{q}\right) \\ &= \sum_{n \leq t} e\left(-\frac{mn}{q}\right) \\ &= \bar{f}(m) = \overline{f(m)} \end{aligned}$$

ja näin ollen  $|f(q-m)| = |\bar{f}(m)| = |f(m)|$ . Siten (5) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \sqrt{q} \cdot |\mathcal{S}_\chi(t)| &\leq 2 \sum_{m < q/2} |f(m)| \\ &\quad + \frac{(-1)^q + 1}{2} \left| f\left(\frac{q}{2}\right) \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Erityisesti jos  $q$  on pariton, niin jälkimmäinen termi katoaa.

Koska lausekkeen  $f(m)$  termit muodostavat geometrisen sarjan, niin lukiosta tutun summakaavan avulla voidaan laskea, että luvun  $f(m)$  itseisarvo on

$$\begin{aligned} |f(m)| &= \left| e\left(\frac{m \lfloor t+1 \rfloor}{2q}\right) \frac{e\left(-\frac{\lfloor t \rfloor m}{2q}\right) - e\left(\frac{\lfloor t \rfloor m}{2q}\right)}{e\left(-\frac{m}{2q}\right) - e\left(\frac{m}{2q}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{\sin \frac{\pi \lfloor t \rfloor m}{q}}{\sin \frac{\pi m}{q}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi m}{q}}. \end{aligned}$$

Nyt käyttämällä epäyhtälöä  $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$  (mikä pätee kun  $t \in [0, \pi/2]$ , todistus harjoitustehtävänä), arvolla  $t = \frac{\pi m}{q}$  saadaan

$$|f(m)| \leq \frac{q}{2m},$$

kun  $m \leq \frac{q}{2}$ . Jos  $q$  on pariton, niin kaava (6) antaa

$$\sqrt{q} \cdot |\mathcal{S}_\chi(t)| \leq q \sum_{m < \frac{q}{2}} \frac{1}{m} < q \log q.$$

Jos taas  $q$  on parillinen, niin  $|f(q/2)| \leq 1$  ja siten (6) antaa

$$\sqrt{q} \cdot |\mathcal{S}_\chi(t)| \leq q \left( \sum_{m < \frac{q}{2}} \frac{1}{m} + \frac{1}{q} \right) < q \log q.$$

Molemmissa tapauksissa

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| < \sqrt{q} \log q,$$

kuten haluttiinkin.

Oletetaan seuraavaksi, että  $\chi \pmod{q}$  on ei-primitiivinen karakteri, ja olkoon  $c$  sen johtaja. Tällöin

$$\chi(m) = \psi(m)\chi_1(m),$$

missä  $\chi_1$  on pääkarakterin modulo  $q$  ja  $\psi$  on jokin primitiivinen karakteri modulo  $c$  (tämän tarkistaminen jätetään lukijalle).

Käyttämällä edellistä kaavaa saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\chi(t) &= \sum_{\substack{n \leq t \\ (n,q)=1}} \psi(n) \\ &= \sum_{n \leq t} \psi(n) \sum_{d|(n,q)} \mu(d) \\ &= \sum_{n \leq t} \sum_{\substack{d|q \\ d|n}} \mu(d) \psi(n) \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{q \leq \frac{t}{d}} \psi(qd) \\ &= \sum_{d|q} \mu(d) \psi(d) \sum_{x \leq \frac{t}{d}} \psi(x). \end{aligned}$$

Koska Pólya-Vinogradovin epäyhtälö on voimassa primitiiviselle karakterille  $\psi \pmod{c}$ , niin

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_\chi(t)| &\leq \sum_{d|q} |\mu(d)\psi(d)| \left| \sum_{x \leq \frac{t}{d}} \psi(x) \right| \\ &< \sqrt{c} \log c \left| \sum_{d|q} \mu(d)\psi(d) \right| \\ &\leq \sqrt{c} \log c \sum_{d|q} |\mu(d)\psi(d)|. \end{aligned} \quad (7)$$

Huomataan sitten, että  $|\mu(d)\psi(d)|$  on joko 0 tai 1. Se on yksi, jos ja vain jos  $|\mu(d)| = 1$  ja  $|\psi(d)| = 1$ . Siis täsmälleen silloin, kun  $d$  on neliövapaa ja  $(d,c) = 1$ . Silloin luku  $d$  voidaan kirjoittaa erisuurten alkulukujen tulona  $d = p_1 p_2 \cdots p_l$ . Silloin yksikään alkuluku  $p_i$  ei jaa lukua  $c$ . Siten jokainen alkuluku  $p_i$  jakaa luvun  $\frac{q}{c}$  ja siten erityisesti  $d$  jakaa tämän luvun. Näin ollen

$$\sum_{d|q} |\mu(d)\psi(d)| \leq \sum_{d|\frac{q}{c}} 1 \leq 2 \sum_{d \leq \sqrt{\frac{q}{c}} d|\frac{q}{c}} 1 \leq 2\sqrt{\frac{q}{c}} \ll \sqrt{\frac{q}{c}}.$$

Siten kaavasta (7) seuraa, että

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \ll \sqrt{\frac{q}{c}} \cdot \sqrt{c} \log c \ll \sqrt{q} \log c \ll \sqrt{q} \log q,$$

mikä todistaa väitteen.  $\square$

Käyttämällä osittaissummauskaavaa

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A'(t)f'(t)dt,$$

missä  $a_1, \dots, a_n$  ovat reaalityyppisiä,  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$  ja  $f$  välillä  $[1, x]$  derivoituva funktio (tätä voi ajatella diskreettinä osittaisintegroitina), saadaan alaraja primitiivisten karakterien summalle:

$$\sqrt{q} = |\tau(\chi)| \leq \frac{2\pi}{q} \int_1^q |\mathcal{S}_\chi(t)| dt \leq 2\pi \max_{t \leq q} |\mathcal{S}_\chi(t)|$$

eli

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \gg \sqrt{q}.$$

Näin ollen Pólya-Vinogradovin epäyhtälöstä voitaisiin parhaimmillaan pudottaa tekijä  $\log q$  pois.

## Parannuksia

Tässä luvussa tarkastellaan Lauseen 3 mahdollisia vahvennuksia muutamassa eri tilanteessa. Ensinnäkin, Pólya-Vinogradovin epäyhtälöä voidaan parantaa olettamalla eräs merkittävä lukuteoreettinen väite. Määritellään Dirichlet'n  $L$ -funktio ja yleistetty Riemannin hypoteesi. Olkoon  $\chi \pmod{q}$  karakteri ja  $s \in \mathbb{C}$  sellainen, että  $\Re s > 1$ . Tällöin Dirichlet'n  $L$ -sarja on

$$L(s, \chi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Tämän voi laajentaa meromorfeiseksi funktioksi koko kompleksitasoon, jolloin siitä tulee Dirichletin  $L$ -funktio, jolle käytetään edelleen merkintää  $L(s, \chi)$ . Yleistetty Riemannin hypoteesi (YRH) sanoo seuraavaa.

**Konjektuuri (YRH):** Olkoon  $\chi \pmod{q}$  karakteri ja  $L(s, \chi)$  siihen liittyvä  $L$ -funktio. Jos  $s \in \mathbb{C}$  on sellainen, että  $0 \leq \Re s \leq 1$  ja  $L(s, \chi) \neq 0$ , niin itse asiassa  $\Re s = 1/2$ .

Riemannin hypoteesi, joka on yksi matematiikan tärkeimmistä avoimista ongelmista, on erikoistapaus yllä olevasta, kun  $\chi$  on triviaalikarakterin.

Jos YRH on totta, niin seuraava vahvennos Pólya-Vinogradovin epäyhtälölle on voimassa.

**Lause 4.** Oletetaan YRH. Tällöin ei-pääkarakterilla  $\chi \pmod{q}$  pätee

$$\mathcal{S}_\chi(t) \ll \sqrt{q} \log \log q.$$

Tämän todistivat H. Montgomery ja R.C. Vaughan vuonna 1977 [5].



Tarkastellaan sitten, millaisia parannuksia on olemassa tietynlaisille karaktereille. Erityisesti tarkastelemme paritonta kertalukua olevia karaktereita. A. Granville, K. Soundararajan ja L. Goldmakher osoittivat seuraavan tuloksen.

**Lause 5.** Jos  $\chi \pmod{q}$  on paritonta kertalukua  $g \geq 3$  oleva karakteri, niin

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \ll_g \sqrt{q}(\log q)^{1-\delta_g+o(1)}, \quad (8)$$

missä  $\delta_g = 1 - \frac{g}{\pi} \sin \frac{\pi}{g}$  ja  $o(1)$  on termi, joka lähestyy nollaa, kun  $g \rightarrow \infty$ .

Voidaan esimerkiksi laskea, että  $1 - \delta_2 = 0.636619\dots$ ,  $1 - \delta_3 = 0.8269933\dots$ ,  $1 - \delta_4 = 0.9003163\dots$  ja  $1 - \delta_5 = 0.935489\dots$  jne. Lisäksi lukija voi helposti todeta, että  $1 - \delta_g \rightarrow 1$ , kun  $g \rightarrow \infty$ . Näin ollen parannukset suurilla  $g$ :n arvoilla ovat melko pieniä.

Alunperin Granville ja Soundararajan osoittivat arvion (8) muuttujalla  $\delta_g/2$  [4], ja lopulta Goldmakher, Soundararajanin oppilaana, paransi muuttujan  $\delta_g$ :een väitöskirjassaan [2, 3]. Arvion (8) todistus on pitkä ja se käyttää pitkälle meneviä analyysin menetelmiä ja siksi se sivuutetaan.

Keskustellaan vielä yhdestä parannuksesta. Montgomeryn ja Vaughanin tulokselle (Lause 4) on parannus YRH:n vallitessa. Tämäkin tulos on peräisin Granvillelta, Soundararajanilta ja Goldmakherilta [3, 4].

**Lause 6.** Oletetaan YRH. Jos  $\chi \pmod{q}$  on paritonta kertalukua  $g \geq 3$  oleva karakteri, niin

$$|\mathcal{S}_\chi(t)| \ll_g \sqrt{q}(\log \log q)^{1-\delta_g+o(1)}.$$

Ainoa ero lauseiden 3,5 ja 4,6 välillä on siis se, että  $\log q$ :n paikalla on  $\log \log q$ . Lauseiden 5 ja 6 väitteet

ovat vahvempia kuin lauseiden 3 ja 4, sillä  $\log \log x$  kasvaa hitaammin kun  $\log x$ . Pitää kuitenkin muistaa, että Lause 5 on todistettu vain tietynlaisille karaktereille ja että lauseet 4 ja 6 eivät välttämättä pidä paikkaansa, mikäli YRH ei päde.

## Viitteet

- [1] Apostol, T. M.: Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer (1976).
- [2] Goldmakher, L.: Multiplicative Mimicry and Improvements of the Pólya-Vinogradov Inequality. (2009), Phd-Thesis, University of Michigan.
- [3] Goldmakher, L.: Multiplicative mimicry and improvements of the Pólya-Vinogradov inequality. Algebra and Number Theory Vol. 6 (2012), No. 1, s. 123–163.
- [4] Granville, A. & Soundararajan, K.: Large character sums: Pretentious characters and the Pólya-Vinogradov theorem. J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), no. 2, s. 357–384.
- [5] Montgomery, H. & Vaughan, R.C.: Exponential sums with multiplicative coefficients. Invent. Math. 43 (1): s. 69–82.
- [6] Pólya, G.: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. Göttinger Nachrichten (1918), s. 21–29.
- [7] Vinogradov, I.M.: Sur la distribution des résidus et des nonrésidus des puissances. J. Phys.-Mat. ob-va Permsk Univ. 1 (1918) s. 94–98.

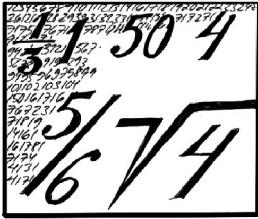
## Uutta Verkko-Solmussa

Verkko-Solmun Matematiikan opetus -sivulla

[matematiikkalehtisolmu.fi/opetus.html](http://matematiikkalehtisolmu.fi/opetus.html)

on ilmestynyt unkarilaisia matematiikan tehtäviä otsikolla Lisää unkarilaisia matematiikan tehtäviä koululaisille:

[matematiikkalehtisolmu.fi/2015/UnkarinTehtavia2.pdf](http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/UnkarinTehtavia2.pdf)



## Osittaissummauksella ikävien summien kimppuun

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kuvitellaan, että pihalla leikkii lapsia, joilla jokaisella on yhtä monta palloa kuin ikää vuosina. Naapuriin muuttaa lapsia, joilla ei ole lainkaan palloja. Solidaarisuuden nimissä lapset päättävät antaa naapureille osan palloistaan. Koska olisi kohtuutonta, jos kaikki luopuisivat yhtä monesta pallosta, kun niitä ei alun perinkään yhtä monta ollut, päätetään, että jokainen lapsi jättää itselleen (kokonaislukuun pyöristettynä) sen määrän palloja, mikä jää, kun oma alkuperäinen pallomäärä jaetaan oman iän luonnollisella logaritmilla (paitsi yksi- ja kaksivuotiaiden palloihin ei kosketa). Siispä, jos lapsen ikä on vaikka 5, alun perin hänellä on viisi palloa, ja lahjoituksen jälkeen  $\frac{5}{\ln 5} \approx 3,1 \approx 3$  palloa. Kuinka monta palloa lapsille karkeasti ottaen jää yhteensä?

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että pihalla on vain vähintään kolmevuotiaita lapsia. On helppo laskea, että jos alun perin pallomäärät (eli iät) ovat nousevassa järjestyksessä  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , ja niitä on yhteensä  $N$  kappaletta, niin uusi pallomäärä on

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{\ln a_1} + \frac{a_2}{\ln a_2} + \dots + \frac{a_k}{\ln a_k} \\ \geq \frac{a_1}{\ln a_k} + \frac{a_2}{\ln a_k} + \dots + \frac{a_k}{\ln a_k} \\ = \frac{1}{\ln a_k} (a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \frac{N}{\ln a_k}, \end{aligned}$$

mikäli ei välitetä pyöristyksistä. Samoin saadaan, että pallomäärä on korkeintaan  $\frac{N}{\ln a_1}$  (jälleen mikäli ei välitetä pyöristyksistä). Mikäli luvut  $a_1$  ja  $a_k$  (eli nuorimman

ja vanhimman iät) ovat lähellä toisiaan, on näin saatu varsin hyvät arviot summalle. Jos lukujen  $a_1$  ja  $a_k$  ero on huomattava, on tuloksessakin heittoa. Esimerkiksi, jos lasten iät ovat  $3, 4, \dots, 17$ , niin alun perin palloja on  $3 + 4 + \dots + 17 = 150$ , ja  $\frac{150}{\ln 3} \approx 137$  ja  $\frac{150}{\ln 17} \approx 53$ . Näiden tulosten välillä on valtava ero. Kumpi näistä on lähempänä totuutta? Ovatko molemmat päin honkia?

Koska luvut ovat varsin pieniä, voidaan helposti laskea pallojen todellinen määrä. Kolmevuotiaalla on  $\frac{3}{\ln 3} \approx 2,7 \approx 3$  palloa, nelivuotiaalla  $\frac{4}{\ln 4} \approx 3$  palloa, ja niin edelleen. Yhteensä 66 palloa. Pienempi raja oli siis selvästi parempi, ja se ei itse asiassa edes ollut täysin päin honkia, vaikkakaan ei ihan oikeinkaan.

Tällaisten summien käsittelyyn *osittaussummaus* on oiva työkalu. Esitellään seuraavissa luvuissa osittaussummaus formaalisti ja todistetaan se, käsitellään yhteys osittaisintegraationiin, ja lopuksi käydään läpi muutama esimerkki, mukaan lukien lukuteoreettinen sovelmus. Mikäli osittaisintegraatio on täysin vierasta, voi jättää lukematta sen osan tekstiä, joka liittyy osittaussummauksen osittaisintegraationiin. Tekstin muun osan ymmärtäminen ei vaadi tämän osan lukemista.

### Osittaissummauksen pääperiaate

Esitän osittaissummauksen kuten se Inghamin kirjassa [1] on sivulla 18 esitetty vain hieman notaatiota muuttaen:

**Lause.** Olkoon  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  kasvava jono reaalilukuja, joka lähestyy ääretöntä. Olkoon

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n,$$

missä luvut  $a_n$  voivat olla reaalisia tai kompleksisia. Jos  $X \geq \lambda_1$  ja funktiolla  $f(x)$  on jatkuva derivaatta, niin

$$\sum_{\lambda_n \leq X} a_n f(\lambda_n) = A(X)f(X) - \int_{\lambda_1}^X A(x)f'(x)dx.$$

**Todistus.** Todistus on varsin yksinkertainen, ja se perustuu alkuperäisen summan ja termin  $A(X)f(X)$  erotukseen:

$$\begin{aligned} A(X)f(X) - \sum_{\lambda_n \leq X} a_n f(\lambda_n) \\ = \sum_{\lambda_n \leq X} a_n (f(X) - f(\lambda_n)). \end{aligned}$$

Koska funktio  $f$  on jatkuvasti derivoituva, voidaan kirjoittaa

$$f(X) - f(\lambda_n) = \int_{\lambda_n}^X f'(x)dx,$$

jolloin

$$\begin{aligned} A(X)f(X) - \sum_{\lambda_n \leq X} a_n f(\lambda_n) \\ = \sum_{\lambda_n \leq X} a_n \int_{\lambda_n}^X f'(x)dx, \end{aligned}$$

jolloin integrointi- ja summausjärjestystä vaihtaen (Harjoitustehtävä: piirrä kuva muuttujien suuruuksista tai muutoin vakuuta itsesi, että näin todella on):

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq X} a_n \int_{\lambda_n}^X f'(x)dx &= \int_{\lambda_1}^X \sum_{\lambda_n \leq x} a_n f'(x)dx \\ &= \int_{\lambda_1}^X A(x)f'(x)dx, \end{aligned}$$

ja väite on todistettu.

Käytännössä jono  $\lambda_n$  on usein esimerkiksi  $\lambda_n = n$  tai alkuluvuista koostuva jono, mutta lauseen määrittely antaa mahdollisuuden määrittellä jonon paljon mielikuvituksellisemminkin tavoilla.

## Yhteys osittaisintegrointiin

Aluksi varoituksen sananen: hetken päästä puhun sujuvasti epäjatkuvien funktioiden integraaleista. Tällaisten funktioiden integraalia ei välttämättä pysty määrittelemään millään näillä kaavalla. Silti muutoin riittävän siististi käyttäytyvät epäjatkuvat funktiot ovat

usein integroituvia (ehtoja integroituvuudella käsitellään yliopiston kursseilla).

Osittaissummaus on osittaisintegroinnin diskreetti vastine: Siinä missä positiivisen funktion  $g$  integraali mittaa funktion ja  $x$ -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa, summa funktion arvoista mittaa sellaista pinta-alaa, joka saadaan muodostamalla funktion arvojen korkuisia ja ykkösen levyisiä palkkeja. Voi myös ajatella niin, että jos funktio  $g$  on määritelty kokonaislukupisteissä, niin täydennetään siitä kaikilla reaaliluvuilla määritelty funktio siten, että määritetään  $g(x) = g(\lfloor x \rfloor)$ . Näin summauksen ja integroinnin yhteys on ilmeinen.

Osittaisintegrointihan toimii seuraavasti:

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = \int_a^b G(x)f(x) - \int_a^b G(x)f'(x)dx,$$

missä  $G'(x) = g(x)$ . Osittaissummauksen tilanteessa funktio  $f$  ei muutu mitenkään. Sen sijaan funktio  $g$  pitää ajatella kokonaislukupisteissä määriteltynä funktiona (tai siitä reaaliluvuille kaavalla  $g(x) = g(\lfloor x \rfloor)$  yleistettynä) ja  $G(x)$  puolestaan summafunktiona tai yleistetyn funktion integraalina. Osittaissummauksessa alasijoitukset jäävät pois, sillä summa on siellä tyhjä (eli osittaissummauksessa  $G(a) = 0$ ).

## Kuinka suuri on kertoma?

Luvun  $n$  kertoma, jota merkitään  $n!$ , on lukujen  $1, 2, \dots, n$  tulo, eli

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{1 \leq m \leq n} m.$$

Ensimmäinen ajatus tätä lukua tuijottaessa ainakin minulle itselleni alun perin oli, että sen on pakko olla tuhattomasti pienempi kuin  $n^n$ . Alarajan määrittäminen tuntui paljon hankalammalta. Esimerkiksi arvio  $n! \geq 1^n = 1$  tarjoaisi kyllä alarajan, mutta yleisesti ottaen tämä alaraja on aivan valtavan huono. Tarkastellaan nyt tätä lukua tarkemmin. Otetaan aluksi tulosta logaritmi:

$$\ln n! = \sum_{1 \leq m \leq n} \ln m.$$

Tämän summan voi joko arvioida edellisen Solmun numeron opeilla integraalien avulla, tai sitten voidaan hyödyntää osittaissummausta.

Osittaissummauksen notaatiota käyttäen  $a_m = 1$  ja  $f(x) = \ln x$ . Nyt

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m \leq n} \ln m &= \sum_{1 \leq m \leq n} a_m f(m) \\ &= f(n) \sum_{1 \leq m \leq n} a_m - \int_1^n \left( \sum_{1 \leq m \leq x} a_m \right) f'(x)dx \\ &= n \ln n - \int_1^n \frac{\lfloor x \rfloor}{x} dx. \end{aligned}$$

Nyt saadaan helpolla arviolla

$$\int_1^n \frac{\lfloor x \rfloor}{x} dx \leq \int_1^n 1 dx = n - 1 < n.$$

Siispä  $\ln n! \geq n \ln n - n$ , eli  $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , joten oikeastaan  $n^n$  ei ole yhtään hullumpi arvio luvulle  $n!$ , vaikka se reilusti yläkanttiin onkin.

## Lapset jälleen pihamaalla

Palataan nyt alun esimerkkiin ja solidaarisiin lapsiin leikkimässä pihamaalla ja jakamassa pallojaan. Oletetaan, että lasten iät ovat  $3, 4, 5, \dots, n$ , ja tarkastellaan miten pallojen määrä käyttäytyy, kun  $n$  kasvaa. (On ehkä syytä olettaa, että eletään jollain mystisellä planeetalla, jolla täysikäisyyden raja on ääretön, eli kaikki ovat lapsia iästä riippumatta.)

Lapsen, jonka ikä on  $k$  vuotta, pallomäärä on  $\frac{k}{\ln k}$  pyöristettynä kokonaislukuun. Lapsia on alle  $n$  kappaletta, joten jos unohdetaan pyöristykset ja eletään ikään kuin pallomäärä olisi  $\frac{k}{\ln k}$ , niin virhe on korkeintaan luvun  $n$  kokoinen kaikilta lapsilta yhteensä.

Muistetaan vielä, että niiden lasten, joiden ikä on korkeintaan  $m$ , ikien summa on  $\frac{m(m+1)}{2} - 3$ . Nyt

$$\sum_{3 \leq k \leq n} \frac{k}{\ln k} = \frac{n(n+1)}{2 \ln n} - \frac{3}{\ln n} - \int_3^n \left( \sum_{3 \leq k \leq x} k \right) \cdot \frac{-1}{x(\ln x)^2} dx.$$

Huomataan ensinnäkin, että

$$\frac{n(n+1)}{2 \ln n} - \frac{3}{\ln n}$$

on hyvin tarkasti  $\frac{n(n+1)}{2 \ln n}$ , eli pallojen alkuperäinen määrä jaettuna logaritmillä. Keskitytään nyt integraalin arviointiin. Integraalin tarkka määrittäminen olisi viheliäinen tehtävä, joten pelataan likiarvoilla.

Nyt huomataan, että

$$\sum_{3 \leq k \leq x} k \leq \frac{x(x+1)}{2} - 3,$$

kun  $x$  on mikä tahansa reaaliluku. Voidaan siis korvata integraali lausekkeella

$$\begin{aligned} & - \int_3^n \left( \sum_{3 \leq k \leq x} k \right) \cdot \frac{-1}{x(\ln x)^2} dx \\ & \leq \int_3^n \left( \frac{x(x+1)}{2} - 3 \right) \cdot \frac{1}{x(\ln x)^2} dx. \end{aligned}$$

Termin

$$\int_3^n \frac{3}{x(\ln x)^2} dx \leq 3 \int_3^n \frac{1}{x} dx \leq 3 \ln n$$

vaikutus on hyvin pieni. Voidaan siis keskittyä integraalin

$$\int_3^n \frac{x(x+1)}{2} \cdot \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_3^n \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx$$

arviointiin. Koska olemme kiinnostuneita pallojen määrän käyttäytymisestä, kun  $n$  lähestyy ääretöntä, voidaan olettaa  $\sqrt{n} \geq 3$ . Jaetaan integraali kahtia pisteestä  $\sqrt{n}$ , jolloin saadaan

$$\int_3^n \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx = \int_3^{\sqrt{n}} \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx + \int_{\sqrt{n}}^n \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx.$$

Ensimmäinen palikka on hyvin helppo arvioida:

$$\int_3^{\sqrt{n}} \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx \leq n,$$

koska integroitava on pienempi kuin  $\sqrt{n}$ , kuten myös integraalin pituus. Toinen termi yksinkertaistetaan logaritmin avulla. Tässä ei edes menetetä paljon tarkkuutta, sillä logaritmi kasvaa hyvin hitaasti. Siispä

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{n}}^n \frac{x+1}{2(\ln x)^2} dx & \leq \int_{\sqrt{n}}^n \frac{x+1}{2(\ln \sqrt{n})^2} dx \\ & = \frac{2}{(\ln n)^2} \int_{\sqrt{n}}^n (x+1) dx \\ & \leq \frac{2}{(\ln n)^2} \cdot \frac{(n+2)n}{2} = \frac{(n+2)n}{(\ln n)^2}. \end{aligned}$$

Luvun  $n$  kasvaessa tämä viimeksi saatu termi on suurin virhetermeistä. Kuitenkin sekin on selvästi pienempi kuin  $\frac{n(n+1)}{2 \ln n}$ , joten pallojen määrä jaettuna suurimmalla logaritmillä osoittautuu varsin hyväksi arvioksi, kun lasten iät ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, ja vanhin lapsista on hyvin vanha.

## Pienimmän yhteisen jaettavan suuruusluokka

Tarkastellaan miten suuri on sellainen luku, joka on  $n$  ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun pienin yhteinen jaettava, eli joka on pienin positiivinen kokonaisluku, joka on jaollinen kaikilla luvuista  $1, 2, \dots, n$ . Huomataan aluksi (väitteen varmistaminen jätetään harjoitustehtäväksi), että tämän luvun pitää olla muotoa

$$\prod_{p \leq n, p \text{ alkuluku}} p^{\lfloor \log_p n \rfloor}.$$

Koska  $\lfloor \log_p n \rfloor = 1$ , kun  $\sqrt{n} < p \leq n$ , voidaan tulo kirjoittaa tulon

$$\prod_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} p^{\lfloor \log_p n \rfloor}$$

ja tulon

$$\prod_{\sqrt{n} < p \leq n, p \text{ alkuluku}} p$$

tulona. Aloitetaan tarkastelu jälkimmäisestä termistä. Tämän käsittely on lähes samanlainen kuin kertoman tapauksessa. Yksinkertaisuuden vuoksi otetaan tulosta logaritmi, jolloin saadaan se muunnettua summaksi:

$$\ln \prod_{\sqrt{n} < p \leq n, p \text{ alkuluku}} p = \sum_{\sqrt{n} < p \leq n, p \text{ alkuluku}} \ln p.$$

Alkulukulause on hyvin syvälinen tulos (sitä ei todisteta tässä, mutta tulos löytyy useista analyttisen lukuteorian kirjoista), joka kertoo, kuinka paljon annettua lukua pienempiä alkulukuja on. Sen nojalla lukua  $x$  pienempiä alkulukuja on

$$\frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

missä  $o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$  tarkoittaa, että sitä vastaavan virhetermin ja luvun  $\frac{x}{\ln x}$  osamäärä lähestyy nollaa, kun  $x$  lähestyy ääretöntä. Lukujen  $\sqrt{n}$  ja  $n$  välissä on siis

$$\frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right) - \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}} - o\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

alkulukua. Osittaissummauksen avulla

$$\begin{aligned} \sum_{\sqrt{n} < p \leq n} \ln p &= \ln n \cdot \left(\frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right)\right) \\ &\quad - \int_{\sqrt{n}}^n \left(\frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right)\right) x^{-1} dx \\ &= n + o(n) - \int_{\sqrt{n}}^n \left(\frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

Integraalin voi käsitellä usealla tavalla riippuen siitä, mitä tarkkuutta tavoitellaan. Kuitenkin koska päätermi on  $n$ , ja ensimmäinen virhetermi  $o(n)$ , olisi turhaa kikkailua käyttää energiaa saadakseen integraalille tarkan arvon. Voidaan siis helposti arvioida:

$$\begin{aligned} &\int_{\sqrt{n}}^n \left(\frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) dx \\ &\leq \int_{\sqrt{n}}^n \left(\frac{1}{\ln \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\ln \sqrt{n}}\right)\right) dx \\ &\leq \frac{n}{\ln \sqrt{n}} + o\left(\frac{n}{\ln \sqrt{n}}\right) = o(n). \end{aligned}$$

Olemme nyt saaneet valmiiksi suurten alkulukujen osuuden määrittämisen. Nyt voidaan siirtyä pieniin alkulukuihin, eli tuloon

$$\prod_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} p^{\lfloor \log_p n \rfloor}.$$

Otetaan ensimmäiseksi tästäkin logaritmi:

$$\ln \prod_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} p^{\lfloor \log_p n \rfloor} = \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \lfloor \log_p n \rfloor \ln p.$$

Ennen kuin jatketaan pidemmälle, halutaan päästä eroon alaspäinpyöristyksistä. Tämä voidaan tehdä yksinkertaisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \lfloor \log_p n \rfloor \ln p \\ &= \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \log_p n \ln p \\ &\quad - \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} (\log_p n - \lfloor \log_p n \rfloor) \ln p. \end{aligned}$$

Viimeisen rivin termistä tulee virhetermi:

$$\begin{aligned} &\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} (\log_p n - \lfloor \log_p n \rfloor) \ln p \\ &\leq \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \ln p, \end{aligned}$$

ja samoin kuin suurten alkulukujen kontribuutiota määritettäessä saadaan

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \ln p = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) = o(n).$$

Voidaan siirtyä summan

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \log_p n \ln p$$

tarkastelemiseen. Huomataan ensin, että

$$\log_p n = \frac{\ln n}{\ln p},$$

jolloin summa sievenee helposti

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} \log_p n \ln p = \ln n \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} 1.$$

Alkulukulauseen nojalla

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} 1 = \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}}\right),$$

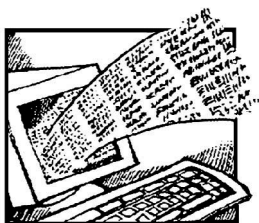
joten

$$\ln n \sum_{p \leq \sqrt{n}, p \text{ alkuluku}} 1 = o(n).$$

Täten pienimmän yhteisen jaettavan luonnollinen logaritmi on suuruusluokkaa  $n + o(n)$ , joten pienin yhteinen jaettava kasvaa hyvin karkeasti ottaen yhtä nopeasti kuin  $e^n$ .

## Viitteet

- [1] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers*. Cambridge University Press, 1990.



## Matematiikan verkkosanakirja

*Juha Ruokolainen*

Monikielinen matematiikan verkkosanakirja otettiin käyttöön Matematiikkalehti Solmussa vuonna 2004. Sanakirja syntyi EU:n Socrates Minerva -projektin tuloksena ja sitä ylläpidettiin Cambridgen yliopiston palvelimella. Ylläpidon loputtua syksyllä 2012 pohdittiin Solmun toimituksessa mahdollisuutta saattaa sanakirjan suomenkielinen osuus Solmun lukijoiden saataville jatkossakin. Nyt sanakirja on jälleen käytettävissä uudessa muodossa, ja se löytyy Matematiikkalehti Solmun kautta osoitteesta [matematiikkalehtisolmu.fi](http://matematiikkalehtisolmu.fi).

Sanakirjassa on sanoja alakoulun matematiikasta lukio- ja yliopistomatematiikkaan saakka, ja sitä voi käyttää niin itseopiskelussa kuin luokahuoneessakin. Sanat on aakkostettu omille sivuilleen sanan alkukirjaimen mukaan. Alkukirjaimen voi valita napsauttamalla kirjainta sivun yläosan aakkoslistasta. Sanat ovat sivuilla allekkaisena listana. Kun sanan sisältävää paneelia napsauttaa, aukeaa sen alle sanan selitys. Selityksen saa piiloon napsauttamalla sanan sisältävää paneelia uudelleen. Jos napsauttaa toisen sanan sisältävää paneelia, sulkeutuu auki oleva selitys ja uusi avautuu. Toivomme, että tämä tekniikka tekee sanakirjan selailusta helppoa ja joutuisaa.

Sanakirjan sanat, niiden selitykset, joihinkin selityksiin liittyvät kuvat sekä sanojen englanninkieliset käännökset ja linkkilistat selitysten lopussa on poimittu algoritmisesti käytöstä poistuneen sanakirjan sisältäneestä tietokannasta, ja poiminnan onnistuminen on tarkistettu vain pistokokein, joten virheitä on voinut sattua. Sanakirjassa matemaattiset kaavat on kirjoitettu LaTeX-kielellä ja ne esitetään MathJax-järjestelmän avulla.

Sekä MathJax että sanakirjan käyttöliittymä käyttävät JavaScript-ohjelmointikieltä, kuten suurin osa maailman verkkosivuista. Jos sanakirja ei toimi selaimessasi oikein, varmistaathan selaimesi asetuksista, että JavaScriptin käyttö on sallittu. Sanakirja pitäisi toimia kaikilla uudemmilla selaimilla kaikissa laiteympäristöissä, mutta sen ulkoasua ei ole optimoitu mobiililaitteiden pienille näytöille.

Sanoja ja niiden selityksiä on helppo päivittää, samoin kuin lisätä uusi sanoja. Siksi kuulemme mielellään sanakirjan kaikenlaisista käyttökokemuksista ja otamme vastaan niin korjaus- ja parannusehdotuksia kuin ehdotuksia uusiksi sanoiksi ja niiden selityksiksi. Myös selityksiä havainnollistavia kuvia voi tarjota. Yhdessä voimme tehdä sanakirjasta entistä paremman. Palautetta voi lähettää osoitteeseen toimitus 'at' matematiikkalehtisolmu.fi.

Alla kuvakaappaus sanakirjan sanasta "Eksplementtikulmat":

