Rupattelua derivaatasta

Jorma Merikoski
Informaatiotieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto
jorma.merikoski@uta.fi

Johdanto

Derivaatta ilmestyi vuonna 1941 lukion pitkän matematiikan oppiennätyksiin (kuten silloin sanottiin), mutta funktion suurin ja pienin arvo voitiin yksinkertaisissa tapauksissa määrittää jo sitä ennen. Silloin käytettiin lehtori K:n [2, 3] kuvaamaa menetelmää, joka mielestäni ansaitsee laajemmankin käsittelyn. Tämä on ensimmäinen aiheeni.

Toinen aihe ei liity ensimmäiseen, mutta tällaisessa rupattelussa voi vapaasti assosioida. Ilman kuljettajaa kulkevaa autoa ollaan kehittämässä [5], mutta mustapartainen mies on jo tehnyt ekologisesti paremman keksinnön: ilman autoa kulkevan kuljettajan [4, s. 13]. Ääriarvo ilman derivaattaa sai puolestaan ”harmaapartaisen miehen” pohtimaan derivaattaa ilman mitä? Derivaatan määritelmässä ei tietenkään tarvita ääriarvon käsitettä, mutta entä derivaatta ilman *raja-arvoa*? Sellaista derivaattaa ei ole lukiomatematiikassa, mutta derivaatan käsite, kuten matematiikka yleensäkin, on paljon laajempi ja monimuotoisempi kuin miltä lukiossa näyttää.

Suurin ja pienin arvo ilman derivaattaa

Yhden reaalimuuttujan reaalifunktion f suurin ja pienin arvo voidaan joskus määrittää seuraavalla tempulla. Muodostetaan y:tä koskeva välttämätön ja riittävä ehto sille, että yhtälöllä $y = f(x)$ on (reaalinen) ratkaisu x. Jos tämä ehto saadaan sellaiseen muotoon, että y kuuluu tiettyyn väliin tai tiettyjen välien yhdisteeseen, niin saadaan itse asiassa f:n koko arvojoukko.

Väisälä [7] sanoo esipuheessa, että tämä ”alkeellinen keino” voidaan sivuuttaa, jos tietyt derivaattaa koskevat asiat käsitellään. Kun ne lisättiin oppiennätyksiin vuonna 1960, se jäi pois kirjan uudistetusta versiosta.

Tarkastelemme esimerkkinä funktiota

$$f(x) = \frac{6x}{x^2+4}$$

[7, s. 23, esim. 2]. Tutkimme siis, millä y:n arvoilla yhtälöllä $y = f(x)$ eli yhtälöllä

$$yx^2 - 6x + 4y = 0 \tag{1}$$

on ratkaisu x.

Tapauksessa $y = 0$ ratkaisu on $x = 0$. Tapauksessa $y \neq 0$ ratkaisu on olemassa, jos ja vain jos diskriminantti $36 - 16y^2 \geq 0$, mikä toteutuu, jos ja vain jos $-\frac{3}{2} \leq y < 0$ tai $0 < y \leq \frac{3}{2}$. Siis kaikkiaan $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$. Tämä on f:n arvojoukko, joten $y = \frac{3}{2}$ on f:n suurin arvo ja $y = -\frac{3}{2}$ pienin. Sijoittamalla ne yhtälöön (1) saamme maksimikohdaksi $x = 2$ ja minimikohdaksi $x = -2$.

(Väisälä kirjoittaa huolellisesti ja pedagogisella taidolla, mutta en malta olla huomauttamatta, että häneltä on tässä esimerkissä jäänyt pois tapauksen $y = 0$ vaatima erityistarkastelu. Hän siis käsittelee pelkkää diskriminanttiehtoa, mikä kylläkin antaa oikean vastauksen.)

Alkeellisen menetelmän käyttökelpoisuus taitaa rajoittua enimmäkseen sellaisiin tapauksiin, joissa yhtälö $y = f(x)$ on yhtäpitävä erään toisen asteen yhtälön kanssa.

Toisena esimerkkinä tarkastelemme yleistä toisen asteen polynomia

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a > 0$. Yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = y \tag{2}$$

on ratkaisu, jos ja vain jos diskriminantti $b^2 - 4a(c - y) \geq 0$. Koska $a > 0$, tämä pätee, jos ja vain jos

$$y \geq c - \frac{b^2}{4a}.$$

Siis f:n arvojoukko on $[c - \frac{b^2}{4a}, \infty[$, joten suurinta arvoa ei ole ja pienin arvo $y = c - \frac{b^2}{4a}$. Kun sijoitamme tämän arvon yhtälöön (2), saamme minimikohdaksi $x = -\frac{b}{2a}$. Paraabelin (2) huipun koordinaatit voidaan siis määrittää näinkin.

Derivaatta ilman raja-arvoa

Tarkastelemme (reaalikertoimista) polynomia

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Sijoitamme x:n paikalle $(x+h)$:n ja kehitämme saadun lausekkeen h:n polynomiksi. Määrittelemme [6, s. 151–152], että $p(x)$:n derivaatta $p'(x)$ on h:n kerroin tässä polynomissa. Siis

$$\begin{aligned} p(x+h) = p(x) &+ p'(x)h \\ &+ h\text{:n korkeampien potenssien termit.} \end{aligned}$$

Helppo lasku osoittaa, että

$$p'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}, \tag{3}$$

joten määritelmä on yhtäpitävä polynomin derivaatan tavanomaisen määritelmän kanssa, ja tavanomaiset derivoimissäännöt ovat voimassa. Jos siis p ja q ovat polynomeja ja c on vakio, niin

(i) $(p+q)' = p' + q'$,

(ii) $(cp)' = cp'$,

(iii) $(pq)' = p'q + pq'$.

Itse asiassa voimme määritellä polynomin derivaatan suoraan lausekkeella (3), jolloin sijoitustemppua ei tarvita.

Tämä pyörittely olisi nollatutkimusta, ellei selvitettäisi, miksi derivaatta kannattaa määritellä näin. Tavanomaisen määritelmän motivaatioita on yllin kyllin: tangentti, nopeus, ääriarvot ym. Kun niihin ei nyt päästä käsiksi, mikä on tämän määritelmän motivaatio?

Väisälä vastaa [6, s. 151]: ”Tarkoituksena on näyttää, että algebrassa selviydytään ilman raja-arvo-käsitettä, kun on kysymys polynomin derivaatasta”. Kun polynomeja tutkitaan, derivaattaa tarvitaan mm. nollakohdan kertaluvun yhteydessä. Kun polynomeja tutkitaan algebrallisesti, ei käytetä analyyttisia menetelmiä, jolloin derivaatta kannattaa määritellä kuten edellä. Lisäksi tämä määritelmä toimii silloinkin, kun polynomit eivät ole reaalikertoimisia vaan niiden kertoimet ovat mielivaltaisessa renkaassa.

Entä jos yritämme määritellä polynomin derivaatan aksiomaattisesti ottamalla aksioomiksi säännöt (i)–(iii) ja tarvittaessa lisää? Katsomme parilla esimerkillä, mitä voidaan todistaa näiden aksioomien perusteella ja mitä ei voida. Merkitsemme e_n:llä peruspolynomia $e_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Siis $e_0(x) = 1$ (polynomi, joka on identtisesti 1) ja $e_1(x) = x$.

Aksioomasta (iii) seuraa, että $e_0' = 0$ (nollapolynomi). Nimittäin sijoittamalla $p = e_1$, $q = e_0$, jolloin $pq = e_1$, saamme

$$e_1' = e_1'e_0 + e_1e_0' = e_1' + e_1e_0'.$$

Siis $e_1e_0' = 0$ ja edelleen $e_0' = 0$.

Todistaaksemme, että jokaisen vakiopolynomin $p(x) = c$ derivaatta on nollapolynomi, tarvitsemme myös aksioomaa (ii), josta seuraa

$$(pe_1)' = (ce_1)' = ce_1'.$$

Toisaalta aksiooman (iii) mukaan

$$(pe_1)' = p'e_1 + pe_1' = p'e_1 + ce_1'.$$

Näin ollen $p'e_1 = 0$ ja edelleen $p' = 0$.

Emme voi todistaa aksioomilla (i)–(iii), että $e_1' = e_0$ (eli $x' = 1$). Lisäämme tämän aksioomaksi

(iv) $e_1' = e_0$.

Todistamme potenssin derivoimissäännön $e_n' = ne_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. (Jos $n = 0$, niin e_{n-1} ei ole polynomi.) Käytämme induktiota. Arvolla $n = 1$ väite on juuri (iv). Jos väite pätee arvolla n, niin polynomille $e_{n+1}(x) = xe_n(x)$ on aksioomien (iii) ja (iv) perusteella

$$e_{n+1}'(x) = e_n(x) + xe_n'(x) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)x^n,$$

joten väite pätee arvolla $n + 1$.

Voimme todistaa kaikki muutkin polynomin derivaatan ominaisuudet, sillä [1, s. 145] aksioomat (i)–(iv) määräävät polynomin derivaatan täysin. Toisin sanoen, jos jokaista polynomia p vastaa sellainen polynomi $p^\sim$, että

(i) $(p+q)^\sim = p^\sim + q^\sim$,

(ii) $(cp)^\sim = cp^\sim$,

(iii) $(pq)^\sim = p^\sim q + pq^\sim$,

(iv) $e_1^\sim = e_0$,

niin $p^\sim = p'$.

Nimittäin potenssin derivoimissäännön perusteella myös $e_n^\sim = ne_{n-1}$, joten $e_n^\sim = e_n'$ kaikilla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Aksioomista (i) ja (ii) seuraa nyt, että kaikille muillekin polynomeille p on $p' = p^\sim$.

Viitteet

[1] P. M. Cohn, *Algebra, Volume I*, John Wiley, 1974.

[2] Lehtori K., Laskutikulla silmään, *Solmu* 3/2013, 30.

[3] Lehtori K., Vuoden 1934 ylioppilaskoetehtävä, *Solmu* 1/2015, 30.

[4] Olli, *Mustapartainen mies herättää pahennusta*, Otava, 1975.

[5] V. Vanhalakka, Auto, joka oppii, *Aamulehti* 73/2015, A4–A8.

[6] K. Väisälä, *Lukuteorian ja korkeamman algebran alkeet*, Otava, 1950.

[7] K. Väisälä, *Algebran oppi- ja esimerkkikirja II, pitempi kurssi*, 4. p., WSOY, 1956.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `matematiikkalehtisolmu.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)