

ENSIASKELEET EINSTEININ AVARUUSAIKAAN

Matemaattinen johdatus suhteellisuusteorian perusteisiin

OSA 1 (v2)

Kinematiikka: aika, paikka ja liike

Teuvo Laurinolli

2014

teuvo.laurinolli@gmail.com

SISÄLLYSLUETTELO

ALKULAUSE.....	4
1. SUHTEELLISUUSPERIAATE.....	8
2. AVARUUSAIKAKOORDINAATISTOT	10
3. AVARUUSAIKADIAGRAMMIT	16
4. MATEMAATTISIA APUVÄLINEITÄ	19
4.1. Karteesisen koordinaatiston pisteiden välinen etäisyys	19
4.2. Ympyräfunktiot.....	20
4.3. Eksponenttifunktiot.....	23
4.4. Hyperboliset funktiot	24
5. KOORDINAATTIMUUNNOS INERTIAALIKOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ	27
5.1. Johdanto.....	27
5.2. Eetteriteoria.....	28
5.3. Inertiaalisten koordinaattimuunnosten yleinen muoto	29
5.4. Koordinaattimuunnosten Δ -muoto.....	32
6. KOORDINAATTIMUUNNOS LEVOSSA OLEVIENT KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ	34
6.1. Johdanto.....	34
6.2. Paikkakoordinaatiston yhdensuuntaissiirto	35
6.3. Paikkakoordinaatiston kierto kulman α verran.....	38
6.4. Peilaus eli akselin suunnanvaihto	40
6.5. Yhteenvedo levossa olevien koordinaatistojen $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$ välisistä koordinaattimuunnoksista.....	41
7. KOORDINAATTIMUUNNOS LIIKKUVIENT KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ.....	43
7.1. Johdanto.....	43

7.2. Galilei-muunnos.....	44
7.3. Lorentz-muunnos.....	46
7.4. Lorentz-muunnos geometrisesti esitettynä	54
8. LORENTZ-MUUNNOKSEN SEURAUKSIA	57
8.1. Samanpaikkaisuuden ja samanaikaisuuden suhteellisuus	57
8.2. Samanpaikkaisten tapahtumien aikajärjestys on absoluuttinen	60
8.3. Kausaalisten tapahtumien aikajärjestys on absoluuttinen.....	61
8.4. Aikadilaatio.....	62
8.5. Kaksosparadoksi	66
8.6. Tapahtumaintervallin invarianssi	69
8.7. Ominaisaika.....	72
8.8. Pituuden kontraktio	74
8.9. Tunneliparadoksi	75
8.10. Nopeuksien yhteenlasku	76
LIITTEET	80
LIITE 1. Koordinaattimuunnokset tasokoordinaatiston kierrossa ja peilauksessa	81
LIITE 2. Tasokoordinaattien lineaarinen muunnos, jossa pisteiden etäisyydet origosta säilyvät invariantteina.....	85
LIITE 3. Hyperbolisia identiteettejä	89
LIITE 4. Nopeuksien yhteenlaskukaavan johtaminen ilman hyperbolisia funktioita	93
LIITE 5. Suhteellisuusteoria ilman valon nopeutta	96

ALKULAUSE

Tämän kirjasen tarkoituksena on antaa lukijalle perusymmärrys teoriasta, jonka Albert Einstein esitti¹ vuonna 1905. Teoria tunnetaan nimellä *suppea* tai *erityinen suhteellisuusteoria* (special theory of relativity). Vuonna 1916 Einstein esitti laajemman *yleisen suhteellisuusteorian* (general theory of relativity), johon tässä kirjasessa ei kajota. Molemmilla Einsteinin teorioilla on edelleen tietty mystinen aura ehkä siksi että ne näyttävät olevan ristiriidassa arkihavainnon kanssa. Totta onkin, että niiden kunnolliseen ymmärtämiseen tarvitaan matematiikkaa, joka on suppean suhteellisuusteorian osalta melko yksinkertaista eikä juuri ylitä lukion ensimmäisen vuoden pitkän matematiikan sisältöä. Yritteliäs lukija selviytyy tästä kirjasesta jopa peruskoulun matematiikan tiedoilla, sillä tarvittavat lisätiedot esitetään luvussa 4 (Matemaattisia apuvälineitä). Tekstin sujuvuuden parantamiseksi jotkut matemaattiset tarkastelu on sijoitettu kirjasen lopussa oleviin liitteisiin.

Tämä kirjanen keskittyy siis Einsteinin, Lorentzin ja Minkowskin muotoilemaan suppeaan suhteellisuusteoriaan, josta on vuosikymmenten varrella kirjoitettu satoja ellei tuhansia kirjoja, muutama suomeksikin². Miksi siis laatia vielä yksi lisää? Ensiksikin siksi, että vakiintunutkin teoria kaipaa aika ajoin uusia lähestymispolkuja. Julkaistut populaariesitykset ovat yleensä niin ylimalkaisia, ettei niistä saa kunnollista käsitystä asiasta, varsinkin kun matemaattinen tarkastelu on tavallisesti kokonaan sivuutettu tai ainakin jätetty perustelematta. Perusteellisemmat esitykset taas on yleensä laadittu alan yliopistollisten luentokurssien tukimateriaaleiksi ja vaativat ilman opettajakontaktia työskentelevältä itseopiskelijalta varsin laajoja ja sujuvia matematiikan ja fysiikan tietoja ja taitoja. Omassa versiossani pyrin tarkkaan ja huolelliseen matemaattiseen käsittelyyn edellyttämättä kuitenkaan peruskoulun (ja paikoin lukion) oppimäärän ylittäviä lähtötietoja.

¹ Artikkelissaan *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, vol. 322 (10), ss. 891-921, 1905.

² V. J. Kallio: *Einsteinin suhteellisuusteorian periaatteet*, WSOY 1922; Gustaf Järnefelt: *Johdatus suhteellisuusteoriaan*, Otava 1954; Rolf Nevanlinna: *Suhteellisuusteorian periaatteet*, WSOY 1963; K.V. Laurikainen: *Modernin fysiikan alkeita*, WSOY 1968; Albert Einstein: *Erityisestä ja yleisestä suhteellisuusteoriasta* (suomentanut ja kommentoinut Raimo Lehti), URSA 2003; Kari Enqvist: *Johdatus suhteellisuusteoriaan*, URSA 2011. Eri yliopistoissa on lisäksi julkaistu suhteellisuusteoriasta suomenkielisiä luentomonisteita.

Toinen syy tämän kirjasen laatimiseen on se, että olen itse vuosien ajan harjoittanut pääosin omatoimisia suhteellisuusteorian opintoja¹ ja tämä kirjoitustyö on pakottanut minut tekemään perusteellisen yhteenvedon saavuttamastani ymmärryksestä ja ehkä syventämäänkin sitä.

Einsteinin suppea suhteellisuusteoria, jota jatkossa kutsutaan lyhyesti suhteellisuusteoriaksi, on sitä edeltäneen Newtonin (ja Galilein) fysiikan parannettu painos. ”Normaaliolosuhteissa” eli valon nopeuteen verrattuna pienillä nopeuksilla molemmat teoriat antavat mittaustarkkuuden rajoissa yhtäläiset tulokset. Suurilla nopeuksilla Newtonin fysiikan ennusteet menevät pahasti pieleen, mutta suhteellisuusteoria osuu naulankantaan. On sanottu, että suppea suhteellisuusteoria on kaikkein tiukimman empiirisen testauksen läpäissyt fysiikan teoria. Erinomaisessa oppikirjassaan J. Foster ja J. D. Nightingale kertovat kuvaavan esimerkin. Stanfordin yliopiston hiukkasfysiikan laitokselle rakennettiin laite, jossa alkeishiukkasia kiihdytetään liki valon nopeuteen. Tämä hiukkaskiihdytin on kolmen kilometrin pituinen sähkötekniikkaa sisältävä putki, joka maksoi yli sata miljoonaa dollaria. Jos Newtonin fysiikka pitäisi paikkansa, niin putken pituudeksi olisi riittänyt muutama senttimetri ja sen hinta olisi ollut parisataa dollaria.

Luonnontieteen historia opettaa, ettei lopullisia totuuksia ole eikä suhteellisuusteoriakaan ole sellainen. Tieteenfilosofi Karl Popper (1902–1994) osoitti, että empiirinen testaus voi todistaa teorian ainoastaan vääräksi mutta ei koskaan oikeaksi, koska uudet ja entistä tarkemmat kokeet voivat paljastaa teorian puutteita. Einstein itsekin kuvasi tiedettä toteamalla ”*One thing I have learned in a long life: that all our science, measured against reality, is primitive and childlike - and yet it is the most precious thing we have.*”² Silti suhteellisuusteoria on opiskelemisen arvoinen ja se herättääkin jatkuvasti suurta mielenkiintoa kaikkialla maailmassa. Suhteellisuusteoria on epäilemättä fysikaalisen todellisuuden ymmärtämiseen

¹ Vuodesta 2010 olen ystäväni Eero Kettusen kanssa harrastanut suhteellisuusteorian opintoja omin päin käyttäen tarjolla olevia kirjoja (mm. J. Foster & J. D. Nightingale: *A short course in general relativity* ja Schutz: *A first course in general relativity*) sekä Stanfordin yliopiston verkkokursseja (erityisesti Leonard Susskindin videoluentosarjaa <http://freevideolectures.com/Course/2295/Modern-Physics-Special-Relativity>). Lisäksi minulla on ollut tilaisuus seurata professori Erkki Thunebergin erinomaisia suhteellisuusteorian luentoja Oulun yliopistossa.

² Einsteinin aforismi tuo mieleen Johann Wolfgang von Goethen (1749-1832) *Faust*-runon säkeen ”*Grau, lieber Freund, ist alle Theorie. Und grün des Lebens goldner Baum.*” (Kaikk’ tieto, ystäväin, on houre harmaa. On vehmas elon kultapuu. Suom. Otto Manninen)

pyrkivän ihmiskunnan suurimpia saavutuksia. Kohtuullinen vaivannäkö palkitsee opiskelijan oivalluksen ilolla.

* * * * *

Tämä kirjasen ensimmäinen osa keskittyy suhteellisuusteorian *kinematiikkaan* eli ajan, paikan ja liikkeen keskinäissuhteisiin. Työn alla olevassa toisessa osassa käsitellään suhteellisuusteorian *dynamiikkaa* eli liikelakeja ja niiden seurauksia.

Kirjanen jakautuu kahdeksaan lukuun. Luvussa 1 käsittelemme suhteellisuusteorian fysikaalista perustaa, *suhteellisuusteoriaa*, joka juontaa juurensa Galileo Galilein pohdintoihin 1600-luvun alussa. Luvussa 2 tutustumme avaruusaikakoordinaattitoihin, joiden avulla fysikaaliset tapahtumat saadaan matemaattisen tarkastelun piiriin. Luvussa 3 tarkastelemme avaruusaikadiagrammeja (Minkowski-diagrammeja), joiden avulla liikettä voidaan kuvata geometrisesti. Luvussa 4 käymme läpi eräitä jatkossa tarvittavia matemaattisia käsitteitä ja tuloksia, jotka – hyperbolisia funktioita lukuun ottamatta – sisältyvät lukion ensimmäisen vuoden opiskeluohjelmaan. Luvussa 5 aloitamme koordinaattimuunnoksiin perehtymisen osoittamalla, että inertiaalikoordinaatistojen välisen muunnoksen tulee olla yleisesti lineaarista (tai affiinia) muotoa. Luvussa 6 tarkastelemme yksinkertaisimpia inertiaalikoordinaatistoja – toistensa suhteen levossa olevia koordinaatistoja. Niitä ei yleensä käsitellä lainkaan suhteellisuusteorian oppikirjoissa, mutta mielestäni ne tarjoavat yksinkertaisen mallin, jonka pohjalta on helpompi siirtyä tutkimaan liikkuvia koordinaatistoja. Nämä ovatkin teemana luvussa 7, jossa johdetaan suhteellisuusteorian keskeinen tulos, Lorentz-muunnos. Viimeisessä luvussa 8 tutustumme Lorentz-muunnoksen keskeisiin seurauksiin kuten samanaikaisuuden suhteellisuuteen, aikadilaatioon, pituuden kontraktioon ja nopeuksien yhteenlaskusääntöön sekä ominaisajan käsitteeseen.

Varsinaisen tekstin jälkeen sijoitetussa liiteosassa (Liitteet 1-5) esitetään tekstiä täydentäviä tai laajentavia matemaattisia tarkasteluja tai perusteluja. Liitteessä 5 esitetään valtavirrasta poikkeava tapa (relativity without light) johtaa Lorentz-muunnos ja suhteellisuusteoria nojautumatta lainkaan Einsteinin toiseen aksioomaan eli valon nopeuden vakioisuuteen.

Kiitän lämpimästi Markku Halmetojaa, Seppo Heikkilää, Jouko Lahtelaa, Matti Lehtistä, Riitta Laurinollia, Eljas Määttä ja Erkki Thunebergia, jotka ovat pyynnöstäni lukeneet kirjasen ensimmäisen käsikirjoituksen kokonaan tai osittain ja tehneet lukuisia arvokkaita korjaus- ja parannusehdotuksia. Vastuu kaikista tekstiin jääneistä virheistä, puutteista ja epäselvyyksistä kuuluu tietenkin yksinomaan minulle.

Useita kirjoja¹ suhteellisuusteorian alalta julkaissut tohtori Ralph F. Baierlein (Northern Arizona University) on antanut minulle arvokkaita neuvoja ja auttanut minua syventämään ymmärrystäni, mistä hänelle parhaat kiitokset.

Kiitän Juha Ruokolaista asiantuntevasta avusta MS Wordilla tehdyn käsikirjoituksen muuntamisessa julkaisukelpoiseen pdf-muotoon. Kiitän verkkolehti Solmun päätoimittaja Markku Halmetojaa mahdollisuudesta julkaista kirjanen sähköisessä muodossa Solmun oppimateriaaliarkistossa (<http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html>).

Suomen tietokirjailijat ry on ystävällisesti tukenut kirjoitustyötäni keväällä 2013 myöntämällä Lasten ja nuorten tietokirjallisuuden apurahalla. Tästä parhaat kiitokset.

¹ Esim. Ralph Baierlein: *Newton to Einstein – The trail of light*, Cambridge University Press 1992 (Reprinted 2002).

1. SUHTEELLISUUSPERIAATE

Suhteellisuusteorian perusajatuksen, *suhteellisuusperiaatteen*, on dokumentoidusti ilmaissut ensimmäisenä kokeellisen luonnontieteen isä Galileo Galilei (1564-1642), vaikka on mahdollista, että periaate on ollut jo antiikin oppineiden tiedossa. Putous- ja heittoliikettä tutkiessaan Galilei huomasi, että ne tapahtuvat samalla tavalla – samaa lakia noudattaen – huoneessa, pihalla tai tasaisella nopeudella liikkuvassa laivassa eli yleisesti kaikissa *inertiaalikoordinaatistoissa*¹ – havaintoympäristöissä, jotka liikkuvat toistensa suhteen vakionopeudella. Huone ja piha ovat levossa toistensa suhteen (vakionopeus = 0) ja laiva on molempiin nähden tasaisessa liikkeessä (vakionopeus $\neq 0$). Galilei yleistä tämän havainnon muotoon:

Suhteellisuusperiaate: Luonnonlait ovat samanlaisina voimassa kaikissa toistensa suhteen inertiaalisissa koordinaatistoissa².

Galilein tarkoittamat luonnonlait olivat kappaleiden liikettä ja tasapainoa koskevia mekaniikan lakeja, joita hän itse ensimmäisenä sai selville. Modernin fysiikan perustaja Isaac Newton (1642–1727) muotoili matemaattisesti nämä lait (*Newtonin lait*) ja osoitti niiden noudattavan Galilein suhteellisuusperiaatetta.

Sähkömagneettisia ilmiöitä koskevat luonnonlait – *Maxwellin yhtälöt* – esitti 150 vuotta myöhemmin James Clerk Maxwell (1831–1879). Albert Einstein (1879–1955) lähti siitä empiiristen kokeidenkin vahvistamasta faktasta, että myös nämä lait noudattavat suhteellisuusperiaatetta, ja päätyi sen loogisena seurauksena 1905 (suppeaan) suhteellisuusteoriaansa.

Maxwellin yhtälöistä nimittäin seuraa, että sähkömagneettisen aaltoliikkeen (radioaaltojen, valon, röntgensäteilyn jne) etenemisnopeus tyhjiössä on tietty vakio $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Valon

¹ *Inertiaalikoordinaatisto* määritellään usein koordinaatistoksi, jossa Newtonin I laki (Jatkavuuden laki) on voimassa. Tämänkin määritelmän mukaan on voimassa: Jos K on inertiaalinen koordinaatisto, niin kaikki sen suhteen levossa tai tasaisessa liikkeessä olevat koordinaatistot ovat myös inertiaalisia.

² Tässä kirjasessa koordinaatisto tarkoittaa, ellei toisin mainita, tavallista suorakulmaista eli *karteesista* koordinaatistoa.

nopeuden vakioisuus on siis luonnonlaki ja silloin suhteellisuusperiaatteenkin mukaan sen tulee olla sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Kuuluisat Michelson–Morleyn kokeet (1887) olivat jo viitanneet tähän. Lukuisat erittäin tarkat mittaukset ovat sen jälkeen vahvistaneet, että valon nopeus havaitaan samansuuruuisena¹ riippumatta havaitsijan tai valon lähteen liiketilasta. Tämä sotii arkijärkeämme ja –havaintoamme vastaan, koska esim. liikenteessä havaitsemme vastaantulevan ajoneuvon nopeuden paljon suurempana kuin ohitsemme ajavan. Vaikka valon nopeuden vakioisuus onkin välitön seuraus yleistetystä suhteellisuusperiaatteesta², Einstein katsoi tarpeelliseksi kirjata sen selvyuden vuoksi erilliseksi aksioomaksi.

Valon nopeuden vakioisuuden periaate: Valon tyhjiönopeus on sama kaikissa toistensa suhteen inertiaalisissa koordinaatistoissa.

Einstein päätyi suhteellisuusteoriaan pohtiessaan, mitä näistä kahdesta ”Einsteinin aksioomasta” – suhteellisuusperiaatteesta ja valon nopeuden vakioisuuden periaatteesta – seuraa, kun fysikaalisia ilmiöitä tarkastellaan eri inertiaalikoordinaatistoissa. Nämä seuraamukset koskevat ajan ja paikan havaitsemista ja ovat usein arkijärjen vastaisia. Intuitiivinen ajattelu ei siksi kykene tavoittamaan niitä, vaan joudumme ottamaan avuksi matemaattisen päättelyn. Tämähän on tavallinen ja erittäin tulokselliseksi osoittautunut menettely kaikilla muillakin luonnontieteen alueilla silloin, kun joudumme pohtimaan arkikokemuksemme piirin ulkopuolella olevia ilmiöitä.

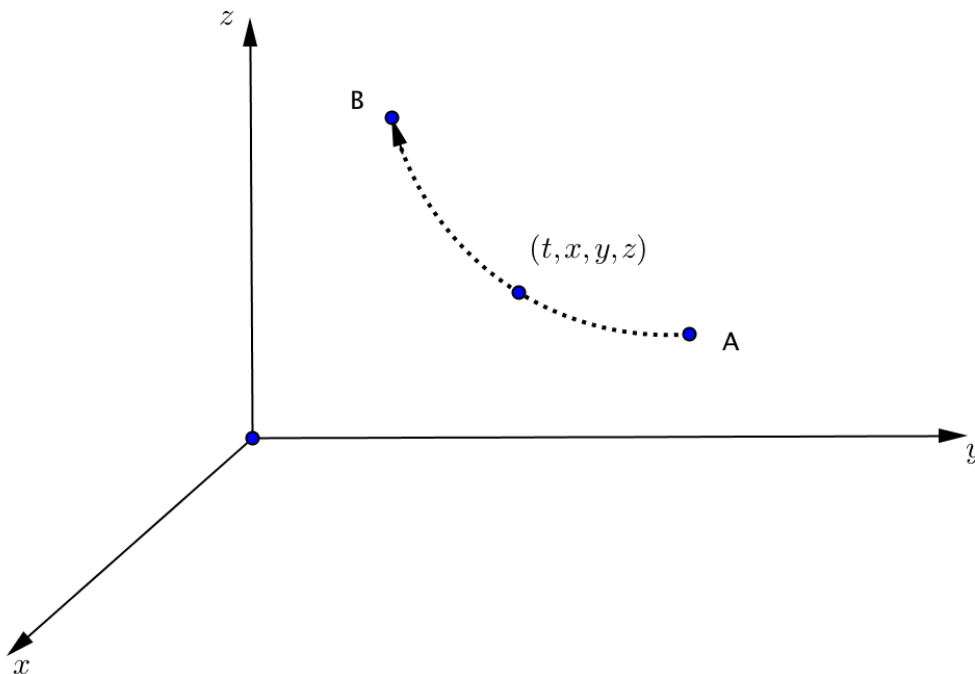
¹ Nykyinen arvo valon tyhjiönopeudelle SI-yksiköissä on 299 792 458 m/s. Tämä arvo on tarkka, sillä metri määriteltiin vuonna 1983 matkaksi, jonka valo kulkee ajassa 1/299 792 458 sekuntia.

² Käytämme tässä kirjasessa termiä *suhteellisuusperiaate* Einsteinin tarkoittamassa yleisessä merkityksessä, jolloin se koskee kaikkia luonnonlakeja. Termillä *Galilein suhteellisuusperiaate* viitataan toisinaan vain klassisen mekaniikan lakeja (Newtonin lakeja) koskevaan periaatteeseen. Newtonin lakeja on kolme: (1) jatkavuuden laki, (2) dynamiikan peruslaki, (3) voiman ja vastavoiman laki. Ne esitetään kaikissa fysiikan koulukirjoissa.

2. AVARUUSAIKAKOORDINAATISTOT

Fysikaalinen todellisuus eli *avaruusaika* koostuu *tapahtumista*, joilla on tietty aika ja paikka. Kuviossa 1 esitetty perhosen lento ikkunalaudalta (pisteestä A) huoneen kattoon (pisteeseen B) on sarja tapahtumia ”perhonen on tietyllä hetkellä tietyssä paikassa”. Matemaattiselta kannalta jokaisella tapahtumalla on siis neljä koordinaattia: yksi aikakoordinaatti t ja kolme paikkakoordinaattia x, y, z , jotka saadaan jonkin sovitun koordinaatiston avulla.

Aikakoordinaatin nollapisteenä $t = 0$ voi olla esimerkiksi hetki, jolloin perhonen lähtee lentoon, ja paikkakoordinaattien nollapisteenä $x = y = z = 0$ jokin huoneen lattian nurkkapiste, josta kolmen kohtisuoran koordinaattiakselin (x -, y - ja z -akselit) ajatellaan lähtevän lattian ja seinien välisiä rajaviivoja noudattaen. Voimme ajatella, että lento kuvataan videokameralla, joka rekisteröi ja tallentaa perhosen aika- ja paikkakoordinaatit sadasosasekunnin välein. Jos lento kestää 5 sekuntia, niin laitteeseen tallentuu 500 tapahtuman (t, x, y, z) sarja, joka edustaa likimääräisesti kyseistä perhosen lentomatkaa. (Tässä kirjasessa merkitsemme tapahtuman koordinaatit järjestyksessä: aika t , paikka x , paikka y , paikka z .)

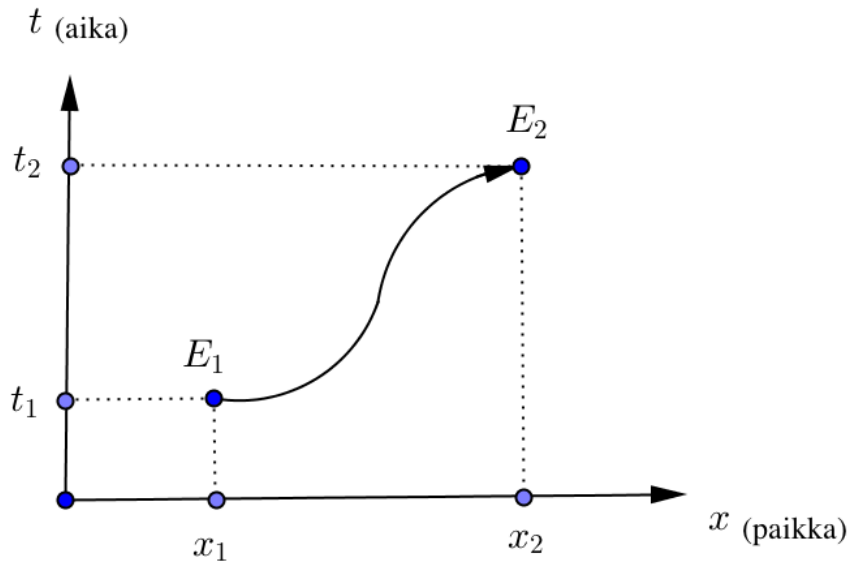


KUVIO 1: Perhosen lentorata kolmiulotteisen avaruuskoordinaatiston pisteestä A pisteeseen B. Ajanhetkellä t perhonen on pisteessä (x, y, z) . Tämän tapahtuman koordinaatit neliulotteisessa avaruusaikakoordinaatistossa ovat (t, x, y, z) .

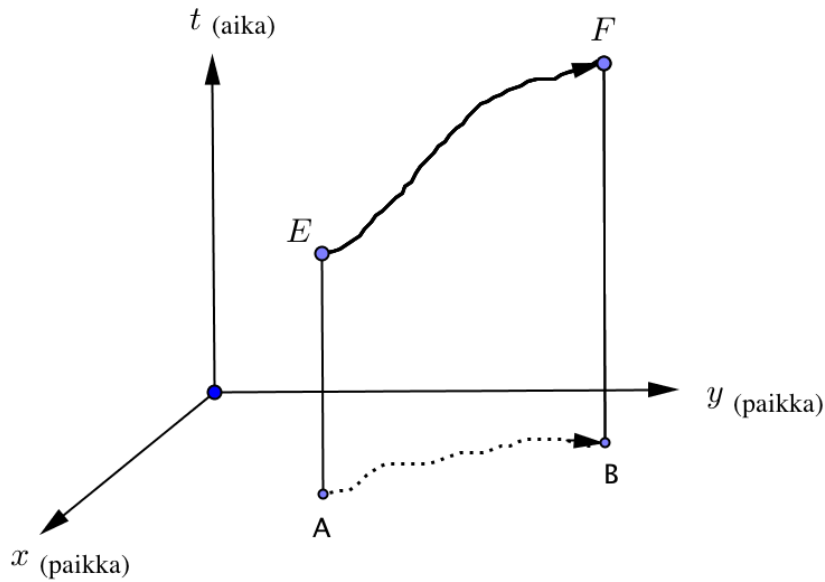
Olettakaamme, että lentoradan alku- ja loppupisteen avaruus- eli paikkakoordinaatit ovat $A = (0,4,1)$ ja $B = (2,2,3)$, missä koordinaattiakseleiden yksikkö on 1 m. Olettakaamme lisäksi, että lento alkaa hetkellä $t = 0$ s ja päättyy hetkellä $t = 5$ s. Jos nimeämme tapahtuman ”perhonen lähtee lentoon pisteestä A” symbolilla E_1 ja tapahtuman ”perhonen saapuu pisteeseen B” symbolilla E_2 , niin näiden tapahtumien koordinaatit neliulotteisessa avaruusaikakoordinaatistossa ovat $E_1 = (0,0,4,1)$ ja $E_2 = (5,2,2,3)$, missä siis aikakoordinaatin t yksikkönä on sekunti ja paikkakoordinaattien x, y, z yksikkönä on metri. Voimme ajatella, että E_1 ja E_2 ovat neliulotteisen *avaruusaikakoordinaatiston* pisteitä. Kuviossa 1 on piirretty perhosen *lontorata* eli viiva, joka muodostuu niistä kolmiulotteisen *paikkakoordinaatiston* eli *avaruuskoordinaatiston* pisteistä (x, y, z) , joiden kautta perhonen etenee pisteestä A pisteeseen B. Samoin voidaan ajatella, että neliulotteiseen avaruusaikakoordinaatistoon muodostuu perhosen taivalta kuvaava viiva pisteestä E_1 pisteeseen E_2 . Tätä viivaa kutsutaan perhosen *maailmanviivaksi* (world line).

Neliulotteinen avaruusaikakoordinaatisto kuvaa matemaattisesti tapahtumista koostuvaa avaruusaikaa (spacetime). Valitettavasti emme kykene esittämään piirtämällä neliulotteista avaruusaikakoordinaatistoa ja siinä olevia maailmanviivoja. Sitä varten meidän pitäisi kyetä piirtämään Kuvioon 1 vielä neljäs koordinaattiakseli (t -akseli) kohtisuoraan kolmea paikkakoordinaattiakselia vastaan. Tämä ei onnistu sen paremmin, vaikka tasopiirroksen sijasta rakentaisimme koordinaatistomme rautalangasta kolmiulotteisena mallina. Silti voimme vaivatta suorittaa matemaattisia laskelmia ja päätelmiä neliulotteisessa avaruusaikakoordinaatistossa. Matematiikassa on jo kauan ennen Einsteinia käsitelty rutiininomaisesti mitä tahansa n -ulotteisia koordinaatistoja ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$).

On kuitenkin mahdollista ja erittäin hyödyllistä havainnollistaa piirroksilla myös avaruusaikakoordinaatistoja. Tämä onnistuu siten, että aika-akselin t lisäksi kuvioon piirretään vain yksi (x) tai kaksi (x ja y) paikka-akselia eli tarkastellaan liikettä vain x -akselilla tai xy -tasossa. Kuviot 2 ja 3 esittävät tällä tavoin typistettyjä avaruusaikakoordinaatistoja.



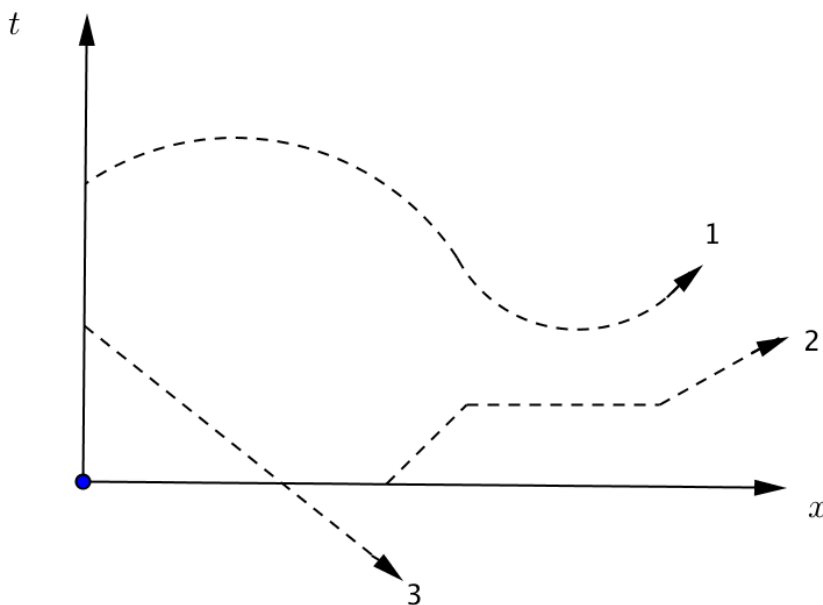
KUVIO 2: Typistetty avaruusaikakoordinaatisto $K(t, x)$. Maailmanviiva E_1E_2 kuvaa perhosen lentoa avaruudessa (eli x -akselilla) kohdasta x_1 kohtaan x_2 . Lento alkaa hetkellä t_1 ja päättyy hetkellä t_2 . Lentorata on maailmanviivan projektio x -akselilla.



KUVIO 3: Typistetty avaruusaikakoordinaatisto $K(t, x, y)$. Maailmanviiva EF kuvaa perhosen lentoa xy -tasoa pitkin pisteestä A pisteeseen B . Lentorata AB on maailmanviivan EF projektio xy -tasolla.

Jatkotarkasteluissa tukeudummekin pääosin Kuvion 2 typistettyyn kaksiulotteiseen avaruusaikakoordinaatistoon, jonka pisteillä (tapahtumilla) on kaksi koordinaattia t (aika) ja x (paikka). Hiukkasten ja kappaleiden ajatellaan liikkuvan yksiulotteisessa paikka-avaruudessa (x -akselilla). Tämä tarkastelutapa yksinkertaistaa matemaattisia lausekkeita ja saadut tulokset ovat kuitenkin helposti yleistettävissä täysimittaiseen neliulotteiseen avaruusaikakoordinaatistoon, jossa tapahtumilla on edelleen yksi aikakoordinaatti t , mutta kolme paikkakoordinaattia x, y, z .

On tärkeää huomata, että minkä tahansa fysikaalisen objektin (perhonen, avaruusraketti, elektroni, fotonit jne) liikettä kuvaava maailmanviiva (t, x) -koordinaatistossa on aina nouseva positiivisen t -akselin suunnassa, koska aika ei voi kulkea taaksepäin eikä edes pysähtyä. Tämä rajoitus johtuu *kausaalilaista*, jonka mukaan syy ei voi olla ajallisesti myöhempi kuin seuraus. Koripallo ei voi osua koriin ennen heittoa eikä lapsi voi aloittaa koulua ennen kuin on syntynyt. Avaruusakselien x, y, z suhteen maailmanviivat voivat kulkea kaikkiin suuntiin.



KUVIO 4. Vasemmalta oikealle etenevät viivat 1, 2 ja 3 ovat kausaalilain vastaisia eivätkä siksi voi olla minkään fysikaalisen objektin maailmanviivoja.

HUOMAUTUS 2.1. Koordinaattien arvojen mittaaminen ja luonnolliset yksiköt

Jonkin avaruusajan tapahtuman koordinaatit valitussa koordinaatistossa $K(t, x, y, z)$ saadaan selville fysikaalisen mittauksen avulla. Suhteellisuusteoriaa opiskelevan on tärkeää ymmärtää

periaatteessa, miten mittaukset voidaan tehdä. Paikkakoordinaatit x, y, z voidaan mitata vaikkapa metrimitalla akseleiden suuntaisina etäisyyksinä K :n nollapisteestä (origosta). Tapahtuman aikakoordinaatti t luetaan tapahtumapaikassa levossa olevasta K -kellosta. Tällöin ajatellaan, että K :n paikka-avaruuden jokaisessa pisteessä on kello¹, joka on synkronoitu näyttämään samaa aikaa (K -aikaa) kuin K :n paikkaorigossa oleva kello. Kaikki K -kellot näyttävät siis samaa aikaa. Tämä ei ole pelkkä teoreettinen oletus, sillä käytännössäkin on mahdollista synkronoida eri paikoissa toistensa suhteen levossa olevat kellot näyttämään samaa aikaa. (Avaruusaikakoordinaatisto havainnollistetaan toisinaan piirtämällä pelkkä paikkakoordinaatisto, johon on sijoitettu pieniä samaa aikaa näyttäviä kellotauluja. Nämä kellotaulut korvaavat t -akselin.)

Mittaus perustuu aina mitattavien suureiden sovittuihin mittayksikköihin. Luonnontieteissä on perinteisesti käytetty ns. SI-yksikköjärjestelmää², joka pohjautuu kansainvälisiin sopimuksiin. Siinä ajan ja paikan eli etäisyyden³ yksikköinä ovat sekunti ja metri. Modernissa fysiikassa kuten suhteellisuusteoriassa ja kvanttimekaniikassa käytetään usein ns. *luonnollisia yksiköitä*, jotka perustuvat luonnonvakioihin kuten valon nopeuteen. *Siinä järjestelmässä sekä ajan että pituuden yksikkönä on metri*. Yhden metrin pituinen aika on se aika, joka valolta kuluu yhden metrin pituiseen matkaan. Suhteellisuusteoriassa luonnollisilla yksiköillä on kolme merkittävää etua: (1) avaruusaikakoordinaatiston aika- ja paikka-akseleilla voidaan käyttää samaa yksikköä eli metriä, (2) saman yksikön käyttö korostaa ajan ja paikan keskinäistä yhteyttä, joka on suhteellisuusteorian ydinsisältö ja (3) valon nopeus luonnollisissa yksiköissä on paljas (laaduton) luku $c = 1$. Onhan nimittäin

$$c = \text{valon nopeus} = \frac{\text{valon kulkema matka}}{\text{matkaan kulunut aika}} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1.$$

Suhteellisuusteorian matemaattisessa käsittelyssä valon nopeus on keskeinen vakio. Kun sen paikalle voidaan sijoittaa lukuarvo 1, niin lausekkeet yksinkertaistuvat.

Huomaa, että metri on hyvin lyhyt aika, sillä valo kulkee sekunnissa 299 792 458 metriä eli

¹ Käytännössä tämä tarkoittaa, että jokaisessa paikkapisteessä on mahdollista tehdä muissa pisteissä levossa olevien kellojen kanssa synkronoituja aikahavaintoja.

² Lyhenne SI tulee ranskan kielen sanoista *Système international d'unités*.

³ Paikka tarkoittaa koordinaattiakselin suuntaista etäisyyttä origosta.

$$1 \text{ s} = 299\,792\,458 \text{ m} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}$$

ja

$$1 \text{ m} = \frac{1}{299\,792\,458} \text{ s} \approx 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 3,3 \text{ nanosekuntia}$$

Luonnolliset yksiköt soveltuvat hyvin tieteelliseen käyttöön, mutta arkielämässä ne olisivat hankalia, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

ESIMERKKI 2.1.

Laske luonnollisissa yksiköissä eli metreinä, kuinka pitkä on **a)** Usain Boltin 2009 juoksema sadan metrin maailmanennätysaika 9,58 sekuntia **b)** 10 minuutin välitunti, **c)** yksi vuosi (365 vrk), **d)** myonin ja π^+ -mesonin (alkeishiukkasia) keskimääräiset elinajat 2,2 mikrosekuntia ja 2,6 nanosekuntia.

Koska $1 \text{ s} \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}$, niin

$$\mathbf{a)} \text{ 9,58 sekuntia} \approx 9,58 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} = 2,9 \cdot 10^9 \text{ m} = 2,9 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Boltin ennätysaika oli siis 2,9 miljardia metriä (2,9 miljoonaa kilometriä).

$$\mathbf{b)} \text{ 10 minuuttia} = 10 \cdot 60 \text{ s} \approx 10 \cdot 60 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} = 180 \cdot 10^9 \text{ m} = 180 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

Välitunnin pituus on siis 180 miljoonaa kilometriä.

$$\mathbf{c)} \text{ 1 vuosi} \approx 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 9,5 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km.}$$

Vuoden pituus on siis 9,5 biljoonaa kilometriä.

$$\mathbf{d)} \text{ myonin elinaika} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} = 660 \text{ m,}$$

$$\text{pionin elinaika} = 2,6 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 2,6 \cdot 10^{-9} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 0,78 \text{ m} = 78 \text{ cm.}$$

Kysytty aika on kussakin tapauksessa se matka, jonka valo olisi ehtinyt kulkea samassa ajassa. Esimerkiksi valo ehtii taivaltaa 2,9 miljoonaa kilometriä (noin 4 kertaa edestakaisin Maasta Kuuhun) samassa ajassa kuin Usain Bolt juoksee sata metriä.

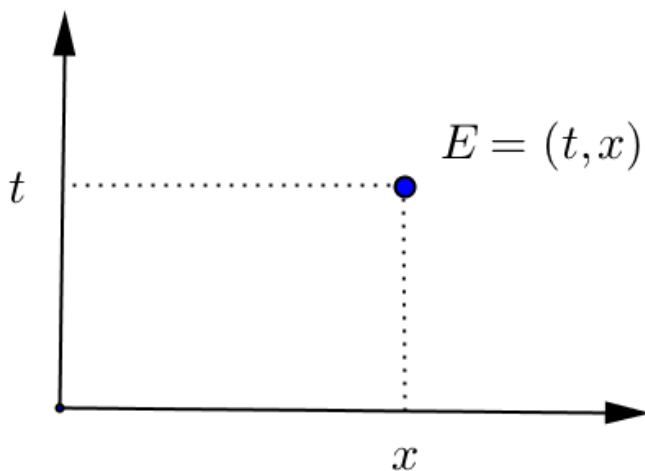
3. AVARUUSAIKADIAGRAMMIT

Neliulotteisessa avaruusaikakoordinaatistossa $K(t, x, y, z)$ voidaan erottaa kaksi osaa: (1) aikaosa ja (2) paikka- eli avaruusosa. Yksiulotteista aikaosaa kuvataan yleensä diagrammeissa pystysuuntaan piirretyllä t -akselilla. Kolmiulotteinen avaruusosa (x, y, z) kuvataan diagrammeissa yleensä typistettynä yksiulotteiseksi (vaakasuuntainen x -akseli) tai kaksiulotteiseksi (perspektiivissä piirretty xy -taso).

Totuttelemme nyt tulkitsemaan avaruusaikakoordinaatistoja kuvaavia diagrammeja¹.

Tarkastelemme typistettyä (t, x) -koordinaatistoa, mutta tulkinnat pätevät yleisemminkin (t, x, y) tai (t, x, y, z) -koordinaatistoissa.

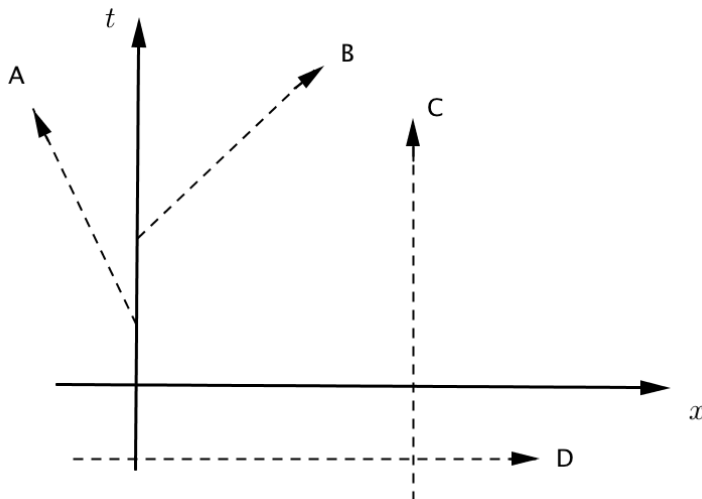
Avaruusaikakoordinaatiston piste kuvaa yksittäistä tapahtumaa, jolla on tietty aika ja paikka.



KUVIO 5. Tapahtuma E : hiukkanen on paikka-avaruuden kohdassa x hetkellä t .

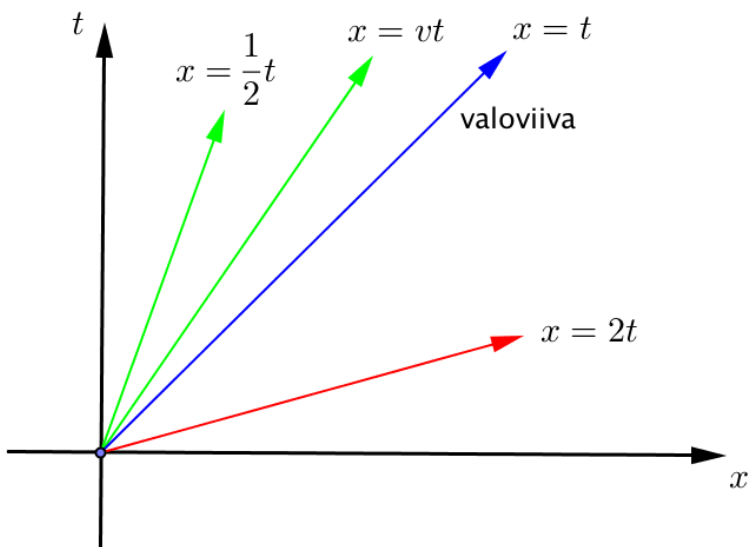
Hiukkasen liikettä paikka-avaruudessa kuvataan hiukkasen *maailmanviivalla*, jonka pisteet osoittavat hiukkasen paikan eri ajanhetkinä. Esimerkkejä maailmanviivoista on alla (Kuviot 6 ja 7). Maailmanviivat ovat suoria viivoja, joten hiukkaset liikkuvat tasaisella nopeudella.

¹ Avaruusaikaa esittäviä diagrammeja kutsutaan usein *Minkowski-diagrammeiksi* liettualais-saksalaisen matemaatikon Hermann Minkowskin (1864-1909) mukaan. Vuonna 1907 hän esitti geometrisen version (entisen oppilaansa) Einsteinin 1905 julkaisemasta suhteellisuusteoriasta.



KUVIO 6: Kolmen x -akselilla liikkuvan hiukkasen maailmanviivat: A liikkuu negatiivisen x -akselin suuntaan, B positiivisen x -akselin suuntaan ja C pysyy paikallaan x -akselilla. Viiva D rikkoo kausaalilain eikä siksi ole minkään hiukkasen maailmanviiva.

Alla olevassa kuviossa (Kuvio 7) akseleilla on käytetty luonnollisia yksiköitä (eli metriä ajan ja paikan yksikkönä). Tällöin kunkin maailmanviivan yhtälössä $x = vt$ oleva aikamuuttujan t kerroin v osoittaa hiukkasen liikenopeuden luonnollisissa yksiköissä eli suhteessa valon nopeuteen, joka on 1.



KUVIO 7. Vihreät maailmanviivat kahdelle hiukkaselle, jotka lähtevät liikkeelle hetkellä $t = 0$ paikasta $x = 0$ ja etenevät positiivisen x -akselin suuntaan vakionopeuksilla $1/2$ ja v , missä $v < 1$. Sininen viiva (ns. valoviiva) kuvaa origosta samanaikaisesti lähtevän fotonin (valopulssin) liikettä nopeudella $v = 1$. Punainen viiva kuvaisi hiukkasta, jonka nopeus olisi kaksi kertaa valon nopeus. Sellaisia ei nykytiedon mukaan ole olemassa.

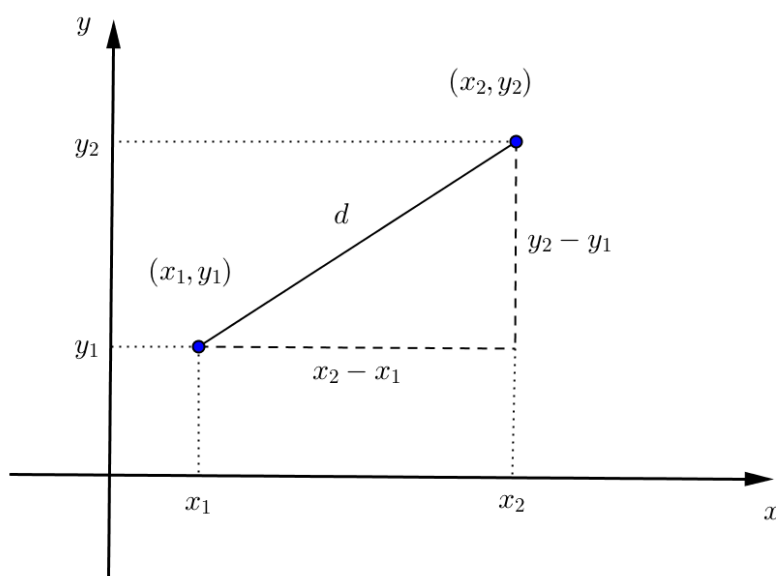
Seuraavissa luvuissa tutkimme, miten tapahtuman aika- ja paikkakoordinaatit muuttuvat, kun siirrymme tarkastelemaan sitä toisesta koordinaatistosta käsin (toisen havaitsijan näkökulmasta), joka on inertiaalinen ensimmäiseen koordinaatistoon nähden. Kuten aiemmin selostettiin, tällaisten inertiaalisten koordinaatistojen avaruusosat liikkuvat tasaisella nopeudella v toistensa suhteen. Luvussa 5 osoitamme, että inertiaaliset koordinaattimuunnokset ovat aina tiettyä matemaattista muotoa (affiineja tai lineaarisia). Luvussa 6 tarkastelemme näitä muunnoksia tapauksessa $v = 0$ (toistensa suhteen levossa olevat koordinaatistot). Luvussa 7 tutkimme kiinnostavinta tapausta $v \neq 0$, joka johtaa suhteellisuusteorian ytimeen, ns. Lorentz-muunnokseen.

Ennen koordinaattimuunnosten käsittelyä teemme luvussa 4 yhteenvedon tarvittavista matemaattisista käsitteistä ja tuloksista.

4. MATEMAATTISIA APUVÄLINEITÄ

Tässä luvussa täydennämme matemaattista työkaluvarastoamme käsitteillä ja tuloksilla, joita tarvitsemme seuraavissa luvuissa. Lukija, jolle nämä ovat jo tuttuja voi siirtyä seuraavaan lukuun ja tarvittaessa palata kertaamaan.

4.1. Karteesisen koordinaatiston pisteiden välinen etäisyys



KUVIO 8. Koordinaatiston pisteiden välinen etäisyys tavallisessa karteesisessa¹ eli suorakulmaisessa koordinaatistossa.

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys d on hypotenuusana suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateettien pituudet ovat $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$. Pythagoraan lauseen perusteella on

$$(EI) \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad [\text{ns. euklidinen intervalli}^2]$$

eli

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

¹ Ranskalaisen filosofi ja matemaatikko René Descartes (1596–1650) otti ensimmäisenä käyttöön koordinaatistot tutkiessaan viivojen ominaisuuksia.

² Sanaa *intervalli* (väli) käytetään suhteellisuusteoriassa merkityksessä *välimatkan neliö*. Adjektiivi *euklidinen* viittaa tavalliseen suorakulmaiseen koordinaatistoon.

Usein on tapana merkitä pisteiden välisiä koordinaattierotuksia ns. deltasymboleilla

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ ja } \Delta y = y_2 - y_1 .$$

Tällöin euklidisen intervallin kaava saa muodon

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 ,$$

jossa sulkeet jätetään yleensä pois (Δx ja Δy ajatellaan yhtenä symbolina)

$$(EI-\Delta) \quad d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Erikoistapauksena toteamme, että pisteen (x, y) ja origon $(0, 0)$ välisen etäisyyden neliö on

$$d^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2$$

ja itse etäisyys

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

HUOMAUTUS 4.1.1. Etäisyydet kolmiulotteisessa avaruudessa

Kolmiulotteisessa paikka-avaruudessa kahden pisteen välisen etäisyyden neliö on vastaavasti

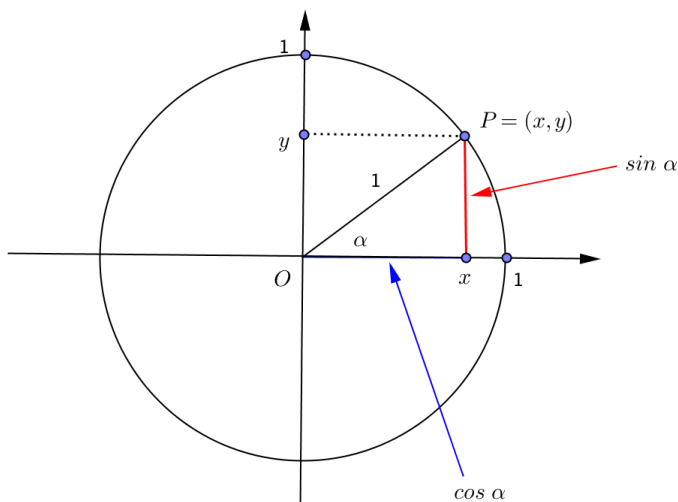
$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

ja origon ja pisteen (x, y, z) välisen etäisyyden neliö on

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

4.2. Ympyräfunktiot

Tutut kulman α *trigonometriset funktiot* $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$ voidaan määritellä yleisemmin ympyrän avulla, mistä syystä niitä kutsutaan usein *ympyräfunktioiksi*. Tällöin kulma α sijoitetaan keskuskulmaksi xy -tasossa olevaan yksikkösäteiseen origokeskiseen ympyrään kuvion 9 esittämällä tavalla.



KUVIO 9. Kulma α sekä sen sini ja kosini origokeskisessä yksikköympyrässä.

Kuviossa 9 terävä kulma α on asetettu yksikköympyrän keskuskulmaksi siten, että sen oikea kylki on positiivisella x -akselilla. Vasen kylki leikkaa ympyrän kehän pisteessä $P = (x, y)$.

Kylkien väliin syntyy suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on 1 ja kateettien pituudet ovat x ja y . Tästä kolmiosta näemme, että terävän kulman α trigonometriset funktiot ovat

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \text{ja} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

Huomaamme, että $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$ ovat samat kuin kehäpisteen P koordinaatit, ja $\tan \alpha$ on näiden koordinaattien osamäärä. Tämän havainnon perusteella on luonnollista määritellä funktiot $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$ kaikille kulmille (myös suoraa kulmaa suuremmille tai negatiivisille¹ kulmille) niitä vastaavien kehäpisteiden P koordinaattien avulla asettamalla

$$(YF) \quad \cos \alpha = x, \quad \sin \alpha = y, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad [\text{ympyräfunktioita}]$$

Funktio $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$ tulevat näin määritellyiksi kaikille kulmille α . Funktio $\tan \alpha$ tulee määritellyksi kaikille kulmille α lukuun ottamatta kulmia, joita vastaavat kehäpisteet osuvat y -akselille, jossa $x = 0$.

¹ Positiivinen kulma ajatellaan kiertokulmana vastapäivään ja negatiivinen myötäpäivään.

Määritelmistä (YF) seuraa, että kaikille kulmille α on voimassa

$$(YP) \quad (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1, \quad [\text{Pythagoraan lause} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1]$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} .$$

Ensin mainittu ympyräfunktioiden perusidentiteetti (YP) kirjoitetaan usein ilman sulkeita muotoon $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Huomaa, että eri kulmia (esim. 30° , 390° ja -330°) voi vastata sama kehäpiste P , jolloin näiden kulmien sinit, kosinit ja tangentit ovat tietenkin samat.

Pisteen $P(x, y)$ kiertäessä yksikköympyrää, sen koordinaatit vaihtelevat välillä $-1 \leq x, y \leq 1$, joten kulmien sinit ja kosinit vaihtelevat samalla välillä: $-1 \leq \cos \alpha, \sin \alpha \leq 1$. Kolmas ympyräfunktio $\tan \alpha$ voi saada kaikki reaaliarvot eli $-\infty < \tan \alpha < +\infty$.

Kuviosta 9 näemme, että piste $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ piirtää yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$, kun kulmamuuttuja α käy läpi kaikki arvot välillä $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ (eli välin $0 \leq \alpha < 2\pi$ käytettäessä ns. absoluuttisia kulmanyksiköitä¹). Jos kulmamuuttujan α annetaan ”jatkaa matkaansa” ja käydä läpi kaikki arvot $\alpha \geq 360^\circ$ (eli $\alpha \geq 2\pi$), niin piste $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ piirtää saman ympyrän toisen, kolmannen jne. kerran.

Ympyräviivalla $x^2 + y^2 = 1$ on siis *parametriesitys*²

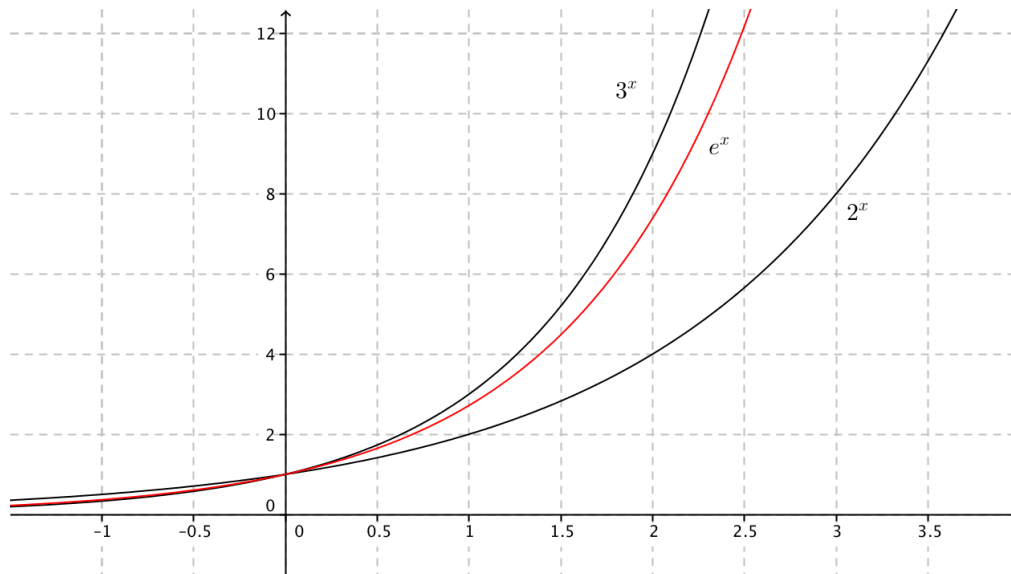
$$\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi .$$

¹ Kulman suuruus *absoluuttisissa yksiköissä* eli *radiaaneissa* saadaan piirtämällä kulman kärki keskipisteenä yksikköympyrä ja mittaamalla kulmaa vastaavan kaaren pituus. Täyden kulman (360°) absoluuttinen suuruus on siis 2π ja suoran kulman $\pi/2$.

² Tasokäyrän *parametriesitys* tarkoittaa yhtälöparia, jossa käyrän pisteen (x, y) koordinaatit ilmaistaan kolmannen muuttujan eli *parametrin* avulla. Avaruuskäyrän parametriesitys sisältää vielä kolmannen yhtälön koordinaatille z .

4.3. Eksponenttifunktiot

Funktioita 2^x , 3^x , $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ tai yleisesti a^x ($a > 0$), joissa muuttuja on eksponentissa, sanotaan *eksponenttifunktioiksi*. (Niitä ei pidä sekoittaa potenssifunktioihin x^2 , x^3 , $x^{1/2}$ tai yleisesti x^a .)



KUVIO 10a. Eksponenttifunktioiden 2^x , e^x ja 3^x kuvaajat. Huomaa, että x - ja y -akseleilla on tässä erilainen yksikköjaotus.

Kaikkien eksponenttifunktioiden kuvaajat leikkaavat y -akselin pisteessä $(0, 1)$, koska $a^0 = 1$ kaikilla $a > 0$. Kuvion keskimmäisen eksponenttifunktion kantaluku $e \approx 2,718 \dots$ on ns. *Neperin luku*, joka on myös ns. luonnollisen logaritmijärjestelmän ($\ln$) kantaluku. Luvulla e on monia hyödyllisiä ominaisuuksia¹, joiden vuoksi juuri e^x on eniten käytetty eksponenttifunktio.

¹ Jos piirrämme eksponenttifunktioiden kuvaajia xy -koordinaatistoon käyttäen molemmillaakseleilla samaa yksikköjaotusta, niin funktio e^x on ainoa, jonka kuvaaja leikkaa y -akselin 45° kulmassa.

4.4. Hyperboliset funktiot

Ympyräfunktioille sukua olevat *hyperboliset funktiot* $\cosh \alpha$, $\sinh \alpha$ ja $\tanh \alpha$ määritellään eksponenttifunktion e^α avulla seuraavasti

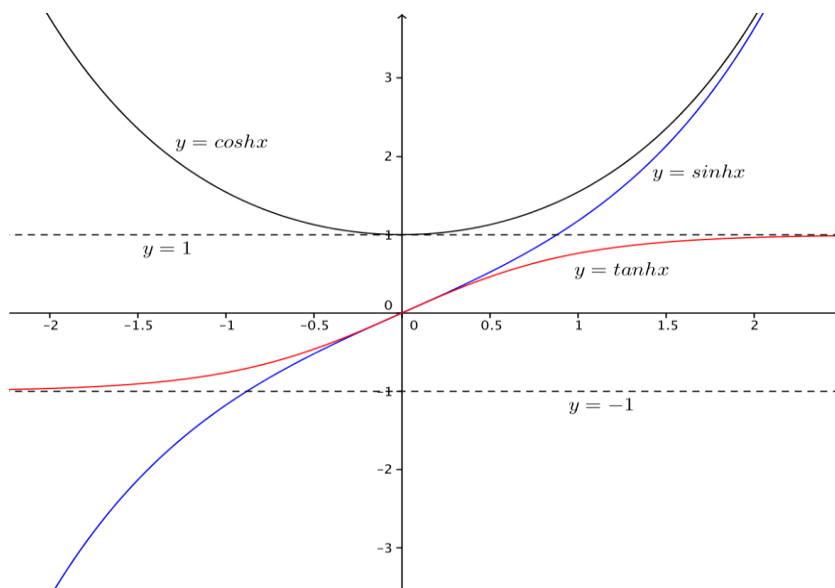
$$\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad [\text{hyperbolinen kosini}]$$

$$\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \quad [\text{hyperbolinen sini}]$$

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad [\text{hyperbolinen tangentti}]$$

Määritelmistä (ja alla olevasta kuviosta) nähdään helposti, että hyperboliset funktiot saavat arvoja väleillä

$$1 \leq \cosh \alpha < +\infty, \quad -\infty < \sinh \alpha < +\infty, \\ -1 < \tanh \alpha < +1. \quad [\text{Tämän todistus löytyy liiteosasta (LIITE 3).}]$$



KUVIO 10b. Käyrät $y = \sinh x$, $y = \cosh x$ ja $y = \tanh x$ sekä suorat $y = \pm 1$.

Hyperbolisten funktioiden nimet ja merkintätavat johtuvat niiden sukulaisuudesta ympyräfunktioiden kanssa. Voimme esimerkiksi todeta helpolla laskutoimituksella (ks. LIITE 3), että funktioille $\cosh \alpha$ ja $\sinh \alpha$ (muuttujaa merkitty x :n sijasta kirjaimella α , vaikka se ei tässä tarkoitaakaan kulmaa) on aina voimassa identiteetti

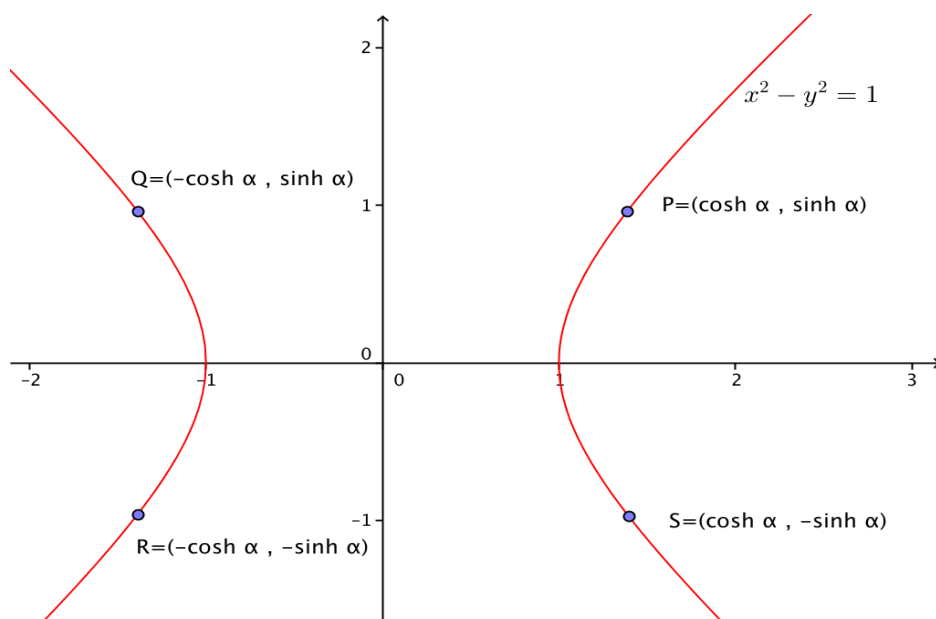
$$(HP) \quad (\cosh \alpha)^2 - (\sinh \alpha)^2 = 1 \quad [\text{hyperbolinen perusidentiteetti}]$$

tai toisin kirjoitettuna

$$(HP) \quad \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

joka muistuttaa läheisesti ympyräfunktioiden perusidentiteettiä $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Määre "hyperbolinen" viittaa *yksikköhyperbeli*-nimiseen käyrään $x^2 - y^2 = 1$, johon hyperboliset funktiot liittyvät samalla tavoin kuin ympyräfunktiot liittyvät yksikköympyrään $x^2 + y^2 = 1$. Ympyräfunktioilla muuttuja α tarkoittaa kulmaa. Myös hyperbolisten funktioiden $\cosh \alpha$, $\sinh \alpha$ ja $\tanh \alpha$ muuttujaa α kutsutaan toisinaan "hyperboliseksi kulmaksi", jota ei kuitenkaan voida ajatella kulmana tavanomaisessa mielessä¹.



KUVIO 11a. Hyperbelillä $x^2 - y^2 = 1$ eli $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ on kaksi haaraa, oikeanpuoleinen ($x > 0$) ja vasemmanpuoleinen ($x < 0$).

Hyperbolisesta perusidentiteetistä (HP) seuraa, että pisteet $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ toteuttavat yksikköhyperbelin yhtälön $x^2 - y^2 = 1$ ja ovat siis tällä käyrällä (tarkemmin sanoen sen

¹Hyperbolisen "kulman" α geometrisesta tulkinnasta löytyy lisätietoa esim. Wikipediasta (http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function)

oikeanpuoleisella haaralla). Kun muuttuja α käy läpi arvot $-\infty < \alpha < +\infty$, niin piste P piirtää kuvion 11 hyperbelin oikeanpuoleisen haaran.

Hyperbelin $x^2 - y^2 = 1$ oikeanpuoleista haaraa kuvaa siis *parametriesitys*¹

$$\begin{cases} x = \cosh \alpha \\ y = \sinh \alpha \end{cases}, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$$

Hyperbolisten funktioiden yhteenlaskukaavat

Funktioille $\cosh \alpha$, $\sinh \alpha$ ja $\tanh \alpha$ ovat voimassa samantapaiset yhteenlaskukaavat kuin trigonometrisillekin funktioille (ympyräfunktioille).

$$(a) \quad \cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$(b) \quad \sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

$$(c) \quad \tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \cdot \tanh \beta}$$

Kaavojen todistukset löytyvät liiteosasta (LIITE 3).

¹ Tasokäyrän *parametriesitys* tarkoittaa yhtälöparia, jossa käyrän pisteen (x, y) koordinaatit ilmaistaan kolmannen muuttujan eli parametrin avulla. Avaruuskäyrän parametriesitys sisältää vielä kolmannen yhtälön koordinaatille z .

5. KOORDINAATTIMUUNNOS INERTIAALIKOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ

5.1. Johdanto

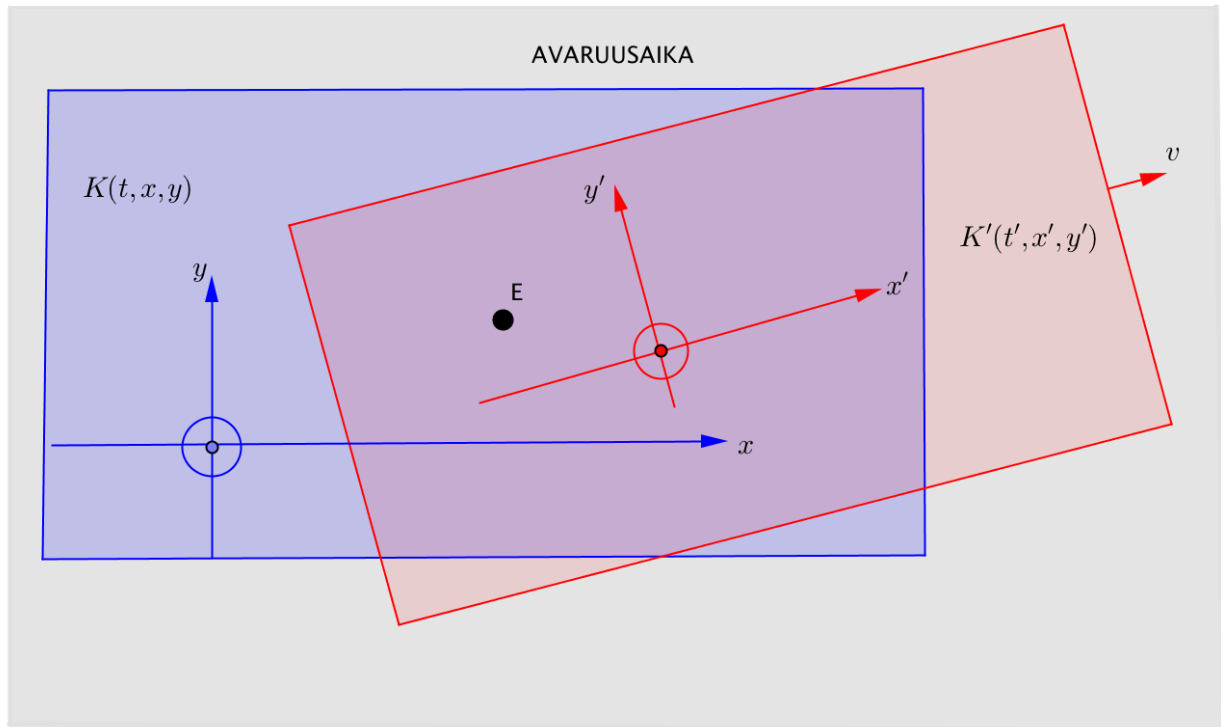
Kaikki fysikaalisen todellisuuden ilmiöt koostuvat tapahtumista avaruusajassa. Tapahtumia voidaan siis ajatella avaruusajan pisteinä. Avaruusaika muodostaa fysikaalisen tapahtumavirran taustan samaan tapaan kuin valkokangas muodostaa elokuvan visuaalisen tapahtumavirran taustan.

Avaruusajassa tapahtumilla ei sinänsä ole mitään koordinaatteja. Aika- ja paikkakoordinaatit ovat havaintoja tekevän ihmisen tai laitteen määrittämiä lukuarvoja, joiden avulla pyritään saamaan selville fysikaalisten ilmiöiden (tapahtumasarjojen) lainalaisuuksia. Havaintojen tekijä ikään kuin asettaa ”puhtaan avaruusajan” päälle koordinaatiston, jonka avulla hän voi mitata tapahtumien aika- ja paikkakoordinaatteja¹ ja selvittää niiden avulla mahdollisia lainalaisuuksia. Käytännössä tämä koordinaatiston ”asettaminen puhtaan avaruusajan päälle” tarkoittaa mittayksiköiden ja koordinaattiakselien valintaa sekä kellojen käynnistämistä ja synkronointia.

Eri havaitsijat voivat käyttää mittauksissaan eri koordinaatistoja. Jos koordinaatistot ovat keskenään inertiaalisia (levossa tai tasaisessa liikkeessä), niin suhteellisuusperiaatteen mukaan nämä havaitsijat kuitenkin päätyvät samoihin luonnonlakeihin eli samoihin fysikaalisia ilmiöitä kuvaaviin yhtälöihin.

Alla oleva kuvio 11b havainnollistaa avaruusajan ja sen päälle asetettujen koordinaatistojen keskinäissuhdetta.

¹ Vertauskuvana voisi ajatella, että elokuvan ”fysiikan” tutkija asettaa valkokankaan päälle läpinäkyvä kalvon, johon hän on piirtänyt paikkakoordinaattiristikon ja kiinnittänyt useita pieniä läpinäkyviä kelloja. Tämän kellokalvonsa avulla tutkija voi mitata elokuvan tapahtumien aika- ja paikkakoordinaatteja ja saada selville tapahtumien lainalaisuuksia.



KUVIO 11b. Harmaa tausta edustaa "puhdasta avaruusaikaa", jonka avaruusosa on tässä tyypistetty tasoksi. Sininen ja punainen alue kuvaavat avaruusajan päälle asetettuja inertiaalikoordinaatistoja K ja K', jotka ovat toisiinsa nähden tasaisessa liikkeessä. Koordinaatisto K' liikkuu tasaisella nopeudella v koordinaatiston K suhteen. Jos $v = 0$, niin koordinaatistot ovat levossa toistensa suhteen. Avaruusajan tapahtuman E koordinaatit (t, x, y) ja (t', x', y') voidaan mitata sekä K:ssa että K':ssa lukemalla paikkakoordinaatit akseleilta ja aikakoordinaatit kyseisessä paikassa olevista koordinaatistojen kelloista, joista kuvioon on merkitty ympyröillä vain origoissa olevat peruskellot.

5.2. Eetteriteoria

Kysymys valon luonteesta on aina askarruttanut luonnonilmiöistä kiinnostuneita ajattelijoita. Uuden ajan alussa Cristiaan Huygens (1629-1695) esitti valon olevan aaltoliikettä samaan tapaan kuin veden aaltoilu. Isaac Newton (1642-1727) puolestaan arveli valon koostuvan nopeasti kiitävistä kiviäärinluotien tapaisista pienistä hiukkasista.

1800-luvun lopulla aaltoteoria sai vahvaa tukea James Clerk Maxwellin (1831-1879) ja Heinrich Hertzin (1857-1894) tutkimuksista, joissa he osoittivat valon olevan sähkömagneettista aaltoliikettä. Tämä ei ollut ongelmaton ajatus, sillä aaltoliikettä oli totuttu ajattelemaan jonkin väliaineen (kuten veden tai ilman) aaltoiluna, mutta valon ja sähkömagneettisen aaltoliikkeen huomattiin etenevän myös tyhjiössä. Ristiriidan ratkaisuksi

kehitettiin ns. eetteriteoria. Oletettiin, että koko maailmankaikkeus on täynnä erityistä ainetta, *eetteriä*, jonka värähtelyt ovat sähkömagneettista aaltoliikettä. Teoria sopi myös hyvin Newtonin mekaniikan tueksi, koska eetteri muodostaisi Newtonin oletaman absoluuttisen levossa olevan avaruuden, johon nähden kaikki maailmankaikkeudessa olevat materiaaliset kohteet liikkuisivat. Luvussa 1 mainittujen Michelson-Morleyn kokeiden (1887) tavoitteena olikin mitata maapallomme liikenopeus eetterin suhteen. Tulos oli yllättävä. Maan nopeus oletetun eetterin suhteen oli nolla eikä ainoastaan hetkellisesti, vaan pysyvästi. (Mittaus toistettiin eri vuodenaikoina, jolloin Maa oli kiertoradansa eri kohdissa.) Samalla kävi ilmi, että sähkömagneettisen aaltoliikkeen (myös valon) etenemisnopeus on valolähteen liiketilasta riippumaton vakio. Tätä eetteriteorian kriisiä yritettiin ratkaista monin tavoin, mutta vasta Einstein onnistui avaamaan Gordionin solmun vuonna 1905 esittämällänsä suhteellisuusteorialla. Sen mukaan ei ole olemassa mitään absoluuttisessa levossa olevaa vertailutaustaa, eetteriä, jonka suhteen kappaleet liikkuisivat. Kaikki liike on aina suhteellista – kohteen liikettä johonkin toiseen kohteeseen nähden.

Kuviossa 11b harmaana alueena kuvattua ”puhdasta” avaruusaikaa ei siis pidä ajatella levossa olevana ”eetterinä”, jonka suhteen sen päälle asetetut materiaalsiin kohteisiin kiinnitetyt koordinaatistot liikkuisivat. Kohteet ja koordinaatistot liikkuvat vain toistensa suhteen.

5.3. Inertiaalisten koordinaattimuunnosten yleinen muoto

Tässä kappaleessa perustelemme yleisen muodon, joka pätee kaikille inertiaalisten koordinaatistojen välisille muunnoksille. Seuraavissa luvuissa käsittelemme näitä koordinaattimuunnoksia tarkemmin ensin toistensa suhteen levossa (luku 6) ja sitten tasaisessa liikkeessä (luku 7) olevien koordinaatistojen välillä.

Olkoott siis $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$ inertiaalisia avaruusaikakoordinaatistoja. Tehtävänä on perustella niiden muunnoskaavojen yleinen muoto, joilla tapahtumien K' -koordinaatit t', x', y', z' saadaan niiden K -koordinaateista t, x, y, z . Vastaus tiivistyy seuraavaan lauseeseen.

Lause 5.3.1. Koordinaatistot $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$ ovat toistensa suhteen inertiaalisia täsmälleen silloin, kun tapahtumien K' -koordinaatit t', x', y', z' saadaan niiden K -koordinaateista t, x, y, z ensimmäistä astetta olevilla¹ lausekkeilla:

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} t' = a_1 t + b_1 x + c_1 y + d_1 z + e_1 \\ x' = a_2 t + b_2 x + c_2 y + d_2 z + e_2 \\ y' = a_3 t + b_3 x + c_3 y + d_3 z + e_3 \\ z' = a_4 t + b_4 x + c_4 y + d_4 z + e_4, \end{cases}$$

missä kertoimet a_k, b_k, c_k, d_k, e_k ($k = 1, 2, 3, 4$) ovat vakioita.

Todistus:

Lause sisältää kaksi implikaatioväitettä:

- (1) Jos K ja K' ovat inertiaalisia, niin muunnoskaavat (5.3.1) ovat voimassa.
- (2) Jos muunnoskaavat (5.3.1) ovat voimassa, niin K ja K' ovat inertiaalisia.

Implikaation (2) todistus:

Oletamme, että kaavat (5.3.1) ovat voimassa ja todistamme, että K ja K' ovat inertiaalisia. Tätä varten on näytettävä, että hiukkanen H , joka liikkuu tasaisella nopeudella koordinaatistossa K , liikkuu tasaisella nopeudella myös koordinaatistossa K' .

Yksinkertaisuuden vuoksi käsittelemme tyypistettyjä koordinaatistoja $K(t, x)$ ja $K'(t', x')$, joissa avaruusosat on yksiulotteisia suoria (x -akseli ja x' -akselit). Silloin muunnoskaavoista (5.3.1) häviävät y - ja z -termit eli jäljelle jäävät kaavat

$$(5.3.1a) \quad \begin{cases} t' = a_1 t + b_1 x + e_1 \\ x' = a_2 t + b_2 x + e_2 \end{cases}$$

Olkoon siis H hiukkanen (tai kappale), joka liikkuu vakionopeudella v pitkin x -akselia.

Tällöin jokaisella K :n aikavälillä $\Delta t = t_2 - t_1$ hiukkanen H liikkuu matkavälin $\Delta x = x_2 - x_1$, mutta osamäärä $\Delta x / \Delta t = v$ on vakio eli sama kaikilla aikaväleillä². Kun kaavojen (5.3.1a)

¹ Yhtälöiden (5.3.1) määrittelemää koordinaattimuunnosta kutsutaan *affiiniksi* muunnokseksi. Affiini muunnos on *lineaarinen*, jos vakiot e_k ovat nollia. Lineaarisessa muunnoksessa origo säilyy paikallaan, mutta affiinissa se voi siirtyä.

² Kreikkalaista kirjainta Δ (delta) käytetään osoittamaan muutosta tai erotusta. Esim. Δt on aikakoordinaatin t muutos ja Δx on paikkakoordinaatin x muutos.

avulla siirrytään tarkastelemaan hiukkasen H liikettä K':n näkökulmasta, niin vastaavat aika- ja matkavälit $\Delta t'$ ja $\Delta x'$ ovat K':ssa

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1 \\ &= (a_1 t_2 + b_1 x_2 + e_1) - (a_1 t_1 + b_1 x_1 + e_1) \\ &= a_1(t_2 - t_1) + b_1(x_2 - x_1) \\ &= a_1 \Delta t + b_1 \Delta x\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\Delta x' = a_2 \Delta t + b_2 \Delta x .$$

Näin ollen hiukkasen H nopeus mitattuna K':ssa on

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x'}{\Delta t'} &= \frac{a_2 \Delta t + b_2 \Delta x}{a_1 \Delta t + b_1 \Delta x} && (\text{supistetaan } \Delta t: \text{llä}) \\ &= \frac{a_2 + b_2(\Delta x/\Delta t)}{a_1 + b_1(\Delta x/\Delta t)} && (\Delta x/\Delta t = v) \\ &= \frac{a_2 + b_2 v}{a_1 + b_1 v} \\ &= \text{vakio} && (\text{koska } a_k, b_k \text{ ja } v \text{ ovat vakioita})\end{aligned}$$

Näemme siis, että hiukkasen H nopeus K':ssa on myös vakio, joten K' on inertiaalikoordinaatisto (jatkavuuden laki on voimassa).

Implikaation (1) todistus:

Olkoot koordinaatistot $K(t, x)$ ja $K'(t', x')$ inertiaalisia ja olkoon koordinaattimuunnos $K \rightarrow K'$ yleistä muotoa

$$(5.3.2) \quad \begin{cases} t' = T(t, x) \\ x' = X(t, x) \end{cases} ,$$

missä T ja X ovat tuntemattomia kahden muuttujan t ja x funktioita. Tarkastellaan hiukkasta, joka liikkuu K:n suhteen tasaisella nopeudella u . Silloin hiukkasen maailmanviiva K:ssa toteuttaa yhtälön (hiukkasen liikeyhtälön)

(1) $x = ut + A$, missä A on jokin vakio (hiukkasen K -paikka hetkellä $t = 0$).

Mutta K ja K' ovat inertiaalisia, joten hiukkasella on myös K' :ssa vakionopeus u' ja sen maailmanviiva toteuttaa K' :ssa yhtälön

(2) $x' = u't' + A'$, missä A' on jokin vakio (hiukkasen K' -paikka hetkellä $t' = 0$).

Sijoittamalla tässä koordinaattimuuttujien x' ja t' paikalle yhtälöiden (5.3.2) mukaiset lausekkeet saamme

(3) $X(t, x) = u'T(t, x) + A'$.

Mutta yhtälö (3) on koordinaattimuuttujien t ja x välinen yhtälö ja eli hiukkasen liikeyhtälö K :ssa, joten sen täytyy olla yhtäpitävä ensimmäistä astetta olevan liikeyhtälön (1) kanssa. Näin ollen myös (3):n täytyy olla ensimmäistä astetta. Tästä seuraa, että funktiot T ja X ovat myös ensimmäisen asteen polynomeja eli tyyppiä (5.3.1a) olevat muunnoskaavat ovat voimassa K :n ja K' :n välillä.

MOT

Huomautus edelliseen todistukseen

Implikaation (1) todistus perustuu viime kädessä olettamukseen *avaruusajan homogeenisuudesta*. Tämä periaate on eräs fysiikan lähtökohdista. Sen mukaan aika ja avaruus on joka kohdassa samanlaista. Fysikaaliset ilmiöt noudattavat samoja lakeja riippumatta siitä milloin tai missä ne tapahtuvat, kunhan olosuhteet ovat samanlaiset.

5.4. Koordinaattimuunnosten Δ -muoto

Tarkasteltaessa fysikaalisia ilmiöitä koordinaatistossa K on yleensä kyse kahden tapahtuman $E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ ja $E_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ koordinaattieroista

$$\Delta t = t_2 - t_1 ,$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 ,$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 ,$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 .$$

Samojen tapahtumien koordinaattierot K' :ssa ovat

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 ,$$

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 ,$$

$$\Delta y' = y'_2 - y'_1 ,$$

$$\Delta z' = z'_2 - z'_1 ,$$

Jos K ja K' ovat inertiaalisia, niin kaavojen (5.3.1) perusteella on

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t'_1 - t'_2 \\ &= (a_1 t_2 + b_1 x_2 + c_1 y_2 + d_1 z_2 + e_1) - (a_1 t_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 + d_1 z_1 + e_1) \\ &= a_1(t_2 - t_1) + b_1(x_2 - x_1) + c_1(y_2 - y_1) + d_1(z_2 - z_1) \\ &= a_1 \Delta t + b_1 \Delta x + c_1 \Delta y + d_1 \Delta z . \end{aligned}$$

Vastaavat laskut muillekin koordinaattieroille antavat tulokseksi muunnoskaavat

$$(5.4.1) \quad \begin{cases} \Delta t' = a_1 \Delta t + b_1 \Delta x + c_1 \Delta y + d_1 \Delta z \\ \Delta x' = a_2 \Delta t + b_2 \Delta x + c_2 \Delta y + d_2 \Delta z \\ \Delta y' = a_3 \Delta t + b_3 \Delta x + c_3 \Delta y + d_3 \Delta z \\ \Delta z' = a_4 \Delta t + b_4 \Delta x + c_4 \Delta y + d_4 \Delta z \end{cases}$$

sekä ty pistetyille koordinaatistoille $K(t, x)$ ja $K'(t', x')$

$$(5.4.2) \quad \begin{cases} \Delta t' = a_1 \Delta t + b_1 \Delta x \\ \Delta x' = a_2 \Delta t + b_2 \Delta x . \end{cases}$$

Näissä muunnoskaavojen Δ -muodoissa vakiotermit ovat nollia, joten koordinaattierojen muunnoskaavat ovat lineaarisia. Fysikaalisesti tämä kuvaa *avaruusajan homogeenisuutta*. Kahden tapahtuman koordinaattierot K' :ssa riippuvat vain tapahtumien koordinaattieroista K :ssa eivätkä siitä, missä kohdassa K -avaruusaikaa ne sijaitsevat.

HUOMAUTUS 5.4.1. Yhtyvät origot

Jos koordinaatistojen K ja K' origot yhtyvät, niin silloin vakiotermit e_k ovat nollia koordinaattien muunnoskaavoissa (5.3.1) ja (5.3.2) ja ne ovat samanmuotoisia kuin koordinaattierojen muunnoskaavat (5.4.1) ja (5.4.2).

6. KOORDINAATTIMUUNNOS LEVOSSA OLEVIENT KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ

6.1. Johdanto

Tässä luvussa tarkastelemme suorakulmaisia koordinaatistoja $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$, joiden avaruusosat ovat levossa toistensa suhteen eli koordinaatiston K' origo ja avaruusakselit x', y' ja z' pysyvät K :ssa paikallaan. Tällöin K :n kellot ovat levossa myös K' :ssa ja ovat siten myös K' :n kelloja. Koordinaatistoilla K ja K' on siis sama aika eli $t' = t$. Voimme siten keskittyä tutkimaan paikkakoordinaattien x, y, z ja x', y', z' välistä muunnosta.

Voidaan todistaa (ks. LIITE 2), että edellä kuvatussa tilanteessa koordinaatiston K' avaruusosa $K'(x', y', z')$ saadaan koordinaatiston K avaruusosasta $K(x, y, z)$ kolmessa vaiheessa:

Vaihe 1: *yhdensuuntaissiirto*

Siirretään tarvittaessa K :n origo K' :n origoon säilyttäen K :n akselit samansuuntaisina.

Vaihe 2: *kierto*

Kierretään K :n akseleita origon ympäri, kunnes ne yhtyvät K' :n akseleihin.

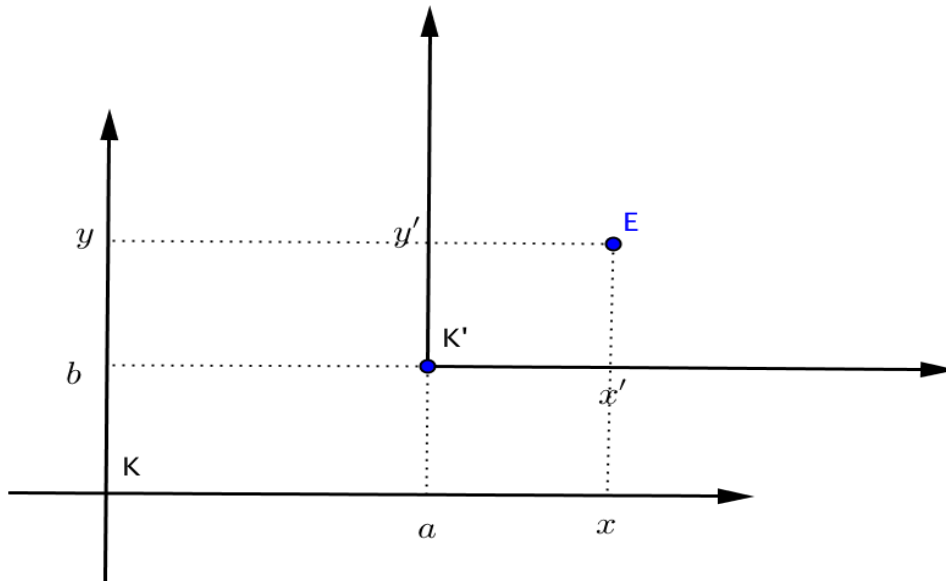
Vaihe 3: *peilaus* eli *akselin suunnanvaihto*

Käännetään tarvittaessa yksi tai useampi K :n akselin vastakkaissuuntaiseksi niin, että kaikki akselit osoittavat samaan suuntaan kuin K' :n akselit.¹

Tarkastelemme kutakin vaihetta erikseen typistetyssä tapauksessa $K(x, y) \rightarrow K'(x', y')$, jota koskevat johtopäätökset pätevät myös yleisessä tapauksella $K(x, y, z) \rightarrow K'(x', y', z')$.

¹ Kierron jälkeen voi syntyä tilanne, jossa esim. K :n x -akseli kyllä yhtyy K' :n vastaavaan akseliin, mutta osoittaa vastakkaiseen suuntaan. Akselin suunnanvaihto on silloin tarpeen.

6.2. Paikkakoordinaatiston yhdensuuntaissiirto



KUVIO 12: Koordinaatiston yhdensuuntaissiirto. Koordinaatisto K' saadaan siirtämällä koordinaatiston K origo pisteeseen (a, b) . Akselien suunnat eivät muutu.

Tapahtuman E koordinaatit K' :ssa ovat

$$(6.1) \quad t' = t, \quad x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

Nämä muunnosyhtälöt ovat tyyppiä (5.3.1) ja määrittelevät affiinin koordinaattimuunnoksen.

Jos E_1 ja E_2 ovat kaksi tapahtumaa, joiden koordinaatit K :ssa ovat (t_1, x_1, y_1) ja (t_2, x_2, y_2) , niin niiden koordinaatit K' :ssa ovat (t'_1, x'_1, y'_1) ja (t'_2, x'_2, y'_2) , missä

$$\begin{aligned} t'_1 &= t_1, & t'_2 &= t_2, \\ x'_1 &= x_1 - a, & x'_2 &= x_2 - a, \\ y'_1 &= y_1 - b, & y'_2 &= y_2 - b, \end{aligned}$$

joten tapahtumien koordinaattierot K :ssa ja K' :ssa ovat samansuuruiset.

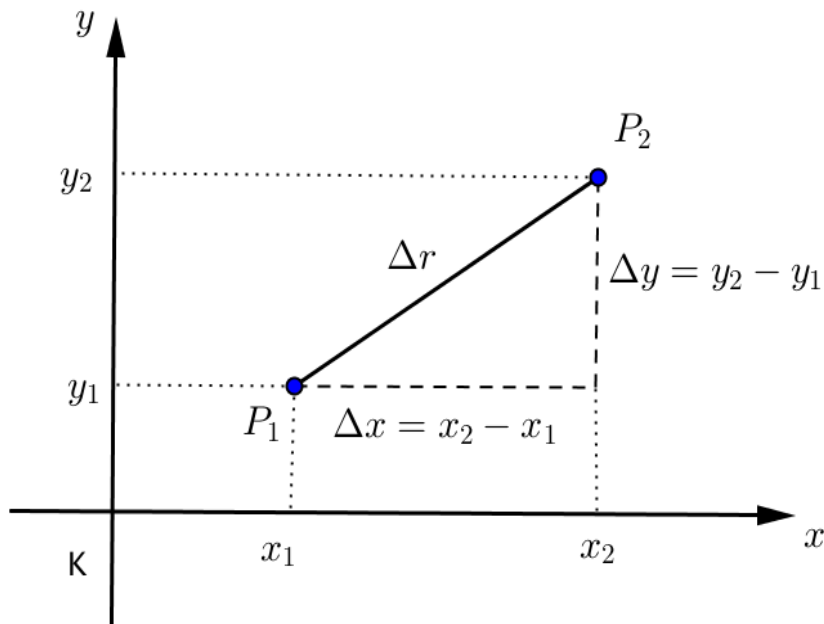
$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t' \\ \Delta x &= x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1 = \Delta x' \\ \Delta y &= y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 = \Delta y' \end{aligned}$$

Pythagoraan lauseen mukaan (Kuvio 13) tapahtumapaikkojen välimatkan Δr neliö laskettuna koordinaatistossa K on

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad [\text{merkitään ilman sulkeita } \Delta r^2 = \Delta r \cdot \Delta r]$$

eli

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 .$$



KUVIO 13. Tapahtumapaikkojen $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$ välimatka Δr koordinaatistossa K.

Laskettuna koordinaatistossa K' välimatkan neliö on samansuuruinen, sillä

$$\Delta r'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2 .$$

Huomaamme, että yhdensuuntaissiirrosta (6.1) lauseke

$$(EI-2) \quad \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad [\text{euklidinen}^1 \text{ intervalli } xy\text{-tasossa}]$$

tai

$$(EI-3) \quad \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad [\text{euklidinen intervalli } xyz\text{-avaruudessa}]$$

¹ Eukleides (n. 300 eKr) oli kreikkalainen matemaatikko, jonka geometriaa käsittelevä aksiomaattinen esitys (Alkeet) oli loogis-matemaattisen tutkimuksen mallina ja koulujen oppikirjana käytössä yli kaksi vuosituhatta aina 1900-luvulle saakka.

eli ns. *euklidinen intervalli* säilyy arvoltaan muuttumattomana eli *invarianttina* ($\Delta r'^2 = \Delta r^2$). Tämä ei tietenkään ole yllätys, koska euklidinen intervalli ilmaisee kahden tason tai avaruuden pisteen välisen etäisyyden neliön, joka ei tietenkään riipu käytetystä koordinaatistosta. Suureilla ja lausekkeilla, kuten euklidinen intervalli (EI), jotka säilyvät invariantteina koordinaatistojen välisissä muunnoksissa onkin keskeinen merkitys suhteellisuusteorian kehittämisessä.

HUOMAUTUS 6.2.1. Tapahtumaintervalli Δs^2

Myöhempiä tarkasteluja varten toteamme, että edellä käsitellyssä koordinaatiston avaruusosan yhdensuuntaissiirrosta $K \rightarrow K'$ myös *tapahtumaintervalli* eli lauseke

$$(TI-c) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2) = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \quad [\text{tapahtumaintervalli}]$$

säilyy invarianttina (eli $\Delta s'^2 = \Delta s^2$), koska $\Delta t' = \Delta t$ ja $\Delta r' = \Delta r$ ja c on vakio (valon nopeus). Tapahtumaintervallin Δs^2 lausekkeessa oleva kerroin c^2 varmistaa määritelmän fysikaalisen mielekkyyden, koska termeillä $c^2 \Delta t^2$ ja Δr^2 on sama yksikkö (SI-järjestelmässä m^2), joka on silloin myös suureen Δs^2 yksikkö.

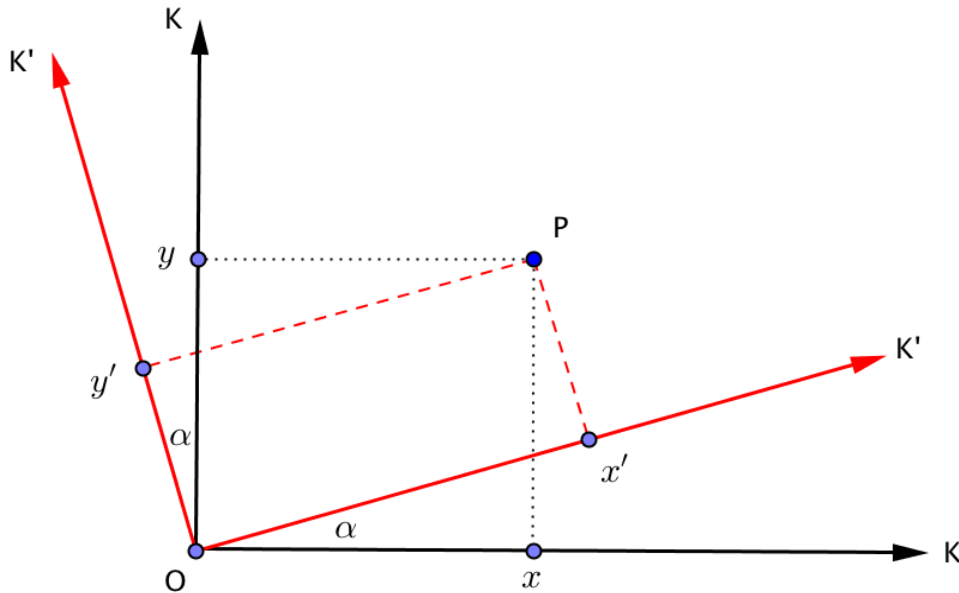
Tapahtumaintervallin määritelmä kirjoitetaan usein myös yksinkertaisemmassa muodossa

$$(TI-lu) \quad \Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2. \quad [\text{tapahtumaintervalli luonnollisissa yksiköissä}]$$

Tällöin valon nopeus on ilmaistu ns. *luonnollisissa yksiköissä*, joissa ajan yksikkönä on metri ja valon nopeus $c = 1$.

6.3. Paikkakoordinaatiston kierto kulman α verran

Tutkimme nyt, miten xy -tason pisteen P koordinaatit muuttuvat, kun akseleita kierretään kulman α verran positiiviseen kiertosuuntaan.



KUVIO 14. Koordinaatisto K' on saatu kiertämällä K :n paikka-akseleita kulman α verran origon O ympäri positiiviseen kiertosuuntaan. Tapahtumapaikan P koordinaatit saadaan kohtisuorina projektioina akseleille. Ne ovat K :ssa ovat (x, y) ja K' :ssa (x', y') .

Tapahtuman aika on nytkin molemmissa koordinaatistoissa sama eli $t' = t$. Kuviossa 14 olevista suorakulmaisista kolmioista saadaan (ks. LIITE 1) trigonometrian avulla paikkakoordinaattien x' ja y' lausekkeet, joten lineaarinen koordinaattimuunnos $K \rightarrow K'$ on

$$(6.3) \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

tai ilmaistuna kahden tapahtuman $E_1 = (t_1, x_1, y_1)$ ja $E_2 = (t_2, x_2, y_2)$ koordinaattierojen avulla

$$(6.3-\Delta) \quad \begin{cases} \Delta t' = \Delta t \\ \Delta x' = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha \\ \Delta y' = \Delta y \cos \alpha - \Delta x \sin \alpha \end{cases}$$

Myös koordinaatiston kierrossa euklidinen intervalli Δr^2 säilyy invarianttina aivan kuten yhdensuuntaissiirrossa. Muunnoskaavojen (6.3) mukaan tapahtumille E_1 ja E_2 nimittäin pätee

$$\begin{aligned}
 \Delta r'^2 &= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \\
 &= (\Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha)^2 + (\Delta y \cos \alpha - \Delta x \sin \alpha)^2 \\
 &= \Delta x^2 \cos^2 \alpha + \Delta y^2 \sin^2 \alpha + 2\Delta x \Delta y \sin \alpha \cos \alpha + \Delta x^2 \sin^2 \alpha \\
 &\quad + \Delta y^2 \cos^2 \alpha - 2\Delta x \Delta y \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= \Delta x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \Delta y^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\
 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\
 &= \Delta r^2.
 \end{aligned}$$

Myös tapahtumaintervallin $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$ invarianssi toteutuu, koska Δt ja Δr ovat kumpikin erikseen invariantteja ja c on vakio.

6.4. Peilaus eli akselin suunnanvaihto

Paikka-akselien suunnanvaihdot eli peilaukset kuvataan yksinkertaisilla muunnosyhtälöillä

$$\begin{aligned}x' &= -x, & [\text{jos } x\text{- akselin suunta vaihtuu (peilaus } yz\text{- tason suhteen), muutoin } x' &= x] \\y' &= -y, & [\text{jos } y\text{- akselin suunta vaihtuu (peilaus } xz\text{- tason suhteen), muutoin } y' &= y] \\z' &= -z, & [\text{jos } z\text{- akselin suunta vaihtuu (peilaus } xy\text{- tason suhteen), muutoin } z' &= z]\end{aligned}$$

Peilausmuunnoksissa $K \rightarrow K'$ tapahtuman aikakoordinaatti pysyy samana ($t' = t$), mutta yksi tai useampi paikkakoordinaatti vaihtaa merkkiä. Kahden tapahtuman koordinaattieroille pätee

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \Delta t \\ \Delta x' &= -\Delta x & [\text{jos } x - \text{ akselin suunta vaihtuu, muutoin } \Delta x' &= \Delta x] \\ \Delta y' &= -\Delta y & [\text{jos } y - \text{ akselin suunta vaihtuu, muutoin } \Delta y' &= \Delta y] \\ \Delta z' &= -\Delta z & [\text{jos } z - \text{ akselin suunta vaihtuu, muutoin } \Delta z' &= \Delta z]\end{aligned}$$

On helppo nähdä, että euklidinen intervalli $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ ja tapahtumaintervalli $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$ säilyvät invariantteina näissä muunnoksissa.

Huomaa, että akselin suunnanvaihto voidaan ymmärtää myös xyz-paikkakoordinaatiston peilauksena akselia vastaan kohtisuoran koordinaattitason suhteen (esim. x-akselin suunnanvaihto on sama kuin xyz-koordinaatiston peilaus yz-tason suhteen).

Myös aika-akselin suunnanvaihto ($t' = -t$) on matemaattisesti mahdollinen, mutta fysikaalisesti mieletön, koska silloin kausaalisessa tapahtumasarjassa, kuten hyppy uima-altaaseen (syy) ja molskahtaminen veteen (seuraus), seuraus tapahtuisi ajallisesti ennen syytä.

6.5. Yhteenveto levossa olevien koordinaatistojen $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$ välisistä koordinaattimuunnoksista

Jos koordinaatistot K ja K' ovat levossa toistensa suhteen, niin ne voidaan muuntaa toisikseen yhdensuuntaissiirron, paikka-akselien kierron tai paikka-akselien suunnanvaihdon avulla.

Mille tahansa tapahtumille E_1 ja E_2 , joiden koordinaattierot ovat K :ssa $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ ja K' :ssa $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z$, toteutuvat näissä muunnoksissa invarianssit:

$$(\text{Abs}) \quad \Delta t' = \Delta t, \quad [\text{absoluuttinen aika}]$$

$$(\text{EI}) \quad \Delta r'^2 = \Delta r^2, \quad [\text{euklidisen intervallin invarianssi}]$$

$$(\text{TI}-c) \quad \Delta s'^2 = \Delta s^2, \quad [\text{tapahtumaintervallin invarianssi}]$$

missä

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \text{ on tapahtumien euklidinen intervalli } K\text{:ssa,}$$

$$\Delta r'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \text{ on tapahtumien euklidinen intervalli } K'\text{:ssa,}$$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 \text{ on tapahtumien välinen tapahtumaintervalli } K\text{:ssa,}$$

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 \text{ on tapahtumien välinen tapahtumaintervalli } K'\text{:ssa,}$$

Lopuksi toteamme vielä lähes triviaalin seikan, että levossa olevien koordinaatistojen välisissä koordinaattimuunnoksissa toteutuvat molemmat Einsteinin aksioomat:

suhteellisuusperiaate (lauseen (5.3.1) perusteella, koska muunnoskaavat ovat lineaarisia) ja valon nopeuden vakioisuuden periaate (koska valon lähtö- ja saapumistapahtumien välinen aikaero Δt ja matkaero Δr säilyvät invariantteina eli $\Delta t = \Delta t'$ ja $\Delta r = \Delta r'$, jolloin valon nopeus $c = \Delta r / \Delta t = \Delta r' / \Delta t'$ säilyy myös invarianttina).

HUOMAUTUS 6.5.1. Valon nopeuden vakioisuus ja tapahtumaintervalli Δs^2

Tarkastellaan valosignaalin eli fotonin maailmanviivaa avaruusajassa. Olkoot E_1 ja E_2 kaksi pistettä (tapahtumaa) tällä viivalla. Jos näiden pisteiden matka- ja aikaerot ovat Δr ja Δt koordinaatistossa K ja vastaavasti $\Delta r'$ ja $\Delta t'$ koordinaatistossa K' . Silloin fotonin nopeus K :ssa on $c = \Delta r / \Delta t$. Korottamalla tämä yhtälö neliöön ja poistamalla nimittäjä saadaan yhtäpitävä yhtälö $c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0$ eli $\Delta s^2 = 0$. Jos K ja K' ovat inertiaalisia, niin Einsteinin toisen aksiooman perusteella saadaan yhtälö $\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2 = 0$.

Kääntäen voimme todeta, että jos tapahtumaintervalli Δs^2 säilyy invarianttina niin myös valon nopeus säilyy invarianttina. Edellä (TI- c) totesimme tapahtumaintervallin invarianssin pätevän levossa olevien koordinaatistojen välisissä muunnoksissa. Seuraavassa luvussa käytämme tapahtumaintervallin invarianssia ohjenuorana etsiessämme liikkuvien koordinaatistojen välille muunnosyhtälöitä, jotka toteuttavat valon nopeuden vakioisuuden periaatteen.

7. KOORDINAATTIMUUNNOS LIKKUVIEN KOORDINAATISTOJEN VÄLILLÄ

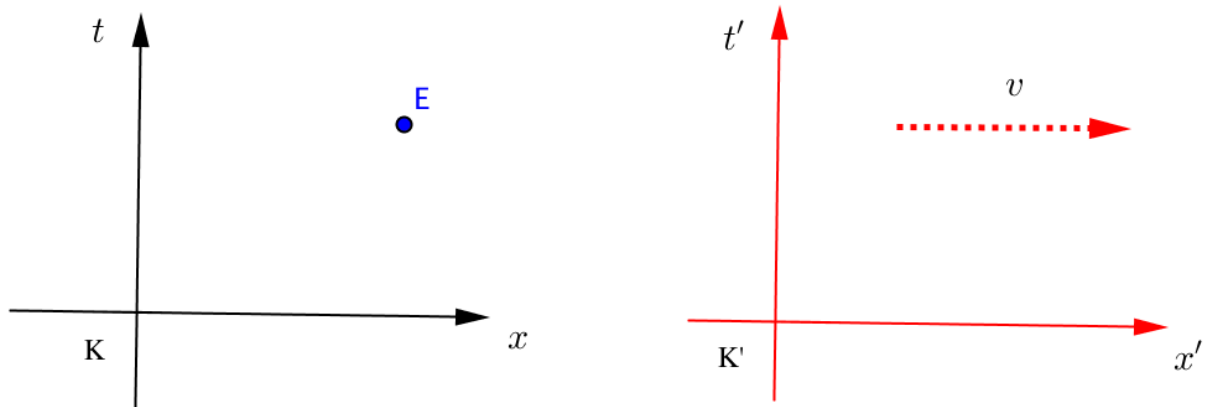
7.1. Johdanto

Inertiaalikoordinaatistot ovat joko (1) toistensa suhteen levossa tai (2) tasaisessa liikkeessä. Edellisessä luvussa tutkimme tapausta (1) ja totesimme, että silloin koordinaattimuunnokset (akselien yhdensuuntaissiirto, kierto tai suunnanvaihto) toteuttavat molemmat Einsteinin aksioomat. Tarkastelemme nyt tapausta (2), jossa koordinaatistot $K(t, x, y, z)$ ja $K'(t', x', y', z')$ tai tarkemmin sanoen niiden avaruusosat ovat tasaisessa liikkeessä¹ toistensa suhteen. Lauseen 5.3.1 perusteella niiden välisen koordinaattimuunnoksen täytyy olla affiini eli tyyppiä. Kun koordinaatistoille lisäksi valitaan yhteinen origo² (ks. huomautus kappaleen 5.4 lopussa), niin muunnoskaavat ovat lineaarisia eli ensimmäistä astetta ja vakiotermit nolliä.

Matemaattisen käsittelyn helpottamiseksi oletamme, että koordinaatisto K' liikkuu vakionopeudella v koordinaatiston K suhteen siten, että K' :n origo liikkuu pitkin K :n x -akselia ja hetkellä $t = 0$ koordinaatistojen K ja K' origot ja paikka-akselit yhtyvät ja myös $t' = 0$. Tämä ei rajoita tarkastelumme yleisyyttä, sillä oletuksen mukaiseen tilanteeseen päästään aina suorittamalla jommallekummalle koordinaatistolle sopiva avaruusakselien siirto, kierto tai suunnanvaihto eli muunnos, jossa Einsteinin aksioomat säilyvät voimassa. Alla oleva kuvio, jossa paikka-avaruus on typistetty x -akseliksi, havainnollistaa tilannetta.

¹ Tarkemmin sanoen koordinaatiston K' paikkaorigo liikkuu K :n suhteen siten, että paikka-akselien suunta säilyy samana. Myös K' :n liikenopeuden suunta ja suuruus (vauhti) pysyvät vakioina ja K' :n akselit pysyvät samansuuntaisina.

² Tämä onnistuu tarvittaessa yhdensuuntaissiirrolla ja kellojen nollaamisella eli muunnoksella, joka säilyttää Einsteinin aksioomat voimassa.

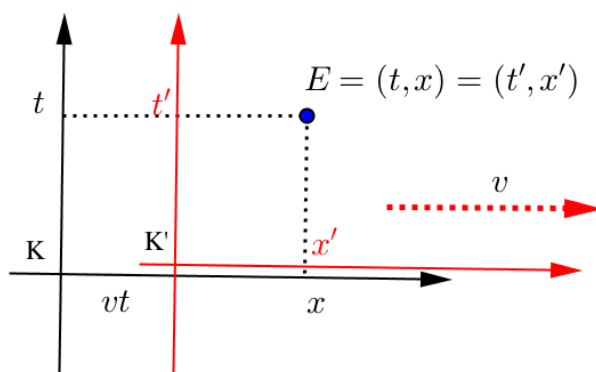


KUVIO 16. Koordinaatiston K' paikka-akseli x' ("juna") liikkuu tasaisella nopeudella v koordinaatiston K paikka-akselia x ("rautatie") pitkin. Koordinaatistojen kellot synkronisoidaan näyttämään aikaa $t = t' = 0$ hetkellä, jolloin paikka-akselien origot yhtyvät. Tapahtuman P koordinaatit K :ssa ovat (t, x) ja K' :ssa (t', x') .

Tehtävämme on nyt selvittää, miten tapahtuman E koordinaatit t' ja x' koordinaatistossa K' saadaan, jos sen koordinaatit t ja x koordinaatistossa K tunnetaan. Olemme jo todenneet, että suhteellisuusteorian mukaan muunnosyhtälöiden täytyy olla lineaarisia eli muotoa

$$(7.1) \quad \begin{cases} t' = a_1 t + b_1 x \\ x' = a_2 t + b_2 x \end{cases}$$

7.2. Galilei-muunnos



KUVIO 16a. Koordinaatisto K' liikkuu oikealle vakionopeudella v . Hetkellä $t = t' = 0$ oli $x = x' = 0$. Ajassa t on K' :n paikkaorigo siirtynyt matkan vt .

Arkijärjen mukaan (Kuvio 16a) tapahtuman aikakoordinaatti on absoluuttinen ja kellon (eli koordinaatiston) liikkeestä riippumaton.

Tapahtuman E aika on sen mukaan molemmissa koordinaatistoissa sama eli $t' = t$.

Tapahtuman E paikkakoordinaatti K' :ssa olisi vastaavasti $x' = x - vt$. Näin ollen koordinaattimuunnos $K \rightarrow K'$ olisi yksinkertaisesti

$$(\text{Galilei}) \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt = -vt + x. \end{cases}$$

Muunnoskaavojen (7.1) kertoimet olisivat siis $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = -v$ ja $b_2 = 1$.

Galilei-muunnos toteuttaa rajoitetun suhteellisuuspriaatteen – Newtonin mekaniikan lait säilyvät voimassa¹. Yleinen suhteellisuuspriaate ei toteudu, sillä on helppo nähdä, että valon nopeus ei tässä muunnoksessa säily vakiona.

Tarkastellaan hiukkasta (tai kappaletta), joka lähtee liikkeelle hetkellä $t' = t = 0$ koordinaatistojen K ja K' yhteisestä origosta $x = x' = 0$ ja liikkuu havaitsijan K' mukaan tasaisella nopeudella u pitkin x' -akselia positiiviseen suuntaan. Havaitsijan K' kellon mukaan hiukkanen saapuu hetkellä t' paikkaan $x' = ut'$ (matka on nopeus kerrottuna ajalla). Galilei-muunnoskaavojen mukaan tämän saapumistapahtuman K -koordinaatit ovat $t = t'$ ja $x = x' + vt = x' + vt'$. Silloin hiukkasen liikenopeus w on havaitsijan K mukaan

$$w = \frac{\text{hiukkasen kulkema matka } K: \text{ n mukaan}}{\text{matkaan kulunut aika } K: \text{ n mukaan}} = \frac{x' + vt'}{t'} = \frac{x'}{t'} + v = u + v.$$

Huomaamme, että Galilei-muunnoksen mukaan olisi voimassa yksinkertainen nopeuksien yhteenlaskusääntö (ns. Galilein yhteenlaskusääntö)

$$w = u + v,$$

joka tuntuu arkihavaintomme perusteella järkevältä. Jos juna kulkee ratapenkan suhteen nopeudella 50 km/h ja juokset junassa sen kulkusuuntaan nopeudella 10 km/h, niin nopeutesi ratapenkan suhteen on Galilein säännön mukaan 60 km/h. Selvä asia, vai mitä?

¹ Differentiaalilaskennan avulla voidaan osoittaa, että Newtonin mekaniikan kolme peruslakia (jatkavuuden laki, dynamiikan peruslaki sekä voiman ja vastavoiman laki) säilyvät invariantteina kaikissa lineaarisissa muunnoksissa.

Toinen Einsteinin aksiooma (valon nopeuden vakioisuuden periaate) pakottaa kuitenkin hylkäämään Galilei-muunnoksen ja siitä seuraavan nopeuksien yhteenlaskusäännön. Sen mukaan nimittäin K':ssa matkaan lähetetyn fotonin nopeus K:ssa olisi

$$w = c + v > c$$

eli vakioarvoa c suurempi.

7.3. Lorentz-muunnos

Määritämme nyt muunnoskaavojemme

$$(7.1) \quad \begin{cases} t' = a_1 t + b_1 x \\ x' = a_2 t + b_2 x \end{cases}$$

kertoimet a_1, b_1, a_2 ja b_2 vaatimalla, että valon nopeus on molemmissa koordinaatistoissa mitattuna sama vakio c . Kuten edellisessä luvussa todettiin, tämä ehto täyttyy, jos varmistamme, että tapahtumaintervalli $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$ säilyy invarianttina¹ muunnoksessa (7.1).

Tarkastelkaamme kahta avaruusajan tapahtumaa, joiden K-koordinaatit ovat (0,0) ja (t, x) ja K'-koordinaatit ovat (0,0) ja (t', x'). Vastaavat tapahtumaintervallit ovat

$$(K:ssa) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 t^2 - x^2,$$

$$(K':ssa) \quad \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = c^2 t'^2 - x'^2,$$

Vaadimme nyt, että muunnoksessa (7.1) tapahtumaintervalli säilyy eli

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2,$$

tai toisin kirjoitettuna

$$(7.2) \quad (ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2.$$

¹ Valoviivalla oleville tapahtumille $\Delta s^2 = 0$, koska $\Delta x / \Delta t = c$. Valon nopeuden invarianttia varten riittäisi siis vaatia implikaation (*) $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow \Delta s'^2 = 0$ voimassaolo ilman, että Δs^2 olisi invariantti kaikille tapahtumapareille. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tämä yleinen invarianttikin seuraa, jos implikaatiosta (*). Ks. esim. Schutz: *A first course in general relativity*, Cambridge University Press 1985, ss. 10-14.

Merkitsemällä $ct = T$ ja $ct' = T'$ vaadittu invarianssi saa muodon

$$(7.3) \quad T'^2 - x'^2 = T^2 - x^2 .$$

Voimme nyt "arvata" muunnosyhtälöiden (7.1) kertoimet vertaamalla tilannetta edellisessä luvussa käsiteltyyn xy -koordinaatiston kiertomuunnokseen (6.3)

$$(R) \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases} ,$$

joka toteuttaa euklidisen invarianssin

$$(EI) \quad x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 ,$$

joka puolestaan perustuu ympyräfunktioiden perusidentiteettiin

$$(YP) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 .$$

Kun muistamme, että hyperboliset funktiot $\cosh \alpha$ ja $\sinh \alpha$ toteuttavat vaadittua invarianssia (7.3) vastaavan analogisen identiteetin

$$(HP) \quad \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 ,$$

niin herää ajatus korvata kiertomuunnoksessa (R) kertoimina olevat ympyräfunktiot vastaavilla hyperbolisilla funktioilla.

Kokeillaan siis muunnokselle (7.1) muotoa, jossa kiertomuunnosta (R) jäljitellen kertoimet ilmaistaan hyperbolisina funktioina,

$$(7.1a) \quad \begin{cases} T' = T \cosh \alpha - x \sinh \alpha \\ x' = x \cosh \alpha - T \sinh \alpha \end{cases} .$$

Testataan toteutuuko tällöin vaadittu invarianssi (7.3). Saamme

$$\begin{aligned} T'^2 - x'^2 &= (T \cosh \alpha - x \sinh \alpha)^2 - (x \cosh \alpha - T \sinh \alpha)^2 \\ &= T^2(\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha) - x^2(\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha) \\ &= T^2 - x^2 , \end{aligned}$$

joten vastaus on myönteinen.

Sijoittamalla nyt yhtälöissä (7.1a) takaisin $T' = ct'$ ja $T = ct$ saamme

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \alpha - x \sinh \alpha \\ x' = x \cosh \alpha - ct \sinh \alpha \end{cases}$$

josta (jakamalla ylempi yhtälö vakiolla c) saamme muunnosyhtälöt

$$(L\alpha) \quad \begin{cases} t' = t \cosh \alpha - x \sinh \alpha / c \\ x' = x \cosh \alpha - ct \sinh \alpha \end{cases}$$

Tämä ns. *Lorentzin*¹ muunnos on suhteellisuusteorian kulmakivi.

Koordinaattien muunnosyhtälöt $(L\alpha)$ tuntuvat ehkä oudoilta, koska niissä ei esiinny lainkaan koordinaatiston K' liikenopeutta v , jolla on tietenkin ratkaiseva vaikutus ainakin paikkakoordinaattiin x' . Tosiasiassa v onkin mukana muunnosyhtälöissä "kätkeytyneenä" vakioon α (ns. hyperbolinen kulma). Saadaksemme nopeuden v näkyviin tarkastelemme hiukkasta, joka on levossa K' :n paikkaorigossa $x' = 0$. Silloin on alemman Lorentz-muunnoskaavan perusteella

$$x \cosh \alpha - ct \sinh \alpha = 0$$

eli

$$(1) \quad x = ct \cdot \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = t \cdot c \tanh \alpha .$$

missä t ja x ovat hiukkasen koordinaatit K :ssa.

Mutta toisaalta on myös

$$(2) \quad x = vt ,$$

koska K :ssa tarkasteltuna hiukkanen liikkuu nopeudella v pitkin x -akselia ja hetkellä $t = 0$ paikkaorigot ovat päällekkäin eli $x = x' = 0$.

Mutta yhtälöt (1) ja (2) kuvaavat saman hiukkasen liikettä K :ssa, joten niiden täytyy olla identtiset. Siksi

¹ Hollantilainen fyysikko Hendrik Lorentz (1853-1928) esitti nämä muunnosyhtälöt 1904.

$$c \tanh \alpha = v$$

eli

$$(7.4) \quad \tanh \alpha = \frac{v}{c} \quad \text{eli} \quad \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{v}{c} .$$

Nyt voimme kirjoittaa muunnosyhtälöt ($L\alpha$) "selväkieliseen" muotoon, jossa mystillisen hyperbolisen kulman sijasta parametrina esiintyykin liikenopeus v . Tätä varten meidän on ratkaistava $\cosh \alpha$ ja $\sinh \alpha$ yhtälöstä (7.4). Neliöön korottamalla ja hyperbolista perusidentiteettiä käyttämällä saamme

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha}\right)^2 = \frac{\sinh^2 \alpha}{\cosh^2 \alpha} = \frac{\cosh^2 \alpha - 1}{\cosh^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \alpha} ,$$

josta

$$\frac{1}{\cosh^2 \alpha} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\cosh \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

ja edelleen, koska $\cosh \alpha \geq 1$

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

Edelleen on hyperbolisen perusidentiteetin perusteella

$$\sinh \alpha = \pm \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - 1} = \pm \frac{v/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

Muunnosyhtälöistä ($L\alpha$) näemme, että täytyy olla $\sinh \alpha \geq 0$, sillä K:n paikkaorigon ($x = 0$) paikkakoordinaatti x' täytyy olla negatiivinen, kun $t > 0$ (eli sen jälkeen, kun K':n origo on ohittanut K:n origon). Näin ollen

$$\sinh \alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

Ottamalla käyttöön lyhennysmerkinnän

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

voimme kirjoittaa

$$\cosh \alpha = \gamma \quad \text{ja} \quad \sinh \alpha = \gamma \cdot \frac{v}{c},$$

jolloin Lorentz-muunnoskaavat ($L\alpha$) voidaan kirjoittaa muotoon, jossa kertoimet on ilmaistu koordinaatiston K' liikenopeuden v ja valon nopeuden c avulla

$$\begin{cases} t' = \gamma t - \gamma vx/c^2 \\ x' = \gamma x - \gamma vt \end{cases}$$

eli sievennettynä

$$(Lvc) \quad \begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Luonnollisia yksiköitä käytettäessä $c = 1$ ja $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$, jolloin Lorentz-muunnosyhtälöt ovat

$$(Lv-lu) \quad \begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}.$$

HUOMAUTUS 7.3.1. Lorentz-muunnoksen suora johto

Edellä saadut Lorentz-muunnoskaavat (Lvc) ja ($Lv-lu$) voidaan johtaa myös suoralla fysikaalis-matemaattisella päättelyllä (joskin vaivalloisemmin) käyttämättä hyperbolisia funktioita¹.

HUOMAUTUS 7.3.2. Yleinen Lorentz-muunnos

¹ Päättely löytyy useimmista suhteellisuusteorian oppikirjoista, esim. Kari Enqvist: *Johdatus suhteellisuusteoriaan*, URSA 2011, ss. 23-27.

Lorentz-muunnoksella ymmärretään yleensä kaikkia sellaisia avaruusaikakoordinaattien muunnoksia, joissa origo ja tapahtumaintervalli¹ $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta r^2$ säilyvät muuttumattomana. Niinpä luvussa 6 käsitelty akselien kierto ja suunnanvaihto (peilaus) ovat myös Lorentz-muunnoksia. Tapahtumaintervalli säilyy myös koordinaatiston yhdensuuntaissiirroissa, mutta sitä ei teknisistä syistä luokitella Lorentz-muunnokseksi, koska origo ei säily paikallaan. Lorentz-muunnokset ja yhdensuuntaissiirto ynnä kaikki niiden yhdistelmät muodostavat ns. Poincaré-muunnosten² ryhmän, jonka tunnusmerkkinä on tapahtumaintervallin (mutta ei välttämättä origon) säilyminen. Yhtälöiden (Lvc) tai $(Lv-lu)$ ilmaisemaa erityistä Lorentz-muunnosta kutsutaan kirjallisuudessa usein nimellä ”Lorentz-työntö” (Lorentz boost).

HUOMAUTUS 7.3.3. Lorentz-muunnos ”normaaliolosuhteissa”

Jos koordinaatiston K' liikenopeus v koordinaatiston K :n suhteen on valon nopeuteen verrattuna pieni³ eli $v \ll c$, niin $(v/c)^2 \approx 0$. Tällöin Lorentz-kerroin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1,$$

ja muunnoskaavat (Lvc) voidaan approksimoida muotoon

$$(Lvc: v \ll c) \quad \begin{cases} t' = t - vx/c^2 \\ x' = x - vt \end{cases}.$$

Edelleen, kun $v \ll c$ ja paikkakoordinaatti x on ”normaalisuuruinen” (esim. $|x| < 10^6 \text{ m}$), niin $vx/c^2 \approx 0$ ja muunnoskaavat $(Lvc: v \ll c)$ approksimoituvat lopulta muotoon

$$(Gv) \quad \begin{cases} t' \approx t \\ x' \approx x - vt \end{cases},$$

¹ Tämä on tapahtumaintervallin lauseke luonnollisissa yksiköissä ($c = 1$). Yleisesti on $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$. Huomaa, että typistetyssä (t, x) -koordinaatistossa on $\Delta r = \Delta x$.

² Henri Poincaré (1854-1912) oli ranskalainen matemaatikko, joka tutki tällaisia muunnoksia.

³ Jos esimerkiksi $v < 10^{-3}c = 0,001c = 300 \text{ km/s} = 18000 \text{ km/h}$, niin $(v/c)^2 < 10^{-6} \approx 0$.

joka on juuri arkijärjen mukainen Galilei-muunnos¹. Arkijärkemme toimii siis hyvin “normaaleissa” olosuhteissa, joissa liikenopeudet ovat pieniä (verrattuna valon nopeuteen) ja etäisyydet kohtuullisia. Tällöin myös Galilein nopeuksien yhteenlaskusääntö pätee.

Seuraava esimerkki osoittaa, että tilanne muuttuu olennaisesti nopeuden v ollessa merkittävä osa valon nopeudesta.

ESIMERKKI 7.3.1. Olkoon $v = 0,9c$. Silloin $v/c = 0,9$ ja $(v/c)^2 = 0,81$, joten Lorentz-kerroin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} \approx 2,3 .$$

Muunnoskaavoista (Lvc) saamme

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx/c^2) = 2,3 \cdot (t - 0,9x/c) \\ x' = \gamma(x - vt) = 2,3 \cdot (x - 0,9ct) \end{cases} .$$

Jos tapahtuma E havaitaan koordinaatiston K paikkaorigossa $x = 0$ m hetkellä $t = 100$ s, niin sen koordinaatit K':ssa ovat

$$\begin{cases} t' = 2,3 \cdot (100 \text{ s} - 0,9 \cdot 0/c) = 230 \text{ s} \\ x' = 2,3 \cdot (0 - 0,9c \cdot 100) = -2070c = -2070 \cdot 3 \cdot 10^8 = -6,21 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{cases} .$$

Esimerkki osoittaa, että koordinaatistojen K ja K' kellot käyvät eri tahdissa. Vaikka niiden kellot synkronoitiin näyttämään samaa aikaa hetkellä, jolloin paikkaorigot yhtyivät, niin myöhemmän tapahtuman E ajankohta K:ssa havaittuna on $t = 100$ s mutta K':ssa havaittuna se on $t' = 230$ s.

HUOMAUTUS 7.3.4. Lorentz-käänteismuunnos

¹ Samoihin Galilei-approksimaatioihin päädytään myös Lorentz-kaavoista ($Lv-lu$), kun oletetaan, että $v \ll c = 1$ ja x on “normaalisuuruinen”. Tällöin $v \approx 0$, $vx \approx 0$ ja $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \approx 1$, joten ensimmäinen muunnoskaava saa muodon $t' \approx t$. Toinen kaava jää muotoon $x' \approx x - vt$, sillä emme voi olettaa, että $vt \approx 0$. Luonnollisissa yksiköissähän ”normaalitkin” aika-arvot ovat numeerisesti hyvin suuria, esim. $1\text{ s} = 3 \cdot 10^8\text{ m}$.

Käänteiset koordinaattimuunnokset K' :sta K :hon saadaan joko ratkaisemalla edellä johdetuista muunnoskaavoista (Lvc) tai ($Lv-lu$) koordinaatit t ja x koordinaattien t' ja x' avulla lausuttuina tai yksinkertaisemmin toteamalla, että K liikkuu K' :n suhteen suuntaan vastakkaisella nopeudella $-v$. Käänteiset muunnosyhtälöt saadaan silloin sijoittamalla edellä johdetuissa kaavoissa v :n paikalle $-v$, joten

$$(-Lvc) \quad \begin{cases} t = \gamma(t' + vx'/c^2) \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

tai luonnollisissa yksiköissä

$$(-Lv-lu) \quad \begin{cases} t = \gamma(t' + vx') \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}.$$

ESIMERKKI 7.3.2. Tarkastellaan jälleen esimerkin 1 tilannetta, jossa koordinaatisto K' liikkuu nopeudella $v = 0,9c$ koordinaatiston K suhteen.

Oletetaan, että tapahtuma E' sattuu K' :n paikkaorigossa $x' = 0$ m hetkellä $t' = 100$ s $= 3 \cdot 10^{10}$ m (luonnollisissa yksiköissä). Tämän tapahtuman koordinaatit t ja x koordinaatistossa K saadaan Lorentz-käänteismuunnoskaavoista ($-Lv-lu$)

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + vx') \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases},$$

missä $v = v/c = 0,9$ (luonnollisissa yksiköissä) ja Lorentz-kerroin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9^2}} \approx 2,3$$

on sama kuin edellisessäkin esimerkissä. Näin ollen

$$\begin{cases} t = 2,3(3 \cdot 10^{10} \text{ m} + 0,9 \cdot 0) = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ m} = 230 \text{ s} \\ x = 2,3(0 + 0,9 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ m}) = 6,21 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{cases}.$$

Huomaamme, että tämän esimerkin tapahtuman E' aikakoordinaatti K :ssa on sama kuin esimerkin 1 tapahtuman E aikakoordinaatti K' :ssa. Paikkakoordinaattien osalta käy samoin, mutta lisäksi etumerkki vaihtuu¹. Näemme siis, että koordinaatistojen välillä vallitsee symmetria.

7.4. Lorentz-muunnos geometrisesti esitettynä

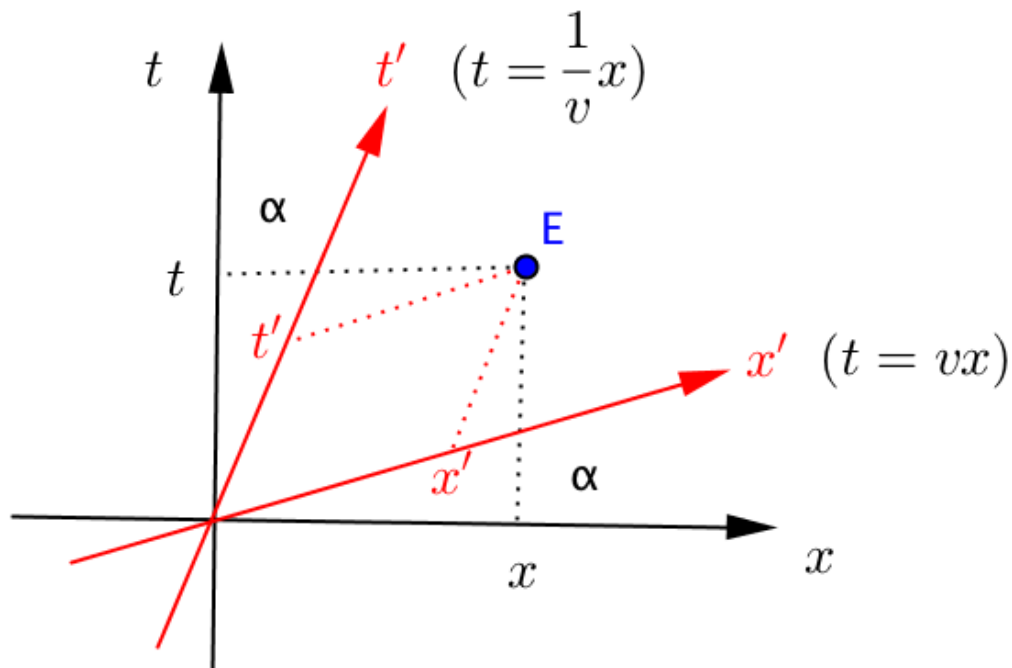
Usein on havainnollista esittää inertiaalikoordinaatistot $K(t, x)$ ja $K'(t', x')$ samassa avaruusaikadiagrammissa olettaen, että niiden origot osuvat päällekkäin (kun $t = x = 0$, niin myös $t' = x' = 0$). Tällöin ovat voimassa Lorentz-muunnoskaavat (*Lv-lu*)

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}.$$

Piirrämme suorakulmaiseen koordinaatistoon $K(t, x)$ myös K' :n akselit. Aika-akselin t' pisteissä on $x' = 0$ eli jälkimmäisen muunnoskaavan mukaan $x = vt$ tai yhtäpitävästi $t = x/v$.

Vastaavasti paikka-akselin x' pisteissä on $t' = 0$ eli edellisen muunnoskaavan mukaan $t = vx$. Koordinaatistossa K siis suorat $t = x/v$ ja $t = vx$ vastaavat koordinaatiston K' akseleita.

¹ Tämä johtuu siitä, että koordinaatistojen suhteelliset liikkeet ovat vastakkaisia. K :sta katsoen K' liikkuu positiivisen x -akselin suuntaan, mutta K' :sta katsoen K liikkuu negatiiviseen x' -akselin suuntaan.



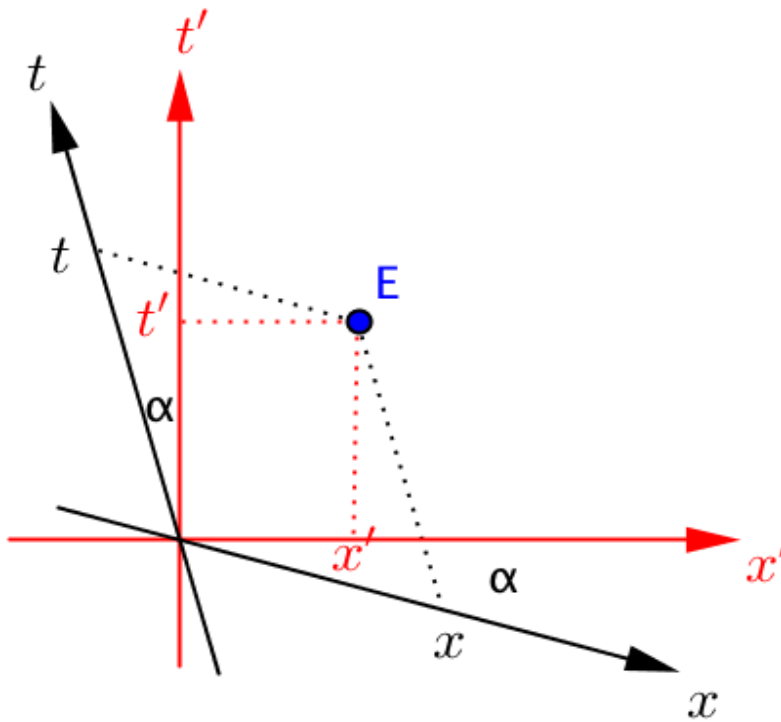
KUVIO 17. Koordinaatiston $K'(t', x')$ akselit sijoitettuina suorakulmaiseen koordinaatistoon $K(t, x)$. Akselin x' kulmakerroin on $v = \tan \alpha$. Akselin t' kulmakerroin on $1/v$. Tapahtuman E aikakoordinaatit t ja t' saadaan piirtämällä tapahtumapisteestä paikka-akselien suuntaiset suorat. Paikkakoordinaatit x ja x' saadaan vastaavasti. Koordinaattiarvojen lukeminen kuviosta edellyttää kuitenkin, että akselien yksikköjaotus on selvitetty. Sitä ei ole tässä tehty.

Molempia koordinaatistoja kuvaava diagrammi voidaan laatia myös K' :n näkökulmasta. Tällöin lähdetään suorakulmaisesta K' -koordinaatistosta, johon sijoitetaan K :n akselit käyttämällä käännteisiä Lorentz-muunnoskaavoja ($-Lv-lu$)

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + vx') \\ x = \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

Tällöin t -akseli on suora, jonka pisteissä $x = 0$ eli $x' + vt' = 0$ tai $t' = -\frac{1}{v}x'$.

Edelleen x -akseli on suora, jonka pisteissä $t = 0$ eli $t' + vx' = 0$ tai $t' = -vx'$.



KUVIO 18. Koordinaatiston $K(t, x)$ akselit sijoitettuina suorakulmaiseen koordinaatistoon $K'(t', x')$. Akselin x kulmakerroin on $-v = -\tan \alpha$. Akselin t kulmakerroin on $-1/v$. Tapahtuman E aikakoordinaatit t ja t' saadaan piirtämällä tapahtumapisteestä paikka-akselien suuntaiset suorat. Paikkakoordinaatit x ja x' saadaan vastaavasti. Koordinaattiarvojen lukeminen kuviosta edellyttää kuitenkin, että akselien yksikköjaotus on selvitetty.

8. LORENTZ-MUUNNOKSEN SEURAUKSIA

Tarkastelemme edellisessä luvussa kuvattua tilannetta, jossa koordinaatiston $K'(t', x', y', z')$ avaruusosa liikkuu koordinaatiston $K(t, x, y, z)$ avaruusosan suhteen tasaisella nopeudella v positiivisen x -akselin suunnassa siten, että koordinaattiakselit yhtyvät hetkellä $t = t' = 0$ ja pitkin K :n x -akselin. Tällöin avaruusajan tapahtumien t - ja x -koordinaatit noudattavat Lorentz-muunnoskaavoja (Lvc) ja ($Lv-lu$). Muut paikkakoordinaatit pysyvät muunnoksessa samoina ($y' = y$ ja $z' = z$), koska koordinaatistojen välinen liikenopeus näiden akselien suunnassa on nolla.

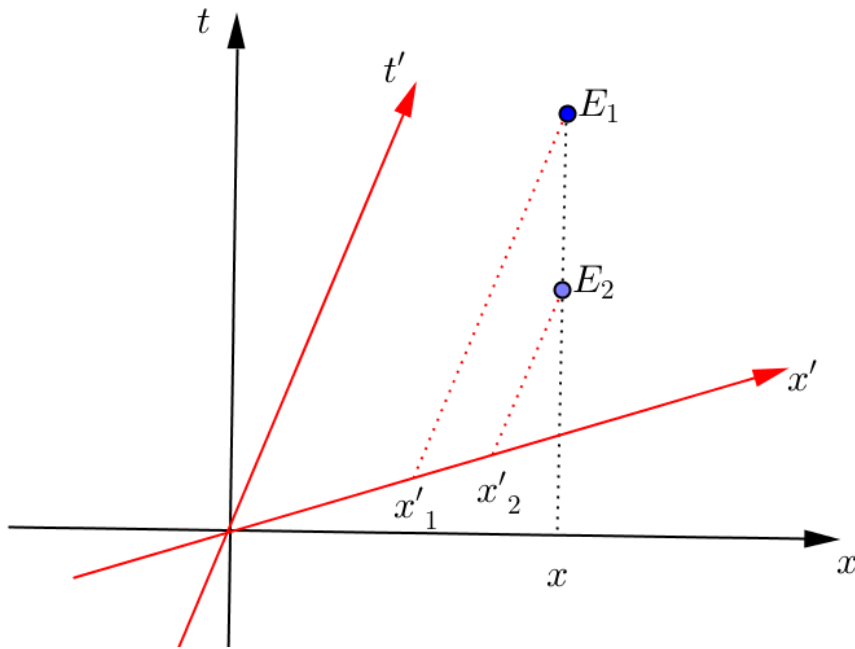
8.1. Samanpaikkaisuuden ja samanaikaisuuden suhteellisuus

A. Tapahtumat, jotka ovat samanpaikkaisia koordinaatistossa K

Olko E_1 ja E_2 kaksi tapahtumaa, jotka ovat koordinaatistossa K *samanpaikkaisia*, mutta eriaikaisia. Näiden tapahtumien K -koordinaatit ovat siis $E_1 = (t_1, x)$ ja $E_2 = (t_2, x)$, missä x on yhteinen tapahtumapaikka ja $t_1 \neq t_2$. Lorentz-muunnoskaavojen ($Lv-lu$) perusteella näiden tapahtumien K' -paikkakoordinaatit ovat $x'_1 = \gamma(x - vt_1)$ ja $x'_2 = \gamma(x - vt_2)$. Koska $t_1 \neq t_2$, niin myös $x'_1 \neq x'_2$.

Toteamme siis, että E_1 ja E_2 ovat K' :ssa eripaikkaisia (Kuvio 19) Näemme siis, että tapahtumien samanpaikkaisuus on suhteellista eli riippuu siitä, mistä koordinaatistosta käsin tapahtumia tarkastellaan. Tämä ei tietenkään ole yllätys, sillä arkihavaintomme osoittaa saman asian. Esimerkiksi liikkuvan junan tietyssä vaunussa sattuvat tapahtumat ovat junan koordinaatistossa samanpaikkaisia, mutta ratapenkan koordinaatistossa eripaikkaisia¹.

¹ Toistensa suhteen levossa olevissa koordinaatistoissa ($v = 0$ ja $\gamma = 1$) samanpaikkaisuus ja samanaikaisuus ovat kuitenkin absoluuttisia.



KUVIO 19. Tapahtumilla E_1 ja E_2 on sama paikka x koordinaatistossa K , mutta eri paikat x'_1 ja x'_2 koordinaatistossa K' .

B. Tapahtumat, jotka ovat samanaikaisia koordinaatistossa K

Olko sitten E_1 ja E_2 kaksi tapahtumaa, jotka ovat koordinaatistossa K *samanaikaisia*, mutta eripaikkaisia. Näiden tapahtumien K -koordinaatit ovat siis $E_1 = (t, x_1)$ ja $E_2 = (t, x_2)$, missä t on yhteinen tapahtuma-aika ja $x_1 \neq x_2$. Lorentz-muunnoskaavojen (*Lv-lu*) perusteella näiden tapahtumien K' -aikakoordinaatit ovat $t'_1 = \gamma(t - vx_1)$ ja $t'_2 = \gamma(t - vx_2)$. Koska $x_1 \neq x_2$, niin myös $t'_1 \neq t'_2$. Toteamme siis, että E_1 ja E_2 ovat K' :ssa eriaikaisia. Näemme, että myös tapahtumien samanaikaisuus on suhteellista eli riippuu siitä, mistä koordinaatistosta käsin tapahtumia tarkastellaan. Tämä tulos sotii arkijärkeämme vastaan, sillä olemme Galilein ja Newtonin tapaan tottuneet ajattelemaan aikaa absoluuttisena Galilein muunnoskaavan $t' = t$ mukaisesti¹.

Olettakaamme, että $v > 0$ ja $x_2 > x_1$. Silloin tapahtumien E_1 ja E_2 aikaero K' :ssa on

$$\begin{aligned} t'_1 - t'_2 &= \gamma(t - vx_1) - \gamma(t - vx_2) \\ &= \gamma v(x_2 - x_1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

¹ Kuten aiemmin havaitsimme, Galilein kaava päteeikin varsin tarkasti, kun $|v| \ll c$ eli koordinaatistojen välinen nopeus on pieni valon nopeuteen verrattuna.

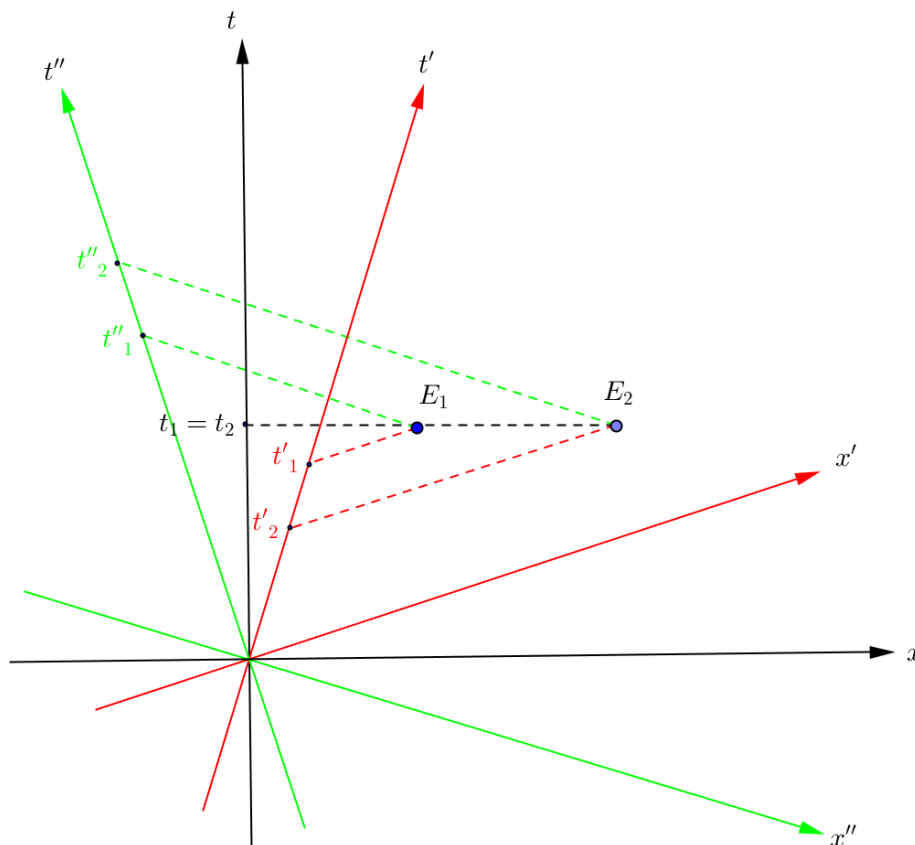
Koska $t'_1 - t'_2 > 0$, niin $t'_1 > t'_2$ eli K' :ssa tapahtuma P_2 on aikaisempi kuin P_1 .

Samoin näemme, että koordinaatistossa K'' , joka liikkuu peruskoordinaatistoon K nähden vastakkaisella nopeudella $-v$, samojen tapahtumien aikaero

$$\begin{aligned} t''_1 - t''_2 &= \gamma(t + vx_1) - \gamma(t + vx_2) \\ &= \gamma v(x_1 - x_2) \\ &< 0, \end{aligned}$$

joten $t''_1 < t''_2$ ja näin ollen K'' :ssa tapahtuma E_1 on aikaisempi kuin E_2 .

Eripaikkaisten tapahtumien E_1 ja E_2 aikajärjestys (samanaikaiset, E_1 aikaisempi tai E_2 aikaisempi) voi siis olla mikä tahansa riippuen tarkastelukoordinaatistosta (Kuvio 20).



KUVIO 20. Kolme koordinaatistoa K , K' ja K'' , joista K' liikkuu K :n suhteen nopeudella v ja K'' nopeudella $-v$. Koordinaatistossa K tapahtumilla E_1 ja E_2 on sama aika $t_1 = t_2$, mutta koordinaatistoissa K' ja K'' ne ovat eriaikaisia ja vieläpä vastakkaisessa aikajärjestyksessä, sillä $t'_1 < t'_2$ mutta $t''_1 > t''_2$.

Jos kuitenkin tapahtumat ovat jossakin koordinaatistossa samanpaikkaisia, niin niiden aikajärjestys on kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa sama.

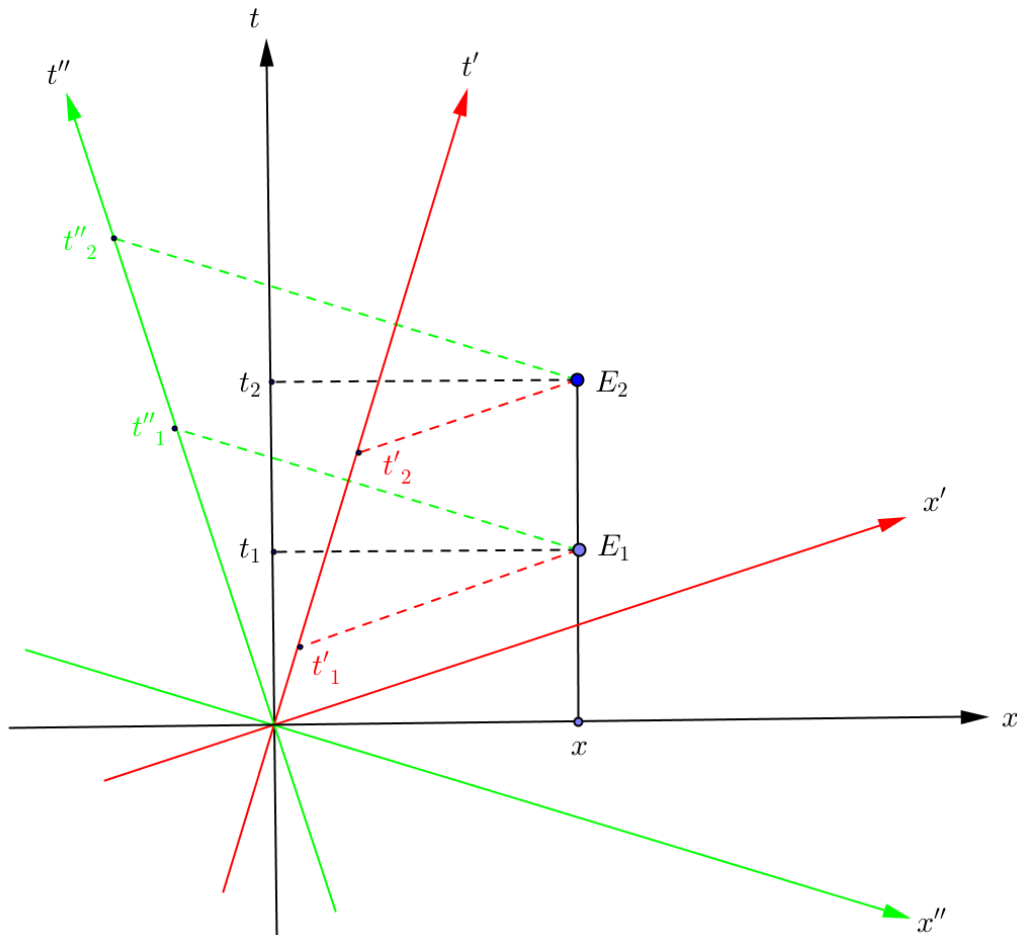
8.2. Samanpaikkaisten tapahtumien aikajärjestys on absoluuttinen

Olkoot jälleen E_1 ja E_2 kaksi tapahtumaa, jotka ovat koordinaatistossa K *samanpaikkaisia*.

Tällöin siis $E_1 = (t_1, x)$ ja $E_2 = (t_2, x)$, missä x on yhteinen tapahtumapaikka. Lorentz-

muunnoskaavojen (*Lv-lu*) perusteella näiden tapahtumien K' -aikakoordinaatit ovat $t'_1 = \gamma(t_1 - vx)$ ja $t'_2 = \gamma(t_2 - vx)$, jolloin niiden erotus on $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t$.

Koska $\gamma > 0$, niin aikaerot Δt ja $\Delta t'$ ovat samanmerkkisiä ja tapahtumien E_1 ja E_2 aikajärjestys on molemmissa koordinaatistoissa sama.



KUVIO 21. Koordinaatistossa K tapahtumilla E_1 ja E_2 on sama paikka x , mutta E_1 on aikaisempi kuin E_2 eli $t_1 < t_2$. Tapahtumien aikajärjestys on sama myös koordinaatistoissa K' ja K'' , sillä $t'_1 < t'_2$ ja $t''_1 < t''_2$.

8.3. Kausaalisten tapahtumien aikajärjestys on absoluuttinen

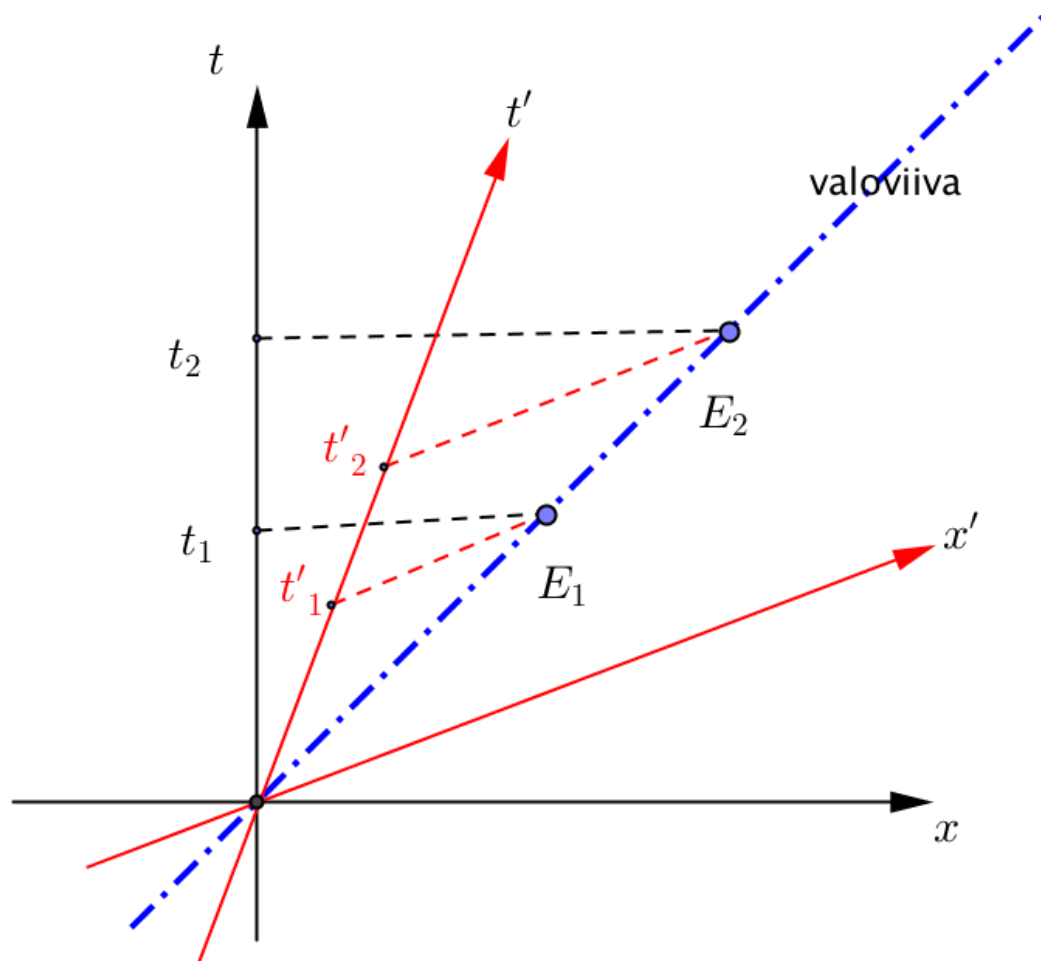
Olkooot jälleen E_1 ja E_2 kaksi tapahtumaa, jotka ovat koordinaatistossa K *kausaalisuhteessa* eli syy-seuraus-suhteessa siten, että tapahtuma E_1 on tapahtuman E_2 syy ja tapahtuma E_2 on tapahtuman E_1 seuraus. Kausaalisuhde välittyy aina jonkin fysikaalisen vaikutuksen kuten kappaleen tai hiukkasen liikkeen kautta. Keilapallon heitto (E_1) on syy ja hetkeä myöhemmin tapahtuva keilojen kaatuminen (E_2) on seuraus. Jos valitsemme koordinaatistoksi K pallon mukana kulkevan koordinaatiston, niin silloin tapahtumat E_1 ja E_2 ovat samanpaikkaisia (molemmat tapahtuvat pallon luona), joten edellisen kohdan tuloksen perusteella näiden tapahtumien aikajärjestys on kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa sama eli tapahtuma E_1 edeltää tapahtumaa E_2 . Edellisen kappaleen Kuvio 21 havainnollistaa tätä tilannetta.

Edellä oletimme kausaalisuhteen välittyvän massallisen kappaleen tai hiukkasen liikkeen avulla, jolloin vaikutuksen (keilapallon) etenemisnopeus v on pienempi kuin valon nopeus. Entäpä, jos fysikaalisen vaikutuksen välittäjänä onkin valo¹ eli nopeudella c etenevä (massaton) fotoni? Näin on, jos esimerkiksi E_1 on tapahtuma "pimeässä huoneessa oleva kattolamppu sytytetään" ja E_2 on tapahtuma "lampun valo saavuttaa lattian". Silloin yllä esitetty päättely ei toimi, koska mikään koordinaatisto ei pysy fotonin vauhdissa mukana. Fotonilla, päinvastoin kuin keilapallolla, ei ole lepokoordinaatistoa. Huoneen koordinaatistossa K syytapahtuma E_1 on aikaisempi kuin seuraustapahtuma E_2 ja niiden aikaero on se aika $\Delta t = t_2 - t_1$, joka valolta kuluu matkaan $\Delta x = x_2 - x_1$ katosta lattiaan. Toisessa K :n suhteen nopeudella $v < c$ liikkuvassa koordinaatistossa K' mitattuna vastaava aikaero $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ ja matka on $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Koska valon nopeus on K' :ssa mitattuna sama kuin K :ssa mitattuna, täytyy olla $\Delta x / \Delta t = \Delta x' / \Delta t' = c = 1$, joten $\Delta x = \Delta t$ ja $\Delta x' = \Delta t'$. Lorentzin muunnoskaavan (*Lv-lu*) perusteella on silloin

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma(\Delta t + v\Delta x) \\ &= \gamma(\Delta t + v\Delta t) \\ &= \gamma(1 + v)\Delta t.\end{aligned}$$

Tässä $\gamma > 0$ ja myös $1 + v > 0$ ja koska $-1 < v < 1$, niin aikaerot $\Delta t'$ ja Δt ovat samanmerkkisiä (Kuvio 22), joten tapahtumien E_1 ja E_2 aikajärjestys on molemmissa koordinaatistoissa sama.

¹ "Valo" on tässä yleisnimi kaikille sähkömagneettisille vaikutuksille.



KUVIO 22. Avaruudessa (tässä siis x -akselilla) etenevä fotoni välittää kausaalisuhteen tapahtumien E_1 (syy) ja E_2 (seuraus) välillä. Avaruusaikakoordinaatioissa K ja K' tapahtumat sijoittuvat valoviivalle, joka on aina akselien välisen kulman puolittaja (koska $c = 1$). Tapahtumien E_1 ja E_2 aikajärjestys on kaikissa koordinaatioissa sama: E_1 on aikaisempi kuin E_2 .

Toteamme siis, että kausalisuhteessa olevien tapahtumien aikajärjestys (syy ennen seurausta) havaitaan samana kaikissa inertiaalikoordinaatioissa riippumatta siitä millä nopeudella kausaalisuhteen välittävä fyysikaalinen vaikutus etenee.

8.4. Aikadilaatio¹

Tarkastelemme kelloa, joka liikkuu koordinaatiston K x -akselia pitkin tasaisella nopeudella v . Olkoon E_1 tapahtuma "kello on hetkellä t_1 kohdassa x_1 " ja E_2 myöhempi tapahtuma "kello on hetkellä t_2 kohdassa x_2 ". Tapahtumien koordinaatit K :ssa ovat siis $E_1 = (t_1, x_1)$ ja

¹ Engl. time dilation. Suomenkielisessä alan kirjallisuudessa on käytetty myös pitempää muotoa "aikadilataatio".

$E_2 = (t_2, x_2)$, missä $t_2 > t_1$. Samojen tapahtumien koordinaatit kellon omassa koordinaatistossa K' , joka siis liikkuu nopeudella v koordinaatiston K suhteen, ovat $E_1 = (t'_1, x')$ ja $E_2 = (t'_2, x')$. Koordinaatistossa K' tapahtumat ovat siis samanpaikkaisia, molemmat tapahtuvat paikassa x' . Koska koordinaatisto K liikkuu K' :n suhteen nopeudella $-v$, niin Lorentzin muunnoskaavan (*Lv-lu*) perusteella tapahtumien aikaero K :ssa on

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' - v\Delta x') = \gamma\Delta t'.$$

Saamme siis aikaeroja koskevan tuloksen

$$[Dil] \quad \Delta t = \gamma\Delta t',$$

missä $\Delta t'$ on kahden tapahtuman aikaero mitattuna kellon koordinaatistossa ja Δt samojen tapahtumien aikaero mitattuna koordinaatistossa K , jonka suhteen kello liikkuu nopeudella v .

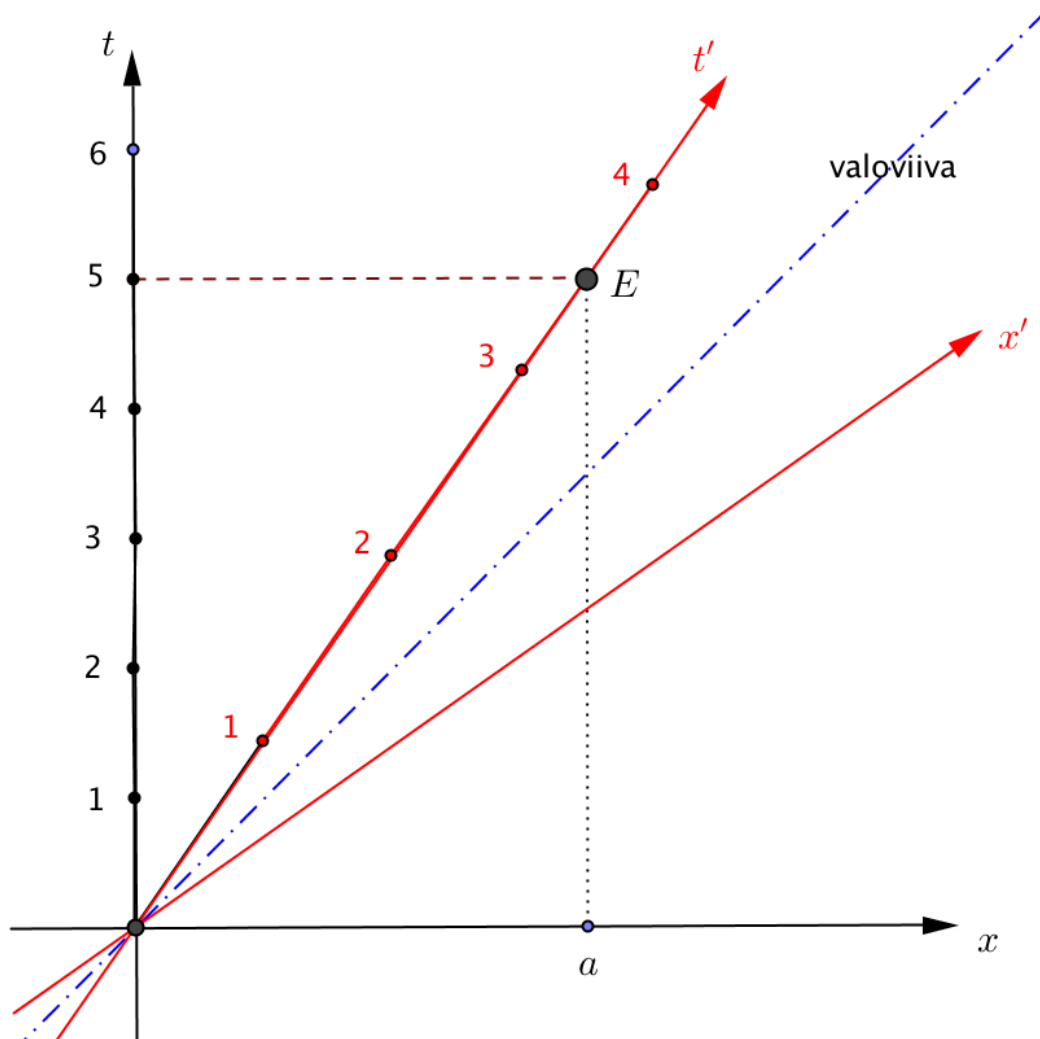
Koska $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} \geq 1$, niin yhtälöstä $[Dil]$ seuraa, että

$$\Delta t' \leq \Delta t. \quad [\text{yhtäsuuruus on voimassa vain, kun } v = 0]$$

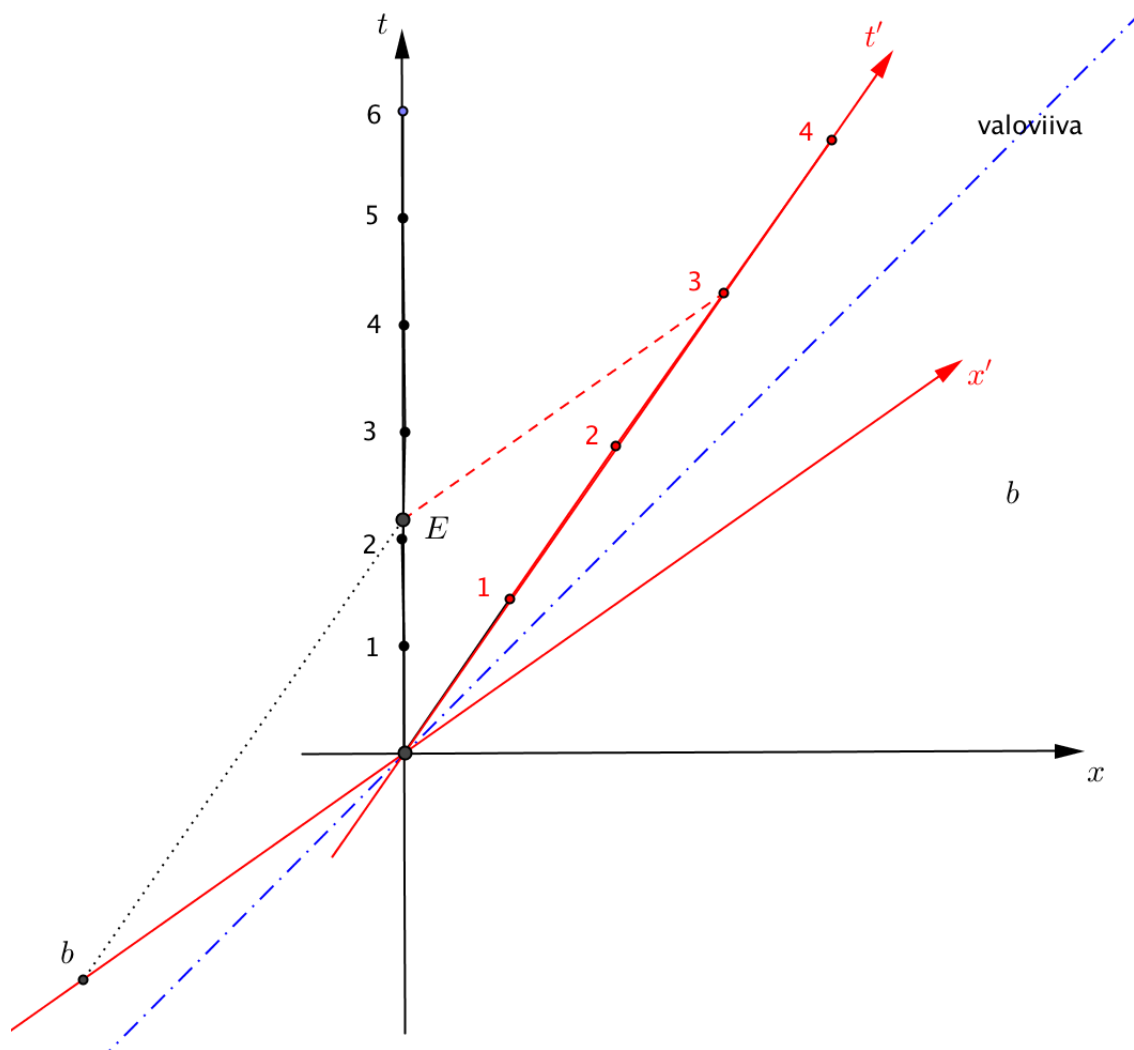
Näemme siis, että koordinaatiston K suhteen liikkeessä olevan kellon mittaama reittiaika $\Delta t'$ on pienempi kuin samalla reitillä K :ssa mitattu aika. Tämä ilmiö – *aikadilaatio* – kuvataan usein sanomalla, että liikkuva kello käy hitaammin kuin levossa oleva kello.

Aikadilaatiota havainnollistavat alla olevat kaksi kuviota (Kuviot 23 ja 24), jotka osoittavat myös, että ilmiö havaitaan symmetrisesti sekä K :sta että K' :sta käsin. Inhimillisestä näkökulmasta dramaattisena esimerkkinä aikadilaatiosta on ns. kaksosparadoksi, joka esitetään seuraavassa kappaleessa.

Liikkuvan kellon liikeradallaan mittaamaa aikaa kutsutaan *ominaisajaksi*. Käsitlemme sitä tarkemmin kappaleessa 7.7.



KUVIO 23. Aikadilaatio K:n näkökulmasta. Kellokoordinaatisto $K'(t', x')$ liikkuu koordinaatiston $K(t, x)$ suhteen nopeudella $v = 0,7c$, jolloin $\gamma = \sqrt{1 - 0,7^2} \approx 0,71$. Koordinaatistojen paikkaorigoissa $x = 0$ ja $x' = 0$ levossa olevat kellot K ja K' on nollattu hetkellä, jolloin paikkaorigot olivat päällekkäin. Aika-akseleille t ja t' merkityt pisteet kuvaavat kellojen tikitystä kummassakin koordinaatistossa. Tapahtuma E = "kello K' saapuu x -akselin pisteeseen $x = a$ ". Kellon K mukaan tapahtuma-aika on 5, mutta kellon K' mukaan kaavan [Dil] mukaan $\gamma \cdot 5 \approx 3,6$. Havaitseijan K mielestä liikkuva kello K' jää jälkeä.



KUVIO 24. Aikadilaatio K' :n näkökulmasta. Tässä tilanne on sama kuin edellisessä kuviossa. Koordinaatisto K' liikkuu koordinaatiston K suhteen nopeudella $v = 0,7c = 0,7$, jolloin siis K liikkuu K' :n suhteen nopeudella $v = -0,7$. Nytkin $\gamma = \sqrt{1 - (-0,7)^2} \approx 0,71$. Tapahtuma $E =$ "Kello K saapuu x' -akselin pisteeseen $x' = b$." Kellon K' mukaan tapahtuma-aika on 3, mutta kellon K mukaan $\gamma \cdot 3 \approx 2,1$. Havaittajan K' mielestä liikkuva kello K jää jälkeen.

ESIMERKKI 8.4.1: "Myoniparadoksi"

Avaruudesta lähes valon nopeudella tuleva hiukkassäteily synnyttää ilmakehään saapuessaan sekundäärisäteilyä, jonka eräänä osana ovat *myoni*-hiukkaset. Niiden keskimääräinen elinikä on $2,2 \cdot 10^{-6}$ s eli 2,2 mikrosekuntia. Sen jälkeen myonit hajoavat muiksi hiukkasiksi tai säteilyksi. Amerikkalaiset astronomit D. H. Frisch ja J. H. Smith tutkivat 1960-luvulla nopeudella $0,99c$ etenevän myonihiiukkasvuon intensiteettiä 2000 m korkeudella Mount Washingtonin huipulla ja merenpinnan tasolla. Kävi ilmi, että 70 % huipulla havaituista myoneista selvisi "hengissä" merenpinnan tasolle, mikä oli monta kertaa enemmän kuin

niiden eliniän perusteella olisi voinut odottaa. Poikkeaman selitys löytyy suhteellisuusteoriasta.

Maan koordinaatistosta K katsoen keskimääräisen myonin matkaan vuoren huipulta merenpinnalle kuluva aika Δt on

$$\Delta t = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{2000}{0,995 \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 6,7 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

mikä on kolminkertainen myonin elinaikaan verrattuna. Tästä seuraisi, että vain pieni vähemmistö (noin 5 %) ehtisi merenpinnan tasolle.

Nopeudella $0,99c$ liikkuvien myonien Lorentz-kerroin

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,995)^2}} \approx 10,0,$$

joten dilaatiokaavan [Dil] mukaan myonin oman koordinaatiston K' kellon mukaan tuohon matkaan tarvittava aika $\Delta t'$ on

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{6,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{10,0} \approx 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ s},$$

joka onkin alle kolmasosa myonien keskimääräisestä elinajasta. Niinpä suuri enemmistö (70 %) niistä ehtii elinaikanaan merenpinnan tasolle¹.

8.5. Kaksosparadoksi

Kuvitelkaamme, että 2700-luvulla elävistä 20-vuotiaista kaksossisaruksista Aino ja Berit jälkimmäinen lähtee avaruusmatkalle edellisen pysyessä kotiplaneetallaan Maassa. Beritin avaruusalus kulkee Maan suhteen tasaisella nopeudella $v = 0,9$ eli lähes valon nopeudella. Oman kellonsa mukaan tasan 5 vuoden kuluttua Berit saapuu kaukaisessa galaksissa olevalle kohdeplaneetalle, joka on etäisyydellä d Maasta, ja lähtee välittömästi paluumatkalle

¹ Esimerkin tiedot on lainattu kirjasta: R. Baierlein: *Newton to Einstein: The trail of light*, Cambridge University Press 1992, ss. 223-226. Perusteellinen selvitys löytyy myös kirjasta: Kari Enqvist: *Johdatus suhteellisuusteoriaan*, URSA 2011, ss. 43-43.

tasaisella nopeudella $-v = -0,9$. Palatessaan Maahan 30-vuotiaana Berit havaitsee yllätyksekseen Ainon huomattavasti itseään vanhemmaksi. Miten tämä on mahdollista?

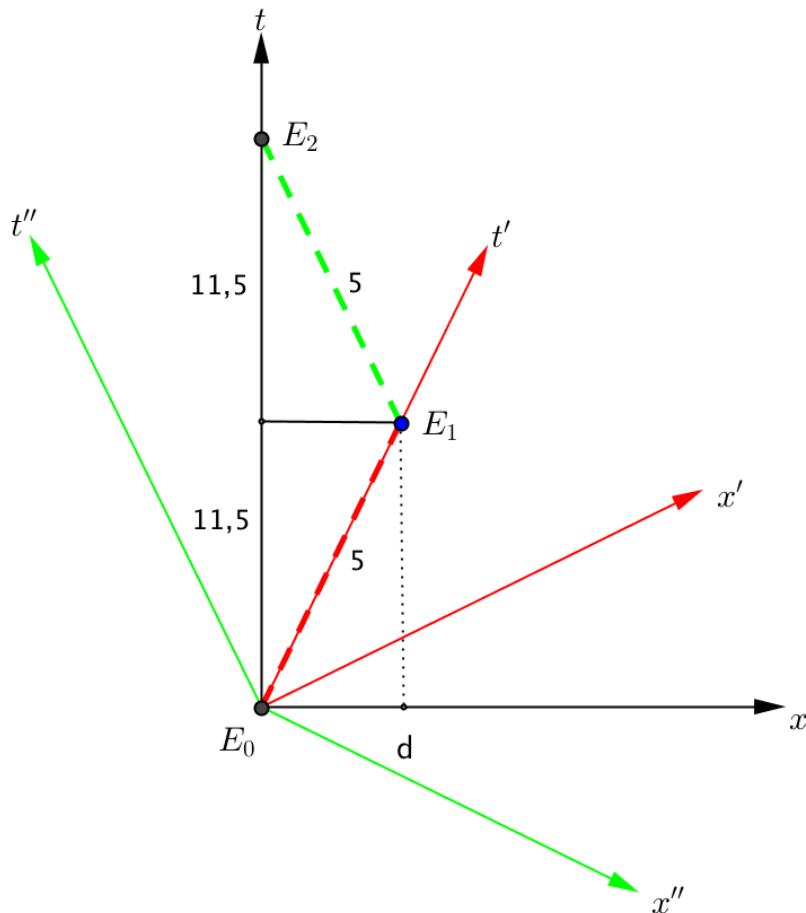
Kysymys on aikadilaatiosta. Olkoon K Maan koordinaatisto ja K' Beritin avaruusaluksen koordinaatisto menomatkalla. Edellä johdetussa dilataatiokaavassa [DiI] menomatkiaan kulunut aika aluksen omassa koordinaatistossa on $\Delta t' = 5$ ja $v = 0,9$. Maan koordinaatistossa matkaan kulunut aika on siis kaavan mukaan

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma \Delta t' \\ &= 5 / \sqrt{1 - v^2} \\ &= 5 / \sqrt{1 - 0,9^2} \\ &= 5 / \sqrt{0,19} \\ &= 11,5 .\end{aligned}$$

Paluumatkalla avaruusaluksen koordinaatisto K'' liikkuu Maasta katsoen vastakkaiseen suuntaan eli nopeudella $v = -0,9$. Mutta dilaatiokaava [DiI] antaa jälleen saman tuloksen eli Maan kellon mukaan paluumatkaankin kuluu 11,5 vuotta. Kaikkiaan Beritin edestakaiseen matkaan on hänen oman kellonsa (myös biologisen) mukaan kulunut 10 vuotta, mutta Ainon kellon mukaan 23 vuotta. Sisarusten kohdatessa Berit on siis 30-vuotias, mutta Aino 43-vuotias.

Kaksosparadoksia¹ voidaan havainnollistaa alla olevan Kuvion 25 Minkowski-diagrammilla.

¹ Sanalla *paradoksi* tarkoitetaan yleensä väittämää tai asiaintilaa, joka tuntuu arkijärjellä mahdottomalta tai ristiriitaiselta, mutta joka tarkemmassa analyysissä osoittautuu todenmukaiseksi.



KUVIO 25. Kaksosparadoksia kuvaavassa diagrammissa $K(t, x)$ on Maan koordinaatisto, jossa paikka-akselin piste $x = 0$ on Maa ja piste $x = d$ on kohdeplaneetta. $K'(t', x')$ on avaruusaluksen koordinaatisto menomatkalla ja $K''(t'', x'')$ aluksen koordinaatisto paluumatkalla. Tapahtumat E_0 ja E_2 ovat aluksen lähtö Maasta ja paluu Maahan. Tapahtuma E_1 on U-käännös kohdeplaneetalla. Murtoviiva $E_0E_1E_2$ on aluksen maailmanviiva K :ssa. Menomatkiaan E_0E_1 kuluva aika aluksen lepokoordinaatistossa K' on 5 vuotta ja Maan koordinaatistossa 11,5 vuotta. Paluumatkaan E_1E_2 kuluva aika aluksen lepokoordinaatistossa K'' on 5 vuotta ja Maan koordinaatistossa 11,5 vuotta.

HUOMAUTUS 8.5.1. Kaksosparadoksin kokeellinen testaus

Fyysikot J. C. Hafele ja R. E. Keating testasivat lokakuussa 1971 kaksosparadoksia käyttämällä ”kaksosina” tarkoin synkronoituja atomikelloja, joista toiset olivat paikallaan Washingtonissa sijaitsevassa laboratoriossa sillä aikaa, kun toiset lennätettiin suihkukoneissa maapallon ympäri¹. Lentomatkalla olleiden kellojen huomattiin ”vanhentuneen” eri tavalla kuin

¹ Hafele ja Keating julkaisivat koetta koskevan raportin *Science* -lehdessä (volume 177, pp. 166-170, 1972). Hafele julkaisi tarkemman raportin *American Journal of Physics* -lehdessä (volume 40, pp. 81-85, 1972).

paikallaan pysyneiden. Havaittu ero oli kaksosparadoksin teorian mukainen mittaustarkkuuden rajoissa.

8.6. Tapahtumaintervallin invarianssi

Edellä luvussa 5 tarkastelimme kahden avaruusajan tapahtuman E_1 ja E_2 välistä *tapahtumaintervallia* $c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$, missä Δt ja Δr ovat tapahtumien aika- ja paikkaerot mitattuina koordinaatistossa $K(t, x, y, z)$ eli

$$\Delta t = t_2 - t_1 ,$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Olkoot $\Delta t'$ ja $\Delta r'$ samojen tapahtumien vastaavat aika- ja paikkaerot toisessa koordinaatistossa $K'(t', x', y', z')$. Luvussa 6 totesimme, että toistensa suhteen levossa olevissa koordinaatistoissa K ja K' (joissa $\Delta t = \Delta t'$ ja $\Delta r = \Delta r'$) mitattuna tapahtumaintervalli on sama eli

$$(8.6.1) \quad c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 .$$

Erityisesti huomasimme, että jos tapahtumat E_1 ja E_2 ovat samalla valoviivalla (fotonin reitillä), niin niiden välinen tapahtumaintervalli on nolla. Silloin invarianssista (8.6.1) seuraa valon nopeuden vakioisuus. Jos nimittäin $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 = 0$, niin $\Delta r/\Delta t = c$ ja $\Delta r'/\Delta t' = c$. Fotonin kulkema matka jaettuna siihen kuluneella ajalla on siis molemmissa koordinaatistoissa sama ($= c$).

Tapahtumaintervalli on siis (triviaalisti) invariantti koordinaattimuunnoksissa toistensa suhteen levossa olevien koordinaatistojen välillä. Mutta tämä invarianssi pätee yleisestikin kaikkien inertiaalikoordinaatistojen K ja K' välillä, siis myös silloin kun K' liikkuu K :n suhteen. Tällöinhän koordinaattimuunnos $K \rightarrow K'$ on Lorentzin muunnos (L_{vc}), joka johdettiin juuri vaatimalla tapahtumaintervallin säilyminen. Näin ollen invarianssi

$$(TI-c) \quad c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2$$

tai luonnollisissa yksiköissä

$$(TI-lu) \quad \Delta t^2 - \Delta r^2 = \Delta t'^2 - \Delta r'^2$$

on automaattisesti voimassa¹ myös liikkuville inertiaalikoordinaatistoille.

Kahden tapahtuman välinen tapahtumaintervalli $c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$ (tai luonnollisissa yksiköissä $\Delta t^2 - \Delta r^2$) on siis sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

8.6.1. Tapahtumaintervallien luokittelu

Jos kahden tapahtuman aika- ja paikkaero ovat Δt ja Δr niin tapahtumien välinen intervalli luokitellaan etumerkkinsä perusteella hohonkin kolmesta ryhmästä:

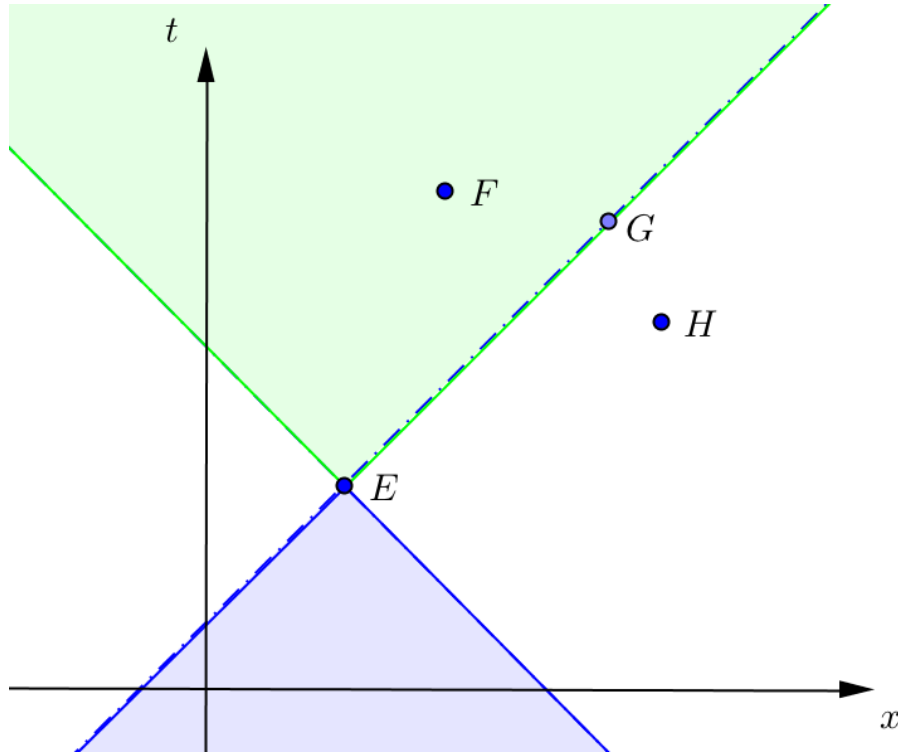
$c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 > 0$	<i>ajankaltainen</i> (timelike) intervalli
$c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = 0$	<i>valonkaltainen</i> (lightlike) intervalli
$c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 < 0$	<i>avaruudenkaltainen</i> (spacelike) intervalli

Jos tapahtumaintervalli on ajankaltainen, niin $c^2\Delta t^2 > \Delta r^2$ ja $(\Delta r/\Delta t)^2 < c^2$, joten $|\Delta r/\Delta t| < c$. Tällöin valoa hitaampi signaali, jonka nopeus $v = |\Delta r/\Delta t|$, voi ehtiä aiemmasta tapahtumasta myöhempään. Tapahtumien välillä voi olla kausaalinen (syy-seuraus) suhde. Tällöin on myös olemassa (signaalin mukana nopeudella v etenevä) inertiaalikoordinaatisto K' , jonka suhteen tapahtumat ovat samanpaikkaisia.

Jos tapahtumaintervalli on valonkaltainen, niin $c^2\Delta t^2 = \Delta r^2$ ja $(\Delta x/\Delta t)^2 = c^2$, joten $|\Delta r/\Delta t| = c$. Tällöin valosignaali, jonka nopeus $v = |\Delta r/\Delta t|$, voi ehtiä aiemmasta tapahtumasta myöhempään. Silloinkin tapahtumien välillä voi olla kausaalinen (syy-seuraus) suhde. Tällöin ei kuitenkaan ole sellaista inertiaalikoordinaatistoa, jonka suhteen tapahtumat olisivat samanpaikkaisia. Näin siksi, että inertiaalikoordinaatistojen välinen nopeus on aina pienempi kuin valon nopeus.

¹ Tässä luvussa tarkastellaan tilannetta, jossa K' liikkuu x -akselin suunnassa, jolloin $\Delta y = \Delta y'$ ja $\Delta z = \Delta z'$ ja tapahtumien paikkaerot ovat $\Delta r = \Delta x$ ja $\Delta r' = \Delta x'$. Invarianssit (TI- c) ja (TI- lu) ovat kuitenkin voimassa yleisesti olipa K' :n liikesuunta mikä tahansa.

Jos tapahtumaintervalli on avaruudenkaltainen, niin $c^2 \Delta t^2 < \Delta r^2$ ja $(\Delta r / \Delta t)^2 > c^2$, joten $|\Delta r / \Delta t| > c$. Tällöin vain valoa nopeampi signaali, jonka nopeus $v = |\Delta x / \Delta t|$ voisi ehtiä aiemmasta tapahtumasta myöhempään. Mutta tällaisia signaaleja ei ole olemassa, joten tapahtumien välillä ei voi olla kausaalista suhdetta. Ne ovat täysin riippumattomia toisistaan.



KUVIO 26. Tapahtumien E ja F välinen tapahtumaintervalli on *ajankaltainen* eli valoa hitaampi fysikaalinen vaikutus (esim. ainehiukkanen) voi edetä edellisestä jälkimmäiseen. Valoviivalla eli fotonin maailmanviivalla olevien tapahtumien E ja G intervalli on *valonkaltainen*. Tapahtumat F ja G sijaitsevat molemmat tapahtuman E *valokartiossa*¹ (värillinen alue) eli alueella, jonka tapahtumiin E :llä voi olla jonkin fysikaalisen vaikutuksen välittämä kausaalinen suhde joko syynä tai seurauksena. Valokartion vihreä alue on tapahtuman E *tulevaisuus* ja sininen alue on E :n *menneisyys*. Tapahtumien E ja H intervalli on *avaruudenkaltainen*. Mikään fysikaalinen vaikutus (signaali) ei voi ehtiä tapahtumasta E tapahtumaan H .

¹ Kuvion typistetyssä 2-ulotteisessa avaruusaikakoordinaatistossa $K(t, x)$ valokartio on E :n kautta kulkevien valoviivojen rajoittama tasoalue. Vähemmän typistetyssä 3-ulotteisessa $K(t, x, y)$ -koordinaatistossa E :n kautta kulkevat valoviivat muodostavat kartiopinnan, jonka sisään E :n tulevaisuus ja menneisyys jäävät. Täydellisessä 4-ulotteisessa koordinaatistossa $K(t, x, y, z)$ valoviivat rajoittavat vaikeammin visualisoitavan kaksiosaisen kartion kaltaisen alueen.

8.7. Ominaisaika

Tapahtumien E ja F välinen *ominaisaika* (proper time) $\Delta\tau$ tarkoittaa molemmissa tapahtumissa läsnä olevan kellon mittaamaa tapahtumien välistä aikaa¹. Kyseessä on siis jonkin peruskoordinaatiston K suhteen liikkuva kello, joka rekisteröi liikeradallaan tapahtuvien tapahtumien (kuten E ja F) ajankohtia. On tärkeätä huomata, että ominaisaikaero riippuu myös siitä reitistä, jota pitkin kello kulkee avaruusajassa tapahtumasta E tapahtumaan F . Tapahtumien välisen ominaisajan sijasta onkin täsmällisempää puhua *tietyllä reitillä kuluneesta ominaisajasta*. Samojen tapahtumien välillä voi olla useita - jopa äärettömän monta - eri reittiä.

Jos liikkuu tasaisella nopeudella v tapahtumasta E tapahtumaan F , niin sitä voidaan pitää samalla nopeudella liikkuvan inertiaalikoordinaatiston K' kellona. Kellon maailmanviiva K :ssa on silloin suora viiva. Reitillä EF kulunut ominaisaika $\Delta\tau$ on sama kuin kellon lepokoordinaatistossa K' mitattu aikaero $\Delta t'$ ja dilaatiokaavan $[Dil]$ perusteella

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta \tau .$$

Tästä ratkaistuna

$$\Delta \tau = \Delta t / \gamma = \Delta t \sqrt{1 - v^2} ,$$

missä Δt on peruskoordinaatistossa K mitattu reitillä kulunut *koordinaattiaika*. Reitillä kulunut ominaisaika $\Delta \tau$ kellon lepokoordinaatistossa K' mitattu koordinaattiaika.

Suoraviivaisella reitillä EF kulunut ominaisaika liittyy läheisesti vastaavaan tapahtumaintervalliin, sillä

$$(8.7.1) \quad \Delta \tau^2 = \Delta t^2 (1 - v^2) = \Delta t^2 - v^2 \Delta t^2 .$$

Mutta $v \Delta t = \Delta x$, joten

$$(8.7.2) \quad \Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 .$$

¹ Ominaisaikaa merkitään yleisesti kreikkalaisella kirjaimella τ (tau) tai $\Delta\tau$ korostettaessa aikaeroa. Suomenkielisessä kirjallisuudessa esiintyy myös termi *itseisaika*.

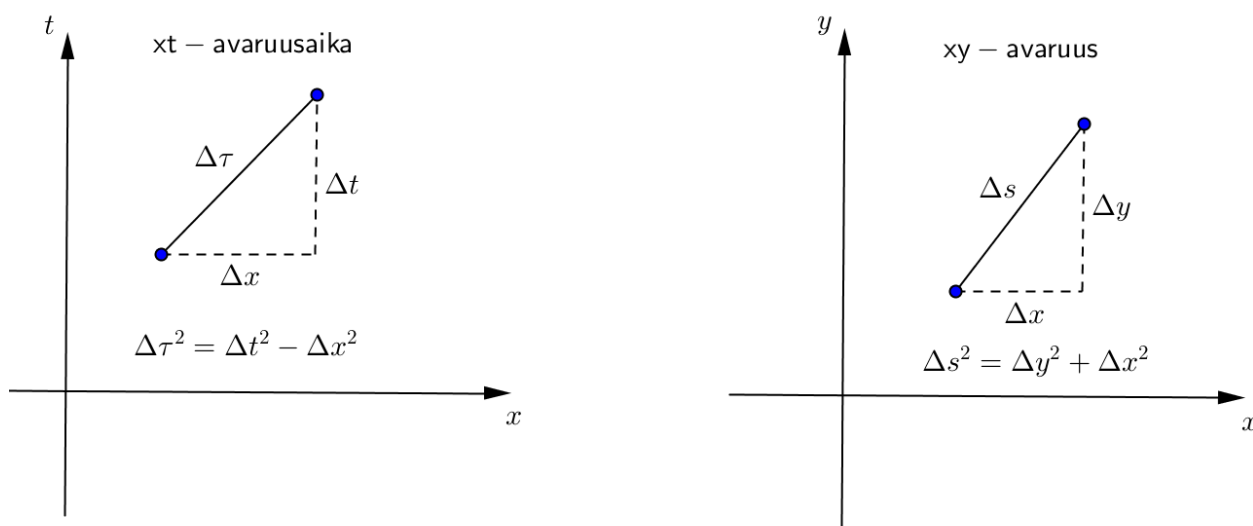
Suoraviivaisella reitillä kuluneen ominaisajan neliö $\Delta\tau^2$ on siis *sama kuin tapahtumaintervalli*. (Tässä on käytetty luonnollisia yksiköitä. Yleisesti on $\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$.) Siksi *ominaisaika on invariantti eli riippumaton käytetystä koordinaatistosta*. Edellisessä kappaleessa esitetty tapahtumaintervallien luokittelu voidaan nyt esittää ominaisajan avulla:

$\Delta\tau^2 > 0$ ajankaltaisella reitillä (sisään valokartioon)

$\Delta\tau^2 = 0$ valonkaltaisella reitillä (valokartion reunaa eli valoviivaa pitkin)

$\Delta\tau^2 < 0$ avaruudenkaltaisella reitillä (ulos valokartiosta)

Tavallisessa xy -avaruudessa lauseke $\Delta s^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$ kuvaa kahden pisteen välisen suoraviivaisen reitin (euklidista) pituutta eli määrittää avaruuden ns. *euklidisen metriikan*. Vastaavasti voidaan ajatella, että lauseke $\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ kuvaa tx -avaruusajassa suoraviivaisen reitin "pituutta" ja määrittää avaruusajan ns. *Minkowski-metriikan*.



KUVIO 27. Typistetyn avaruusajan (t, x) Minkowski-metriikka ja avaruuden (y, x) euklidinen metriikka.

Jos reitti on käyräviivainen, jolloin kellon liike ei ole tasaista eikä se määritä mitään inertiaalikoordinaatistoa, niin reitillä kuluneen ominaisajan laskeminen vaatii integraalilaskentaa. Tällöin reitti voidaan ajatella pilkotuksi pieniin osamatkoihin, joilla kellon liike on likimain tasaista. Koko reitillä kulunut ominaisaika saadaan osamatkoilla kuluneiden aikojen summana. Koska kuhunkin osamatkaan kuluva ominaisaika on invariantti (samansuuruinen laskettuna kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa), niin sama pätee koko reitin ominaisajalle. Asian matemaattiseen käsittelyyn palaamme tarkemmin kirjan osassa 2.

8.8. Pituuden kontraktio¹

Tarkastelemme K-koordinaatiston x-akselilla olevaa sauvaa, joka liikkuu akselia pitkin nopeudella v . Olkoon K' sauvan mukana kulkeva koordinaatisto (sauvan lepokoordinaatisto), jossa sauvan päätepisteet pysyvät paikallaan kohdissa $x'_1 = 0$ ja $x'_2 = l'$. Sauvan *lepopituus* (eli sen lepokoordinaatistossa K' mitattu pituus) on siis l' . Koska sauvan päätepisteiden x-koordinaatit pysyvät muuttumattomina K' :n kellojen näyttämän ajan t' suhteen, niin sauvan lepopituus l on myös tapahtumien² $E_1 = (t'_1, 0)$ ja $E_2 = (t'_2, l')$ paikkaero $x'_2 - x'_1 = l' - 0 = l'$.

Koordinaatisto K liikkuu koordinaatiston K' suhteen nopeudella $-v$, joten Lorentzin muunnoskaavojen ($Lv-lu$) avulla saamme sauvan "päätepiestetapahtumien" $E_1 = (t_1, x_1)$ ja $E_2 = (t_2, x_2)$ koordinaatit K:ssa

$$\begin{aligned}t_1 &= \gamma(t'_1 - vx'_1) = \gamma(t'_1 - v \cdot 0) = \gamma t'_1, \\t_2 &= \gamma(t'_2 - vx'_2) = \gamma(t'_2 - vl')\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}x_1 &= \gamma(x'_1 - vt'_1) = \gamma(0 - vt'_1) = -\gamma vt'_1, \\x_2 &= \gamma(x'_2 - vt'_2) = \gamma(l' - vt'_2),\end{aligned}$$

Sauvan pituus l koordinaatistossa K saadaan erotuksena $l = x_2 - x_1$, missä x_1 ja x_2 ovat samalla K-hetkellä mitatut paikkakoordinaatit. Tämä ehto toteutuu, kun $t_1 = t_2$ eli kun $\gamma t'_1 = \gamma(t'_2 - vl')$, toisin sanoen kun $t'_1 - t'_2 = -vl'$.

Tällöin on

$$\begin{aligned}l &= x_2 - x_1 \\&= \gamma(l' - vt'_2) + \gamma vt'_1 \\&= \gamma(l' + v(t'_1 - t'_2)) \\&= \gamma(l' - v^2 l') && [\text{samanaikaisuusehdon } t'_1 - t'_2 = -vl' \text{ perusteella}] \\&= \gamma l'(1 - v^2) \\&= l' \sqrt{1 - v^2} . && [\text{koska } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \text{ ja } 1 - v^2 = \sqrt{1 - v^2} \cdot \sqrt{1 - v^2}] \end{aligned}$$

¹ Kirjallisuudessa esiintyy myös termi Lorentz-kontraktio tai Lorentz-FitzGerald-kontraktio (*Lorentz-FitzGerald contraction*).

² Tässä ovat siis kyseessä yksinkertaiset perustapahtumat: "sauvan alkupiste (ja loppupiste) on tietyllä ajanhetkellä tietyssä paikassa".

Saamme siis pituuksia koskevan tuloksen

$$[Kontr] \quad l = l' \sqrt{1 - v^2}$$

missä l' on sauvan lepopituus ja l on ulkopuolisen havaitsijan mittaama pituus, kun sauva liikkuu tämän havaitsijan suhteen nopeudella v .

Yhtälössä $[Kontr]$ on $0 < \sqrt{1 - v^2} \leq 1$, joten $l \leq l'$ (yhtäsuuruus on voimassa vain kun $v = 0$). Tämä ilmiö – pituuden *kontraktio* – ilmaistaan usein sanomalla, että liikkuva sauva kutistuu liikesuunnassa. Tässähän sauvan pituus omassa lepokoordinaatistossaan eli K' :ssa on l' , mutta K :sta katsoen sauva on liikkeessä ja sen K -pituus l on pienempi kuin lepopituus l' . Kontraktio-ilmiötä havainnollistetaan tavallisesti ns. tunneliparadoksilla, joka esitetään seuraavassa kappaleessa.

HUOMAUTUS 8.8.1. "Myoniparadoksin" selitys kontraktion avulla

Edellä esimerkissä 8.4.1 aikadilaation avulla selitetty "myoniparadoksi" voidaan selittää myös pituuden kontraktion avulla (myonin näkökulmasta matka vuoren huipulta merenpinnan tasolle kutistuu kaavan $[Kontr]$ mukaisesti). Tämä selitys on esitetty mm. esimerkin 8.4.1 alaviitteessä mainitussa Kari Enqvistin kirjassa.

8.9. Tunneliparadoksi

Henrik tarkkailee kukkulan laelta läheisellä radalla nopeudella $0,9c = 0,9$ kulkevaa junaa, jonka (junassa tai asemalla levossa mitattu) pituus 100 m. Juna syöksyy tunneliin, jonka pituus (maastossa mitattuna) on 50 m. Yllättäen Henrik huomaa junan katoavan kokonaan tunneliin. Viimeinen vaunu häviää tunneliin ennenkuin ensimmäinen on tullut sieltä ulos. Miten tämä on mahdollista?

Kysymys on pituuden kontraktiosta. Junan lepopituus on $l' = 100$ m ja sen nopeus maaston suhteen on $v = 0,9$. Kaavan $[Kontr]$ mukaan junan maastokoordinaatistossa havaittu pituus l on

$$\begin{aligned} l &= l' \sqrt{1 - v^2} \\ &= 100 \sqrt{1 - 0,9^2} \end{aligned}$$

$$= 43,6 \text{ m},$$

joten juna mahtuu kokonaisuudessaan 50 m pituiseen tunneliin.

8.10. Nopeuksien yhteenlasku

Olettakaamme, että juna kulkee maanpinnan suhteen tasaisella nopeudella v_1 ja matkustaja kulkee junan käytävällä junan suhteen tasaisella nopeudella v_2 . Mikä on matkustajan nopeus v maanpinnan suhteen?

Arkijärjen mukaan käyttäisimme ns. Galilein yhteenlaskusääntöä $v = v_1 + v_2$, joka antaisikin (ainakin arkikäyttöön) riittävän tarkan tuloksen silloin v_1 ja v_2 ovat valon nopeuteen verrattuna pieniä. Galilein sääntö ei kuitenkaan voi olla oikea, koska se on ristiriidassa Einsteinin toisen aksiooman (valon nopeuden vakioisuuden) kanssa¹. Galilein säännön mukaan junassa olevasta lampusta kulkusuuntaan lähtevän valon nopeus maanpinnan suhteen olisi $v = v_1 + c$ eli vakioarvoa c suurempi. Asiaa on siis tutkittava tarkemmin Lorentz-muunnosten avulla.

Olkoot $K(t, x)$, $K'(t', x')$ ja $K''(t'', x'')$ maanpintaan, junaan ja matkustajaan liittyvät inertiaalikoordinaatistot, joiden paikka-akselit ovat yhdensuuntaisia ja paikkaorigot yhtyvät hetkellä $t = t' = t'' = 0$. Silloin koordinaatistojen välillä ovat voimassa Lorentz-muunnoskaavat, joiden eri versioista käytämme nyt luvussa 6 johdettuja hyperbolisia kaavoja luonnollisissa yksiköissä ($c = 1$)

$$(L\alpha - lu) \quad \begin{cases} t' = t \cosh \alpha - x \sinh \alpha \\ x' = x \cosh \alpha - t \sinh \alpha \end{cases},$$

missä koordinaatistojen välinen nopeus $v = \tanh \alpha = \sinh \alpha / \cosh \alpha$.

Koordinaattien (t, x) ja (t', x') välille saamme siis yhtälöt

¹ Ja samalla Einsteinin ensimmäisen aksiooman (suhteellisuusperiaatteen) kanssa, koska toinen aksiooma seuraa suhteellisuusperiaatteesta (kuten luvussa 1 todettiin).

$$(L\alpha) \quad \begin{cases} t' = t \cosh \alpha - x \sinh \alpha \\ x' = x \cosh \alpha - t \sinh \alpha \end{cases}, \text{ missä } v_1 = \tanh \alpha,$$

ja koordinaattien (t', x') ja (t'', x'') välille yhtälöt

$$(L\beta) \quad \begin{cases} t'' = t' \cosh \beta - x' \sinh \beta \\ x'' = x' \cosh \beta - t' \sinh \beta \end{cases}, \text{ missä } v_2 = \tanh \beta.$$

Sijoittamalla ensimmäisen $(L\beta)$ -yhtälön oikealla puolella muuttujien t' ja x' paikalle kaavojen $(L\alpha)$ mukaiset lausekkeet saamme

$$\begin{aligned} t'' &= t' \cosh \beta - x' \sinh \beta \\ &= (t \cosh \alpha - x \sinh \alpha) \cosh \beta - (x \cosh \alpha - t \sinh \alpha) \sinh \beta \\ &= (t \cosh \alpha - x \sinh \alpha) \cosh \beta - (x \cosh \alpha - t \sinh \alpha) \sinh \beta \\ &= t(\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) - x(\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta), \end{aligned}$$

mutta luvussa 4 esitettyjen hyperbolisten funktioiden yhteenlaskukaavojen mukaan on

$$\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta = \cosh(\alpha + \beta)$$

ja

$$\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta = \sinh(\alpha + \beta),$$

joten

$$t'' = t \cosh(\alpha + \beta) - x \sinh(\alpha + \beta).$$

Tekemällä vastaavat sijoitukset toiseen $(L\beta)$ -yhtälöön saadaan laskujen jälkeen

$$x'' = x \cosh(\alpha + \beta) - t \sinh(\alpha + \beta).$$

Näin olemme saaneet muunnosyhtälöt koordinaatistosta K suoraan koordinaatistoon K'' . Ne ovat tuttuja muotoa $(L\alpha)$ olevia Lorentz-muunnosyhtälöitä, joissa hyperbolisena kulmaparametrina on α :n sijasta $\theta = \alpha + \beta$. Näin ollen koordinaatiston K'' liikenopeus K:n suhteen on $v = \tanh \theta = \tanh(\alpha + \beta)$. Mutta hyperbolisen tangentin yhteenlaskukaavan mukaan on tällöin

$$v = \tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \cdot \tanh \beta} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

Saamme siis suhteellisuusteoreettisen nopeuksien yhteenlaskukaavan (luonnollisissa yksiköissä)

$$[\text{Summanopeus} - \text{lu}] \quad v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

Huomaa, että nopeuksien yhteenlasku ei voi tuottaa valon nopeutta suurempaa nopeutta, sillä summanopeus v on aina tanh-funktion arvo, koska $v = \tanh(\alpha + \beta)$, ja aiemmin luvussa 4 olemme nähneet, että $-1 < \tanh \theta < 1$ kaikilla reaaliluvuilla θ . Näin ollen on $-1 < v < 1$.

Tavanomaisissa yksiköissä (esim. SI) nopeuksien yhteenlaskukaava [Summanopeus-lu] saa muodon

$$[\text{Summanopeus} - \text{SI}] \quad v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

ESIMERKKI 8.10.1.

Olkoon Maasta lähetetyn avaruusaluksen nopeus Maan suhteen $v_1 = 0,9c = 0,9$ ja sen kulkusuunnassa laukaistun raketin nopeus aluksen suhteen $v_2 = 0,9c = 0,9$. Silloin raketin nopeus v Maan suhteen on kaavan [Summanopeus-lu] perusteella

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} = \frac{0,9 + 0,9}{1 + 0,9 \cdot 0,9} = \frac{1,8}{1,81} \approx 0,994.$$

Tässä nopeudet ovat valon nopeuden suuruusluokkaa ja todellinen summanopeus poikkeaa selvästi Galilein säännön antamasta arvosta 1,8.

ESIMERKKI 8.10.2.

Satelliitin nopeus maanpinnan suhteen on $v_1 = 10800$ km/h ja satelliitista sen kulkusuunnassa laukaistun luotainraketin nopeus satelliitin suhteen $v_2 = 2700$ km/h. Mikä on raketin nopeus maanpinnan suhteen?

Käyttämällä kaavaa [Summanopeus - SI], jossa $c = 300\,000$ km/h saamme

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)} = \frac{10800 + 2700}{1 + (10800 \cdot 2700 / 300000^2)} = \frac{13500}{1,000324} \approx 13496 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Näemme, että Galilein yhteenlaskukaava pätee kuitenkin varsin tarkasti tavanomaisessa mielessä suurillakin nopeuksilla, jos ne kuitenkin ovat valon nopeuteen verrattuna pieniä.

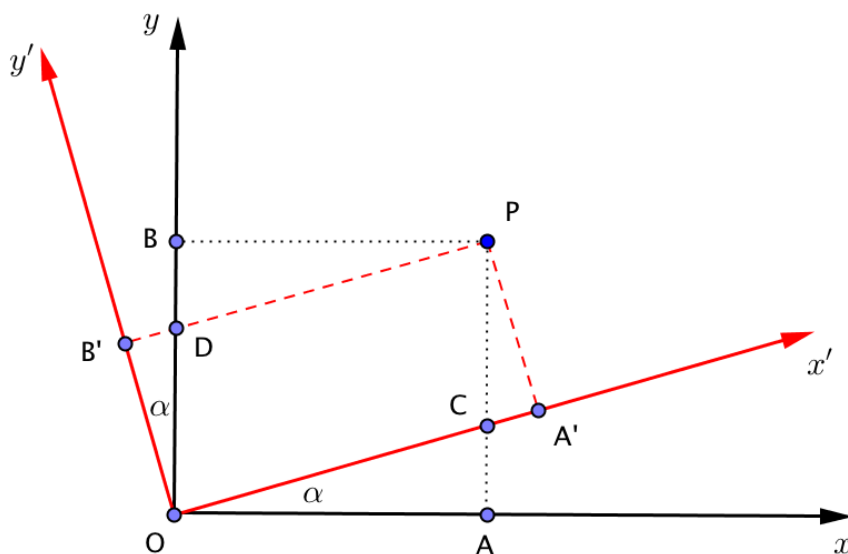
LIITTEET

LIITE 1. Koordinaattimuunnokset tasokoordinaatiston kierrossa ja peilauksessa	80
LIITE 2. Tasokoordinaattien lineaarinen muunnos, jossa pisteiden etäisyydet origosta säilyvät invariantteina.....	84
LIITE 3. Hyperbolisia identiteettejä	88
LIITE 4. Nopeuksien yhteenlaskukaavan johtaminen ilman hyperbolisia funktioita.....	92
LIITE 5. Lorentz-muunnos ilman valon nopeutta	95

LIITE 1. Koordinaattimuunnokset tasokoordinaatiston kierrossa ja peilauksessa

Tässä liitteessä perustelemme kappaleissa 6.3 ja 6.4 esitetyt koordinaatiston kierto- ja peilaukseen liittyvät muunnoskaavat.

1A. Kiertomuunnos ($R\alpha$)



KUVIO L1a. Suorakulmaista koordinaatistoa $K(x, y)$ kierretään kulman α verran, jolloin saadaan koordinaatisto $K'(x', y')$. Pisteet A ja B ovat pisteen P kohtisuorat projektiot x - ja y -akseleille. Pisteet A' ja B' ovat pisteen P kohtisuorat projektiot x' - ja y' -akseleille.

Tason pisteen P koordinaatit ovat K:ssa (x, y) ja K':ssa (x', y') ja ne näkyvät kuviossa janoina seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} x = OA = BP & x' = OA' = B'P \\ y = OB = AP & y' = OB' = A'P \end{array}$$

Tehtävänä on ilmaista uudet koordinaatit x' ja y' vanhojen koordinaattien x ja y avulla.

Käytämme kuvioon syntyneitä suorakulmaisia kolmioita $PA'C$, PBD , OAC ja $OB'D$, joissa kaikissa pienempi terävä kulma on kiertokulman α suuruinen.

Kolmiosta $PA'C$ saamme

$$\frac{A'P}{CP} = \cos \alpha, \text{ josta } CP = \frac{A'P}{\cos \alpha} = \frac{y'}{\cos \alpha}.$$

Kolmiosta OAC saamme

$$\frac{AC}{OA} = \frac{AC}{x} = \tan \alpha, \text{ josta } AC = x \tan \alpha.$$

Siis

$$y = AP = AC + CP = \frac{y'}{\cos \alpha} + x \tan \alpha.$$

Siirtämällä termejä ja kertomalla puolittain $\cos \alpha$:lla saamme

$$y' = y \cos \alpha - x \cos \alpha \tan \alpha.$$

Mutta $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, joten saamme lopulta kaavan

$$(1) \quad y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha = -x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

joka ilmaisee uuden y' -koordinaatin vanhojen koordinaattien x ja y sekä kiertokulman α avulla.

Vastaavasti saamme kolmioista PBD ja OB'D yhtälöt

$$DP = \frac{BP}{\cos \alpha} = \frac{x}{\cos \alpha} \quad \text{ja} \quad \frac{B'D}{OB'} = \frac{B'D}{y'} = \tan \alpha, \text{ josta } B'D = y' \tan \alpha,$$

joista saadaan

$$x' = B'P = B'D + DP = \frac{x}{\cos \alpha} + y' \tan \alpha$$

ja edelleen sijoittamalla kaavan (1) lauseke koordinaatin y' paikalle

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\cos \alpha} + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \tan \alpha \\ &= \frac{x}{\cos \alpha} + (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{x \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + y \sin \alpha \\ &= \frac{x(1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} + y \sin \alpha \quad [1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha] \end{aligned}$$

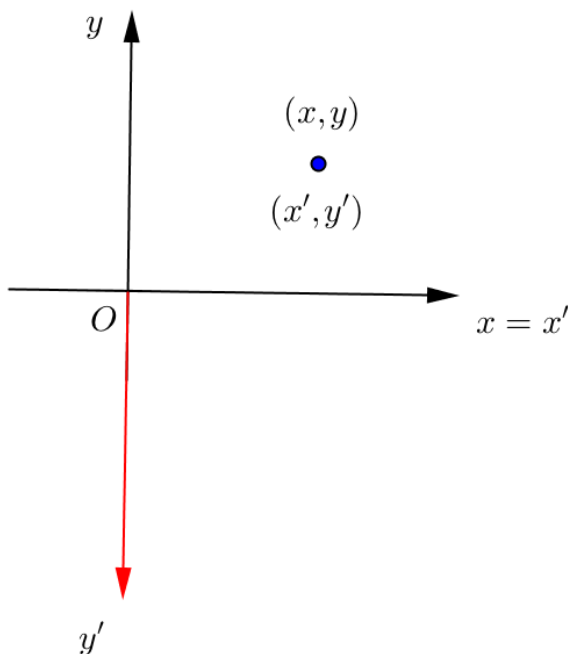
$$= x \cos \alpha + y \sin \alpha .$$

Näin olemme todistaneet suorakulmaisen tasokoordinaatiston kiertokaavat:

$$(R\alpha) \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha . \end{cases}$$

1B. Akselien suunnanvaihto eli peilausmuunnos (Px)

Peilausmuunnoksessa uudet koordinaattiakselit saadaan peilaamalla vanhat akselit jonkin origon kautta kulkevan suoran (peilaussuoran) suhteen. Alla olevan kuvion peilauksessa (Px) peilaussuorana on x -akseli. Tällöin uusi x' -akseli yhtyy alkuperäiseen x -akseliin eli tason pisteiden x -koordinaatit säilyvät peilauksessa muuttumattomina. Uusi y' -akseli yhtyy alkuperäiseen y -akseliin, mutta on sille vastakkaissuuntainen. Pisteiden y -koordinaatit vaihtuvat vastaluvuiksi.



KUVIO L1b. Koordinaatiston peilausmuunnos (Px), jossa x -akseli pysyy paikallaan, mutta y -akseli vaihtuu vastakkaissuuntaiseksi.

Kuvion mukaisessa tilanteessa koordinaatit muuttuvat yhtälöiden

$$(P_x) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

mukaisesti.

Kolmiulotteisessa xyz -paikka-avaruudessa yllä kuvattu y -akselin suunnanvaihto toteutuu peilauksessa xz -koordinaattitason suhteen, jolloin muunnosta (P_x) vastaa muunnos

$$(P_{xz}) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Muiden koordinaattiakselien suunnanvaihto voidaan vastaavasti ajatella peilauksena joko suoran tai tason suhteen.

LIITE 2. Tasokoordinaattien lineaarinen muunnos, jossa pisteiden etäisyydet origosta säilyvät invariantteina

Tarkastellaan yhtälöiden

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y \end{cases}$$

määrittelemää *lineaarista*¹ koordinaattimuunnosta $(x, y) \rightarrow (x', y')$.

Lause L3.1.

Jos invarianssi $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ toteutuu lineaarisessa koordinaattimuunnoksessa (1), niin kyseessä on joko koordinaatiston kiertomuunnos $(R\alpha)$ tai kiertomuunnoksen $(R\alpha)$ ja peilauksen (Px) yhdistelmä.

Todistus:

Oletamme, että invarianssi $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ toteutuu identtisesti kaikille pisteille (x, y) . Silloin on

$$(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = x^2 + y^2.$$

Suorittamalla laskut vasemmalla puolella saadaan yhtälö

$$(a_1^2 + a_2^2)x^2 + (b_1^2 + b_2^2)y^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)xy = x^2 + y^2,$$

jonka tulee olla voimassa kaikilla x :n ja y :n arvoilla. Täytyy siis olla

$$(2) \quad a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1,$$

$$(3) \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Yhtälöistä (2) näemme, että pisteet $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$ sijaitsevat origokeskisen yksikköympyrän kehällä. Olkoot α ja β kulmat, jotka muodostuvat näihin pisteisiin piirrettyjen säteiden OA ja OB sekä x -akselin välille. Silloin

¹ *Lineaarinen* muunnos on erikoistapaus ($c_1 = c_2 = 0$) *affiinista* muunnoksesta $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$. Lineaarisessa muunnoksessa origo pysyy paikallaan. Yleisessä affiinissa muunnoksessa se siirtyy pisteeseen (c_1, c_2) .

$$A = (a_1, a_2) = (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$B = (b_1, b_2) = (\cos \beta, \sin \beta).$$

Yhtälöstä (3) seuraa silloin, että

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

eli kosinin vähennyslaskukaavan perusteella

$$\cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Siis

$$\beta - \alpha = \pm 90^\circ$$

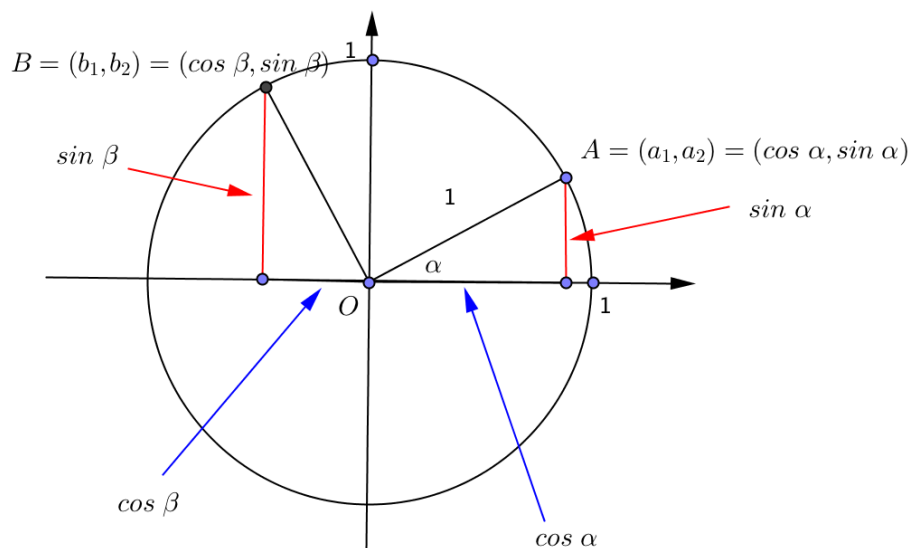
$$[\text{radiaanimitassa } \alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2}]$$

eli

$$\beta = \alpha + 90^\circ \text{ tai } \alpha = \beta + 90^\circ$$

$$[\text{radiaanimitassa } \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \text{ tai } \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}]$$

Tapaus $\beta = \alpha + 90^\circ$



KUVIO L2. Pisteet A ja B ovat yksikköympyrän kehällä. Janat OA ja OB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Yllä olevan kuvion yhtenevistä kolmioista (tai sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista) näemme, että

$$\cos \beta = b_1 = -\sin \alpha \quad \text{ja} \quad \sin \beta = b_2 = \cos \alpha ,$$

jolloin muunnosyhtälöt (1) ovat

$$(1a) \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} .$$

Jos merkitsemme $\gamma = -\alpha$, jolloin $\cos \gamma = \cos \alpha$ ja $\sin \gamma = -\sin \alpha$, niin kaavat (1a) saavat muodon

$$(1b) \quad \begin{cases} x' = x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ y' = -x \sin \gamma + y \cos \gamma \end{cases} ,$$

jotka ovat täsmälleen Liitteessä 1 johdetut koordinaattien kiertomuunnoskaavat ($R\alpha$) kiertokulmalle, kun $\alpha = \gamma$.

Tapaus $\alpha = \beta + 90^\circ$

Nyt $\beta = \alpha - 90^\circ$, jolloin saamme sinin ja kosinin vähennyslaskukaavojen avulla

$$b_1 = \cos \beta = \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos \alpha \cos(90^\circ) + \sin \alpha \sin(90^\circ) = \sin \alpha ,$$

$$b_2 = \beta = \sin(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha \cos(90^\circ) - \cos \alpha \sin(90^\circ) = -\cos \alpha .$$

Muunnosyhtälöt (1) saavat nyt muodon

$$(1c) \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha \end{cases} ,$$

joka ei ole kiertomuunnos ($R\alpha$), vaan kiertomuunnoksen ja peilausmuunnoksen (Px) yhdistelmä. Jos nimittäin kierrämme ensin xy -koordinaatistoa kulman α verran positiiviseen kiertosuuntaan, niin pisteen (x, y) uudet koordinaatit (x^*, y^*) kierrettyssä koordinaatistossa ovat kiertokaavojen ($R\alpha$) mukaan

$$\begin{cases} x^* = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y^* = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} .$$

Kun x^*y^* -koordinaatisto sitten peilataan kääntämällä y^* -akseli vastakkaissuuntaiseksi saadaan kolmas $x'y'$ -koordinaatisto, jossa pisteen (x, y) koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x' = x^* \\ y' = -y^* \end{cases}.$$

eli

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha \end{cases},$$

mikä onkin täsmälleen muunnos (1c).

Näin olemme todistaneet, että lineaarinen koordinaattimuunnos (1), jossa invariantsi

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

toteutuu, on joko kierto tai kierron ja peilauksen (Px) yhdistelmä.

Väite on siten todistettu.

LIITE 3. Hyperbolisia identiteettejä

Hyperboliset funktiot $\cosh \alpha$, $\sinh \alpha$ ja $\tanh \alpha$ määritellään yhtälöillä

$$\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \quad [\text{hyperbolinen kosini}]$$

$$\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \quad [\text{hyperbolinen sini}]$$

$$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} \quad [\text{hyperbolinen tangentti}]$$

Näille funktioille on voimassa monia samantapaisia identiteettejä kuin ympyräfunktioille ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$). Todistamme alla kaksi tässä kirjasessa tarvittavaa identiteettiä.

Hyperbolinen perusidentiteetti (HP)

Lause L3.1.

Kaikilla reaaliluvuilla α on voimassa: $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Todistus:

Määritelmän mukaan on

$$\begin{aligned} \cosh^2 \alpha &= \frac{1}{4}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2e^{\alpha}e^{-\alpha}) && [(e^{\alpha})^2 = e^{2\alpha}] \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2) && [e^{\alpha}e^{-\alpha} = 1] \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} \sinh^2 \alpha &= \frac{1}{4}(e^{\alpha} - e^{-\alpha})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2e^{\alpha}e^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2), \end{aligned}$$

joten

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = \frac{1}{4} \cdot (2 + 2) = 1.$$

Hyperbolisten funktioiden yhteenlaskukaavat

Lause L3.2.

Kaikilla reaaliluvuilla α ja β on voimassa:

$$(a) \sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

$$(b) \cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$(c) \tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \cdot \tanh \beta}$$

Todistus:

(a) Funktioiden $\sinh x$ ja $\cosh x$ määritelmien mukaan on

$$\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} + \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{e^\alpha e^\beta + e^\alpha e^{-\beta} - e^{-\alpha} e^\beta + e^{-\alpha} e^{-\beta}}{4} + \frac{e^\alpha e^\beta - e^\alpha e^{-\beta} + e^{-\alpha} e^\beta - e^{-\alpha} e^{-\beta}}{4} \\ &= \frac{2e^{\alpha+\beta} - 2e^{-(\alpha+\beta)}}{4} \\ &= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2} \\ &= \sinh(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

(b) Todistetaan kuten edellinen kohta *mutatis mutandis*.

(c) Määritelmän mukaan

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

joten

$$\frac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \cdot \tanh \beta} = \frac{\frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} + \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta}}{1 + \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} \cdot \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta}} \quad [\text{lavenna tekijällä } \cosh \alpha \cdot \cosh \beta]$$

$$= \frac{\sinh \alpha \cdot \cosh \beta + \sinh \beta \cdot \cosh \alpha}{\cosh \alpha \cdot \cosh \beta + \sinh \alpha \cdot \sinh \beta}$$

$$= \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\cosh(\alpha + \beta)} \quad [\text{kohtien (a) ja (b) perusteella}]$$

$$= \tanh(\alpha + \beta).$$

Kaavat (a) – (c) on näin todistettu oikeiksi.

Hyperbolisen tangentin arvot

Lause L3.3

Kaikilla reaaliluvuilla α on voimassa: $-1 < \tanh \alpha < 1$

Todistus:

Määritelmänsä mukaan on

$$(1) \quad \tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}},$$

mistä näemme, että

$$(2) \quad \tanh(-\alpha) = -\tanh \alpha.$$

Laventamalla (1):ssä tekijällä e^{α} saadaan

$$\tanh \alpha = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}. \quad (\text{koska } e^{\alpha}e^{-\alpha} = 1 \text{ ja } e^{\alpha}e^{\alpha} = e^{2\alpha})$$

Tapaus 1: $\alpha > 0$

Silloin $e^{2\alpha} > 1$, jolloin $e^{2\alpha} + 1 > e^{2\alpha} - 1 > 0$ ja $0 < \tanh \alpha < 1$.

Tapaus 2: $\alpha = 0$

Silloin $e^{2\alpha} = e^0 = 1$, jolloin $e^{2\alpha} - 1 = 0$ ja $e^{2\alpha} + 1 = 2$ ja $\tanh \alpha = 0$.

Tapaus 3: $\alpha < 0$

Silloin (2):n perusteella $\tanh \alpha = -\tanh(-\alpha)$. Koska $-\alpha > 0$, niin $0 < \tanh(-\alpha) < 1$ ja edelleen $-1 < \tanh \alpha < 0$.

Näemme siis, että kaikissa tapauksissa on voimassa $-1 < \tanh \alpha < 1$.

HUOMAUTUS L3.1. Yhteenlaskukaavojen käyttö

Hyperbolisten funktioiden yhteenlaskukaavoja sekä hyperbolisen tangentin arvoja koskevaa kaksoisepäytähtälöä käytetään suhteellisuusteoreettisen nopeuksien yhteenlaskukaavan johtamisessa.

HUOMAUTUS L3.2. Kantaluku hyperbolisissa funktioissa

Kaikki edellä todistetut tulokset säilyvät voimassa, vaikka hyperbolisten funktioiden määritelmässä kantaluku e (Neperin luku = 2,718 ...) korvattaisiin millä tahansa positiivisella reaalityöllä. Tällöin tosin menetettäisiin eräät muut hyperbolisten funktioiden hyödylliset ominaisuudet kuten kauniit derivoimiskaavat ja kompleksialueella toteutuva yhteys ympyräfunktioihin. Näitä ominaisuuksia ei kylläkään tarvita tämän kirjasen sisältämissä suhteellisuusteorian tarkasteluissa.

LIITE 4. Nopeuksien yhteenlaskukaavan johtaminen ilman hyperbolisia funktioita

Tässä liitteessä johdetaan kappaleessa 7.10 saadut suhteellisuusteoreettiset summanopeuskaavat käyttämättä Lorentz-muunnoksen hyperbolista hyperbolista muotoa.

Olkoot $K(t, x)$, $K'(t', x')$ ja $K''(t'', x'')$ kolme inertiaalikoordinaatistoa. Oletetaan, että K' liikkuu K :n suhteen tasaisella nopeudella v_1 ja K'' liikkuu K' :n suhteen tasaisella nopeudella v_2 . Tehtävänä on selvittää millä nopeudella koordinaatisto K'' liikkuu K :n suhteen.

Lorentzin muunnoskaavan $[Lv-lu]$ perusteella on

$$(1a) \quad t' = \gamma_1(t + v_1 x), \quad \text{missä } \gamma_1 = 1/\sqrt{1 - v_1^2},$$

$$(1b) \quad x' = \gamma_1(x + v_1 t)$$

ja

$$(2a) \quad t'' = \gamma_2(t' + v_2 x'), \quad \text{missä } \gamma_2 = 1/\sqrt{1 - v_2^2},$$

$$(2b) \quad x'' = \gamma_2(x' + v_2 t').$$

Sijoittamalla kaavojen (1a) ja (1b) lausekkeet kaavaan (2a) muuttujien t' ja x' paikalle saamme

$$t'' = \gamma_2(\gamma_1(t + v_1 x) + v_2 \gamma_1(x + v_1 t))$$

eli sievennettynä

$$(3) \quad t'' = \gamma_1 \gamma_2 (t(1 + v_1 v_2) + x(v_1 + v_2)).$$

Ottamalla sulkulausekkeesta tekijäksi $(1 + v_1 v_2)$ saamme edelleen

$$(4) \quad t'' = \gamma_1 \gamma_2 (1 + v_1 v_2) \left(t + \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} x \right).$$

Merkitsemme

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} = v,$$

jolloin

$$(5) \quad t'' = \gamma_1 \gamma_2 (1 + v_1 v_2) (t + vx).$$

Mutta tässä

$$\gamma_1 \gamma_2 (1 + v_1 v_2) = \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{1 - v_1^2} \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2}}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + v_1 v_2)^2}{(1 + v_1 v_2)^2} - \left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 + v_1 v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2}{(1 + v_1 v_2)^2}}} \\ &= \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{(1 + v_1 v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2}} \\ &= \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{(1 + v_1 v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2}} \\ &= \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{(1 + v_1 v_2)^2 - (v_1 + v_2)^2}} \\ &= \frac{1 + v_1 v_2}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2 + v_1^2 v_2^2}} \\ &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + v_1 v_2) \end{aligned}$$

joten yhtälö (5) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(6a) \quad t'' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t + vx) .$$

Vastaavilla laskutoimituksilla saadaan kaavasta (2b) johdetuksi yhtälö

$$(6b) \quad x'' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x + vt) .$$

Mutta kaavat (6a) ja (6b) ilmaisevat Lorentz-muunnoksen $[Lv-lu]$ koordinaatistosta K koordinaatistoon K'' , missä koordinaatistojen välinen nopeus on

$$(7) \quad v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} .$$

Saman tuloksen saimme kappaleessa 7.10 (ehkä hieman elegantimmin) hyperbolisten funktioiden avulla.

LIITE 5. Suhteellisuusteoria ilman valon nopeutta

L5.1. Johdanto

Suhteellisuusteorian keskeinen sisältö kiteytyy inertiaalikoordinaatistojen väliseen Lorentz-muunnokseen, josta kaikki muut teorian tulokset seuraavat. Lorentz-muunnos ja siten koko suhteellisuusteoria ovat loogisia seurauksia kahdesta Einsteinin aksioomasta, jotka ovat

Suhteellisuusperiaate: Fysiikan lait ovat samat kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

Valon nopeuden vakioisuuden periaate: Valon nopeus on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

Nämä aksioomat muodostavat epäsuhtaisen parin. Edellinen on yleinen fysikaalinen periaate, mutta jälkimmäinen tiettyyn fysikaaliseen ilmiöön liittyvä yksityiskohta ja empiirinen fakta. Tämä epäsuhta on jossain määrin vaivannut suhteellisuusteoreetikkoja aina siitä lähtien, kun Einstein 1905 julkaisi teoriansa¹. Muutamat tutkijat esittivätkin jo 1910-luvulla², että Lorentz-muunnos voidaan johtaa pelkästään suhteellisuusperiaatteesta sekä kahdesta avaruusaikaa koskevasta yleisesti hyväksytystä perusoletuksesta mainitsematta lainkaan valon nopeutta. Nämä yleiset oletukset ovat

Avaruusaika on homogeeninen: Avaruusaika on tasalaatuista, kaikkialla samanlaista.

Avaruus on isotrooppinen: Avaruuden kaikki suunnat ovat samanlaatuisia ja samanarvoisia.

Vuosikymmenten varrella aina 2000-luvulle saakka on alan aikakauslehdissä julkaistu kymmenittäin artikkeleita, joissa on esitetty erilaisia muunnelmia teemasta ”relativity without light”, vaikka suhteellisuusteorian standardioppikirjoissa asia ei olekaan saanut

¹ Huomiota on tosin kiinnitetty siihen (kuten edellä luvussa 1), että loogiselta kannalta suhteellisuusteoria seuraa pelkästään suhteellisuusperiaatteesta sekä fysiikan yleisistä homogeenisuus- ja isotrooppisuusoletuksista, joita harvoin edes mainitaan. Ks. E. F. Taylor & J. A. Wheeler: *Spacetime Physics*, W. H. Freeman and Co., New York 1992.

² W. A. Von Ignatowsky: *Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip*, Phys. Z. 11, 972-976 (1910); P. Frank & H. Rothe: *Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme*, Annalen Phys. 34, 825-853 (1911).

huomiota. Mainituissa artikkeleissa¹ on esitetty lukuisia eri tapoja johtaa Lorentz-muunnos ilman valon nopeuden vakioisuutta koskevaa oletusta (2).

L5.2. Lorentz-muunnos ilman valon nopeutta

Johdamme nyt Lorentz -muunnosyhtälöt käyttämällä pelkästään suhteellisuusteoriaa ja edellä mainittuja perusoletuksia.

Oletetaan jälleen, että $K(t, x)$ ja $K'(t', x')$ tyypistettyjä inertiaalikoordinaatistoja, joista jälkimmäinen tavalliseen tapaan liikkuu tasaisella nopeudella v edellisen suhteen. Edellä luvussa 5 (Lause 5.3.1) on osoitettu (avaruusajan homogeneisuuden perusteella), että tällöin ovat voimassa (affiinit) muunnoskaavat

$$\begin{cases} t' = At + Bx + E \\ x' = Ct + Dx + F, \end{cases}$$

missä kertoimet ovat nopeusparametrin v funktioita: $A = A(v)$, $B = B(v)$, jne.

Jos edelleen tavanmukaisesti oletamme, että koordinaatistojen origot yhtyvät (hetkellä $t = t' = 0$ on myös $x = x' = 0$), niin vakiotermit E ja F häviävät ja muunnoskaavat $K \rightarrow K'$ ovat lineaarisia:

$$(1) \quad \begin{cases} t' = A(v)t + B(v)x \\ x' = C(v)t + D(v)x, \end{cases}$$

missä kerroinfunktioiden nopeusmuuttuja v on kirjoitettu näkyviin, mutta voidaan jatkotarkastelussa jättää tarvittaessa merkitsemättä luettavuuden parantamiseksi.

Koska koordinaatisto K' liikkuu nopeudella $-v$ koordinaatiston K suhteen, niin samat muunnoskaavat (1) ovat voimassa myös toisinpäin, kunhan v :n tilalle vaihdetaan $-v$. Saamme siis käänteiset muunnoskaavat

$$(2) \quad \begin{cases} t = A(-v)t' + B(-v)x' \\ x = C(-v)t' + D(-v)x'. \end{cases}$$

¹ Esim. A. R. Lee & T. M. Kalotas: *Lorentz transformations from the first postulate*, Am. J. Phys. 43 (1975), 434-437; Palash P. Pal: *Nothing but relativity*, Eur. J. Phys. 24(2003), 315-319, ladattavissa myös verkkoarkistosta [arXiv:physics/0302045v1]; Z. K. Silagadze: *Relativity without tears*, (2007), [arXiv:0708.0929v2]. Viimeksi mainittu sisältää laajan viiteluettelon aiheesta julkaistuun kirjallisuuteen.

Käytämme nyt perusoletusta (4) eli avaruuden isotrooppisuutta. Sen mukaan muunnos (1) säilyy voimassa, vaikka vaihdamme koordinaatistojen paikka-akselit (x - ja x' - akselit) vastakkaissuuntaiseksi. Muunnoskaavassa (1) paikkakoordinaattien x ja x' arvot muuttuvat vastaluvuiksi (eli $x \rightarrow -x$ ja $x' \rightarrow -x'$) ja samoin nopeuden v arvo (eli $v \rightarrow -v$), joten saamme yhtälöt

$$\begin{cases} t' = A(-v)t - B(-v)x \\ -x' = C(-v)t - D(-v)x \end{cases},$$

eli

$$(3) \quad \begin{cases} t' = A(-v)t - B(-v)x \\ x' = -C(-v)t + D(-v)x \end{cases}.$$

Mutta yhtälöt (1) ja (3) ilmaisevat saman koordinaattimuunnoksen $K \rightarrow K'$, joten kertoimien tulee olla samat. Siis

$$A(-v) = A(v), \quad B(-v) = -B(v), \quad C(-v) = -C(v), \quad D(-v) = D(v).$$

Näemme, että funktiot A ja D ovat parillisia, mutta B ja C parittomia. Käänteismuunnos (2) voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$(4) \quad \begin{cases} t = A(v)t' - B(v)x' \\ x = -C(v)t' + D(v)x' \end{cases}.$$

Sijoittamalla näihin yhtälöihin koordinaattien t' ja x' paikalle yhtälöiden (1) lausekkeet saamme (kun nopeusmuuttuja v jätetään merkitsemättä)

$$\begin{cases} t = At' - Bx' = A(At + Bx) - B(Ct + Dx) \\ x = -Ct' + Dx' = -C(At + Bx) + D(Ct + Dx) \end{cases}$$

ja sieventämällä edelleen

$$\begin{cases} t = (A^2 - BC)t + B(A - D)x \\ x = C(D - A)t + (D^2 - BC)x \end{cases}.$$

Kummassakin yhtälössä pitää koordinaattien t ja x kertoimien olla samat vasemmalla ja oikealla puolella, joten saamme neljä yhtälöä

$$\begin{cases} A^2 - BC = 1 \\ B(A - D) = 0 \\ C(D - A) = 0 \\ D^2 - BC = 1. \end{cases}$$

Kaksi keskimmäistä toteutuvat, jos $A = D$ tai $B = C = 0$. Jälkimmäinen vaihtoehto antaa $A = B = 1$, jolloin (1) on identtinen muunnos

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x. \end{cases}$$

Silloin K ja K' ovat yksi ja sama koordinaatisto ja niiden välinen nopeus $v = 0$.

Edellinen vaihtoehto $A = D$ tuottaa yhtälöt

$$(5) \quad \begin{cases} A = D \\ B = (A^2 - 1)/C. \end{cases}$$

Näin meillä on jäljellä kaksi kerroinfunktiota $C = C(v)$ ja $D = D(v)$, joiden avulla kaksi muuta A ja D voidaan lausua. Kerroinfunktiot C ja D eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia. Koordinaatiston K' origo $x' = 0$ liikkuu K :n suhteen nopeudella v ja K -hetkellä t se sijaitsee kohdassa $x = vt$. Kun sijoitamme nämä arvot muunnosyhtälöparin (1) jälkimmäiseen yhtälöön ja otamme huomioon yhtälöt (5), saamme

$$0 = Ct + Dvt = t(C + Dv),$$

josta ratkaistuna

$$C = -Dv$$

ja edelleen (5):n nojalla

$$\begin{cases} D = A \\ B = (A^2 - 1)/-Av \\ C = -Av. \end{cases}$$

Näin ollen voimme lopulta kirjoittaa muunnosyhtälöt (1) muotoon, jossa esiintyy vain yksi tuntematon kerroinfunktio $A = A(v)$

$$(6) \quad \begin{cases} t' = A(v)t - \frac{(A(v)^2 - 1}{vA(v)}x \\ x' = -vA(v)t + A(v)x \end{cases}.$$

Kerroinfunktiosta $A = A(v)$ tiedämme, että se on parillinen ja $A(0) = 1$.

Seuraavassa vaiheessa tarkastelemme kolmatta koordinaatistoa K'' , joka liikkuu K' :n suhteen vakionopeudella u . Koordinaatit t'' ja x'' saadaan tietysti muunnoskaavoilla (6), kun v :n paikalle sijoitetaan u ja koordinaattien t ja x paikalle sijoitetaan t' ja x' . Saamme silloin

$$(7) \quad \begin{cases} t'' = A(u)t' - \frac{(A(u)^2 - 1)}{uA(u)}x' \\ x'' = -uA(u)t' + A(u)x' \end{cases}.$$

Kun tässä t' ja x' korvataan yhtälöiden (6) mukaisilla lausekkeilla, saadaan t'' ja x'' sievennysten jälkeen lausutuksi koordinaattien t ja x avulla

$$(8) \quad \begin{cases} t'' = \left[A(u)A(v) + \frac{vA(v)(A(u)^2 - 1)}{uA(u)} \right] t - \left[\frac{A(v)(A(u)^2 - 1)}{uA(u)} + \frac{A(u)(A(v)^2 - 1)}{vA(v)} \right] x \\ x'' = [-(u + v)A(u)A(v)]t + \left[A(u)A(v) + \frac{uA(u)(A(v)^2 - 1)}{vA(v)} \right] x \end{cases}.$$

Mutta (8) on koordinaattimuunnos kahden inertiaalikoordinaatiston K ja K'' välillä, joten sen täytyy olla samaa muotoa kuin (6), jossa ns. diagonaaliset kertoimet eli koordinaatin t kerroin ensimmäisessä kaavassa ja koordinaatin x kerroin jälkimmäisessä kaavassa ovat samat. Tämän täytyy päteä myös muunnoksessa (8), mistä seuraa, että

$$\frac{vA(v)(A(u)^2 - 1)}{uA(u)} = \frac{uA(u)(A(v)^2 - 1)}{vA(v)}.$$

Jakamalla tämä yhtälö puolittain tekijällä $uvA(u)A(v)$ saamme

$$(9) \quad \frac{A(u)^2 - 1}{u^2 A(u)^2} = \frac{A(v)^2 - 1}{v^2 A(v)^2}.$$

Kyseessä on muotoa $f(u) = f(v)$ oleva yhtälö, joka toteutuu kaikilla arvoilla u ja v . Tämä on mahdollista vain, jos f on vakiofunktio. Näin ollen on olemassa vakioluku L siten, että

$$(10) \quad \frac{A(v)^2 - 1}{v^2 A(v)^2} = L, \text{ kaikilla nopeusmuuttujan } v \text{ arvoilla.}$$

Ratkaisemalla kerroinfunktio $A(v)$ yhtälöstä (10) saadaan

$$(11) \quad A(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - Lv^2}},$$

ja voimme kirjoittaa muunnoskaavat (1) muotoon

$$(12) \quad \begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1-Lv^2}}(t - Lvx) \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1-Lv^2}}(-vt + x), \end{cases}$$

jotka alkavat jo muistuttaa luvussa 7 johdettuja Lorentz-muunnoskaavoja (Lvc).

Kun tarkastelemme muunnoskaavoja (12) fysikaalisten yksiköiden kannalta, huomaamme, että vakion L yksikkönä täytyy olla (ajan yksikkö/pituuden yksikkö) neliöön korotettuna. Tavallisia SI-yksiköitä käytettäessä on siis $[L] = s^2/m^2$. Luonnollisia yksiköitä¹ käytettäessä on $[L] = 1$ eli L on paljas luku.

Muunnoksen (12) lähempi tarkastelu on syytä jakaa kolmeen eri tapaukseen vakion L arvon mukaan.

Tapaus $L = 0$

Tällöin muunnosyhtälöt (12) sievenevät muotoon

$$(12a) \quad \begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt, \end{cases}$$

joka on juuri kappaleessa 7.2 esitetty Galilei-muunnos. Tiedämme, ettei se kuvaa oikein fysikaalista todellisuutta, vaikka onkin riittävän tarkka nopeuden v ollessa pieni verrattuna valon nopeuteen. Johtopäätös on, että todellisessa maailmassa täytyy olla $L \neq 0$.

Tapaus $L > 0$

Tällöin voimme määritellä L :n avulla uuden vakion $d = 1/\sqrt{L}$, jolloin $L = 1/d^2$ ja muunnosyhtälöt (12) saavat muodon

$$(Lvd) \quad \begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/d^2}}(t - vx/d^2) \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/d^2}}(-vt + x), \end{cases}$$

joka on täsmälleen Lorentz-muunnos (Lvc), kun vakio d korvataan valon nopeudella c . Itse asiassa vakion d yksikkö on $[d] = [1/\sqrt{L}] = m/s$ eli nopeuden yksikkö. On myös helppo

¹ Luonnollisissa yksiköissä $[t] = [x] = m$ ja nopeus on paljas luku eli $[v] = 1$. Tässä hakasulkeet tarkoittavat kyseisen muuttujan yksikköä sovitussa järjestelmässä.

todistaa (aivan kuten Lorentz-muunnoksellekin kappaleessa 7.6), että muunnoksessa (12b) on voimassa invarianssi

$$d^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = d^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2.$$

Tästä puolestaan seuraa, että nopeus d säilyy muunnoksessa invarianttina aivan kuten valon nopeus Lorentz-muunnoksessa.

Huomaa, että muunnoksessa (Lvd) täytyy olla $v < d$, jotta neliöjuuri olisi reaalinen. Näin ollen d on koordinaatistojen liikenopeuden saavuttamaton yläraja aivan kuten valon nopeus Lorentz-muunnoksessa.

Lähtemällä kolmesta yleisestä periaatteesta (suhteellisuusperiaate, avaruusan ajan homogeenisuus ja avaruuden isotrooppisuus) olemme päätyneet koordinaattimuunnokseen (Lvd), joka edellyttää invariantin nopeuden d olemassaoloa. On siis perusteltua kutsua muunnosta (Lvd) yleiseksi Lorentz-muunnokseksi ja olettaa (empiirisillä perusteilla), että $d = c$. Periaatteessa voisi olla $d \neq c$, mutta mahdollisen eron täytyy olla niin pieni, ettei nykyinen mittaustarkkuus kykene sitä havaitsemaan.

Nopeuksien yhteenlaskukaava

Johdamme vielä nopeuksien yhteenlaskukaavan yleiselle Lorentzin muunnokselle. Edellä tarkastelimme koordinaatistoa K'' , joka liikkuu K' :n suhteen nopeudella u . Koordinaatisto K' puolestaan liikkuu K :n suhteen nopeudella v . Kysymme, millä nopeudella w koordinaatisto K'' liikkuu K :n suhteen. Vastaus selviää tarkastelemalla yhtälöitä (8), jotka ilmaisevat tapahtumien K'' -koordinaatit (t'' ja x'') samojen tapahtumien K -koordinaattien (t ja x) avulla. Toisaalta, koska K'' ja K ovat inertiaalisia, täytyy niiden välisen muunnoksen olla ilmaistavissa yhtälöillä (1), kun nopeusparametriksi asetetaan w . Siis

$$(13) \quad \begin{cases} t'' = A(w)t + B(w)x \\ x'' = C(w)t + D(w)x \end{cases}.$$

Muutta muunnosten (8) ja (13) täytyy olla täsmälleen samat, joten vastaavien kertoimien on oltava yhtäsuuret. Merkitsemällä muuttujan t kertoimet ylemmissä yhtälöissä yhtäsuuriksi ja käyttämällä tulosta (10) saamme

$$A(w) = A(u)A(v) + \frac{vA(v)(A(u)^2 - 1)}{uA(u)} \quad [\text{lavenna osamäärä tekijällä } uA(u)]$$

$$A(w) = A(u)A(v) + uvA(u)A(v) \frac{A(u)^2 - 1}{A(u)^2} \quad [(10) \Rightarrow \frac{A(u)^2 - 1}{A(u)^2} = L]$$

$$= A(u)A(v) + LuvA(u)A(v)$$

$$= A(u)A(v)(1 + Luv) .$$

Tulosta (11) käyttämällä saamme nyt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - Lw^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - Lu^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - Lv^2}} (1 + Luv) ,$$

josta vaihtamalla molemmat puolet käänteisluvuikseen ja korottamalla neliöön

$$1 - Lw^2 = \frac{(1 - Lu^2)(1 - Lv^2)}{(1 + Luv)^2}$$

ja edelleen

$$Lw^2 = 1 - \frac{(1 - Lu^2)(1 - Lv^2)}{(1 + Luv)^2} = \frac{(1 + Luv)^2 - (1 - Lu^2)(1 - Lv^2)}{(1 + Luv)^2}$$

$$Lw^2 = 1 - \frac{(1 - Lu^2)(1 - Lv^2)}{(1 + Luv)^2} = \frac{(1 + Luv)^2 - (1 - Lu^2)(1 - Lv^2)}{(1 + Luv)^2}$$

$$= \frac{L(u + v)^2}{(1 + Luv)^2} .$$

Tästä seuraa lopulta, että

$$w = \frac{u + v}{1 + Luv} .$$

Sijoittamalla tähän $L = 1/d^2$ saamme yhteenlaskukaavan

$$(14) \quad w = \frac{u + v}{1 + uv/d^2} ,$$

joka on yhtäpitävä kappaleessa 7.10 saadun tuloksen (*Summakaava-SI*) kanssa.

Tapaus $L < 0$

Lopuksi tarkastelemme tapausta, jossa kaavalla (10) määritelty vakio L on negatiivinen. Merkitsemällä $L = -1/e^2$ voimme kirjoittaa muunnoskaavat (12) muotoon

$$(12c) \quad \begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/e^2}}(t + vx/e^2) \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/e^2}}(-vt + x), \end{cases}$$

jolloin neliöjuuri on määritelty mielivaltaisen suurillakin nopeuden v arvoilla eikä mitään ylärajaa ole. Edelleen yhteenlaskukaava (14) saa tässä tapauksessa muodon

$$(14a) \quad w = \frac{u + v}{1 - uv/e^2}.$$

Koska nopeuksilla u ja v ei nyt ole mitään ylärajaa, voimme valita kummankin arvon suuremmaksi kuin vakion e itseisarvo, jolloin summanopeus $w < 0$. Päädymme siten fysikaaliseen mahdottomuuteen, jossa kahden samansuuntaisen nopeuden u ja v summanopeus olisi siten vastakkaissuuntainen. Tällä perusteella hylkäämme sen mahdollisuuden, että vakio L olisi negatiivinen.

Yhteenveto

Inertiaalikoordinaatistojen välisen koordinaattimuunnoksen muoto voidaan johtaa yleisistä fysiikan periaatteista ilman, että valon nopeutta edes mainitaan. Tulokseksi saadaan Lorentz-muunnos (Lvd) ainoana fysikaalisesti mahdollisena ratkaisuna. Muunnosyhtälöissä esiintyvä vakio d on laadultaan nopeusparametri. Yhtälöistä seuraa myös, että minkä tahansa fysikaalisen objektin (koordinaatiston) nopeus on aina pienempi kuin d . Empiirisillä perusteilla voidaan olettaa, että tämä rajanopeus d on juuri valon nopeus, vaikka teoriassa voisi olla $c < d$, jolloin fotonilla voisi olla myös nollasta eroava massa. Mahdollinen positiivinen erotus $d - c$ olisi kuitenkin niin pieni, ettei sitä kyetä nykyisellä mittaustekniikalla havaitsemaan.