Tyhjää parempia perusteluja

Markku Halmetoja
Mäntän lukio

Euler todisti 1700-luvulla yhtälön

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

tavalla, jota ei nykyisin pidetä korrektina. Yhtälö on kuitenkin paikkansapitävä eikä kukaan väitä, että Eulerin työ ei olisi ollut matematiikkaa. Käsitys matemaattisesta tarkkuudesta on ollut näihin päiviin asti, ehkä vieläkin, aikaansa sidottu. Oikeita tuloksia on keksitty tavalla tai toisella ja niitä on myöhempinä aikoina todistettu mitä hienoimmilla ajatusrakennelmilla. Differentiaalilaskennan synty 1600-luvulla ja sen täsmentyminen nykyaikaiselle tasolle on tästä hyvä esimerkki. Tällaisen syvenevien perustelujen sarjan tulisi olla myös yksilökohtaisen matematiikan oppimisen perustana. Matemaattiset väitteet tulisi kouluopetuksessa käsitellä oppilaan kulloiseenkin ikäkauteen sopivilla argumenteilla. Tämänsuuntaista ajattelua on peruskoululaisille tarkoitetuissa Solmun matematiikkadiplomitehtävissä [1] ja niihin liittyvissä oheiskirjoituksissa. Kirjoituksessa [2] käsitellään samassa hengessä lukion trigonometrian oppimäärää. Peruskoulun ja osin lukionkin nykyiset oppikirjat ilmentävät päinvastaista oppimiskäsitystä. Matemaattisia totuuksia ei juuri perustella mistään lähtökohdista lähtien. Tärkeintä näyttää olevan valmiina annettujen kaavojen soveltaminen lähinnä keinotekoisiin ongelmiin. Oppilaalle muodostuu sirpaleinen, jäsentymätön kuva matematiikasta, mikä vähentää oppimismotivaatiota. Varsinkin yläkoululaiset pitävät tutkimusten mukaan matematiikkaa, siis sitä, mitä heille matematiikkana opetetaan, yhtenä tylsimmistä kouluaineista. Seuraavassa hahmotellaan, miten eräitä ympyrään ja palloon liittyviä teoriakokonaisuuksia voisi käsitellä nykyisiä käytäntöjä matemaattisemmin. Perustiedoiksi tarvitaan Pythagoraan lause, suoran lieriön tilavuus, intuitiivinen käsitys kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuudesta sekä hieman algebrallisten lausekkeiden käsittelytaitoa. Osittain samoja asioita käsitellään hieman vaativammin kirjoituksessa [3].

Ympyrästä

Mielenkiintoisin ympyrään liittyvistä asioista on π. Seiskaluokalla on hyvä harrastaa toiminnallista matematiikkaa mittailemalla erikokoisten ympyröiden kehiä ja halkaisijoita ja vakuuttua kokemuksen kautta, että niiden suhde on mittaustarkkuuden rajoissa sama. Myöhemmin todetaan ympyrät keskenään yhdenmuotoisiksi ja saadaan verrantoa käyttäen tulos, jonka mukaan kehän suhde halkaisijaan yhdessä ympyrässä on sama kuin tämä suhde toisessa ympyrässä. Näin saadaan varmuus siitä, että kyseinen suhde on ympyrän koosta riippumaton vakio ja päädytään mittauksista riippumatta kehän pituuteen $p=\pi d=2\pi r$. Seuraavaksi on mietittävä, miten π voitaisiin laskea. Ympyrän kehän pituutta voi approksimoida ympyrän sisään piirretyn säännöllisen monikulmion kehällä. Ajattelemalla 1-säteisen ympyrän sisään säännöllinen kuusikulmio saadaan $\pi\approx 3$. Paremman likiarvon laskemiseksi johdetaan yleinen algoritmi. Osoitetaan Pythagoraan lauseen avulla, että jos 1-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion sivun pituus on a_n, niin $2n$-kulmion sivun pituus

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}},$$

jolloin $\pi \approx n \cdot a_{2n}$. Lähtemällä säännöllisestä kuusikulmiosta Arkhimedes määritti π:n likiarvoja periaatteessa tällä tavalla laskien 12-, 24-, 48- ja 96-kulmion sivun pituuden, ks. [4]. Laskimella päästään pidemmälle, ja palautuskaavan voi myös ohjelmoida. Kun π on näin saatu hallintaan, voidaan johtaa ympyrän pinta-ala. Eräässä peruskoulun oppikirjassa se on tehtykin jakamalla r-säteinen ympyrä suureksi määräksi samankokoisia pieniä sektoreita.

Pallon tilavuus kokeellisesti

Tennispallon tilavuuden laskemista mielenkiintoisempaa on pyrkiä perustelemaan pallon tilavuuden kaava. Yläkoulussa voidaan turvautua toiminnallisen matematiikan keinoihin eli tehdään mittauksia vaikkapa ryhmätyönä. Pallon tilavuus on ilmeisesti verrannollinen säteen kuutioon ja pyöreyden takia kertoimena on myös π samalla tavalla kuin ympyrän pinta-alan kaavassa. Voimme siis olettaa, että

$$V_{\text{pallo}} = k \cdot \pi r^3, \tag{1}$$

missä k on toistaiseksi tuntematon vakio. Otetaan tarkasteltavaksi sopivan kokoisia palloja. Mitataan niiden halkaisijat työntömitalla. Tilavuudet määritetään katsomalla pallojen mittalasissa syrjäyttämät vesimäärät. Koska sekä tilavuudet että säteet nyt tunnetaan, saadaan k ratkaistua jokaiselle pallolle yhtälöstä (1). Tarkalla työskentelyllä saataneen tulosten keskiarvoksi suunnilleen oikea arvo. Oppilaille on tietenkin kerrottava, että tilavuuden kaava johdetaan matemaattisemmin lukion integraalilaskennan kurssilla.

Pallon pinta-ala kokeellisesti

Pallon pinta-alan määrittäminen kokeellisesti onnistuisi parhaiten pingispallon avulla, jos olisi saatavilla samasta materiaalista valmistettua saman vahvuista tasomaista levyä. Mitataan aluksi pingispallon halkaisija d työntömitalla. Leikataan sitten levymäisestä materiaalista suorakulmio, jonka sivut ovat d ja πd. Jos mittaukset tehdään huolella, niin pallo ja suorakulmio painavat yhtä paljon. Niiden pinta-alat ovat siis samat. Suorakulmion pinta-ala on $\pi d^2 = 4\pi r^2$, mikä siis on myös pallon pinta-ala. Ympyrän ja pallon pinta-alojen välillä havaitaan hauska analogia:

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 \quad \text{ja} \quad A_{\text{pallo}} = \pi d^2.$$

Lisäksi havaitaan, että jos pallo asetetaan suoraan, ympyräpohjaiseen lieriöön, jonka vaippa ja pohjat sivuavat palloa, niin vaipan ja pallon pinta-alat ovat samat.

Pallon pinta-ala algebrallisesti

Kun pallon tilavuus tunnetaan, voidaan sen pinta-ala johtaa myös peruskoulun algebraa soveltaen. Tarkastellaan samankeskisiä palloja, joiden säteiden erotus on h. Olkoon isompi pallo r-säteinen jolloin pienemmän pallon säde on $r-h$. Pienemmän pallon pinta-ala A_h lähestyy isomman pallon pinta-alaa A, kun h lähestyy nollaa. Pallojen tilavuuksien erotus on pallon kuori, jonka paksuus on h. Ajatellaan kuori jaetuksi moneen hyvin pieneen osaan, jotka levitetään tasoon. Koska osat ovat pieniä, ne ovat lähes tasomaisia. Ne ovat sitä tarkemmin h:n korkuisia suoria lieriöitä, mitä pienempi h on. Niiden tilavuuksien summa on $A_h \cdot h$. Toisaalta tämä tilavuus on myös

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3.$$

Niinpä

$$A_h \cdot h = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi(r-h)^3,$$

joten

$$\begin{aligned}
A_h &= \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{r^3 - (r-h)^3}{h} \\
&= \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{3r^2h - 3rh^2 + h^3}{h} \\
&= \frac{4}{3}\,\pi\left(3r^2 - 3rh + h^2\right) \\
&= 4\pi r^2 + h \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi h - 4\pi r\right).
\end{aligned}$$

Selvästi

$$A_h \longrightarrow 4\pi r^2 = A, \quad \text{kun} \quad h \to 0.$$

Viitteet

[1] http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html

[2] http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1/trigonometriaa.pdf

[3] http://solmu.math.helsinki.fi/2012/3/induktio_ympyra_kartio_pallo.pdf

[4] http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/html/kreikka/index.html#arkhimedes