

Solmu

Matematiikkalehti
3/2014

<http://solmu.math.helsinki.fi>



Solmu 3/2014

ISSN-L 1458-8048

ISSN 1459-0395 (Painettu)

ISSN 1458-8048 (Verkkolehti)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)

00014 Helsingin yliopisto

<http://solmu.math.helsinki.fi>

Päätoimittaja:

Anne-Maria Ernvall-Hytönen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Toimitussihteeri:

Juha Ruokolainen, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Sähköposti:

toimitus@solmu.math.helsinki.fi

Toimittajat:

Pekka Alestalo, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Sirkka-Liisa Eriksson, professori, Matematiikan laitos, Tampereen teknillinen yliopisto

Aapo Halko, FT, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Markku Halmetoja, lehtori, Mäntän lukio

Camilla Hollanti, apulaisprofessori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Matti Lehtinen, dosentti, Helsingin yliopisto

Marjatta Näätänen, dosentti, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Heikki Pokela, tuntiopettaja, Tapiolan lukio

Antti Rasila, vanhempi yliopistonlehtori, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Mikko Sillanpää, professori, Matemaattisten tieteiden laitos ja Biologian laitos, Oulun yliopisto

Samuli Siltanen, professori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Kimmo Vehkalahti, yliopistonlehtori, tilastotiede, Sosiaalitieteiden laitos, Helsingin yliopisto

Esa Vesalainen, tutkijatohtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Tieteelliset asiantuntijat:

Heikki Apiola, dosentti, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu

Mika Koskenoja, yliopistonlehtori, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Liisa Näveri, FT, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

Graafinen avustaja:

Marjaana McBreen

Yliopistojen ja korkeakoulujen yhteyshenkilöt:

Ari Koistinen, FM, ari.koistinen@metropolia.fi, Metropolia Ammattikorkeakoulu

Juha Lehtbäck, tutkijatohtori, juha.lehrback@jyu.fi, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto

Jorma K. Mattila, professori, jorma.mattila@lut.fi, Sovelletun matematiikan laitos, Lappeenrannan teknillinen yliopisto

Jorma Merikoski, emeritusprofessori, jorma.merikoski@uta.fi, Informaatitieteiden yksikkö, Tampereen yliopisto

Matti Nuortio, tutkijatohtori, matti.nuortio@oulu.fi, Biocenter Oulu, Oulun yliopisto

Petri Rosendahl, assistentti, petri.rosendahl@utu.fi, Matematiikan laitos, Turun yliopisto

Antti Viholainen, tutkijatohtori, antti.viholainen@uef.fi, Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

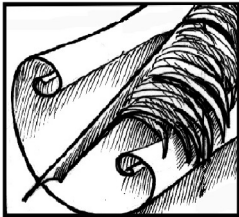
Numeroon 1/2015 tarkoitetut kirjoitukset pyydämme lähettämään 2.1.2015 mennessä.

Kiitämme taloudellisesta tuesta Jenny ja Antti Wihurin rahastoa.

Huom! Solmun paperiversio postitetaan vain niihin kouluihin, jotka ovat sitä erikseen pyytäneet. Toivomme, että lehteä kopioidaan kouluissa kaikille halukkaille.

Sisällys

Pääkirjoitus: Oppeja saksalaisilta jalkapallofaneilta (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	4
Todistetaanpa kosinilause (Matti Lehtinen).....	6
Harmoninen sarja (Pekka Alestalo).....	10
Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia (Anne-Maria Ernvall-Hytönen)	12
Tyhjää parempia perusteluja (Markku Halmetoja).....	16
Matematiikkaa muinaisuudesta – Itämaan tietäjien laskentoa (Matti Lehtinen)	18
Matematiikkaolympialaiset Afrikassa (Matti Lehtinen ja Joni Teräväinen)	22
Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Antalyassa, Turkissa, 10.–16.4.2014 (Anne-Maria Ernvall-Hytönen, Mirjam Kauppila ja Esa V. Vesalainen).....	24
Järkeä pinta-ala- ja tilavuusyksiköiden käsittelyyn (Vesa Linja-aho)	31
Kirja-arvio: Suppeasta suhteellisuusteoriasta seikkaperäisesti (Syksy Räsänen).....	33



Oppeja saksalaisilta jalkapallofaneilta

Pääkirjoitus

Olin kesällä kahdessa workshopissa Saksassa. Workshopit olivat joka suhteessa erinomaisia: esitelmät hyviä, järjestelyt pelasivat ja ihmiset olivat mukavia. Tutkimusajatuksiakin tuli. Saksa eli suurta jalkapallohuumaa: MM-kilpailut olivat käynnissä, ja Saksa etenevässä kovaa vauhtia kohti finaalia ja maailmanmestaruutta.

Kunnon matematiikkaturistina/-työmatkailijana keskustelin tietenkin ihmisten kanssa matematiikasta ja jalkapallosta. Jälkimmäiseen aiheeseen liittyvistä kommentteista kaksi jäi erityisen hyvin mieleen: Voiton eteen oli tehty ihan tuhottomasti hyvin systemaattista työtä. Vuodesta 2006 oli monin osin hiottu täsmälleen samaa joukkuetta. Toinen mielenkiintoinen kommentti oli se, että jalkapallovillitys johtuu osin siitä, että joukkue on erittäin epäsaksalainen. Ennen vuotta 2006 ei Saksaa oikein voinut kannattaa ilman ikäviä leimoja, mutta vuoden 2006 joukkue oli nuori, innokas ja epäsaksalainen, ja näin villitsi kaikki saksalaiset.

Tämän tekstin aihe on tietenkin matematiikka, ei jalkapallo, mutta pienin muutoksin yllämainitut kommentit jalkapalloon liittyen pätevät myös matematiikkaan.

Ensinnäkin, ”töitä on tehty systemaattisesti ja tehokkaasti vuosia”. Jokainen matematiikan tutkija, opettaja tai harrastaja tietää, että matematiikan osaaminen vaatii työtä. Tuhottomasti työtä. Oikoreittiä ei ole. Usein kuulee sanottavan, että ”eihän minulla tuohon ikinä lahjoja ollut, enkä siis voi oppia”. Kuitenkin itse asiassa on tutkittu, että osaamisesta hyvin pieni osa on lahjakkuutta ja loput vain raakaa työtä. Jotta sen

työn viitsii tehdä, tarvitaan motivaatio. Saksalaisilla se oli maailmanmestaruus. Tuollainen tavoite motivoi hyvin, mutta vastaavaa on ehkä hankala koulumaailmassa keksiä. Jos vanhemmat haluavat, että lapsi pärjää hyvin kokeissa, motivoi se ehkä vanhempia tarkistamaan, että lapsi on tehnyt läksyt, mutta ei motivoi oppilasta yrittämään. Tarvitaan jokin konkreettinen syy, miksi pitäisi tehdä töitä. Toisaalta edes maailmanmestaruus tai toivo maailmanmestaruudesta ei saa ihmistä tekemään sitä määrää työtä, minkä tuollainen tavoite vaatii, vaan lajia pitää rakastaa. Työhän ei todellisuudessa Saksan joukkueella ole alkanut vuonna 2006, vaan paljon aiemmin, kun pelaajat ovat ensimmäisen kerran palloon koskeneet tai nappikset jalkaan vetäneet. Rakkaus lajiin tai edes pikkuruinen kiinnostus matematiikkaan auttaa huomattavasti matematiikan opettelussa. Jos on innostunut, tekee töitä ikäänkuin huomaamatta, ja vahingossa voi ryhtyä pohtimaan matematiikkaa. Tällöin on helppo unohtaa, että töitä on tehty, ja saattaa helposti kiittää vain lahjakkuutta kaikista saavutuksista. Kiinnostusta tai innostusta tuskin tulee ilman onnistumisen elämyksiä. Monet hyötyvät, jos kerrotaan missä matematiikkaa voi käyttää. Konkreettisella selityksellä tässä tarkoitan ihan vaikka niinkin yksinkertaista selitystä, että ”jos osaat tämän todennäköisyyslaskun, niin voitat suuremmalla todennäköisyydellä kaverisi Yatzyssa/jossain pelissä, mitä nykyään pelataan”, enkä niinkään selitystä, että ”jos osaat tämän, niin osaat kahdenkymmenen vuoden päästä laskea asuntolainasi korot”. Jälkimmäinen syy on epäilemättä parempi syy opetella jotain, mutta mahdollisesti kauempana oppilaiden senhetkisestä elämästä, ja täten

vähemmän konkreettinen.

Annan vielä esimerkin työn määrän merkityksestä. Tietenkin argumenttini olisi vakuuttavampi, jos voisin antaa myös ilmeisiä esimerkkejä lahjakkaista ihmisistä, jotka kaatuivat työnteon vähyteen, mutta tämä ei valitettavasti onnistu. Annan siis vain esimerkin työn määrästä eräällä menestyneellä ihmisellä: Terence Tao on saanut Fieldsin mitalin, ja hän on erittäin tunnettu matemaatikko. Eräs ranskalainen professori kertoi tehtyään yhteistyötä Terence Taon kanssa, että tämä yhteistyö oli hänen elämänsä rankin. Kun he olivat illalla keskustelleet jostain tutkimusongelmasta, seuraavana aamuna Tao ilmestyi paikalle, kertoi hiukan laskeskelleensa ja näytti yön aikana tekemänsä laskut, jotka hän oli myös kirjoittanut puhtaaksi, ja jotka olivat noin kymmenen sivua tietokoneella puhtaaksikirjoitettuna. Tarina voi toki olla hieman liioiteltu tai väritetty, mutta pääidea lienee selvä: epätriviaali määrä työtä on tehty.

Toinen väite oli ”saksalaiset kannattavat Saksan joukkuetta, koska Saksan joukkue on niin epäsaksalainen”. Itse ainakin ymmärsin tämän viittaavan nimenomaan luonteeseen ja käytökseen, eikä puolalais- ja turkkilaisvahvistusten määrään. Matematiikalla ei tietenkään ole vastaavaa historiallista painolastia kuin Saksalla ja saksalaisilla. Tämä väite kuitenkin sopivin muutoksin soveltunee myös matematiikasta käytävään keskusteluun. Usein ainakin itse olen törmännyt kaikenlaisiin stereotyyppioihin matemaatikoista ja matematiikan harrastajista. Silmälasit minulla on, mutta muita tyypillisiä stereotyyppioita en myönnä toteuttavani. Tässä voisi ryhtyä pohtimaan, että mistä ihmeestä näitä kaikkia omituisia käsityksiä sikiää. Tästä ei kuitenkaan olisi yhtään mitään hyötyä.

Stereotyyppioista osa on epäilemättä huvittavia, mutta ne ovat myös ikäviä. Stereotyyppioiden viheliäisin piirre

on se, että ne ruokkivat itse itseään. Hyvin tunnettu esimerkki stereotyyppioista on se, että matemaatikoiden automaattisesti kuvitellaan olevan miehiä. Kaikkia naisia tai tyttöjä tämä ei tietenkään häiritse, mutta osa kuvittelee, että matematiikka ei heitä varten ole. Voi vain miettiä, mitä kaikkia muita stereotyyppioita on, ja mitä ne aiheuttavat.

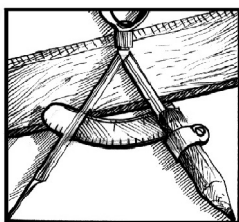
Koska on hyödytöntä pohtia stereotyyppioiden alkupe-
rää, on käännäyttävä toisen vaihtoehdon puoleen: katsottava peiliin ja pohdittava olisiko jotain mitä matematiikan harrastajat voisivat tehdä asian parantamiseksi. Paikoin on varmasti kovin vähän tehtävissä. Ilmeinen tapa muuttaa stereotyyppioita olisi tietenkin saada julkisuuteen riittävä määrä stereotyyppioita rikkovia matemaatikkoja. Vaikka Maryam Mirzakhani ensimmäisenä iranilaisena ja ensimmäisenä naisena koskaan sai Fieldsin mitalin tänä kesänä, ei tämä strategia kovin helposti ole kenen tahansa toteutettavissa. Lisäksi mielipiteet ja käsitykset muuttuvat usein hitaasti. On kuitenkin jotain, mihin moni matematiikan harrastaja voi kiinnittää huomiota: liian usein matematiikasta innostuneet toimivat joko niin kuin olettaisivat kaikkien muidenkin olevan matematiikasta innostuneita tai niin kuin kaikkien muidenkin kuuluisi olla matematiikasta innostuneita, tai vaihtoehtoisesti suorastaan häpeillen. Kumpikaan ääripää ei ole hyvä. Kumpikaan ääripää ei ole hyvää mainosta. Kultainen keskitie on paljon parempi: ollaan ylpeitä omista tekemisistä ja kunnioitetaan ja kannustetaan muita.

Hyvää ja onnellista alkanutta lukuvuotta kaikille!

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

uusi päätoimittaja

PS. Jos kaipaatte lahjakkaille lisämateriaalia koulu-
luokkiin, niin vilkaiskaa diplomitehtäviä ja kilpailutehtäviä!



Todistetaanpa kosinilause

Matti Lehtinen

Helsingin yliopisto

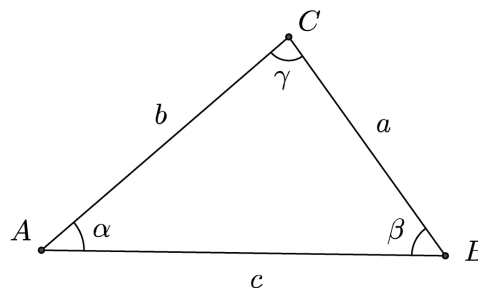
Matematiikan järjestelmä rakentuu todistuksista. Todistukset perustuvat joko käsitteiden määritelmiin tai niistä tehtyihin perusoletuksiin, aksioomiin, tai asioihin, jotka jo on todistettu oikeiksi. Perustelu on oikea, jos se nojautuu oikeiksi hyväksyttyihin asioihin ja jos sen logiikka on kunnossa.

Joskus on kuitenkin mielenkiintoista yrittää perustella jokin asia mahdollisimman yksinkertaisin oletuksin. Tällaista voi verrata vaikkapa jonkin esineen, sanotaan vaikka pienoismallin tekemiseen. Saattaa olla mahdollista hankkia rakennussarja, jossa melkein kaikki on jo valmiina, vain muutama kiinnitys puuttuu, tai esineen voi yrittää rakentaa melko suoraan perusraaka-aineita käyttäen. Jälkimmäinen tapa on työläämpi, mutta saattaa olla palkitsevampi.

Silmiini sattui hiljattain *American Mathematical Monthly* -lehden helmikuun 2014 numero. Siinä on *Miles Dillon Edwards* -nimisen, ilmeisesti melko nuoren matemaatikon pikku kirjoitus, jonka otsikko on ”Kosinilauseen ehkä uusi todistus”. Kun näin perustietoihin kuuluvalla asialle löytyy – ehkä – uusi todistus, voi olla aihetta katsella tätä kosinilauseetta ja sen todistamista hiukan muutenkin.

Geometrian perusasioita on se, että kolmiot, ABC ja $A'B'C'$, joissa on kaksi paria yhtä pitkiä sivuja, esimerkiksi $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$ ja näiden sivujen välissä yhtä suuri kulma, siis $\angle BAC = \angle B'A'C'$, ovat yhteneviä. Siis välttämättä myös $BC = B'C'$. Mutta tähän merkitsee sitä, että aina, kun tiedetään AB :n

ja AC :n pituudet ja kulman $\angle BAC$ suuruus, tiedetään myös BC :n pituus. Mutta miten näistä kolmesta suureesta, pituuksista $AB = c$ ja $AC = b$ sekä kulmasta $\angle BAC = \alpha$ tuo $BC = a$ saadaan?



Kosini ja sini

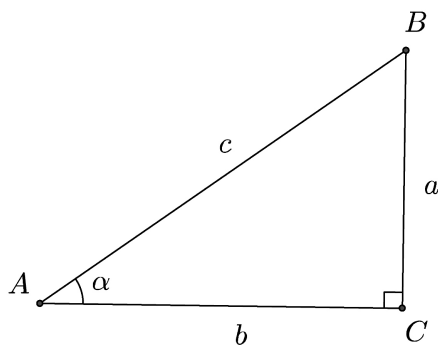
Asia ei ole aivan yksinkertainen. Osoittautuu, että kulman koon tietäminen sinänsä ei oikein riitä. Tarvitaan apusuure, joka liittyy kulmaan, mutta jonka arvo riippuu kulmasta oikeastaan aika monimutkaisella tavalla. Suure on kulman α kosini, $\cos \alpha$. Kosini, niin kuin sen sukulainen sini, perustuu kolmioiden yhdenmuotoisuuteen. Kolmiot, joiden kaikki kulmat ovat pareittain yhtä suuret, ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että kolmioiden toisiaan vastaavien kolmen sivuparin pituuksien suhde on sama.

Kaikki sellaiset suorakulmaiset kolmiot, ABC , joissa $\angle BCA$ on suora kulma ja $\angle BAC = \alpha$ ovat keskenään

yhdenmuotoisia. Niinpä kaikissa tällaisissa kolmioissa suhteet

$$\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

ovat samat. Tämä merkitsee sitä, että suhteet riippuvat vain α :sta, eli ovat α :n funktioita. Suhteista ensimmäistä kutsutaan α :n kosiniksi ja jälkimmäistä α :n siniksi. Suhteille ovat vakiintuneet merkinnät $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$. Koska $0 < \alpha < 90^\circ$, tämä perusmääritelmä koskee vain teräviä kulmia. Perusmääritelmä ei kerro mitään siitä, olisiko merkinnöillä $\sin \alpha$ tai $\cos \alpha$ jokin tarkoitus silloinkin, kun α on suora tai tylppä kulma.



Kun ja jos suureet $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$ tiedetään, niin suorakulmaisen kolmion sivut a ja b eli sen kateetit voidaan laskea kolmion hypotenuusasta c : $a = c \sin \alpha$ ja $b = c \cos \alpha$. Ongelmaksi jää se, mistä voitaisiin tietää nämä tarvittavat funktionarvot $\cos \alpha$ ja $\sin \alpha$. Tähän on kehitetty ratkaisuja. Aikojen kuluessa on eri keinoin laskettu taulukkoja, joista arvot on saattanut lukea. Laskeminen ei ole perustunut siihen, että olisi piirretty erikokoisia kulmia ja mitailtu tarvittavia pituuksia. Yksinkertaiset geometriset havainnot tekevät mahdolliseksi ilmoittaa suoraan eräiden ”helppojen” kulmien kosinit ja sinit, ja toisaalta on mahdollista selvittää esimerkiksi puolikkaan kulman, ja kulmien summan ja erotuksen sinit ja kosinit alkuperäisten kulmien sinien ja kosinien lausekkeina. Keinoja yhdistelemällä saatettiin laskea kaikenkokoisten kulmien sinit ja kosinit. Ja 1600-luvun lopulta alkaen on ollut mahdollista laskea minkä hyvänsä kulman sini tai kosini suoraan kulman suuruuden mukaan määräytyvän päättymättömän sarjan summana. Jos kulman koko x ilmoitetaan radiaaneina eli suureena, joka saadaan kertomalla kulman suuruus asteina luvulla $\frac{\pi}{180}$, niin

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

ja

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

(Tässä $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$). Elektroniset laskulaitteet on ohjelmoitu toteuttamaan jokin tällainen laskutoimitus riittävällä tarkkuudella, kun käyttäjä syöttää kulman suuruuden ja painaa asianomaista nappulaa.

Kosinilause Pythagoraan lauseesta

Palataan alkuperäiseen ongelmaamme. Oppikirjoissamme kosinilause johdetaan tavallisesti Pythagoraan lauseesta. Oletetaan, että kulma α on terävä. Haetaan suoralta AB piste D niin, että CD ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jos myös $\angle ABC$ on terävä kulma, D on janalla AB , mutta jos $\angle ABC$ on tylppä, D on janan AB jatkeella. (Jos $\angle ABC$ on suora, niin $D = B$, mutta suorakulmaiset kolmiot hallitaan, joten tämä vaihtoehto ei meitä nyt kiinnosta.) Joka tapauksessa kolmiot ADC ja BDC ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kateetti $CD = h$. Lisäksi $AD = b \cos \alpha$. Nyt joko $BD = c - b \cos \alpha$ (kun $\angle ABC$ on terävä) tai $BD = b \cos \alpha - c$ (kun $\angle ABC$ on tylppä). Suure BD^2 on siis aina $(c - b \cos \alpha)^2$. Kun h^2 lasketaan Pythagoraan lauseen avulla molemmista kolmioista ja asetetaan tulokset yhtä suuriksi, saadaan

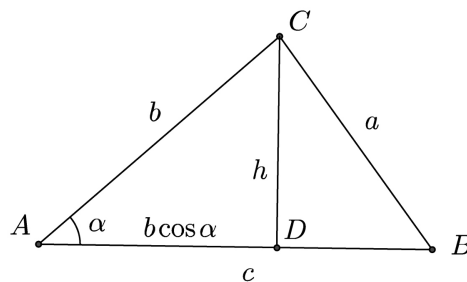
$$b^2 - (b \cos \alpha)^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2.$$

Yksinkertainen sievennys tekee tästä yhtälöstä yhtälön

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cos \alpha$$

eli

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (1)$$

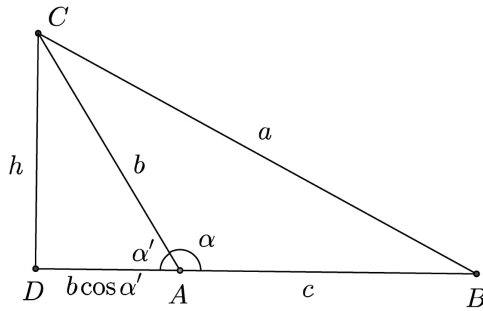


Jos α on suora kulma, pätee Pythagoraan lause, jonka mukaan $a^2 = b^2 + c^2$. Tämä on hyvä syy laajentaa kosinin määritelmä koskemaan suoraakin kulmaa: $\cos 90^\circ = 0$. Mutta entä jos α on tylppä? Silloin α :lla on terävä vieruskulma α' . Valitaan taas BA :n jatkeelta piste D niin, että $CD \perp BA$. Nyt syntyy kaksi suorakulmaista kolmiota CDB ja CDA . Kolmioilla on yhteinen kateetti $CD = h$ ja $DA = b \cos \alpha'$. Jos jälleen lasketaan h^2 Pythagoraan lauseen avulla molemmista kolmioista, saadaan

$$b^2 - (b \cos \alpha')^2 = a^2 - (c + b \cos \alpha')^2.$$

Tämä voidaan sieventää samoin kuin edellä, ja tulos on

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha'.$$



Yhtälö (1) saadaan aikaan, kun sovitaan, että tylpän kulman α kosini on sen terävän vieruskulman α' kosinin vastaluku. Jos lähdemme määrittelemään trigonometrisia funktioita $\sin$ ja $\cos$ suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteina (eikä esimerkiksi yksikköympyrän pisteiden koordinaatteina), niin kosinilause on paras perustelu sopimukselle $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Irtoaa se sinilauseestakin

Suomenkielisessä Wikipediassa oleva kosinilauseeseen todistus perustuu (ainakin tätä kirjoitettaessa) Pythagoraan lauseeseen suunnilleen samoin kuin edellä esitettiin. Tunsin kerran houkutusta korvata todistus seuraavalla, itseäni enemmän viehättävällä päättelyllä, jossa Pythagoraan lause on miltei näkymättömissä. Sen sijaan tueksi tarvitaan *sinilause*.

Sinilause perustellaan oppikirjoissa yleensä laskemalla kolmion pinta-ala kahdella eri tavalla:

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha,$$

mistä seuraa heti

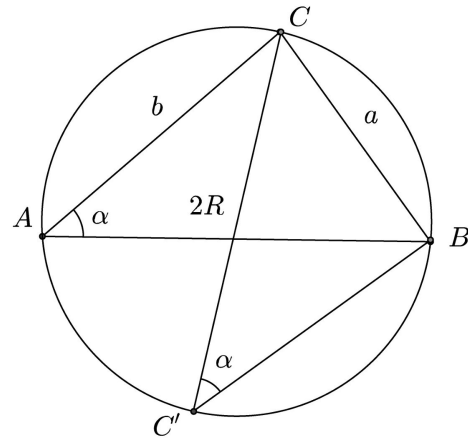
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kun pinta-ala ei kuitenkaan ole kovin primitiivinen käsite, niin perustelu, joka välttää tämän, mutta käyttää hyväksi melkein suoraan tasakylkisen kolmion perusominaisuuteen nojaavaa kehäkulmalauseetta, voisi olla mukava.

Olkoon ensin α kolmion ABC terävä kulma. Kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Olkoon sen säde R . Jos CC' on tämän ympyrän halkaisija, niin $\angle C'BC$ on suora kulma. (Tämä on Thaleen lause, puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.) Kehäkulmalauseeseen perusteella $\angle BAC = \angle BC'C$. Suorakulmaisesta kolmiosta $CC'B$ luetaan suoraan, että $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$. Siis

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

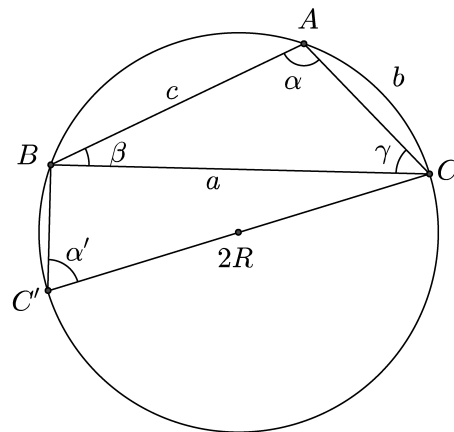
Samaan tulokseen päästäisiin lähtemällä mistä tahansa kolmion ABC terävästä kulmasta.



Entä jos α on suora tai tylppä? Sinilause pysyy voimassa, jos sovitaan, että $\sin 90^\circ = 1$. Jos α on tylppä, niin $ABC'C$ on ympyrän sisään piirretty nelikulmio eli jännenelikulmio. Yksinkertainen kehäkulmalauseeseen seuraus kertoo, että jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa vieruskulmia. Siis $\angle BC'C = \alpha'$ on kulman α vieruskulma. Mutta suorakulmaisesta kolmiosta $CC'B$ nähdään, että

$$\sin \alpha' = \frac{a}{2R}.$$

Sinilause saadaan olemaan voimassa myös tylpille kulmille, kun sovitaan, että tylpän kulman sini on sama kuin sen vieruskulman sini.



Palataan taas kosinilauseeseen. Kolmiossa on $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$, ja kun tylpän kulman kosini määritellään niin kuin yllä, niin tämä yhtälö pätee riippumatta siitä, ovatko α ja β teräviä tai tylppiä. Siis $(a \cos \beta)^2 = (c - b \cos \alpha)^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha + (b \cos \alpha)^2$. Mutta sinilauseen perusteella $(a \sin \beta)^2 = (b \sin \alpha)^2$. Kun edelliset kaksi yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$a^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = c^2 + b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha.$$

Kosinilause on tässä, sillä $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ kaikilla x . Mutta hetkinen! Mistä viimeinen yhtälö? Se on juuri Pythagoraan lause, trigonometrisessa muodossa.

Sinilauseeseen perustuva kosinilause ei miellyttänyt Wikipediaa. Se poistettiin varsin pian ja korvattiin aikaisemmalla versiolla.

Miles Dillon Edwardsin todistus

Alussa mainittu uusi todistus ei tarvitse ollenkaan Pythagoraan lausetta. Se kulkee seuraavasti. Valitaan suoralta BC pisteet D ja E niin, että $\angle ADB = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$. (Jos α on terävä, pisteet ovat eri järjestyksessä kuin kuvassa.) Olkoon vielä AA' kolmion korkeusjana. Kolmioissa ADB ja CAB on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Sama pätee kolmioon AEC ja BAC . Jos $BD = x$ ja $EC = y$, niin yhdenmuotoisuuksista seuraa

$$\frac{x}{c} = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{a}.$$

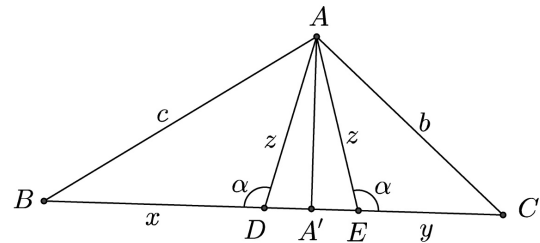
Jos vielä $AD = AE = z$ (kolmio ADE on tasakylkinen), niin

$$\frac{z}{c} = \frac{b}{a}.$$

Jos kiinnitetään suoran BC suunta, niin (riippumatta pisteiden järjestyksestä)

$$\begin{aligned} a = BC &= BD + DE + EC \\ &= x - 2z \cos \alpha + y = \frac{c^2}{a} - 2 \frac{bc}{a} \cos \alpha + \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Kosinilause saadaan heti, kun yhtälö kerrotaan a :lla.



Entä vektorit?

Mutta eikö kosinilauseen yksinkertaisin todistus perustu vektorilaskentaan? Jos $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{b}$ ja $\vec{BC} = \vec{a}$, niin $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ ja $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$, $b^2 = \vec{b} \cdot \vec{b}$, $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$. Siis

$$\begin{aligned} a^2 &= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2. \end{aligned}$$

Toki näin, mutta kun vektoreille määritellään pistetulo asettamalla $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$, niin osittelulaki, jota edellinen laskutoimitus hyödynsi, tarvitsee perustelun. Se ei tason vektorien tapauksessa ole kovin vaikea, mutta koulukurssissa asia yleensä ohitetaan vaieten.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta <http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html> löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)

Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)

Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)

Geometria (K. Väisälä)

Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)

Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)

Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Nääänen)

Algebra (K. Väisälä)

Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

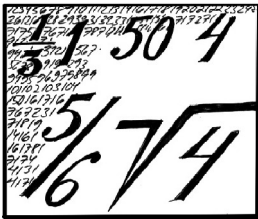
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)

Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)

Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)

Matematiikan historia (Matti Lehtinen)

Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)



Harmoninen sarja

Pekka Alestalo

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Aalto-yliopisto

Lukiomatematiikan sarjoja koskeva osuus rajoittuu käytännössä geometrisiin summiin ja niiden raja-arvoina saataviin geometrisiin sarjoihin. Geometrisen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

onkin siinä mielessä harvinainen ja hyödyllinen sarja, että sen osasummille voidaan johtaa yksinkertainen lauseke:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n aq^k &= a + aq + aq^2 + \dots + aq^n \\ &= \frac{a(1 - q^{n+1})}{1 - q}, \text{ kun } q \neq 1. \end{aligned}$$

Tämän avulla sarjan summaksi eli osasummien raja-arvoksi saadaan lauseke

$$\frac{a}{1 - q},$$

kun $-1 < q < 1$ tai $a = 0$.

Toisaalta yleisempi sarjojen suppenemisen käsittely ei vaadi juurikaan enempää: sarja suppenee, jos sen osasummilla on (äärellinen) raja-arvo. Lisäksi pelkkään geometriseen sarjaan rajoittuminen johtaa melko yleiseen virhepäätelmään, josta näyttää olevan vaikea luopua edes 1. vuoden yliopistotason matematiikan kursien aikana. Geometrisen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen yleinen termi aq^k lähestyy nollaa, kun

$k \rightarrow \infty$. Tämä ehto ei kuitenkaan takaa sarjan suppenemistä yleisemmässä tilanteessa.

Tunnetuin esimerkki on harmoninen sarja, jolla tarkoitetaan ääretöntä summaa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Harmonisen sarjan yleinen termi $1/k$ lähestyy nollaa, mutta siitä huolimatta sarjan summa ei ole äärellinen! Tämän kirjoituksen tarkoitus on esittää lyhyt alkeellinen perustelu tälle väitteelle. Suurin ongelma harmonisen sarjan käsittelyssä on se, ettei osasummille eli *harmonisille luvuille*

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

voida johtaa sellaista yksinkertaista lauseketta, jonka raja-arvoa voitaisiin suoraan tutkia. Päätelyn esitiedoiksi riittänee jonkinlainen intuitiivinen käsitys lukujonon suppenemisestä. Kirjoituksen lopussa on kaksi tehtävää, joissa aihetta käsitellään kahdella eri tavalla.

Lause. Harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu, vaikka sarjan yleisen termin raja-arvo on nolla.

PERUSTELU. Sarjan kahdelle peräkkäiselle termille pätee

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

kaikilla $k \geq 2$. Tarkastellaan $2n$ ensimmäisen termin summaa H_{2n} ja ryhmitellään kaksi peräkkäistä termiä yhteen toisesta parista alkaen. Arvoilla $n \geq 2$ saadaan yllä mainitun epäyhtälön avulla (k on aina parillinen)

$$\begin{aligned} H_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \\ &\quad \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \cdots + \frac{2}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= H_n + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

koska toinen $1/2$ -termeistä jää ylimääräiseksi. Kun siis summan termien määrä kaksinkertaistuu, niin summan arvo kasvaa luvulla $1/2$, eikä summien raja-arvo voi olla äärellinen. Hieman täsmällisemmin: Jos osasummat H_n suppenevat kohti reaali lukua H , niin parillisilla osasummilla H_{2n} on sama raja-arvo ja yllä olevan perusteella

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{2n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(H_n + \frac{1}{2}\right) = H + \frac{1}{2}.$$

Tämä on ristiriita, joten sarjan osasummat kasvavat kohti ääretöntä.

Huomautus. Koska $H_1 = 1$, niin yllä olevasta epäyhtälöstä seuraa (intuitiivisellä päättelyllä tai matemaattisella induktiolla) myös arvio

$$H_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}. \quad (1)$$

Tähän epäyhtälöön perustuu vanhin tunnettu päättely harmonisen sarjan hajaantumisesta; vrt. tehtävä 1.

Todettakoon vielä lopuksi, että integraalilaskennan avulla voidaan johtaa approksimaatio $H_n \approx \ln n$. Tähän palataan myöhemmissä Solmun numeroissa.

Tehtävä 1. Perustele epäyhtälö (1) suoraan ryhmittelemällä osasumman termit peräkkäisiin ryhmiin (toisesta termistä $1/2$ alkaen), joiden pituudet ovat $1, 2, 4, 8, \dots$ ja 2^{n-1} . Osoita, että kunkin ryhmän summa on vähintään $1/2$. Tämä päättely on peräisin Nicole Oresmelta (1323–1382).

Tehtävä 2. Osoita, että

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{3}{k}$$

kaikilla $k \geq 2$. Päättely tämän avulla, että $H_{3n+1} > H_n + 1$ kaikilla $n \geq 1$. Tämä päättely on peräisin Pietro Mengolilta (1626–1686).

Kiitokset: Kiitän Markku Halmetojaa ja Matti Lehtistä viitteisiin ja historiaan liittyvistä kommentteista.

Lisätietoja ja vihjeitä tehtävien ratkaisuihin seuraavista linkeistä:

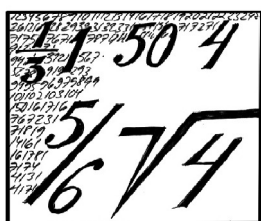
Oresme: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Oresme.html>

Mengoli: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mengoli.html>

Katso myös J. Michael Steele: The Cauchy-Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Cambridge University Press, 2004, s. 99.

Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics))

Pekka Alestalo: Tiiliä pinoon <http://solmu.math.helsinki.fi/2010/2/tiilet.pdf>



Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tyypillisesti ensin ihmiset törmäävät kokonaislukuihin, eli lukuihin $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Omenoita on kolme. Kirjoja on laukussa neljä. Hyvin nopeasti myös tutustuu rationaalilukuihin, eli lukuihin, jotka voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä: Tyypillisesti syntymäpäiväkakkuja on yksi, mutta syöjiä monta. Tällöin kristillisen tasajaon nimissä kukin syöjä saa esimerkiksi viidesosan kakusta. Mikäli taas kakkua jakaa huijari, voi käydä vaikkapa niin, että yksi saa kolme viidesosaa, ja muut neljä vain yhden kymmenesosan kakkua nensä kohti.

Erityyppiset luvut eivät kuitenkaan lopu vielä tähän: On ilmeistä, että jos neliönmallisen syntymäpäiväkakun leikkaa neljään osaan sivujen suuntaisesti muodostaen neljä pientä neliötä, joutuu tekemään vähemmän työtä kuin jos leikkaa kakun neljään osaan vastakkaisesta kulmasta vastakkaiseen kulmaan edeten. Kysymys tietenkin kuuluu: Kuinka paljon ylimääräistä työtä jälkimmäisessä mallissa joutuu tekemään? Osoittautuu, että työtä pitää tehdä $\sqrt{2}$ -kertainen määrä. Luku $\sqrt{2}$ on niin kutsuttu algebrallinen irrationaaliluku, eli sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Se, että se on algebrallinen, tarkoittaa sitä, että se voidaan esittää kokonaislukukertoimisen polynomin juurena (tarkasti ottaen polynomin $x^2 - 2$ juurena).

Mitä löytyy tämän jälkeen? Joko luvut loppuvat, voidaanko kaikki lajitella näihin kategorioihin? Vastaus löytyy tarkastelemalla jälleen syntymäpäiväkakkuja,

tällä kertaa perinteikästä ympyrälieriön mallista kakkua. Kakkuvuokien koot kerrotaan tyypillisesti halkaisijan avulla: Kakkuvuoan läpimitta on esimerkiksi 23 cm. Jos kakkuvuoan läpimitta on 23 cm, niin kuinka pitkä pätkä tarvitaan lakritsia, jos se halutaan kietoa kakun ympäri? Tai toisaalta, mikä on lakritsin pituuden ja kakun halkaisijan suhde? Tätä lukua kutsutaan π :ksi, ja se on niin kutsuttu transkendenttinen luku, eli sitä ei voi esittää paitsi kokonaislukujen osamääränä, ei edes minkään kokonaislukukertoimisen polynomin juurena.

Ilmetellään seuraavaksi näitä käsitteitä hieman tarkemmin.

Rationaalisuus vs. irrationaalisuus

Koska kokonaisluvut tuskin enempää puheita tarvitsevat, siirrytään heti pohtimaan, miten irrationaaliluvut voi erottaa rationaaliluvuista.

Niin kutsuttu todistus vastaesimerkin kautta on yleinen menetelmä. Toisinaan on hyvin helppo osoittaa, että luku ei voi olla rationaalinen. Otetaan ensimmäiseksi esimerkiksi klassikko:

Esimerkki 1. Osoitetaan, että luku $\sqrt{2}$ ei ole rationaalinen.

Tehdään vastaoletus ja väitetään, että $\sqrt{2}$ on rationaalinen. Tällöin voidaan kirjoittaa $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat kokonaislukuja, $s \neq 0$ ja $\text{sy}(r,s) = 1$. Neliöimällä saadaan

$$2 = \frac{r^2}{s^2},$$

eli $r^2 = 2s^2$. Huomataan siis, että luku r on parillinen. Kirjoitetaan $r = 2r_1$, jolloin

$$4r_1^2 = 2s^2,$$

eli $s^2 = 2r_1^2$, josta huomaammekin, että myös s on parillinen. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska oletimme, että $\text{sy}(r,s) = 1$, eli korkeintaan toinen luvuista r ja s voi olla parillinen.

Otetaan nyt muutama harjoitustehtävä pohdittavaksi ennen kuin siirrytään asiassa eteenpäin:

Harjoitustehtävä 1. Osoita, että $\sqrt{3}$ on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 2. Osoita, että $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 3. Selvästi $\sqrt{9} = 3$ on rationaalinen, eli se ei ole irrationaalinen. Mikäli ylläolevalla todistuksella siis yrittäisi osoittaa luvun $\sqrt{9} = 3$ irrationaaliseksi, menisi todistus jossain metsään. Missä?

Rationaalisuus vs. irrationaalisuus, take II: syvällisempää asiaa

Neperin luku $e \approx 2,718281828$ on merkityksellisessä asemassa analyysissä esimerkiksi siksi, että funktion e^x derivaatta on funktio itse. Hermite on todistanut, että luku on itse asiassa transkendenttinen. Koska transkendenttisuustodistus tälle luvulle on varsin haastava, jätetään se väliin, ja keskitytään osoittamaan luku irrationaaliseksi.

Lause 2. Luku $e = 2,718281828\dots$ on irrationaalinen.

Todistus jäljittelee lähde [2].

Todistus. Todistus lähtee jälleen liikkeelle vastaoletuksesta: $e = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja ja $s > 0$.

Luku e voidaan esittää tai määritellä usealla tavalla. Eräs tapa on esittää se raja-arvona

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Todistuksen kannalta on parempi hyödyntää funktion e^x Taylorin kehittämää, eli esittää luku e sarjana

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Jaetaan tämä sarja nyt kahteen osaan jakamalla kohdasta N (tässä luku N on positiivinen kokonaisluku):

$$e = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Lavennetaan puolittain luvulla $N!s$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} N!es &= N!s \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= s \sum_{n=0}^N N(N-1)\cdots(n+1) + N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \end{aligned} \quad (1)$$

Huomataan nyt, että luku

$$s \sum_{n=0}^N N(N-1)\cdots(n+1)$$

on kokonaisluku. Toisaalta, oletuksen mukaan $e = \frac{r}{s}$, joten $se = r$, josta saadaan $N!es = N!r$. Koska $N!r$ on kokonaisluku, on myös luvun $N!es$ oltava kokonaisluku. Yhtälön (1) nojalla on siis myös luvun

$$N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

oltava kokonaisluku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N . Osoitetaan seuraavaksi, että näin ei voi olla. Tehdään tämä arvioimalla lausekkeen kokoa. Selvästi lauseke on vähintään yhtä suuri kuin sen ensimmäinen termi, eli pätee

$$0 < \frac{s}{N+1} < N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Jos nyt pystymme rajoittamaan lausekkeen koon ylhäältä päin luvulla yksi, niin olemme valmiit, sillä lukujen nolla ja yksi välissä ei ole kokonaislukuja. Arvioidaan nyt:

$$\begin{aligned} N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= N! \left(\frac{s}{(N+1)!} + \frac{s}{(N+2)!} + \cdots \right) \\ &= \frac{s}{N+1} + \frac{s}{(N+1)(N+2)} + \frac{s}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \cdots \\ &< \frac{s}{N+1} + \frac{s}{(N+1)^2} + \frac{s}{(N+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{s}{N+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{s}{N} < 1, \end{aligned}$$

kun luku N on riittävän suuri. Tämä on ristiriita, sillä jos luku e olisi rationaaliluku, olisi tämän luvun oltava kokonaisluku kaikilla epänegatiivisilla kokonaisluvuilla N , ja näin ei selvästikään ole. On saavutettu ristiriita. Luku e on siis irrationaalinen. $\square$

Tähän väliin sopivat jälleen harjoitustehtävät ennen kuin siirrytään algebrallisiin ja transkendenttisiin lukuihin. Näiden tehtävien tarkoituksena on osoittaa, että myös luku e^2 on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 4. Totea, että jos luku e^2 on rationaaliluku, niin on oltava olemassa kokonaisluvut r ja s , joilla

$$se = re^{-1}. \quad (2)$$

Kirjoita nyt lukujen e ja e^{-1} esitykset Taylorin sarjan avulla ja sijoita ne yhtälöön (2).

Harjoitustehtävä 5. Tarkastele lukujen e ja e^{-1} Taylorin esityksiä. Lavenna esitykset sopivasti ja katkaise ne sopivasta kohdasta saadaksesi yhtälö (2) muotoon

$$\text{kokonaisluku} = \text{kokonaisluku} + \text{jotain hyvin pientä}.$$

Harjoitustehtävä 6. Osoita, että termi ”jotain hyvin pientä” on niin pieni, että saat ristiriidan. Tee johtopäätös, että luku e^2 ei voi olla rationaalinen.

Algebrallisia ja transkendenttisiä lukuja

Algebrallisiksi luvuiksi kutsutaan sellaisia lukuja, jotka ovat jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin juuria.

Ensimmäinen kriittinen havainto on, että algebralliset luvut voivat olla rationaalisia tai irrationaalisia. Rationaaliluku $\frac{r}{s}$ on nimittäin polynomin $sx - r$ juuri. Toisaalta esimerkiksi luku $\sqrt{2}$ on edellä osoitettu irrationaaliseksi, ja koska se on polynomin $x^2 - 2$ juuri, on se myös algebrallinen. Lisäksi huomataan, että ensimmäisen asteen kokonaiskertomisten polynomien juuret ovat rationaalisia, eli jos luku on algebrallinen, kokonaislukukertoimisen polynomin juuri, ja tiedetään, että matalin polynomin aste, jolla näin voi käydä on $d > 1$, niin luku on irrationaalinen.

Yleisesti ottaen luvun osoittaminen transkendenttiseksi on ihan tuhohtoman hankalaa. Koska algebrallisia lukuja on vain numeroituva määrä ja transkendenttisiä ylinumeroituva määrä (näiden asioiden todistaminen on ihan toisen tekstin aihe), on jossain mielessä melkein kaikkien lukujen oltava transkendenttisiä. Todistaminen vain on hyvin haastavaa.

Periaatteessa algebralliseksi osoittaminen on suoraviivaista: annetaan polynomi, jonka juuri luku on. Kuitenkin, jos tämän polynomin aste on hyvin suuri, ei tämäkään ole helppoa. Transkendenttiseksi osoittamiseen ei ole mitään tällaista selkeää ja suoraviivaista proseduuria. Ei myöskään voi sanoa, että koska polynomia ei tunnu löytyvän, ei luku taida olla algebrallinen, koska polynomi voi aina olla vain vielä hieman mutkikkaampi.

Niin kutsuttu Liouvillen luku on osoitettavissa transkendenttiseksi siedettävällä vaivalla. Tarkastellaan nyt tätä lukua. Liouvillen luku on määritelty sarjalla

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,11000100000000000000000010000 \dots$$

Sarjan määrittelevä summa suppenee hyvin nopeasti, eli seuraava termi on aina huomattavasti pienempi kuin edellinen termi. Tämän vuoksi Liouvillen luvun transkendenttisyys on osoitettavissa varsin järkevällä vaivalla.

Lause 3. *Liouvillen luku ℓ on transkendenttinen.*

Todistus on yhdistelty lähteestä [1].

Todistus. Tehdään vastaoletus: Liouvillen luku on algebrallinen, ja matalinta astetta oleva kokonaiskertomisen polynomi, jonka juuri se on, on astetta d . Koska Liouvillen luku ei ole rationaalinen (Miksi ei ole? Tämä on harjoitustehtävänä.), on pädetävä $d > 1$. Se on siis polynomin

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (3)$$

juuri, eli $P(\ell) = 0$. Polynomilla P ei ole rationaalisia nollakohtia. (Miksi ei ole? Tämä on harjoitustehtävä.) Erityisesti siis pätee

$$\begin{aligned} 0 \neq P\left(\frac{r}{s}\right) &= a_d \left(\frac{r}{s}\right)^d + a_{d-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{d-1} + \dots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 \\ &= \frac{a_d r^d + a_{d-1} r^{d-1} s + \dots + a_1 r s^{d-1} + a_0 s^d}{s^d}, \end{aligned}$$

kun $\frac{r}{s}$ on rationaaliluku. Siispä

$$a_d r^d + a_{d-1} r^{d-1} s + \dots + a_1 r s^{d-1} + a_0 s^d = N \geq 1,$$

missä N on kokonaisluku. Koska $P(\ell) = 0$, pätee selvästi

$$\left| P(\ell) - P\left(\frac{r}{s}\right) \right| = \left| P\left(\frac{r}{s}\right) \right| \geq \frac{1}{s^d}. \quad (4)$$

Analyysin väliarvolauseen nojalla

$$P(\ell) - P\left(\frac{r}{s}\right) = P'(\xi) \left(\ell - \frac{r}{s} \right), \quad (5)$$

missä ξ on jokin luku lukujen ℓ ja $\frac{r}{s}$ välissä. Lisäksi $P'(\xi) \neq 0$, sillä $P(\ell) \neq P\left(\frac{r}{s}\right)$. Oletetaan nyt, että $\left| \ell - \frac{r}{s} \right| \leq 1$ (tällaisia rationaalilukuja on varmasti olemassa), jolloin $|\ell - \xi| \leq 1$, sillä oletimme luvun ξ olevan lukujen ℓ ja $\frac{r}{s}$ välissä. Arvioidaan nyt tämän avulla lukua $P(\xi)$. On pädetävä

$$\ell - 1 \leq \xi \leq \ell + 1,$$

joten

$$|P'(\xi)| \leq \max \{|P'(x)| : \ell - 1 \leq x \leq \ell + 1\} = M.$$

Nyt huomion arvoista on se, että tämä M ei riipu lainkaan rationaaliluvun $\frac{r}{s}$ valinnasta, vaan ainoastaan

Liouvillen luvusta ℓ ja polynomista, jonka juurena väitimme (vasta oletuksena) sen olevan. Käyttäen kaavoja (4) ja (5) saamme nyt

$$\left| \ell - \frac{r}{s} \right| \geq \frac{1}{s^d} \cdot \frac{1}{|P'(x)|} \geq \frac{1}{Ms^d}, \quad (6)$$

missä luku M on vakio. Nyt ryhdytään kehittämään varsinaista ristiriitaa. Konstruoidaan siis jono lukuja, jotka rikkovat kaavaa (6), jonka siis pitäisi päteä kaikilla rationaaliluvuilla $\frac{r}{s}$, jotka ovat korkeintaan ykköksen päässä luvusta ℓ .

Olkoon N positiivinen kokonaisluku ja määritellään

$$r_N = 10^{N!} \sum_{n=1}^N 10^{-n!} \quad \text{ja} \quad s_N = 10^{N!}.$$

Tällöin

$$\frac{r_N}{s_N} = \frac{10^{N!} \sum_{n=1}^N 10^{-n!}}{10^{N!}} = \sum_{n=1}^N 10^{-n!}.$$

Osoitetaan nyt, että tällaiset luvut ovat hyvin lähellä Liouvillen lukua:

$$\left| \ell - \frac{r_N}{s_N} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \sum_{n=1}^N 10^{-n!} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Nyt voidaan arvioida

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} &= 10^{-(N+1)!} + 10^{-(N+2)!} + 10^{-(N+3)!} + \dots \\ &= 10^{-(N+1)!} \left(1 + 10^{-(N+2)} + 10^{-(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &< 10^{-(N+1)!} (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots) \\ &= 10^{-(N+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-(N+1)!}. \end{aligned}$$

Koska $s_N = 10^{N!}$, pätee

$$\left| \ell - \frac{r_N}{s_N} \right| < \frac{10}{9} \cdot 10^{-(N+1)!} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s_N^{N+1}}.$$

Kaavan (6) nojalla pitäisi päteä

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s_N^{N+1}} > \frac{1}{Ms_N^d},$$

eli

$$s_N^{d-(N+1)} > \frac{9}{10M}.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä luku $\frac{9}{10M}$ on vakio, ja kun N kasvaa, niin $s_N^{d-(N+1)}$ pienenee ja lähestyy nollaa.

Olemme siis vihdoinkin valmiita ja saaneet osoitettua, että Liouvillen luku on transkendenttinen. $\square$

Harjoitustehtävä 7. Lähtien suoraan Liouvillen luvun määritelmästä, osoita, että Liouvillen luku ei ole rationaalinen.

Harjoitustehtävä 8. Miksi polynomilla (3) ei ole rationaalisia nollakohtia?

Loppusanat

Kaava (6) tunnetaan Liouvillen lauseena, joka pätee kaikille algebrallisille luvuille. Tällöin luku d on sama kuin matalin mahdollinen sellaisen polynomin aste, jonka juuri luku on. Luku M riippuu luonnollisestikin kyseisestä algebrallisesta luvusta. Todistus on täysin yhteneväinen sen kanssa, miten tämä kaava on johdettu Liouvillen luvulle olettaen (paikkansapitämättömästi), että luku on algebrallinen.

Kiitokset

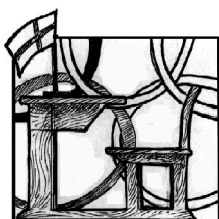
Kirjoittaja haluaisi kiittää Heikki Pokelaa, joka löysi alkuperäisestä tekstistä useita epätarkkuuksia.

Viitteet

- [1] Edward B. Burger ja Robert Tubbs. *Making Transcendence Transparent: An intuitive approach to classical transcendental number theory*. Springer Verlag 2004.
- [2] Martin Eigner ja Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer Verlag 2010.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta <http://avoinoppikirja.fi> löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.



Tyhjää parempia perusteluja

Markku Halmetoja

Mäntän lukio

Euler todisti 1700-luvulla yhtälön

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

tavalla, jota ei nykyisin pidetä korrektina. Yhtälö on kuitenkin paikkansapitävä eikä kukaan väitä, että Eulerin työ ei olisi ollut matematiikkaa. Käsitys matemaattisesta tarkkuudesta on ollut näihin päiviin asti, ehkä vieläkin, aikaansa sidottu. Oikeita tuloksia on keksitty tavalla tai toisella ja niitä on myöhemmin aikoina todistettu mitä hienoimmilla ajatusrakennelmissa. Differentiaalilaskennan synty 1600-luvulla ja sen täsmentyminen nykyaikaiselle tasolle on tästä hyvä esimerkki. Tällaisen syvenevien perustelujen sarjan tulisi olla myös yksilökohtaisen matematiikan oppimisen perustana. Matemaattiset väitteet tulisi kouluopetuksessa käsitellä oppilaan kulloiseenkin ikäkauteen sopivilla argumenteilla. Tämän suuntaista ajattelua on peruskoululaisille tarkoitetuissa Solmun matematiikkadiplomitehtävissä [1] ja niihin liittyvissä oheiskirjoituksissa. Kirjoituksessa [2] käsitellään samassa hengessä lukion trigonometrian oppimäärää. Peruskoulun ja osin lukionkin nykyiset oppikirjat ilmentävät päinvastaisista oppimiskäsitystä. Matemaattisia totuuksia ei juuri perustella mistään lähtökohdista lähtien. Tärkeintä näyttää olevan valmiina annettujen kaavojen soveltaminen lähinnä keinoitekoiisiin ongelmiin. Oppilaalle muodostuu sirpaleinen, jäsentymätön kuva matematiikasta, mikä vähentää oppimismotivaatiota. Varsinkin yläkoululaiset pitävät tutkimusten mukaan matematiikkaa, siis sitä, mitä heille matematiikkana opetetaan,

yhtenä tylsimmistä kouluaineista. Seuraavassa hahmotellaan, miten eräitä ympyrään ja palloon liittyviä teoriakokonaisuuksia voisi käsitellä nykyisiä käytäntöjä matemaattisemmin. Perustiedoiksi tarvitaan Pythagoraan lause, suoran lieriön tilavuus, intuitiivinen käsitys kuvioden ja kappaleiden yhdenmuotoisuudesta sekä hieman algebrallisten lausekkeiden käsittelytaitoa. Osittain samoja asioita käsitellään hieman vaativammin kirjoituksessa [3].

Ympyrästä

Mielenkiintoisin ympyrään liittyvistä asioista on π . Seiskaluokalla on hyvä harrastaa toiminnallista matematiikkaa mittailemalla erikokoisten ympyröiden kehää ja halkaisijoita ja vakuuttua kokemuksen kautta, että niiden suhde on mittaustarkkuuden rajoissa sama. Myöhemmin todetaan ympyrät keskenään yhdenmuotoisiksi ja saadaan verrantoa käyttäen tulos, jonka mukaan kehän suhde halkaisijaan yhdessä ympyrässä on sama kuin tämä suhde toisessa ympyrässä. Näin saadaan varmuus siitä, että kyseinen suhde on ympyrän koosta riippumaton vakio ja päädytään mittauksista riippumatta kehän pituuteen $p = \pi d = 2\pi r$. Seuraavaksi on mietittävä, miten π voitaisiin laskea. Ympyrän kehän pituutta voi approksimoida ympyrän sisään piirretyn säännöllisen monikulmion kehällä. Ajattelemalla 1-säteisen ympyrän sisään säännöllinen kuusikulmio saadaan $\pi \approx 3$. Paremman likiarvon laskemiseksi johdetaan yleinen algoritmi. Osoitetaan Pythagoraan

lauseen avulla, että jos 1-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n -kulmion sivun pituus on a_n , niin $2n$ -kulmion sivun pituus

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a_n^2}}},$$

jolloin $\pi \approx n \cdot a_{2n}$. Lähtemällä säännöllisestä kuusikulmiosta Arkhimedes määrittä π :n likiarvoja periaatteessa tällä tavalla laskien 12-, 24-, 48- ja 96-kulmion sivun pituuden, ks. [4]. Laskimella päästään pidemmälle, ja palautuskaavan voi myös ohjelmoida. Kun π on näin saatu hallintaan, voidaan johtaa ympyrän pinta-ala. Eräessä peruskoulun oppikirjassa se on tehtykin jakamalla r -säteinen ympyrä suureksi määräksi samankokoisia pieniä sektoreita.

Pallon tilavuus kokeellisesti

Tennispallon tilavuuden laskemista mielenkiintoisempaa on pyrkiä perustelemaan pallon tilavuuden kaava. Yläkoulussa voidaan turvautua toiminnallisen matematiikan keinoihin eli tehdään mittauksia vaikkapa ryhmätyönä. Pallon tilavuus on ilmeisesti verrannollinen säteen kuutioon ja pyöreiden takia kertoimena on myös π samalla tavalla kuin ympyrän pinta-alan kaavassa. Voimme siis olettaa, että

$$V_{\text{pallo}} = k \cdot \pi r^3, \quad (1)$$

missä k on toistaiseksi tuntematon vakio. Otetaan tarkasteltavaksi sopivan kokoisia palloja. Mitataan niiden halkaisijat työntömitalla. Tilavuudet määritetään katsomalla pallojen mittalasissa syrjäyttämät vesimäärät. Koska sekä tilavuudet että säteet nyt tunnetaan, saadaan k ratkaistua jokaiselle pallolle yhtälöstä (1). Tarkalla työskentelyllä saataneen tulosten keskiarvoksi suunnilleen oikea arvo. Oppilaille on tietenkin kerrottava, että tilavuuden kaava johdetaan matemaattisemmin lukion integraalilaskennan kurssilla.

Pallon pinta-ala kokeellisesti

Pallon pinta-alan määrittäminen kokeellisesti onnistui si parhaiten pingispallon avulla, jos olisi saatavilla samasta materiaalista valmistettua saman vahvuista tasomaista levyä. Mitataan aluksi pingispallon halkaisija d työntömitalla. Leikataan sitten levymäisestä materiaalista suorakulmio, jonka sivut ovat d ja πd . Jos mittaukset tehdään huolella, niin pallo ja suorakulmio painavat yhtä paljon. Niiden pinta-alat ovat siis samat. Suorakulmion pinta-ala on $\pi d^2 = 4\pi r^2$, mikä siis on myös pallon pinta-ala. Ympyrän ja pallon pinta-alojen välillä havaitaan hauska analogia:

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 \quad \text{ja} \quad A_{\text{pallo}} = \pi d^2.$$

Lisäksi havaitaan, että jos pallo asetetaan suoraan, ympyräpohjaiseen lieriöön, jonka vaippa ja pohjat sivuavat palloa, niin vaipan ja pallon pinta-alat ovat samat.

Pallon pinta-ala algebrallisesti

Kun pallon tilavuus tunnetaan, voidaan sen pinta-ala johtaa myös peruskoulun algebraa soveltaen. Tarkastellaan samankeskisiä palloja, joiden säteiden erotus on h . Olkoon isompi pallo r -säteinen jolloin pienemmän pallon säde on $r-h$. Pienemmän pallon pinta-ala A_h lähestyy isomman pallon pinta-alaa A , kun h lähestyy nollaa. Pallojen tilavuuksien erotus on pallon kuori, jonka paksuus on h . Ajatellaan kuori jaetuksi moneen hyvin pieneen osaan, jotka levitetään tasoon. Koska osat ovat pieniä, ne ovat lähes tasomaisia. Ne ovat sitä tarkemmin h :n korkuisia suoria lieriöitä, mitä pienempi h on. Niiden tilavuuksien summa on $A_h \cdot h$. Toisaalta tämä tilavuus on myös

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-h)^3.$$

Niinpä

$$A_h \cdot h = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r-h)^3,$$

joten

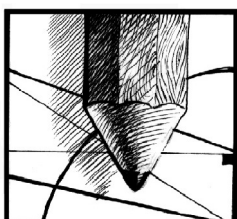
$$\begin{aligned} A_h &= \frac{4}{3}\pi \frac{r^3 - (r-h)^3}{h} \\ &= \frac{4}{3}\pi \frac{3r^2h - 3rh^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{4}{3}\pi (3r^2 - 3rh + h^2) \\ &= 4\pi r^2 + h \cdot \left(\frac{4}{3}\pi h - 4\pi r\right). \end{aligned}$$

Selvästi

$$A_h \longrightarrow 4\pi r^2 = A, \quad \text{kun} \quad h \rightarrow 0.$$

Viitteet

- [1] <http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html>
- [2] <http://solmu.math.helsinki.fi/2012/1/trigonometriaa.pdf>
- [3] http://solmu.math.helsinki.fi/2012/3/induktio_ympyra_kartio_pallo.pdf
- [4] <http://solmu.math.helsinki.fi/2000/mathist/html/kreikka/index.html#arkhimedes>



Matematiikkaa muinaisuudesta – Itämaan tietäjien laskentoa

Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Tuntemme kaikki joulukertomuksen. Tärkeätä osaa siinä esittävät Itämaan tietäjät, jotka ovat hämmennyneet havaitsemastaan uudesta tähdestä. Missä olivat nuo Itämaat? Luultavasti legendan sepittäjät ovat ajatelleet seutua, joka Raamatussa tunnetaan Kaksoisvirtain maana eli Mesopotamiana ja joka nykyään on leivotonta Irakia. Aluehan on itään päin Palestiinasta.

Joulukertomus ei tietäjien osalta ole vain mielikuvitusta. Kaksoisvirtain, siis Eufrat- ja Tigris-jokien alueella oltiin muinaisuudessa todellakin monissa suhteissa tiedon kärjessä. Erityisesti tähtitiede ja matematiikka olivat aikakauden kehittyneimpiä. Ja yhä voimme tunnistaa muutamia arkielämäämme kuulumia laskennon piirteitä, joiden juuret ovat lähes neljän tuhannen vuoden päässä, matemaattisessa kulttuurissa, jota on tapana kutsua *babylonialaiseksi*. Nimitys on hiukan yleistävä, koska vuosisatojen ja -tuhansien aikana aluetta asuttivat monet kansat alkaen sumerilaisista.

Mesopotamian kulttuurin ja matematiikankin yhdistävä ulkoinen piirre on alueen varhaisten asukkaiden sumerilaisten kehittämä nuolenpää- eli kiilakirjoitus, jota sitten kaikki myöhemminkin alueen asukkaat käyttivät. Kirjoitussymbolien kiilamuoto johtuu siitä, että ne synnyttiin painamalla poikkileikkaukseltaan kolmio- maista kirjoitinpuikeaa vinosti saveen. Koviksi poltetut savitaulut ovat erittäin kestäviä, ja arkeologit ovat kaivaneet niitä esiin tuhansittain. Joukossa on kolmisen sataa taulua, joiden sisältö on tunnistettu matemaat-

tiseksi.

Mielenkiintoisimmat taulut ovat vuosilta 1800–1600 eKr. Tuolloin Mesopotamiaa valloitsivat babylonialaiset ja sen hallitsijat kuuluivat lainsäätäjäkuningas Hammurabin dynastiaan.

60-kantainen paikkajärjestelmä

Olemme tottuneet luvun 10 vallitsevaan asemaan maailmassamme. Kun nimeämme lukuja tai kirjoitamme niitä, pohjana on kymmenen. Useimmat mittayksikömmä ja niiden nimeäminen perustuvat kymmenjärjestelmään. Merkittävän poikkeuksen muodostavat kuitenkin ajan ja kulman mittaamisen yksiköt. Tunti ja kautuu 60 minuuttiin samoin kuin kulmanmittauksen aste, ja minuutissa on 60 sekuntia.

Tämä poikkeama (jota Ranskan vallankumouksen aikaan 1700-luvun viimeisinä vuosina yritettiin tuloksetta korjata) perustuu babylonialaisten käytäntöihin 4000 vuoden takaa. Taustalla oli myös nerokas oivalus, joka muuntuneena elää yhä. Kysymyksessä oli lukujen merkitseminen paikkajärjestelmän avulla. Sama numeromerkki voi tarkoittaa eri lukua siitä riippuen, mihin kohtaa numeron merkintää se on laitettu. Merkinässä 512 ”5” tarkoittaa viittä sataa, merkinässä 51 viittä kymmentä ja merkinässä 5 vain viittä.

Babylonialainen numeromerkintä noudatti samaa periaatetta, mutta meidän kymmenen numeromerkkimme sijasta he muotoilivat nuolenpäistä 59 erilaista numeromerkkiä, jotka yksinään tarkoittivat lukuja yhdestä 59:ään. Mutta lukua 60 he merkitsivät samalla merkillä kuin ykköstä. Luvun 61 merkinä oli kaksi vierekkäistä ykkösen merkkiä, 62 syntyi ykkösen ja kakkosen merkeistä jne. Babylonialaiset eivät aluksi hoksanneet puuttuvan merkin korvaavan nollan periaatetta, jolla me erotamme toisistaan vaikkapa luvut 1 ja 10 tai 11 ja 101. Niinpä asiayhteydestä oli ymmärrettävä, milloin ykkösen merkki tarkoitti lukua 1, 60, $60 \cdot 60 = 3600$ tai vaikkapa $1/60$. Babylonialaisen merkintätavan peruja ovat yhä asteen tai tunnin jako minuuteiksi ja edelleen sekunneiksi. Lukujärjestelmää, jonka kantaluku on 60, kutsutaan *seksagesimaalijärjestelmäksi*. Kun emme enää osaa tai halua käyttää babylonialaisten nuolenpäämerkintöjä, niin vakiintuneeksi tavaksi on tullut merkitä niin, että esimerkiksi merkinnällä a, b, c tarkoitetaan seksagesimaalilukua $a \cdot 60 + b + c/60$ ja a, b, c kirjoitetaan meille tutuilla numeroilla. Siten $3, 25; 30$ on luku $3 \cdot 60 + 25 + 30/60 = 205,5$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐	┐┐┐┐┐	┐┐┐┐┐┐	┐┐┐┐┐┐┐	┐┐┐┐┐┐┐┐	┐┐┐┐┐┐┐┐┐
10	11	12	20	30	40	50	59	
<	<┐	<┐┐	<<	<<<	<<<┐	<<<┐┐	<<<┐┐┐	

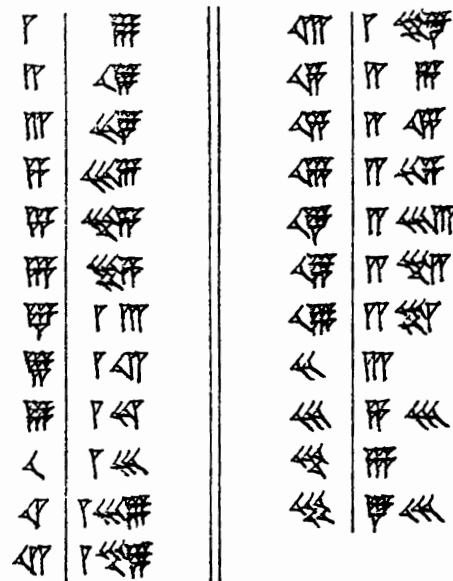
Nuolenpääkirjoituksen numeroita.

Mistä tuo 60 saatiin? Sitä ei tiedetä, mutta jo kaikkien vanhimmissa säilyneissä sumerilaisissa savitauluisissa, jotka ovat ajalta ennen nuolenpääkirjoituksen syntymä, esiintyi yksinkertaisia symboleja, jotka liittyivät neljään lukuun: 1, 10, 60 ja 3600.

Babylonialaisten käytännöllinen numeromerkintä teki tarkat numerolaskut periaatteessa yhtä helppoiksi kuin nykyäänkin. Kun me laskemme päässä tai paperilla, käytämme hyväksi muistiamme, johon on alakoulussa yritetty tallettaa lukujen 1–9 välisten yhteen- ja kertolaskujen tulokset. Lopusta huolehtivat laskusäännöt, jotka esimerkiksi tekevät mahdolliseksi useampinumeroisten lukujen laskutoimitukset. Babylonialaisten laskijoiden tilanne oli haastavampi: 60-järjestelmän käyttö edellyttää isomman yhteenlasku- ja kertolaskutaulun hallintaa kuin mitä me tarvitsemme. Lukuisia savitauluja, joihin on kirjoitettu laskijoiden työtä helpottavia kertotauluja, on löytynyt.

Toisaalta 60-järjestelmän jakolaskut olivat usein helpompia. Tämä johtuu siitä, että luvulla 60 on monta tekijää ja sellaiset murtoluvut $\frac{1}{k}$, missä k on 60:n tekijä, ovat yksinkertaisia seksagesimaalilukuja ($\frac{1}{2} = 0;30$,

$\frac{1}{3} = 0;20$, $\frac{1}{4} = 0;15$, $\frac{1}{5} = 0;12$, $\frac{1}{6} = 0;10$, $\frac{1}{8} = 0;7,30$ jne. Jakolaskujen helpottamiseksi käytössä oli käänteislukutauluja. Näissä tyyppiä $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ jne. oleville luvuille annettiin likimääräisiä seksagesimaaliarvoja.



Yhdeksän kertotaulua seksagesimaalijärjestelmässä.

Babylonian algebraa ja algoritmeja

Peruslaskutoimitusten lisäksi babylonialaiset hallitsivat muita taitavia laskumenetelmiä. Esim. neliöjuuri $\sqrt{a}$ saatettiin laskea varsin tarkan likiarvomenetelmän

$$\sqrt{a} = \sqrt{n^2 + b} \approx n + \frac{b}{2n} = \frac{1}{2} \left(n + \frac{a}{n} \right)$$

avulla; tässä n^2 on suurin a :ta pienempi kokonaisluvun neliö. Approksimaatio on sama kuin se, joka saadaan, kun neliöjuurifunktion potenssisarjasta otetaan kaksi ensimmäistä termiä. Babylonialaisella menetelmällä esimerkiksi luvun $\sqrt{27}$ likiarvo on 5,2, mikä ei ole kaukana oikeasta arvosta 5,19615... Toisessa menetelmässä lähdetään approksimaatiosta jostain $\sqrt{a}$:n mahdollisesta likiarvosta a_1 ja muodostetaan sitten peräkkäin

$$b_1 = \frac{a}{a_1}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a}{a_2} \quad \text{jne.}$$

Näin saadaan muutaman askelen jälkeen sangen tarkka $\sqrt{a}$:n likiarvo. Itse asiassa syntyy kaksi lukujonoa, joiden raja-arvo on $\sqrt{a}$. Tätä babylonialaiset tuskin oivalsivat: raja-arvo tuli matematiikkaan vasta tuhansia vuosia myöhemmin. – Edellä kaavoina esitetyt laskutoimitukset esiintyvät savitauluissa vain luvuilla tehtyinä. Matematiikan kaavakieli syntyi vasta muutama sata vuotta sitten, samoin se, että kaavoihin laitetaan kirjaimia lukuja edustamaan.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava opitaan koulussa, mutta tarpeen vaatiessa usein tarkistetaan esimerkiksi taulukkokirjasta. Mutta jo noin 4000 vuotta vanhat babylonialaiset tekstit osoittavat, että babylonialaiset tunsivat toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmän. Se ei kylläkään esiinny yleispätevänä ratkaisukaavana, vaan numeroesimerkkien muodossa. Esimerkit ovat kuitenkin selvästi tunnistettavissa yleisen metodin opetusvälineiksi. Eräässä tulkittussa savitaulussa kysytään neliön sivua, jos ala vähennettynä sivulla on 14, 30 (eli $14 \cdot 60 + 30 = 870$). Tehtävän ratkaisu on seuraava:

Ota puolet yhdestä, eli 0; 30 ja kerro 0; 30 0; 30:llä, joka on 0; 15; lisää tämä 14, 30:een, joka on 14, 30; 15. Tämä on 29; 30:n neliö. Lisää 0; 30 29; 30:een, ja tulos on 30 eli neliön sivu.

Selvästi kyseessä on yhtälön $x^2 - px = q$ ratkaisukaavan

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

käyttö, kun $p = 1$ ja $q = 870$. – Koska negatiiviset luvut eivät olleet käytössä (ne keksittiin Intiassa vasta ensimmäisellä vuosituhannella jKr.), antiikin aikana toisen asteen yhtälöt saattoivat olla vain muotoa $x^2 = px + q$, $x^2 + px = q$ ja $x^2 + q = px$, missä p ja q ovat positiivisia.

Esitellään vielä toinen tyypillinen babylonialainen esimerkki yhtälönratkaisusta, nykyaikaisin symbolein ja merkinnöin: määritä x , jolle $x^2 + 6x = 16$. Aseta $y = x + 6$. Ratkaistavana on yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ xy = 16. \end{cases}$$

Jos $y = a + 3$ ja $x = a - 3$, niin jälkimmäinen yhtälö on $a^2 - 9 = 16$, josta $a = 5$, $x = 2$. – Tyyppeä $7x^2 + 6x = 1$ olevaa yhtälöä ei sievennetty nykytapaan jakamalla x^2 :n kertoimella, vaan kertomalla koko yhtälö 7:llä: yhtälöksi saadaan $(7x)^2 + 6(7x) = 7$ eli $y^2 + 6y = 7$, josta $y = 1$, $x = \frac{1}{7}$.

Babylonialaisessa matematiikassa esiintyy jopa toista astetta korkeamman asteen polynomi yhtälöihin johdettavia tehtäviä; sellaisia ratkaistiin erikoistapauksissa käyttämällä apuna mm. $n^3 + n^2$ -taulukkoja. Taulukoiden avulla ratkaistiin myös korkolaskujen yhteydessä vastaan tulevia eksponenttiyhtälöitä.

Geometria ei ollut vahva alue

Babylonialaisten matematiikka (kuten muidenkin muinaiskulttuurien matematiikka) suuntautui voittopuolisesti laskentoon ja algebraan. Geometriasta lienee heille ollut tuttu ainakin Pythagoraan lauseen sisältö.

Eräässä savitauluista puretussa tehtävässä kysytään, miten kauas 30 yksikköä pitkän sauvan alapää joutuu pystysuorasta seinästä, kun yläpäästä lasketaan 6 yksikköä. Pythagoraan lauseen mukainen ratkaisu on $\sqrt{30^2 - (30 - 6)^2} = \sqrt{324} = 18$.

Omalaatuisin todiste siitä, että Pythagoraan lause tunnettiin Babyloniassa, on luonteeltaan aritmeettinen, nimittäin paljon tutkittu ja monien selitysten kohteena ollut savitaulu, joka tunnetaan nimellä *Plimpton 322*. Siinä on seksagesimaalilukuja

1; 59,0,15	1,59	2,49
1; 56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25
1; 55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49
1; 53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1
...	...	...

Yksi taulun selitys on, että siinä olevat luvut olisivat lukuja $(\frac{c^2}{b^2}, a, c)$, missä $a^2 + b^2 = c^2$. Tämän ehdon toteuttavat positiivisten kokonaislukujen kolmikot (a, b, c) ovat ns. *Pythagoraan lukuja*. On tunnettua, että jos kolmikon luvuilla ei ole yhteisiä tekijöitä, niin luvuista a ja b tasan toinen on parillinen; jos se on b , niin on olemassa yhteistekijättömät kokonaisluvut p ja q siten, että $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ ja $c = p^2 + q^2$. Plimpton-tilun luvut olisivat alku taulukolle, jossa ovat kaikki tällaiset, arvoilla $p \leq 125$ ja $1 < \frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$ saatavat luvut järjestettynä suureen $\frac{p^2 + q^2}{2pq}$ mukaan. – Plimpton 322:n merkityksestä keskustellaan jatkuvasti, ja erilaisia tulkintoja on useita. – Kreikkalaista Pythagorasta koskevat legendat kertovat hänen saaneen oppia Babyloniasta.

Geometrisissa laskutehtävissä babylonialaiset käyttivät usein menetelmiä, jotka eivät anna ihan tarkkoja tuloksia. Erään tehtävän mukaan jana, joka jakaa nelikulmion, jonka sivut ovat a, b, c ja d , kahteen yhtä suureen osaan (ja yhdistää b - ja d -janat), olisi pituudeltaan

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Tulos on tarkka vain, jos nelikulmio on puolisuunnikas. Myös esimerkiksi katkaistun pyramidin tilavuudelle löytyy babylonialaisista savitauluista sekä vääriä että oikeita laskutapoja.

Babylonialaisten tekstien tiedot ympyränmitannosta osoittavat, että ympyrän ala A laskettiin sen kehän p avulla kaavaa

$$A = \frac{p^2}{12}$$

vastaavalla tavalla. Tämä merkitsi kehän ja halkaisijan yksinkertaista suhdetta 3. Eräistä teksteistä löytyy parempi likiarvo $3\frac{1}{8}$ (säännöllisen kuusikulmion piirin suhde ympäri piirretyn ympyrän kehään on 0; 57, 36).

Myös Vanhassa Testamentissa (joka ymmärrettävästi heijastelee monin tavoin babylonian kulttuuria, olivat-han juutalaiset Baabelin vankeudessaakin) esiintyy ” π :n arvo 3”, kuten Ensimmäinen Kuningasten Kirja (7:23) kertoo:

Hän [Salomo] teki myös meren, valetun, kymmentä kyynärää leveän reunasta reunaan, ympäriinsä pyöreän – ja kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri.

Babylonian vaikutus näkyy yhä

Babylonian kulttuuri ja muinaisen Egyptin kukoistus ovat karkeasti samanaikaisia. Matematiikassa ja laske-misessa babylonialaiset olivat yleensä Niilin rantojen asukkaita edellä.

Yleisiä matemaattisia teoreemoja eivät babylonialaiset sen paremmin kuin egyptiläisetkään tietojemme mukaan tunteneet eivätkä todistaneet: heidän matema-tiikkansa oli (kuten ”insinöörimatematiikka” nykypäi-vinäkin) kokoelma toimintaohjeita, ei niiden perustelu-ja. Ja moni tarpeellinen tieto katsottiin aputaulukois-ta. Matematiikka oppina, jossa se mitä tiedetään ja tehdään, on aina vastaansanomattomasti perusteltua, syntyi vasta Kreikassa, yli tuhat vuotta babylonialai-sen matematiikan kukoistuskauden jälkeen. Mutta toki suuri osa matematiikasta ja sen käytöstä tapahtuu ny-kyäänkin niin, että käyttäjä, insinööri esimerkiksi, so-veltaa matemaattista tietoa ongelmiinsa liiemmälti pe-rusteluja kyselemättä. Matematiikassa ja sen käytössä voi yhä nähdä sekä babylonialaisen että kreikkalaisen perinnön.

Kansainvälinen tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailu jälleen käynnissä – tervetuloa mukaan!

Miten saada nuoret innostumaan numeroidentäyteisestä tilastojen maailmasta? MAOL ry, Suomen Tilastoseu-ra ry ja Tilastokeskus järjestävät joka toinen vuosi käynnistyvän Suomen kansallisen Tilastokilpailun, jossa yläkoulu- ja lukioikäiset pääsevät joukkueina näyttämään tutkimusentekotaitonsa. Kilpailun ideana on, että jokainen joukkue tekee pienen tutkimuksen valitsemastaan aiheesta: määrittää tutkimuskysymyksen, kertoo hie-man taustatietoja, kerää aineiston, analysoi sen ja tiivistää tutkimuksen kulun sekä saamansa tulokset posteriin eli tietotauluun. Jokainen kilpailuun osallistuva koulu valitsee parhaan posterin yläkoulu- ja lukiosarjasta ja lähettää ne Tilastokeskukseen Suomen kansallisen radin arvioitavaksi.

Suomen yläkoulu- ja lukiosarjojen voittajaposterit jatkavat matkaansa kansainväliseen Tilastojen luku- ja käyttö-taitokilpailuun, johon osallistui viimeksi oppilaita kolmestakymmenestä eri maasta. Kansainvälisen tilastokilpai-lun molempien sarjojen voittajaposterit esitellään aina ISI:n järjestämissä tilastokongresseissa, seuraavan kerran maailman 60. tilastokongressissa Brasiliassa kesällä 2015, ks.

<http://www.isi-web.org/isi-wscs/isi-world-statistics-congresses>.

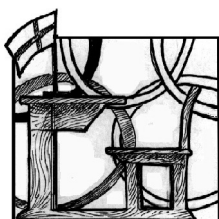
Ilmoittaudu mukaan Tilastojen luku- ja käyttötaitokilpailuun osoitteessa

http://tilastokoulu.stat.fi/verkkokoulu_v2.xql?page_type=opettajalle.

Lisätietoja kansainvälisestä kilpailusta löydät osoitteesta <http://iase-web.org/islp/>.

Tilastokoulun <http://tilastokoulu.stat.fi> oppimateriaalit ja harjoitustehtävät auttavat kilpailuun valmis-tautumisessa!

Kirjoittanut: *Jenny Ståhlberg, Kasvatustieteen kandidaatti, Helsingin yliopisto Korkeakouluharjoittelija, Tilasto-keskus*



Matematiikkaolympialaiset Afrikassa

Matti Lehtinen ja Joni Teräväinen
Helsingin yliopisto

55. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset järjestettiin 6.–13. heinäkuuta 2014 Kapkaupungissa. Kilpailua ei ollut ennen pidetty Afrikassa matematiikkaolympialaisten yli 50-vuotisen historian aikana. Afrikalaisten osallistujamaiden joukossakin on ollut Etelä-Afrikan lisäksi lähinnä muutama Pohjois-Afrikan maa. Tänä vuonna järjestät olivat kuitenkin saaneet 12 isäntämantereeseen maata mukaan. Kapkaupungissa oli yhteensä 560 osallistujaa 101 maasta. Tyttöjä oli tasan kymmenesosa.

Kilpailu ja majoitus järjestettiin Kapkaupungin yliopiston tiloissa. Heinäkuu on Etelä-Afrikassa keskitäällä, ja osallistujat kokivat lämpötilojen puolesta viileän vastaanoton, mutta muilta osin lämpimän. Päivät olivat silti syksyisen kauniita, ja järjestäjät antoivat jokaiselle lämpimän puseron. Runsas retkiohjelma antoi kilpailijoille monipuolisen kuvan isäntäkaupungista ja Kapmaan luonnosta. Ohjelmaan kuului muun muassa matka Hyväntoivonniemelle, ja moni kävi myös Pöytävuoren huipulla.

Kilpailun jälkeen tarjoutui mahdollisuus kuunnella maailmankuulujen matemaatikoiden pitämiä luentoja. Puhumassa olivat *Günter M. Ziegler*, *John D. Barrow* ja *Peter Sarnak*. Aiheet vaihtelivat monikulmioiden jakamisesta sama-alaisiin ja -piirisiin osiin kosmologiaan sekä Apolloniuksen fraktaalien lukuteoreettiseen tarkasteluun. Lisäksi Yhdysvaltain joukkueen johtaja *Po-Shen Loh* piti esitelmän kilpailun kuudennessa ja vaikeimmasta tehtävästä, jossa paljastui muun muassa, että tehtävässä pyydettyä alarajaa voi parantaa, mutta

on avoin ongelma, kuinka paljon.

Matematiikkaolympialaisten tehtävät jakautuvat neljään aihealueeseen: algebraan, geometriaan, kombinatoriikkaan ja lukuteoriaan. Tehtävät valitsee tuomaristo, joka koostuu kunkin maan joukkueen johtajasta. Osallistujamaat ovat ehdottaneet suuren määrän tehtäviä, joista eksperteistä koostuva tehtävänvalintakomitea on valikoinut noin 30 parasta tuomaristolle.

Tehtävänvalintakomitean kokeneisuus ongelmanratkaisussa korostaa tietenkin vaativampia tehtäviä ehdokaskokoelmassa. Tänä vuonna ehdokkaista päätettiin aluksi valita neljä helppoa tai keskivaikeaa tehtävää niin, että kukin tehtävätyyppi tulisi edustetuksi. Koska helpoista tehtävistä oli pulaa, kunnollista lukuteorian tehtävää ei valittu. Kombinatorisia tehtäviä sen sijaan päätyi kilpailuun poikkeuksellisesti puolet kuudesta tehtävästä. Melko tavanomaista oli kuitenkin, että kilpailussa oli helppo algebran ja euklidisen geometrian tehtävä ja vaikea kombinatoriikan tehtävä. Viimeisessä tehtävässä oli erikoista kysymyksen avoimuus: Tehtävänä oli todistaa, että eräs kombinatoriseen geometriaan liittyvä lukumäärä on vähintään $\sqrt{n}$, mutta myös alarajoista muotoa $c\sqrt{n}$ luvattiin pisteitä. Kovin moni ei kuitenkaan saanut vaikeimmasta tehtävästä pisteitä. Kilpailutehtävät ja niiden ratkaisut löytyvät Valmennusjaoston sivuilta osoitteesta <http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/IMO/>.

Tehtävien jonkin verran erikoisesta jakaumasta huolimatta pistemäärien osalta valinta oli onnistunut. Hel-

poiksi arvioidut tehtävät saivat pistekeskisarvot 5,3/7 (algebra) ja 5,2/7 (geometria), keskinkertaiset 3,0/7 (kombinatoriikka) ja 1,7/7 (lukuteorian kategoriasta valittu kombinatorinen tehtävä). Vaikean geometrian tehtävän pistekeskisarvo oli 0,5/7 ja vaikean kombinatorisen tehtävän 0,3/7. Edellisen tehtävän ratkaisi 28, jälkimmäisen 15 kilpailijaa. Arvostelijoita eli koordinaattoreita oli 48, ja joukko oli hyvin kansainvälinen. Tämä näkyi heidän asiantuntevuudessaan ja tasapuolisuudessaan.

Matematiikkaolympialaisissa ei palkita ainoastaan muutamaa parasta suorittajaa, vaan kaikki riittävän ansioituneet saavat palkinnon. Mitaleja on tapana jakaa vajaalle puolelle kilpailijoista, mutta tänä vuonna tuomaristo päätti iloisesti – ei toki ensimmäistä kertaa – jakaa mitaleja yli puolelle kilpailijoista. Pronssimitalin raja oli 16/42 pistettä, hopean 22/42 ja kultan 29/42 pistettä. Pronssimitaleja jaettiin 133, hopeamitaleja 113 ja kultamitaleja 49. Mitalinsaajia oli siis 295 eli 52,5 % osallistujista. Kiinalla ja Yhdysvalloilla oli peräti viisi kultamitalistia. Kolme kilpailijaa ylsi täyteen 42 pisteeseen: Kiinan *Jiyang Gao*, Australian *Alexander Gunning* ja Taiwanin *Po-Sheng Wu*.

Kiina oli jälleen maiden välisen epävirallisen kilpailun voittaja. Selvän eron jälkeen USA, Taiwan ja Venäjä seurasivat lähes tasapistein. Myös Japani, Ukraina, Korea, Singapore, Kanada, Vietnam ja Australia olivat kärkikymmenikössä. Kymmenen parhaan joukossa oli siis viisi Kaukoidän maata. Tulos on tyypillinen ja kertoo joidenkin maiden intensiivisestä panostuksesta ja harjoittelusta kilpailuun, mutta myös väkiluvun runsaus auttaa toki monia maita. Kilpailun kattavat tulostiedot löytyvät olympialaisten virallisilta sivuilta osoitteesta <http://www.imo-official.org/>.

Suomen joukkue valittiin Suomen Matemaattisen Yhdistyksen Valmennusjaoston järjestämällä valmennus- ja valintaleirillä Päivölän Kansanopistossa vappuviikolla. Valinnassa huomioitiin myös menestys kilpailuissa, kuten MAOLin Lukion matematiikkakilpailussa, Pohjoismaisessa matematiikkakilpailussa 31.3. ja Turkin

Antalayassa pidetyissä Euroopan Tyttöjen Matematiikkaolympialaisissa eli EGMOssa huhtikuun alussa. Joukkueeseen valittiin *Jere Huovinen* Kastellin lukios-
ta Oulusta, *Mirjam Kauppila* Päivölän Opiston matematiikkalinjalta, *Riku Laakkonen* Joensuun normaalikoulusta, *Timo Takala* Olarin lukiosta, *Ella Tamir* Helsingin matematiikkalukiosta ja *Jakob Wartiovaara* Töölön yhteiskoulusta Helsingistä. Joukkuetta valmennettiin vielä kesäkuussa Helsingin yliopistossa ja se osallistui Pohjoismaiden yhteiselle valmennusleirille Sorøssa Tanskassa juuri ennen kilpailumatkaa. Joukkueen johtajana oli *Matti Lehtinen* ja varajohtajana *Joni Teräväinen*.

Suomalaisten keräämät 59 pistettä oikeuttivat vasta sijalle 70; takana olevista 31 maasta 14 kilpaili vajaalla miehistöllä ja lähialueen maista vähemmille pisteille jäivät vain Viro ja Islanti. Jakob Wartiovaaran 21 pistettä oikeuttivat pronssimitaliin; hopeamitali oli vain pisteen päässä. Riku Laakkonen ja Timo Takala palkittiin kunniamaininnalla. Kunniamaininta annetaan kaikille ainakin yhdestä tehtävästä täydet pisteet saaneelle, mutta ilman mitalia jääville.

Suomelle suuria vaikeuksia aiheutti, niin kuin monesti ennenkin, helppo geometrian tehtävä. Täydellä joukkueella kilpailleista maista vain Bolivia, Zimbabwe, Gambia ja Norsunluurannikko saivat tehtävästä vähemmän pisteitä kuin Suomi (7 pistettä), mutta kaikkiaan 43 maan joukkueiden kaikki kilpailijat saivat tehtävästä täydet pisteet. Kun kilpailutuloksista jossitellaan, voidaan arvella geometrian valmennuksen epäonnistuneen, mutta huomiotta ei edelleenkaan voi jättää matematiikanopetuksemme vinoutumaa: geometrian ja geometrisen päättelyn täydellistä katoamista opetuksesta. Toisaalta muitakin kilpailumatematiikan osa-alueita opetetaan valitettavasti lähinnä olympiavalmennuksessa, sillä kilpailujen algebrassa on kyse yleensä muusta kuin yhtälöiden ratkaisemisesta. Kun kuopasta ponnistaa, ei voi kovin korkealle hypätä. Vuoden kuluttua nähdään, millaiset tulokset Thaimaassa järjestettävät matematiikkaolympialaiset tuovat tullessaan.

Solmun matematiikkadiplomit

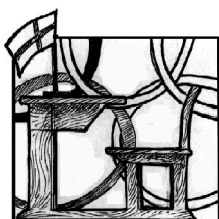
Peruskoululaisille tarkoitetut Solmun matematiikkadiplomit I–IX tehtävineen ovat tulostettavissa osoitteessa

<http://solmu.math.helsinki.fi/diplomi.html>

Opettajalle lähetetään pyynnöstä vastaukset koulun sähköpostiin. Pynnön voi lähettää osoitteella

[marjatta.naatanen\(at\)helsinki.fi](mailto:marjatta.naatanen(at)helsinki.fi)

Ym. osoitteessa on diplomitehtäville oheislukemistoa, joka varmasti kiinnostaa muitakin kuin diplomien tekijöitä.



Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaiset Antalyassa, Turkissa, 10.–16.4.2014

Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Mirjam Kauppila

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Esa V. Vesalainen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto

Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailu järjestettiin kolmannen kerran. Tällä kertaa kilpailun isännöi Turkki. Kilpailu oli Antalyassa viiden tähden hotellissa meren rannalla. Järjestelyt toimivat hyvin sujuvasti, ja kilpailun eteen oli selvästi nähty hyvin paljon vaivaa.

Euroopan tyttöjen matematiikkakilpailun tarkoitus on kannustaa tyttöjä kilpailemaan matematiikassa, sillä kansainvälisissä matematiikkaolympialaisissa vain noin kymmenesosa kilpailijoista on tyttöjä.

Kilpailussa oli tänä vuonna kolme tehtävää kahtena päivänä. Molempina päivinä aikaa oli neljä ja puoli tuntia, ja jokaisesta tehtävästä oli mahdollista saada seitsemän pistettä. Tasoltaan tehtävät olivat hyvin lähellä kansainvälisten matematiikkaolympialaisten tehtäviä. Tänä vuonna tehtävät olivat poikkeuksellisen hankalia, mikä näkyi selkeästi pistemäärissä.

Kilpailuun osallistui peräti 110 kilpailijaa 29 eri maasta. Kilpailun voitti Sofiya Dubova Ukrainasta, toiseksi tuli Yhdysvaltain Danielle Wang, joka myös voitti kilpailun viime vuonna ja ylsi jaetulle ensimmäiselle sijalle toissa vuonna, ja kolmanneksi sijoittui Andela Sarkovic Serbiasta kuten viime vuonnakin.

Suomea kilpailussa edustivat

- Minna Hirvonen Helsingin matematiikkalukiosta,
- Mirjam Kauppila Päivölän kansanopiston matematiikkalinjalta,
- Ella Tamir Helsingin matematiikkalukiosta, ja
- Tara Vaitinen Lahden yhteiskoulusta.

Mirjam Kauppila saavutti kirkkaan pronssimitalin 12 pisteen tuloksella, kun mitaliraja oli 7 pistettä.

Joukkue valittiin Suomen matematiikan olympiavalmennuksen piiristä, ja kilpailuun osallistumisen mahdollisti Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiön tuki. Joukkueen johtajana toimi FT Anne-Maria Ernvall-Hytönen ja varajohtajana FL Esa Vesalainen.

Joukkueen jäsen Mirjam Kauppila kuvasi EGMO:a näin:

Mirjam Kauppilan kokemukset kilpailusta

Sain kunnian olla edustamassa Suomea vuoden 2014 EGMO:ssa Turkissa. Joukkueessa oli minun lisäksi Ella, Tara ja Minna. En tuntenut heitä kovin hyvin ennen kilpailua, mutta viikon aikana tutustuimme ja yhteishenki oli hyvä.

Kilpailu meni hyvin. Ensimmäisen päivän tehtävät olivat hankalia, kahdesta ensimmäisestä tehtävästä en saanut yhtään pistettä, vaikka niiden kuuluisi olla suhteellisen helppoja. Kolmannesta tehtävästä sain jopa pisteen, sillä olin kirjoittanut siihen 2^{13^v-1} . Se oli osa ”jumalaista visiotani”, joka osoittautui täysin päättömäksi, kun ajattelin läpi toisen kerran. Kuitenkin 2^{p-1} oli tärkeä ratkaisun kannalta ja raapustukseni oli tarpeeksi lähellä sitä. Toinen päivä meni paremmin. Viidennen tehtävän sain ratkaistua ja neljännessä tehtävässä pääsin vauhtiin, mutta aika loppui kesken. Yhteensä sain 12 pistettä ja sijoitukseni oli 34. Pronssimitalin raja oli tänä vuonna 7 pistettä, joten mitalikin tuli matkamuistoksi.

EGMO:on osallistui tänä vuonna 29 maata ja oli täten oiva tilaisuus tutustua uusiin ihmisiin ja eri kulttuureihin. Olin vähän harmissani siitä, ettei Ruotsi lähettänyt edustajia kilpailemaan, olisi ollut hauska hämentää heitä puhumalla heille ruotsia (äidinkieleni on ruotsi). Saunassa kuitenkin pääsin vähän juttelemaan norjalaisten kanssa. Sauna oli suomalainen sauna muuten, mutta yhdessä seinässä oli suuri ikkuna ulos. Selitin saunassa istujille, että Suomessa yleensä saunotaan alasti ja naiset ja miehet saunovat erikseen, varsinkin julkisilla paikoilla. Eniten ihmiset kummastelivat hanteen hyppimistä talvella.

Vapaa-aikaa oli paljon. Suurimman osan siitä vietin uima-altaan ääressä ottamassa aurinkoa. Ulkona oli noin kaksikymmentä astetta lämmintä, eli juuri sopivasti. Illalla oli viileämpi, joten pitkähihainenkin tuli käyttöön, olihan vasta huhtikuu. Kilpailupäivien jälkeen olimme ekskursiolla katsomassa vesiputousta. Se oli vaikuttava.

EGMO on hieno kokemus. Vaikka kilpailu ei menisi ihan nappiin, matka ja ihmiset monista maista kyllä kompensoivat sen.

Tehtävät

Tehtävä 1. Määritä kaikki sellaiset reaaliset vakiot t , että aina jos a , b ja c ovat kolmion sivujen pituudet, niin myös $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$ ovat.

Tehtävä 2. Olkoot D ja E kolmion ABC sivujen AB ja AC sisäpisteitä tässä järjestyksessä niin, että

$DB = BC = CE$. Suorat CD ja BE leikkaavat pisteessä F . Osoita, että kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste I , kolmion DEF ortokeskus H ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän kaaren BAC keskipiste M ovat samalla suoralla.

[Kolmion ortokeskuksella tarkoitetaan sen korkeusjanojen leikkauspistettä.]

Tehtävä 3. Olkoon $d(m)$ positiivisen kokonaisluvun m positiivisten tekijöiden lukumäärä ja olkoon $\omega(m)$ luvun m erisuurten alkutekijöiden lukumäärä. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Osoita, että on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n , joilla $\omega(n) = k$ ja luku $d(n)$ ei jaa lukua $d(a^2 + b^2)$ millään positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b , jotka toteuttavat ehdon $a + b = n$.

Tehtävä 4. Määritä kaikki kokonaisluvut $n \geq 2$, joilla on olemassa kokonaisluvut $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, jotka toteuttavat ehdon, että jos $0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ ja luku n jakaa luvun $2i + j$, niin $x_i < x_j$.

Tehtävä 5. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Meillä on n laatikkoa, joista jokaisessa on epänegatiivinen määrä helmiä. Jokaisella siirrolla saamme ottaa valitsemaamme laatikosta kaksi helmeä, heittää pois toisen helmistä ja laittaa toisen helmen toiseen valitsemaamme laatikkoon. Helmien alkuperäistä asettelua kutsutaan *ratkeavaksi*, jos on mahdollista saavuttaa äärellisellä (mahdollisesti nollalla) siirrolla tilanne, jossa ei ole tyhjää laatikkoa. Määritä kaikki sellaiset alkuperäiset helmien asetelut, jotka eivät ole ratkeavia, mutta jotka muuttuvat ratkeaviksi, kun yksi helmi lisätään johonkin laatikkoon riippumatta siitä, mihin laatikkoon helmi lisätään.

Tehtävä 6. Määritä kaikki funktiot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat ehdon

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

Ratkaisut

Tehtävä 1. Tässä tehtävässä avainasemassa ovat ns. kolmioepäyhtälöt: luvut $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ ovat kolmion sivujen pituudet täsmälleen silloin, kun

$$a + b > c, \quad b + c > a \quad \text{ja} \quad c + a > b.$$

Osoittautuu, että vakion t arvoiksi kelpaavat täsmälleen välin $[2/3, 2]$ luvut.

Osoitetaan ensin, että mikään arvo $t \in]-\infty, 2/3[$ ei käy tarkastelemalla hyvin litteää tasakylkistä kolmiota, esimerkiksi kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat

$a = 2 - \varepsilon$ ja $b = c = 1$, missä $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on hyvin pieni. Tällöin

$$\begin{aligned} (b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) \\ = 1 + (2 - \varepsilon)t + 1 + (2 - \varepsilon)t - 4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 - t \\ = 3t - 2 + (4 - 2t)\varepsilon - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Kun $\varepsilon \rightarrow 0$, lauseke lähestyy arvoa $3t - 2 < 0$, eli riittävän pienellä ε kolmioepäyhtälöt eivät päde luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, eivätkä ne silloin voi olla kolmion sivujen pituudet.

Osoitetaan seuraavaksi, etteivät arvot $t \in]2, \infty[$ käy tarkastelemalla hyvin kapeaa tasakylkistä kolmiota, esimerkiksi kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat $a = \varepsilon$ ja $b = c = 1$, missä $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ on jälleen hyvin pieni. Nyt voidaan laskea jälleen

$$\begin{aligned} (b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) \\ = 1 + \varepsilon t + 1 + \varepsilon t - \varepsilon^2 - t \\ = 2 - t + 2t\varepsilon - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Kun $\varepsilon \rightarrow 0$, lauseke lähestyy negatiivista arvoa $2 - t$, ja jälleen riittävän pienillä ε kolmioepäyhtälöt eivät päde luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, eivätkä ne silloin voi olla kolmion sivujen pituudet.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $t \in [1, 2]$. Tässä tapauksessa, koska $b + c > a$, on

$$\begin{aligned} (b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) \\ \geq (b^2 + c^2 - 2bc) + (cat + abt - a^2) \\ > 0 + (a^2t - a^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Samanlainen argumentti osoittaa, että myös muut kolmioepäyhtälöt pätevät luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$.

Lopuksi, olkoon $t \in [2/3, 1]$. Eliminoimalla epäyhtälöstä a tiedon $b + c > a$ avulla, saadaan

$$\begin{aligned} (b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) \\ = (b^2 + c^2) + (cat + abt) - (a^2 + bct) \\ > b^2 + c^2 + (t - 1)a^2 - bct \\ > b^2 + c^2 + (t - 1)(b + c)^2 - bct \\ = (b^2 + c^2) + (t - 1)(b^2 + c^2) + (t - 1)2bc - bct \\ = t(b^2 + c^2) + (t - 2)bc \\ = t\left(b^2 + c^2 + \frac{t - 2}{t}bc\right) \\ \geq t(b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0, \end{aligned}$$

missä viimeiselle riville tultaessa on hyödynnetty sitä seikkaa, että koska $t \geq 2/3$, on oltava $\frac{t-2}{t} \geq -2$. Samalla tavoin voi todistaa kaikki kolmioepäyhtälöt luvuille $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ ja $c^2 + abt$, ja olemme valmiit.

Tehtävä 2. Olkoon ω_1 se ympyrä, jonka eräs halkaisija on BD , ja olkoon ω_2 se ympyrä, jonka eräs halkaisija

on CE . Olkoot lisäksi O_1 ja O_2 ympyröiden ω_1 ja ω_2 keskipisteet. Tavoitteena on todistaa, että pisteet I , H ja M ovat kaikki janan O_1O_2 keskinormaalilla. Keskinormaalien pisteille on kätevä vaihtoehtoinen muotoilu: piste P on janan O_1O_2 keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun $PO_1 = PO_2$.

Käsitellään piste M ensimmäisenä, ja osoitetaan, että $MO_1 = MO_2$. Ensinnäkin, varmasti $BM = CM$. Toisaalta,

$$BO_1 = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot CE = CO_2.$$

Lisäksi, kehäkulmalauseen nojalla

$$\angle O_1BM = \angle ABM = \angle ACM = \angle O_2CM.$$

Nyt kolmiot $\triangle MBO_1$ ja $\triangle MCO_2$ ovat yhteneviä, ja $MO_1 = MO_2$.

Pisteiden I ja H käsittelyä varten esittelemme pienen lemmän:

Lemma. *Olkoot ω_1 ja ω_2 kaksi ympyrää, joiden halkaisijat ovat yhtä pitkät ja keskipisteet O_1 ja O_2 , olkoot A ja B eri pisteitä ympyrällä ω_1 , ja olkoot C ja D eri pisteitä ympyrällä ω_2 . Oletetaan, että suorien AB ja CD leikkauspisteelle P pätee*

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Tällöin $PO_1 = PO_2$.

Todistus. Merkitään ympyröiden ω_1 ja ω_2 sädettä r . Leikatkaa PO_1 ympyrää ω_1 pisteissä X ja Y , ja leikatkaa PO_2 ympyrää ω_2 pisteissä Z ja W . Pisteiden potenssin nojalla

$$\begin{aligned} (PO_1 + r)(PO_1 - r) &= XP \cdot PY = AP \cdot PB \\ &= CP \cdot PD = ZP \cdot PW = (PO_2 + r)(PO_2 - r). \end{aligned}$$

Täten $PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - r^2$, ja on oltava $PO_1 = PO_2$, mikä oli todistettava. $\square$

Olkoon K suorien BI ja CD leikkauspiste, ja olkoon L suorien CI ja BE leikkauspiste. Koska $BC = BD$ ja BI on kulman $\angle CBD$ kulmanpuolittaja, on $BK \perp CD$. Samoin, koska $BC = CE$ ja CI on kulman $\angle ECB$ kulmanpuolittaja, on $CL \perp BE$. Tästä seuraa kaksi asiaa. Ensinnäkin Thaleen lauseen nojalla K on ympyrällä ω_1 , ja L on ympyrällä ω_2 . Toiseksi, kolmiot $\triangle BIL$ ja $\triangle CIK$ ovat yhdenmuotoiset, ja on oltava

$$\frac{BI}{IL} = \frac{CI}{IK}, \quad \text{eli} \quad BI \cdot IK = CI \cdot IL.$$

Nyt lemmän nojalla $IO_1 = IO_2$.

Olkoon U suorien DH ja EF leikkauspiste, ja olkoon V suorien EH ja DF leikkauspiste. Koska H oli kolmion $\triangle DEF$ ortokeskus, on $DU \perp EF$ ja $EV \perp DF$. Jälleen Thaleen lauseella seuraa, että U on ympyrällä ω_1 ja V on ympyrällä ω_2 . Ja samassa hengessä kuin

aiemminkin, kolmiot $\triangle DHV$ ja $\triangle EHU$ ovat yhdenmuotoiset, ja on oltava

$$\frac{DH}{HV} = \frac{EH}{HU}, \quad \text{eli} \quad DH \cdot HU = EH \cdot HV.$$

Nyt lemmän nojalla $HO_1 = HO_2$, ja olemme valmiit.

Tehtävä 3. Osoitetaan, että kaikki muotoa $n = 2^{p-1}m$ olevat luvut toteuttavat ehdon, kun luku m on sellainen, että $\omega(m) = k-1$, kaikki luvun m alkutekijät ovat suurempia kuin luku kolme ja luku $p > 2$ on alkuluku, joka toteuttaa ehdon $\left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)/2} > m$.

Tehdään vastaoletus: On olemassa positiiviset kokonaisluvut a ja b niin, että $a+b = n$ ja $d(n) \mid d(a^2+b^2)$.

Muistetaan, että

$$d(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Täten

$$d(n) = p d(m)$$

ja siis

$$p \mid d(a^2 + b^2).$$

Vastaavasti tästä seuraa, että luvun $a^2 + b^2$ on oltava muotoa

$$a^2 + b^2 = q^{cp-1}r,$$

missä q on alkuluku ja $\text{sy}(r, q) = 1$. Johdetaan nyt ristiriita erikseen tilanteissa $q \geq 5$, $q = 3$ ja $q = 2$. Aloitetaan tapauksesta $q \geq 5$. Tässä tilanteessa halutaan johtaa ristiriita siitä, että toisaalta luvun n^2 pitää olla suhteellisen iso (ennen kaikkea isompi kuin luvun $a^2 + b^2$, sillä $n^2 = (a+b)^2$), ja toisaalta se on auttamatta liian pieni verrattuna siihen, mitä tiedetään luvun $a^2 + b^2$ tekijöistä.

Tiedetään, että

$$(a+b)^2 = n^2 = 2^{2p-2}m^2.$$

Toisaalta

$$(a+b)^2 > a^2 + b^2 = q^{cp-1}r \geq q^{cp-1} \geq q^{p-1} \geq 5^{p-1},$$

joten

$$2^{2p-2}m^2 > 5^{p-1},$$

eli

$$m > \left(\frac{5}{4}\right)^{(p-1)}.$$

Tämä on kuitenkin luvun n oletusten nojalla mahdotonta.

Käsitellään nyt tilanne $q = 3$. Nyt siis

$$3 \mid a^2 + b^2,$$

jolloin voidaan helposti todeta, että $a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$, jolloin $n = a + b$ on myös jaollinen luvulla

kolme. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletimme, että $n = 2^{p-1}m$, ja että luvun m alkutekijät ovat suurempia kuin luku kolme.

Siirrytään viimeiseksi tapaukseen $q = 2$. Nyt

$$a + b = n = 2^{p-1}m$$

ja

$$a^2 + b^2 = 2^{cp-1}r.$$

Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen

1. $a = 2^\alpha a_0$ ja $b = 2^\beta b_0$, missä $\alpha \neq \beta$ ja luvut a_0 ja b_0 ovat parittomia
2. $a = 2^\alpha a_0$ ja $b = 2^\alpha b_0$, missä luvut a_0 ja b_0 ovat parittomia.

Aloitetaan ensimmäisestä tapauksesta. Voidaan olettaa, että $\alpha < \beta$. Koska

$$2^{p-1}m = n = a + b = 2^\alpha a_0 + 2^\beta b_0 = 2^\alpha (a_0 + 2^{\beta-\alpha}b_0),$$

joten $p-1 = \alpha$. Siispä

$$\begin{aligned} 2^{cp-1}r &= a^2 + b^2 = 2^{2p-2}a_0^2 + 2^{2\beta}b_0^2 \\ &= 2^{2p-2}(a_0^2 + 2^{2\beta-2p+2}b_0^2), \end{aligned}$$

joten

$$cp-1 = 2p-2.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, joten tapaus yksi on nyt käsitelty loppuun.

Siirrytään nyt toiseen tapaukseen $a = 2^\alpha a_0$ ja $b = 2^\alpha b_0$. Nyt

$$2^{p-1}m = n = a + b = 2^\alpha(a_0 + b_0),$$

joten $\alpha < p-1$. Lisäksi nyt

$$2^{cp-1}r = a^2 + b^2 = 2^{2\alpha}a_0^2 + 2^{2\alpha}b_0^2 = 2^{2\alpha}(a_0^2 + b_0^2),$$

joten

$$a_0^2 + b_0^2 = 2^{cp-1-2\alpha}r.$$

Koska a_0 ja b_0 ovat parittomia, pätee

$$a_0^2 + b_0^2 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Täten $cp-1-2\alpha = 1$, joten $\alpha+1 = \frac{c}{2}p$, ja koska $\alpha+1$ on kokonaisluku, on myös luvun $\frac{c}{2}p$ oltava kokonaisluku, ja koska luku p on pariton alkuluku, on luvun c oltava parillinen, joten $\frac{c}{2}p \geq p$, eli $\alpha+1 \geq p$. Tiedetään toisaalta, että $\alpha < p-1$, eli $p > \alpha+1$, mikä on ristiriita.

Tehtävä 4. Osoittautuu, että halutunlaisia lukuja ovat täsmälleen luvut muotoa 2^α , missä $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, ja luvut muotoa $3 \cdot 2^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Aloitetaan toteamalla, että vain lukujen $x_1, \dots, x_{n-1}$ suurusjärjestyksellä on väliä, joten voimme keskittyä siihen. Todetaan lisäksi, että jokaisella $i \in \{1, \dots, n-1\}$ löytyy enintään yksi $j \in \{1, \dots, n-1\}$, jolle $2i + j \equiv 0 \pmod{n}$. Nimittäin, jos löytyisi toinenkin, sanokaamme luku j' , niin olisi $j \equiv -2i \equiv j'$

$(\text{mod } n)$, ja joukon $\{1, 2, \dots, n-1\}$ kaksi lukua voivat olla keskenään kongruentit modulo n vain silloin, kun ne ovat peräti yhtä suuret.

Tutkitaan seuraavaksi, milloin luvulle i ei löydy lukua j , jolle $n \mid (2i + j)$ ja $i \neq j$. Näin on täsmälleen silloin, kun $2i + i \equiv 0 \pmod{n}$ tai $2i \equiv 0 \pmod{n}$. Edellisessä tapaus toteutuu täsmälleen silloin, kun $n \mid 3i$, eli kun $i = n/3$ tai $i = 2n/3$. Jälkimmäinen tapaus toteutuu täsmälleen silloin, kun $i = n/2$.

Olkoot $J = \{1, \dots, n-1\}$ ja $I = J \setminus \{n/3, 2n/3, n/2\}$. Nyt voimme jokaiselle $i \in I$ sopia, että $f(i)$ on se yksikäsitteinen $j \in J$, jolle $i \neq j$ ja $n \mid (2i + j)$. Nyt kokonaisluvut $x_1, \dots, x_{n-1}$ toteuttavat tehtävänannon ehdot vain ja ainoastaan silloin, kun $x_i < x_{f(i)}$ kaikilla $i \in I$.

Nyt meillä tulee olemaan täsmälleen kaksi mahdollisuutta. Joko

I jokaisella $i \in I$ laskettaessa $f(i), f(f(i)), f(f(f(i))), \dots$ lopulta päädytään johonkin luvuista $n/3, 2n/3$ tai $n/2$, tai

II $f(i) \in I$ kaikilla $i \in I$.

Tapauksessa I tehtävänannon mukaiset luvut $x_1, \dots, x_{n-1}$ on helppo valita. Eräs konkreettinen tapa valita tällaiset luvut on sopia, että kaikilla $i \in J$ asetetaan luvuksi x_i se pienin positiivinen kokonaisluku $k_i \in \mathbb{Z}_+$, jolle jonossa $f(i), f(f(i)), f(f(f(i))), \dots$ k . jäsen on jokin luvuista $n/3, 2n/3$ tai $n/2$.

Tapauksessa II voimme tarkastella äärettömän pitkää jonoa $f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \dots$, jossa voi esiintyä vain äärellisen montaa eri arvoa, ja jonka on siksi toistettava itseään. Erityisesti, jotkin kaksi eri jonon jäsentä, sanokaamme i ja j , ovat yhtä suuret. Tällöin nähdään, että lukujen $x_1, \dots, x_{n-1}$ olisi toteutettava ristiriitaiset ehdot

$$x_i < x_{f(i)} < x_{f(f(i))} < \dots < x_j = x_i.$$

Jos luvussa n on alkutekijä p , jolle $p \geq 5$, niin silloin jonossa

$$1 \equiv 1, \quad f(1) \equiv (-2), \quad f(f(1)) \equiv (-2)^2, \dots \pmod{n}$$

esiintyy vain luvulla p jaottomia elementtejä, eikä siis mitään luvuista $n/3, 2n/3$ ja $n/2$. Samassa hengessä, jos $9 \mid n$, niin mikään edellä mainitun jonon luvuista ei ole kolmella jaoton, kun taas jokainen luvuista $n/3, 2n/3$ ja $n/2$ on.

Jotta tapaus I voisi päteä, on siis oltava $n = 2^\alpha$ jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ tai $n = 3 \cdot 2^\alpha$ jollakin $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Lopuksi, jos on $n = 2^\alpha$, niin silloin $F = f(f(\dots f(1)\dots))$, missä f esiintyy α kertaa, on $\equiv 0$

$(\text{mod } n)$, ja jos $n = 3 \cdot 2^\alpha$, niin $F \equiv 2^\alpha$ tai $2 \cdot 2^\alpha \pmod{n}$, eli F on toinen luvuista $n/3$ ja $2n/3$.

Tehtävä 5. Väitämme, että halutunlaisia kivien asetelmia ovat täsmälleen ne, joissa on $2n - 2$ kiveä, ja joissa jokaisessa laatikossa on parillinen määrä kiviä.

Numeroidaan laatikot $1, 2, \dots, n$. Merkitään laatikoiden kivien lukumääriä kokonaislukuvektoreilla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ niin, että x_i merkitsee i . laatikon kivien lukumäärää, missä siis $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ratkaisun ideana on määritellä kullekin kivien asetelmalle niin sanotusti semi-invariantti suure; luku, joka kussakin sallitussa kivioperaatioissa joko pysyy muuttumattomana tai pienenee. Tämän hyödyllisen ominaisuuden omaava suure on

$$D(x) = \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{x_i - 1}{2} \right\rfloor,$$

missä $\lfloor \cdot \rfloor$ merkitsee tavanomaista lattiafunktiota: jos $\alpha \in \mathbb{R}$, niin $\lfloor \alpha \rfloor$ on suurin kokonaisluku n , jolle $n \leq \alpha$. Erityisesti, jos $m \in \mathbb{Z}$, niin

$$\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} (m-1)/2 & \text{kun } m \text{ on pariton, ja} \\ (m-1)/2 - 1/2 & \text{kun } m \text{ on parillinen.} \end{cases}$$

Siispä toinen tapa kirjoittaa lauseke on

$$D(x) = \frac{N(x)}{2} - n + \frac{P(x)}{2},$$

missä $P(x)$ on vektorin x parittomien komponenttien lukumäärä, ja $N(x) = x_1 + \dots + x_n$.

Tarkastellaan, mitä lausekkeen $D(x)$ arvolle käy laillisessa siirroissa. Poistetaan siis laatikosta i kaksi kiveä ja lisätään laatikkoon $j \neq i$ yksi. Tietysti lauseke $\lfloor (x_i - 1)/2 \rfloor$ pienenee yhdellä. Jos x_j on pariton, niin $(x_j - 1)/2$ on kokonaisluku, jolloin $\lfloor (x_j - 1)/2 \rfloor$ ei muutu. Jos taas x_j on parillinen, niin $\lfloor (x_j - 1)/2 \rfloor$ kasvaa yhdellä. Täten lausekkeen $D(x)$ arvo joko pysyy muuttumattomana tai pienenee yhdellä (sen mukaan, oliko x_j pariton vai parillinen).

Jos mikään laatikko ei ole tyhjä (eli $x_i > 0$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$), niin silloin varmasti $D(x) \geq 0$. Koska $D(x)$ ei koskaan kasva laillisissa operaatioissa, on myös oltava $D(x) \geq 0$ kaikille ratkeaville kivien asetelmille x .

Toisaalta, jos $D(x) \geq 0$, niin silloin kivien asetelma x on ratkeava; nimittäin, jos merkitään $p_i = \lfloor (x_i - 1)/2 \rfloor$ jokaisella $i \in \{1, \dots, n\}$, niin i . laatikko on tyhjä täsmälleen silloin, kun $p_i = -1$, jolloin tyhjien laatikoiden lukumäärä on $-\sum_{p_i < 0} p_i$. Toisaalta, kun $p_i \geq 0$, luku p_i kertoo täsmälleen, kuinka monta kertaa laillisen operaation voi suorittaa i . laatikolle niin, että i . laatikkoon vielä jää ainakin yksi kivi. Koska $D(x) \geq 0$, on

$$-\sum_{p_i < 0} p_i \leq \sum_{p_i \geq 0} p_i = \sum_{p_i > 0} p_i,$$

eli laillisia operaatioita voi suorittaa vähintään yhtä monta kuin tyhjiä laatikoita on.

Täten asetelma x on ratkeava jos ja vain jos $D(x) \geq 0$, eli jos ja vain jos

$$P(x) \geq 2n - N(x).$$

Lisäksi, koska $x_1 + \dots + x_n \equiv P(x) \pmod{2}$, asetelma x ei ole ratkeava täsmälleen silloin, kun

$$P(x) \leq 2n - 2 - N(x).$$

Erityisesti, jos $P(x) = 0$, niin asetelma x on ratkeava jos ja vain jos $N(x) \geq 2n - 1$, ja ei-ratkeava jos ja vain jos $N(x) \leq 2n - 2$. Nyt tiedämme, että asetelmat, joissa $P(x) = 0$ ja $N(x) = 2n - 2$, ovat halutunlaisia asetelmia, eli riittää enää osoittaa, että halutunlaisille asetelmille pätee $P(x) = 0$ ja $N(x) = 2n - 2$.

Oletetaan seuraavaksi, että kivien asetelma x' saadaan asetelmasta x lisäämällä johonkin laatikkoon yksi kivi. Tällöin $P(x')$ on toinen luvuista $P(x) + 1$ ja $P(x) - 1$. Jos x' on ratkeava ja x ei ole, niin

$$P(x) \leq 2n - 2 - N(x),$$

ja

$$P(x') \geq 2n - N(x') = 2n - 1 - N(x).$$

Siispä on oltava $P(x') = P(x) + 1$, eli kivi lisättiin laatikkoon, jossa oli parillinen määrä kiviä. Asetelmaan x , joka ei ole ratkeava, voi siis lisätä kiven mihin tahansa laatikkoon niin, että saadaan ratkeava asetelma täsmälleen silloin, kun sen jokaisessa laatikossa on parillinen määrä kiviä.

Lopuksi, halutunlaisille x on siis pädeittävä

$$0 = P(x) \leq 2n - 2 - N(x)$$

ja

$$1 = P(x') \geq 2n - N(x),$$

mistä seuraa, että $N(x) = 2n - 2$, ja väite on todistettu.

Tehtävä 6. Huomataan ensin, että funktiot $f(x) = x$, $f(x) = -x$ ja $f(x) = \frac{1}{2} - x$ toteuttavat funktionaaliyhtälön. Tarkistetaan:

Jos $f(x) = x$, niin

$$\begin{aligned} f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) &= y^2 + 2xy + x^2 = (x + y)^2 \\ &= (y + f(x))(x + f(y)). \end{aligned}$$

Jos $f(x) = -x$, niin

$$\begin{aligned} f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) &= -y^2 - 2xf(y) - f(x)^2 \\ &= -y^2 + 2xy - x^2 = -(x - y)^2 \\ &= (y + f(x))(x + f(y)). \end{aligned}$$

Jos $f(x) = \frac{1}{2} - x$, niin

$$\begin{aligned} f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) &= \frac{1}{2} - y^2 - 2xf(y) - f(x)^2 \\ &= \frac{1}{2} - y^2 - 2x\left(\frac{1}{2} - y\right) - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - y + x\right)\left(\frac{1}{2} - x + y\right) \\ &= (y + f(x))(x + f(y)). \end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että mikään muu funktio ei funktionaaliyhtälöä toteuta. Sijoitetaan $y = -f(x)$, sillä tällä sijoituksella funktionaaliyhtälön oikea puoli on nolla:

$$f(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))) = 0.$$

Tästä seuraa, että ainakin jollakin arvolla funktio saa arvon nolla. Osoitetaan seuraavaksi, että tällaisia arvoja voi olla vain yksi.

Oletetaan, että $f(u) = 0 = f(v)$. Tavoitteemme on siis osoittaa, että $u = v$. Tehdään sijoitus $x = y = u$ alkuperäiseen yhtälöön. Saadaan

$$f(u^2) = u^2.$$

Tehdään nyt sijoitus $x = y = v$ ja saadaan vastaavasti $f(v^2) = v^2$. Tehdään seuraavaksi sijoitus $x = u$ ja $y = v$. Saadaan

$$f(v^2) = uv$$

ja sijoituksella $x = v$ ja $y = u$ saadaan $f(u^2) = uv$. Tiedämme siis, että $f(u^2) = uv = u^2$ ja $f(v^2) = uv = v^2$. Siispä $u = v$. Täten on olemassa yksikäsitteinen luku a , jolla $f(a) = 0$. Koska

$$f(2f(x)^2 + 2xf(-f(x))) = 0,$$

niin

$$f(x)^2 + xf(-f(x)) = \frac{a}{2}$$

kaikilla x .

Tarkastellaan nyt pisteitä x_1 ja x_2 , joissa funktio saa saman arvon. Edellä todistetun nojalla tiedämme, että mikäli nämä pisteet ovat erisuuret, niin $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$. Oletetaan siis, että näin on.

Nyt

$$f(x_1)^2 + x_1f(-f(x_1)) = \frac{a}{2} = f(x_2)^2 + x_2f(-f(x_2)),$$

joten

$$\begin{aligned} x_1f(-f(x_1)) &= x_2f(-f(x_2)) \\ &= x_2f(-f(x_1)) = x_1f(-f(x_2)). \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruusmerkki seuraa edellisestä yhtälöstä suoraan sieventämällä, toinen ja kolmas taas korvaamalla $f(x_2)$ arvolla $f(x_1)$ (tai päinvastoin), joka on yhtä suuri. Nyt on kaksi vaihtoehtoa, joilla tämä yhtälöketju voi päteä: joko $x_1 = x_2$ tai $f(-f(x_1)) =$

$f(-f(x_2)) = 0$, jolloin $f(x_1) = f(x_2) = -a$. Käsitellään nyt näistä jälkimmäistä tapausta tarkemmin. Mikäli $f(x_1) = f(x_2) = -a$, niin sijoitetaan tehtävänannon yhtälöön $x = a$ ja $y = x_1$. Nyt

$$f(x_1^2 + 2af(x_1) + f(a)^2) = (x_1 + f(a))(a + f(x_1)),$$

joten

$$f(x_1^2 - 2a^2) = 0,$$

eli

$$x_1^2 - 2a^2 = a.$$

Vastaavasti saadaan $x_2^2 - 2a^2 = a$, joten $x_1^2 = x_2^2$, ja siis $x_1 = \pm x_2$.

Alkuperäisen yhtälön oikea puoli ei muutu, vaikka lukujen x ja y järjestys muutettaisiin. Siispä myös vasempien puolien pitää olla samat. Saadaan

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = f(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2)$$

kaikille x ja y .

Edellä olemme osoittaneet, että mikäli $f(x_1) = f(x_2)$, on oltava $x_1 = \pm x_2$. Hyödynnetään nyt tätä tietoa. Edellisen yhtälön nojalla on siis pädetävä joko

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$$

tai

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2).$$

Mikäli $f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = 0$, on pädetävä, että $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$, koska funktio saa arvon nolla yksikäsitteisessä paikassa. Jos siis pätee $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2)$, pätee myös $f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) \neq 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin tulisi päteä myös $(y + f(x))(x + f(y)) \neq 0$, mutta yhtälö $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = -(x^2 + 2yf(x) + f(y)^2)$ voidaankin kirjoittaa toisin muodossa $(f(x) + y)^2 + (f(y) + x)^2 = 0$, mikä on ristiriita ehdon $(y + f(x))(x + f(y)) \neq 0$ kanssa. Ainoa vaihtoehto on siis, että kaikilla x ja y pätee

$$y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2.$$

Sijoitetaan nyt tähän yhtälöön $y = 0$, jolloin saadaan $f(x)^2 = (f(0) - x)^2$. On siis pädetävä $f(x) = \pm(f(0) - x)$. Kirjoitetaan $f(x) = s(x)(f(0) - x)$, jossa siis funktio $s(x)$ voi saada arvonaan luvun -1 tai luvun 1 , eikä mitään muita arvoja. Kun sijoitetaan tämä yhtälöön $y^2 + 2xf(y) + f(x)^2 = x^2 + 2yf(x) + f(y)^2$, saadaan

$$x(ys(y) + f(0)(1 - s(y))) = y(xs(x) + f(0)(1 - s(x))),$$

eli

$$s(x) + \frac{f(0)(1 - s(x))}{x} = s(y) + \frac{f(0)(1 - s(y))}{y}$$

kaikilla $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Koska x ja y ovat täysin toisistaan riippumattomia, voidaan nyt kiinnittää y vakioksi. Tällöin lausekkeen $s(x) + \frac{f(0)(1 - s(x))}{x}$ arvon pitää olla vakio muuttujan x arvosta riippumatta.

Jos $f(0) = 0$, niin funktion $s(x)$ on oltava vakio, eli $f(x) = x$ kaikilla x tai $f(x) = -x$ kaikilla x .

Oletetaan seuraavaksi, että $f(0) \neq 0$. Mikäli nyt $s(x) = -1$ kaikilla $x \neq 0$, niin funktion $-1 + \frac{2f(0)}{x}$ pitää olla vakio kaikilla $x \neq 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, joten näin ei voi olla.

Jos $f(0) \neq 0$ ja $s(x) = 1$ kaikilla $x \neq 0$, niin on oltava $f(x) = f(0) - x$, ja sijoittaen tämä alkuperäiseen tehtävänannon yhtälöön saadaan $2f(0)^2 = f(0)$, joten $f(0) = \frac{1}{2}$.

Jos taas $f(0) \neq 0$ ja on olemassa nollasta poikkeavat luvut x ja y , joilla $s(x) = -1$ ja $s(y) = 1$, niin sijoittaen yhtälöön

$$s(x) + \frac{f(0)(1 - s(x))}{x} = s(y) + \frac{f(0)(1 - s(y))}{y}$$

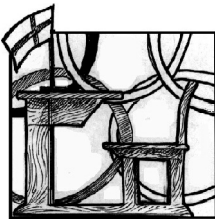
saadaan

$$-1 + \frac{2f(0)}{x} = 1,$$

jolloin $x = f(0)$. Tällöin kaikilla muilla luvun x arvoilla on pädetävä $f(x) = f(0) - x$, ja tällöin on pädetävä $f(0) = \frac{1}{2}$.

Viitteet

- [1] *European Girls' Mathematical Olympiad 2014, Antalya, Turkey, Problems and Solutions, Day 1*, saatavilla osoitteesta <http://egmo2014.tubitak.gov.tr/sites/default/files/solutions-day1.pdf>.
- [2] *European Girls' Mathematical Olympiad 2014, Antalya, Turkey, Problems and Solutions, Day 2*, saatavilla osoitteesta <http://egmo2014.tubitak.gov.tr/sites/default/files/solutions-day2.pdf>.
- [3] *Scoreboard for EGMO 2014 in Turkey*, <https://www.egmo.org/egmos/egmo3/scoreboard/>.



Järkeä pinta-ala- ja tilavuusyksiköiden käsittelyyn

*Vesa Linja-aho*¹

Yksi ammattikorkeakouluopiskelijoille säännöllisesti päänvaivaa aiheuttava aihe ovat pinta-alojen ja tilavuuksien käsittely fysiikassa. Sähkötekniikan peruskurssilla tämä nousee esille tasapaksun johtimen resistanssia laskettaessa. Tasapaksun johtimen resistanssi R on suoraan verrannollinen johdinmateriaalin resistiivisyyteen ρ ja pituuteen l ja kääntäen verrannollinen johtimen poikkipinta-alaan A eli

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

Jos johtimen poikkipinta-ala ilmoitettaisiin neliömetreinä, pituus metreinä ja resistiivisyys ohmimetreinä, mitään ongelmia tuskin laskimenkäyttötaitoiselle opiskelijalle tulee. Käytännön johtimet ovat kuitenkin poikkipinta-alaltaan neliömillimetrejä, resistanssit nano-ohmimetrejä ja pituudet metrejä.

Pinta-alayksiköiden käsittely hukassa tai altis virheille

Ensimmäisen vuoden ammattikorkeakouluopiskelijat osaavat etuliitteiden käsittelyn, mutta pinta-alayksikön käsittely tuottaa vaikeuksia varovasti arvioiden yli puolelle opiskelijoistani. Tyypillinen virheellinen ratkaisutapa on näppäillä lukuarvot suoraan laskimeen tai yrittää muuntaa päässä neliömillimetrit neliömetreiksi ja seota omaan näppäryyteen.

Jälkimmäinen tapa on se, miten asia peruskoulun oppimateriaaleissa opetetaan: millimetri, senttimetri, desimetri, metri. Ja jos muunnetaan pinta-aloja, niin pilkkua siirretään kaksi askelta litaniaa luetellessa, ja jos muunnetaan tilavuuksia, niin pilkkua siirretään kolme askelta.

Lukion oppikirjasarjoissa muunnostekniikkaa ei käsitellä, koska se oletetaan osattavaksi peruskoulusta. Poikkeuksena on seuraava esitystapa, joka löytyy lukion Vapaa matikka 1 -kirjasta.

Eksponentti koskee myös etuliitettä

Muunnoksen nimittäin voi tehdä – ja opettaa – helpominkin. Kaikki alkaa seuraavasta oivalluksesta: esimerkiksi merkintä

$$\text{mm}^2$$

tarkoittaa itse asiassa

$$(\text{mm})^2$$

eli pinta-ala- tai tilavuuseksponentin vaikutus ulottuu myös etuliitteeseen, vaikka merkintätapa ei näin annakaan ymmärtää.

¹Kirjoittaja on sähkötekniikan diplomi-insinööri, matematiikan ja tietotekniikan aineenopettaja ja työskentelee autoelektronikan lehtorina Metropolia-ammattikorkeakoulussa.

Nyt vaikkapa kymmenen metrin pituisen ja neliömillimetrimetrin vahvuisen kuparijohtimen ($\rho = 16,78 \text{ n}\Omega\text{m}$) resistanssilasku menee kertanäppäilyllä oikein tai oikeastaan ihan päässä laskuna:

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{A} = 16,78 \text{ n}\Omega\text{m} \frac{10 \text{ m}}{1 \text{ mm}^2} \\ &= 16,78 \text{ n}\Omega\text{m} \frac{10 \text{ m}}{1 \cdot (\text{mm})^2} \\ &= 16,78 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m} \frac{10 \text{ m}}{1 \cdot (10^{-3} \text{ m})^2} \\ &= 16,78 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m} \frac{10 \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 16,78 \frac{10^{-8}}{10^{-6}} \Omega \\ &= 16,78 \cdot 10^{-2} \Omega = 0,1678 \Omega. \end{aligned}$$

Toinen tai kolmas potenssi koskee siis paitsi yksikköä myös sen etuliitettä, vaikka sulkuja ei merkitäkään näkyviin. Tämä on tietenkin matemaatikolle itsestään selvää, mutta

- en ole nähnyt yhtään perusasteen oppimateriaalia, jossa asia selitettäisiin tätä kautta,
- tapa on ainakin amk-opiskelijoille opetettavissa viidessä minuutissa,
- jopa matemaattisesti heikoimpien opiskelijoiden pinta-alayksikkömuunnosvirheet ovat käytännössä kadonneet laskuharjoituksista tämän ajattelutavan selittämisen jälkeen,

- opiskelijoiden reaktio on lähes joka ryhmässä ollut *tämähän on kätevää, miksi tätä ei ole opetettu aikaisemmin*,
- en näe mitään estettä, etteikö lähestymistapaa voisi soveltaa jo yläkoulussa,

joten toivoisin käsittelytavan yleistyvän matematiikan perusopetuksessa ja käsiteltävän matematiikanopettajakoulutuksessa. Siis:

$$\text{mm}^2 = (\text{mm})^2 = \text{m}^2 \text{m}^2 = (10^{-3})^2 \text{m}^2 = 10^{-6} \text{m}^2.$$

Jos viilataan oikein pilkkua...

Sivuhuomiona todettakoon, että juurikin millimetrimerkintätapa on toki epäjohdonmukainen muutenkin: sama symboli m tarkoittaa sekä milliä että metriä ja periaatteessa joku voisi tulkita:

$$\text{mm} = \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$$

En ole kuitenkaan koskaan törmännyt tällaiseen väärinkäsitykseen, eli annetaan sen olla.

Kiitokset

Kiitokset lääketieteen ylioppilas Joonas Mäkiselle, joka esitteli allekirjoittaneelle artikkelissa mainitun lähestymistavan syksyllä 2012.

Mainetta ja kunniaa tarjolla: opettajamaaottelu matematiikassa

Tukholman yliopisto on jo useana vuotena järjestänyt Kappa-nimisen matematiikkakilpailun Ruotsin peruskoulujen ja lukioden matemaattisten aineiden opettajille. Osallistuja on voinut olla yksittäinen opettaja tai saman koulun enintään neljän opettajan joukkue. Joukkueen voivat muodostaa myös saman paikkakunnan eri kouluissa opettavat.

Nyt kilpailuun halutaan mukaan myös suomalaiset.

Tehtävien ratkaisut palautetaan sähköpostilla. Ensimmäisen kierroksen tehtävän viimeinen palautusajankohta on 13.10.2014.

Tehtävät ja lisää tietoa osoitteessa:

<http://solmu.math.helsinki.fi/olympia/kappa.html>



Suppeasta suhteellisuusteoriasta seikkaperäisesti

Syksy Räsänen

Helsingin yliopisto

Teuvo Laurinolli: Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan. Matemaattinen johdatus suhteellisuusteorian perusteisiin. Osa 1 (v2) Kinematiikka: aika, paikka ja liike. 2014. Saatavilla Solmun Oppimateriaalit-sivulla osoitteessa <http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html>.

Vuonna 1905 **Albert Einstein** löysi suppean suhteellisuusteorian. Einsteinin tavoitteena oli ratkaista se ongelma, että klassinen mekaniikka ja sähkömagnetismi eivät sopineet yhteen. Klassisen mekaniikan mukaan liike on suhteellista siten, että fysiikan lait näyttävät samalta kaikille vakionopeudella liikkuville havaitsijoille. Sähkömagnetismin mukaan tästä seuraa, että valon nopeus on sama kaikille havaitsijoille, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että nopeus on suhteellista.

Einstein ratkaisi ristiriidan artikkelissaan, jonka otsikkona oli *Liikkuvien kappaleiden elektrodynamiikka*. Ratkaisu meni paljon sähkömagnetismia pidemmälle ja muutti käsityksen ajasta ja avaruudesta. Vuonna 1907 Einsteinin entinen opettaja **Hermann Minkowski** ymmärsi, että suhteellisuusteoria on luonnollisinta muotoilla siten, että aika ja avaruus muodostavat yhden kokonaisuuden, aika-avaruuden. Tämä käsite avasi portit yleiseen suhteellisuusteoriaan, jonka Einstein löysi vuonna 1915, ja joka paljasti gravitaation olevan aika-avaruuden geometrian ilmentymä.

Suhteellisuusteorialla on vaikeasti ymmärrettävän teorian maine. Yleisen suhteellisuusteorian kohdalla tämä on jossain määrin oikeutettua. Sen hahmottaminen

vaatii *differentiaaligeometriana* tunnetun hienostuneen matemaattisen rakenteen omaksumista. Yleinen suhteellisuusteoria on johdonmukainen ja selkeä kokonaisuus, mutta sen pääsee näkemään vain differentiaali-geometrian seinämää kiipeämällä.

Suppean suhteellisuusteorian kohdalla tilanne on toinen, siihen tutustuminen ei vaadi ennakkomaksua. **Teuvo Laurinollin** esitys osoittaa tämän hyvin. Teksti on seikkaperäinen katsaus suppean suhteellisuusteorian alkeisiin pelkkää lukiomatematiikkaa käyttäen. Otsikko on kenties sinänsä harhaanjohtava, että Einsteinin aika-avaruus viittaisi ennemmin yleiseen suhteellisuusteoriaan, suppean suhteellisuusteorian aika-avaruus laitetaan Minkowskin nimiin.

Laurinollin matka suhteellisuusteoriaan seuraa Einsteinin reittiä, joka perustui **Galileo Galileilta** periytyvään suhteellisuusteoriaan ja siihen, että valon nopeus on vakio. On hyvä, että suhteellisuusteoria nostetaan sille kuuluvaan keskeiseen asemaan, mutta valon nopeuteen keskittyminen on hieman harhaanjohtavaa, vaikkakin tavallista. Nykynäkökulmasta se, että valon nopeus on kaikille havaitsijoille sama, on suppean suhteellisuusteorian seuraus, ei oletus, eikä valolla ole teoriassa erityistä asemaa. Tekstin lopussa on tosin mukavana yllätyksenä inertiaalikoordinaatistojen välisen muunnoksen johtaminen ilman oletusta siitä, että valon nopeus olisi vakio.

Teksti on selkeää, mutta paikoitellen sanavalinnat ovat turhan monimutkaisia: miksi kirjoittaa intervallista,

kun väli ajaa saman asian? Matemaattisia askeleita käydään läpi melkoisella perusteellisuudella niin yhtälöiden kuin kuvienkin kautta. Tulosten merkityksiä olisi kuitenkin voinut selittää enemmän. Esimerkiksi kaksosparadoksin yhteydessä jää epäselväksi, mikä rikkoo symmetrian kaksosten välillä ja tekee aikadilataatiosta absoluuttisen. Nopeuden yhteenlaskukaavan yhteydessä olisi ollut hyvä esitellä rapiditeetti ja sen yksinkertainen yhteenlasku.

On hauskaa, että luonnolliset yksiköt esitellään tekstissä. Niiden kuvaus on kuitenkin sinänsä puutteellinen, että luonnollisissa yksiköissä ei ainoastaan valonnopeus ole yksi, vaan myös redusoitu Planckin vakio ja Boltzmannin vakio ovat yksi. Oleellisempaa on se, että luonnollisissa yksiköissä ei ole kyse ajan mittaamisesta metreissä, vaan päin vastoin siitä, että päästään eroon inhimillisiin olosuhteisiin kehitettyjen ja siksi perustavanlaatuisten ilmiöiden kuvaamiseen huonosti sopivien yksiköiden, kuten metrien ja sekuntien, historiallisesta painolastista.

Valonnopeuden arvon laittaminen ykköseksi johdattelee ajattelemaan aikaa ja avaruutta suuntina aika-avaruudessa. Aika-avaruuden geometria on luonnollisin kieli, jolla kuvailla niin suppeaa kuin yleistäkin suhteellisuusteoriaa. Keskeinen käsite tässä on *metriikka*, ja on

ikävää, että se mainitaan tekstissä vain kerran, ja silloinkin jää epäselväksi, mikä se oikeastaan on.

Yleisessä suhteellisuusteoriassa metriikalla on keskeinen rooli. Suppean suhteellisuusteorian jäykästä metriikasta tulee siinä dynaaminen toimija, joka kertoo gravitaatiosta, avaruuden laajenemisesta ja ajan alusta. Aika-avaruus kaareutuu kauniisti vuorovaikuttaessaan aineen kanssa.

Toistaiseksi yleisen suhteellisuusteorian ainoa käytännön sovellus on GPS, mutta maailmankaikkeuden ymmärtämisessä sillä on ollut valtava rooli. Kosmologian kautta yleinen suhteellisuusteoria, yhdistettynä hiukkasfysiikkaan, on laajentanut tietomme Einsteinin sähkömagnetismia koskevista mietteistä maailmankaikkeuden ensimmäisen sekunnin miljardisosiin ja kymmenien miljardien valovuosien päähän.

Laurinollin esitys sopii henkilöille, joita kiinnostaa suppea suhteellisuusteoria ilman tarvetta kivuta korkeammalle. Toisaalta teksti soveltuu myös vaikkapa **Kari Enqvistin** oppikirjan *Johdatus suhteellisuusteoriaan* kanssa selattavaksi sellaisille ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoille, jotka kaipaavat joidenkin yksityiskohtien tarkempaa läpikäymistä.

Aivovoimistelua Englannin lehdistä

Vasemmanpuoleinen ruudukko: Täytä valkoiset tyhjät ruudut käyttäen lukuja 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 siten, että kunkin rivin ja kunkin sarakkeen laskutoimitusten tulokseksi tulee kyseisen rivin oikealla puolella tai sarakkeen alla annettu luku. Harmaisiin ruutuihin ei kirjoiteta mitään. Kukin luvuista 1 – 9 saa esiintyä ruudukossa vain kerran. Laskutoimitusten järjestys on vasemmalta oikealle ja ylhäältä alas. Oikeanpuoleinen ruudukko: Osita ruudukko suorakulmioihin siten, että kussakin suorakulmiossa on sen sisälle jäävän luvun verran ruutuja.

	×		+		71
×		+		+	
3	×		−		13
×		+		−	
	−		×		2
126		18		9	

		4			4	2
6						
	4		6			
	4				3	
	2					5
3				6		

Tehtävät lähetti Matti Seppälä.