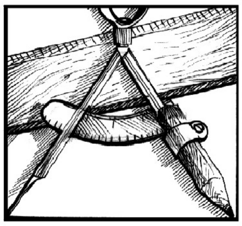


Todistetaanpa kosinilause

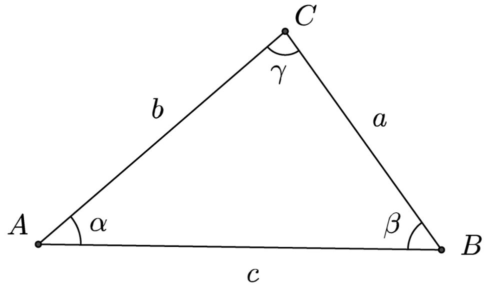
Matti Lehtinen
Helsingin yliopisto

Matematiikan järjestelmä rakentuu todistuksista. Todistukset perustuvat joko käsitteiden määritelmiin tai niistä tehtyihin perusoletuksiin, aksioomiin, tai asioihin, jotka jo on todistettu oikeiksi. Perustelu on oikea, jos se nojautuu oikeiksi hyväksyttyihin asioihin ja jos sen logiikka on kunnossa.

Joskus on kuitenkin mielenkiintoista yrittää perustella jokin asia mahdollisimman yksinkertaisin oletuksin. Tilannetta voi verrata vaikkapa jonkin esineen, sanotaan vaikka pienoismallin tekemiseen. Saattaa olla mahdollista hankkia rakennussarja, jossa melkein kaikki on jo valmiina, vain muutama kiinnitys puuttuu, tai esineen voi yrittää rakentaa melko suoraan perusraaka-aineita käyttäen. Jälkimmäinen tapa on työläämpi, mutta saattaa olla palkitsevampi.

Silmiini sattui hiljattain *American Mathematical Monthly* -lehden helmikuun 2014 numero. Siinä on *Miles Dillon Edwards* -nimisen, ilmeisesti melko nuoren matemaatikon pikku kirjoitus, jonka otsikko on ”Kosinilauseeen ehkä uusi todistus”. Kun näin perustietoihin kuuluvalle asialle löytyy – ehkä – uusi todistus, voi olla aihetta katsella tätä kosinilausetta ja sen todistamista hiukan muutenkin.

Geometrian perusasioita on se, että kolmiot, ABC ja $A'B'C'$, joissa on kaksi paria yhtä pitkiä sivuja, esimerkiksi $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$ ja näiden sivujen välissä yhtä suuri kulma, siis $\angle BAC = \angle B'A'C'$, ovat yhteneviä. Siis välttämättä myös $BC = B'C'$. Mutta tämähän merkitsee sitä, että aina, kun tiedetään AB:n ja AC:n pituudet ja kulman $\angle BAC$ suuruus, tiedetään myös BC:n pituus. Mutta miten näistä kolmesta suureesta, pituuksista $AB = c$ ja $AC = b$ sekä kulmasta $\angle BAC = \alpha$ tuo $BC = a$ saadaan?



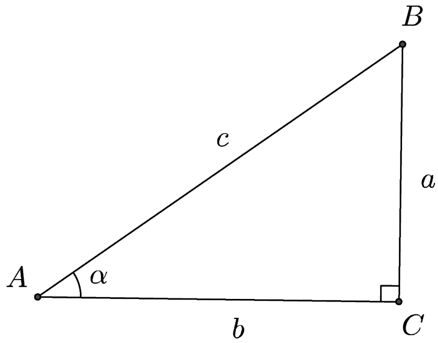
Kosini ja sini

Asia ei ole aivan yksinkertainen. Osoittautuu, että kulman koon tietäminen sinänsä ei oikein riitä. Tarvitaan apusuure, joka liittyy kulmaan, mutta jonka arvo riippuu kulmasta oikeastaan aika monimutkaisella tavalla. Suure on kulman α kosini, $\cos\alpha$. Kosini, niin kuin sen sukulainen sinikin, perustuu kolmioiden yhdenmuotoisuuteen. Kolmiot, joiden kaikki kulmat ovat pareittain yhtä suuret, ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuudesta seuraa, että kolmioiden toisiaan vastaavien kolmen sivuparin pituuksien suhde on sama.

Kaikki sellaiset suorakulmaiset kolmiot, ABC, joissa $\angle BCA$ on suora kulma ja $\angle BAC = \alpha$ ovat keskenään yhdenmuotoisia. Niinpä kaikissa tällaisissa kolmioissa suhteet

$$\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

ovat samat. Tämä merkitsee sitä, että suhteet riippuvat vain α:sta, eli ovat α:n funktioita. Suhteista ensimmäistä kutsutaan α:n kosiniksi ja jälkimmäistä α:n siniksi. Suhteille ovat vakiintuneet merkinnät $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$. Koska $0 < \alpha < 90^\circ$, tämä perusmääritelmä koskee vain teräviä kulmia. Perusmääritelmä ei kerro mitään siitä, olisiko merkinnöillä $\sin\alpha$ tai $\cos\alpha$ jokin tarkoitus silloinkin, kun α on suora tai tylppä kulma.



Kun ja jos suureet $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$ tiedetään, niin suorakulmaisen kolmion sivut a ja b eli sen kateetit voidaan laskea kolmion hypotenuusasta c: $a = c\sin\alpha$ ja $b = c\cos\alpha$. Ongelmaksi jää se, mistä voitaisiin tietää nämä tarvittavat funktionarvot $\cos\alpha$ ja $\sin\alpha$. Tähän on kehitetty ratkaisuja. Aikojen kuluessa on eri keinoin laskettu taulukkoja, joista arvot on saattanut lukea. Laskeminen ei ole perustunut siihen, että olisi piirretty erikokoisia kulmia ja mittailtu tarvittavia pituuksia. Yksinkertaiset geometriset havainnot tekevät mahdolliseksi ilmoittaa suoraan eräiden ”helppojen” kulmien kosinit ja sinit, ja toisaalta on mahdollista selvittää esimerkiksi puolikkaan kulman, ja kulmien summan ja erotuksen sinit ja kosinit alkuperäisten kulmien sinien ja kosinien lausekkeina. Keinoja yhdistelemällä saatettiin laskea kaikenkokoisten kulmien sinit ja kosinit. Ja 1600-luvun lopulta alkaen on ollut mahdollista laskea minkä hyvänsä kulman sini tai kosini suoraan kulman suuruuden mukaan määräytyvän päättymättömän sarjan summana. Jos kulman koko x ilmoitetaan radiaaneina eli suureena, joka saadaan kertomalla kulman suuruus asteina luvulla $\frac{\pi}{180}$, niin

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

ja

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots.$$

(Tässä $k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$). Elektroniset laskulaitteet on ohjelmoitu toteuttamaan jokin tällainen laskutoimitus riittävällä tarkkuudella, kun käyttäjä syöttää kulman suuruuden ja painaa asianomaista nappulaa.

Kosinilause Pythagoraan lauseesta

Palataan alkuperäiseen ongelmaamme. Oppikirjoissamme kosinilause johdetaan tavallisesti Pythagoraan lauseesta. Oletetaan, että kulma α on terävä. Haetaan suoralta AB piste D niin, että CD ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jos myös $\angle ABC$ on terävä kulma, D on janalla AB, mutta jos $\angle ABC$ on tylppä, D on janan AB jatkeella. (Jos $\angle ABC$ on suora, niin $D = B$, mutta suorakulmaiset kolmiot hallitaan, joten tämä vaihtoehto ei meitä nyt kiinnosta.) Joka tapauksessa kolmiot ADC ja BDC ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kateetti $CD = h$. Lisäksi $AD = b\cos\alpha$. Nyt joko $BD = c - b\cos\alpha$ (kun $\angle ABC$ on terävä) tai $BD = b\cos\alpha - c$ (kun $\angle ABC$ on tylppä). Suure BD^2 on siis aina $(c - b\cos\alpha)^2$. Kun h^2 lasketaan Pythagoraan lauseen avulla molemmista kolmioista ja asetetaan tulokset yhtä suuriksi, saadaan

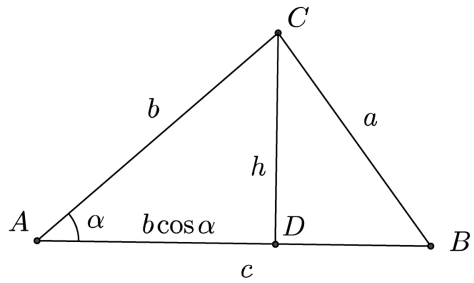
$$b^2 - (b\cos\alpha)^2 = a^2 - (c - b\cos\alpha)^2.$$

Yksinkertainen sievennys tekee tästä yhtälöstä yhtälön

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha$$

eli

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{1}$$

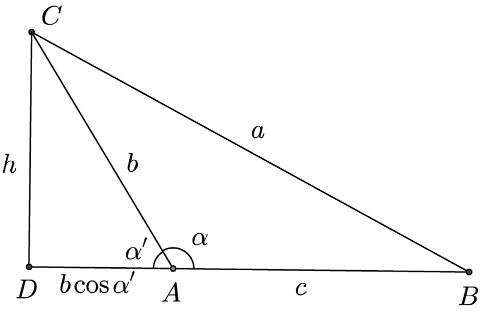


Jos α on suora kulma, pätee Pythagoraan lause, jonka mukaan $a^2 = b^2 + c^2$. Tämä on hyvä syy laajentaa kosinin määritelmä koskemaan suoraakin kulmaa: $\cos 90^\circ = 0$. Mutta entä jos α on tylppä? Silloin α:lla on terävä vieruskulma α'. Valitaan taas BA:n jatkeelta piste D niin, että $CD \perp BA$. Nyt syntyy kaksi suorakulmaista kolmiota CDB ja CDA. Kolmioilla on yhteinen kateetti $CD = h$ ja $DA = b\cos\alpha'$. Jos jälleen lasketaan h^2 Pythagoraan lauseen avulla molemmista kolmioista, saadaan

$$b^2 - (b\cos\alpha')^2 = a^2 - (c + b\cos\alpha')^2.$$

Tämä voidaan sieventää samoin kuin edellä, ja tulos on

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha'.$$



Yhtälö (1) saadaan aikaan, kun sovitaan, että tylpän kulman α kosini on sen terävän vieruskulman α' kosinin vastaluku. Jos lähdemme määrittelemään trigonometrisia funktioita sin ja cos suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteina (eikä esimerkiksi yksikköympyrän pisteiden koordinaatteina), niin kosinilause on paras perustelu sopimukselle $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Irtoaa se sinilauseestakin

Suomenkielisessä Wikipediassa oleva kosinilauseen todistus perustuu (ainakin tätä kirjoitettaessa) Pythagoraan lauseeseen suunnilleen samoin kuin edellä esitetään. Tunsin kerran houkutusta korvata todistus seuraavalla, itseäni enemmän viehättävällä päättelyllä, jossa Pythagoraan lause on miltei näkymättömissä. Sen sijaan tueksi tarvitaan *sinilause*.

Sinilause perustellaan oppikirjoissa yleensä laskemalla kolmion pinta-ala kahdella eri tavalla:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

mistä seuraa heti

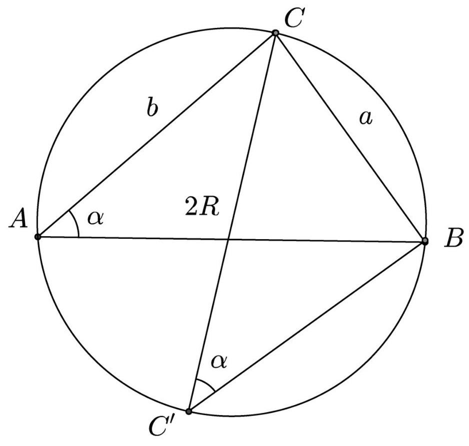
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kun pinta-ala ei kuitenkaan ole kovin primitiivinen käsite, niin perustelu, joka välttää tämän, mutta käyttää hyväksi melkein suoraan tasakylkisen kolmion perusominaisuuteen nojaavaa kehäkulmalausetta, voisi olla mukava.

Olkoon ensin α kolmion ABC terävä kulma. Kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Olkoon sen säde R. Jos CC' on tämän ympyrän halkaisija, niin $\angle C'BC$ on suora kulma. (Tämä on Thaleen lause, puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.) Kehäkulmalauseen perusteella $\angle BAC = \angle BC'C$. Suorakulmaisesta kolmiosta $CC'B$ luetaan suoraan, että $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$. Siis

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

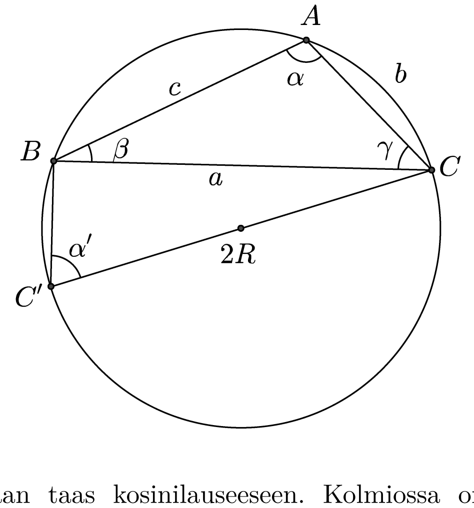
Samaan tulokseen päästäisiin lähtemällä mistä tahansa kolmion ABC terävästä kulmasta.



Entä jos α on suora tai tylppä? Sinilause pysyy voimassa, jos sovitaan, että $\sin 90° = 1$. Jos α on tylppä, niin $ABC'C$ on ympyrän sisään piirretty nelikulmio eli jännenelikulmio. Yksinkertainen kehäkulmalauseen seuraus kertoo, että jännenelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa vieruskulmia. Siis $\angle BC'C = \alpha'$ on kulman α vieruskulma. Mutta suorakulmaisesta kolmiosta $CC'B$ nähdään, että

$$\sin\alpha' = \frac{a}{2R}.$$

Sinilause saadaan olemaan voimassa myös tylpille kulmille, kun sovitaan, että tylpän kulman sini on sama kuin sen vieruskulman sini.



Palataan taas kosinilauseeseen. Kolmiossa on $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$, ja kun tylpän kulman kosini määritellään niin kuin yllä, niin tämä yhtälö pätee riippumatta siitä, ovatko α ja β teräviä tai tylppiä. Siis $(a\cos\beta)^2 = (c - b\cos\alpha)^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + (b\cos\alpha)^2$. Mutta sinilauseen perusteella $(a\sin\beta)^2 = (b\sin\alpha)^2$. Kun edelliset kaksi yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$a^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = c^2 + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2bc\cos\alpha.$$

Kosinilause on tässä, sillä $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ kaikilla x. Mutta hetkinen! Mistä viimeinen yhtälö? Se on juuri Pythagoraan lause, trigonometrisessa muodossa.

Sinilauseeseen perustuva kosinilause ei miellyttänyt Wikipediaa. Se poistettiin varsin pian ja korvattiin aikaisemmalla versiolla.

Miles Dillon Edwardsin todistus

Alussa mainittu uusi todistus ei tarvitse ollenkaan Pythagoraan lausetta. Se kulkee seuraavasti. Valitaan suoralta BC pisteet D ja E niin, että $\angle ADB = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$. (Jos α on terävä, pisteet ovat eri järjestyksessä kuin kuvassa.) Olkoon vielä AA' kolmion korkeusjana. Kolmioissa ADB ja CAB on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Sama pätee kolmioihin AEC ja BAC. Jos $BD = x$ ja $EC = y$, niin yhdenmuotoisuuksista seuraa

$$\frac{x}{c} = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{a}.$$

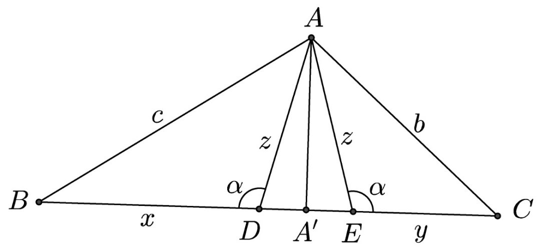
Jos vielä $AD = AE = z$ (kolmio ADE on tasakylkinen), niin

$$\frac{z}{c} = \frac{b}{a}.$$

Jos kiinnitetään suoran BC suunta, niin (riippumatta pisteiden järjestyksestä)

$$\begin{aligned} a &= BC = BD + DE + EC \\ &= x - 2z\cos\alpha + y = \frac{c^2}{a} - 2\frac{bc}{a}\cos\alpha + \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Kosinilause saadaan heti, kun yhtälö kerrotaan a:lla.



Entä vektorit?

Mutta eikö kosinilauseen yksinkertaisin todistus perustu vektorilaskentaan? Jos $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ja $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, niin $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ ja $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$, $b^2 = \vec{b} \cdot \vec{b}$, $c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$. Siis

$$\begin{aligned} a^2 &= (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2. \end{aligned}$$

Toki näin, mutta kun vektoreille määritellään pistetulo asettamalla $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$, niin osittelulaki, jota edellinen laskutoimitus hyödynsi, tarvitsee perustelun. Se ei tason vektorien tapauksessa ole kovin vaikea, mutta koulukurssissa asia yleensä ohitetaan vaieten.

Verkko-Solmun oppimateriaalit

Osoitteesta `http://solmu.math.helsinki.fi/oppimateriaalit.html` löytyvät oppimateriaalit:

Ensiaskeleet Einsteinin avaruusaikaan, osa 1: Kinematiikka: aika, paikka ja liike (Teuvo Laurinolli)
Kilpailumatematiikan opas (Matti Lehtinen)
Geometrian perusteita (Matti Lehtinen)
Geometria (K. Väisälä)
Lukualueiden laajentamisesta (Tuomas Korppi)
Jaksolliset desimaaliesitykset algebrallisesta näkökulmasta (Jaska Poranen ja Pentti Haukkanen)
Algebra (Tauno Metsänkylä ja Marjatta Näätänen)
Algebra (K. Väisälä)
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 1: Mekaniikkaa (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
Matemaattista fysiikkaa lukiolaiselle 2: Sähköoppia (Markku Halmetoja ja Jorma Merikoski)
Lukuteorian helmiä lukiolaisille (Jukka Pihko)
Matematiikan peruskäsitteiden historia (Erkki Luoma-aho)
Matematiikan historia (Matti Lehtinen)
Reaalianalyysiä englanniksi (William Trench)