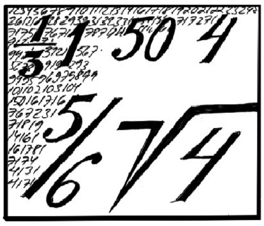

Rationaalisia, irrationaalisia, algebrallisia ja transkendenttisiä otuksia

Anne-Maria Ernvall-Hytönen
Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tyyppilisesti ensin ihmiset törmäävät kokonaislukuihin, eli lukuihin $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Omenoita on kolme. Kirjoja on laukussa neljä. Hyvin nopeasti myös tutustuu rationaalilukuihin, eli lukuihin, jotka voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä: Tyypillisesti syntymäpäiväkakkuja on yksi, mutta syöjiä monta. Tällöin kristillisen tasajaon nimissä kukin syöjä saa esimerkiksi viidesosan kakusta. Mikäli taas kakkua jakaa huijari, voi käydä vaikkapa niin, että yksi saa kolme viidesosaa, ja muut neljä vain yhden kymmenesosan kakkua nenää kohti.

Erityyppiset luvut eivät kuitenkaan lopu vielä tähän: On ilmeistä, että jos neliönmallisen syntymäpäiväkakun leikkaa neljään osaan sivujen suuntaisesti muodostaen neljä pientä neliötä, joutuu tekemään vähemmän työtä kuin jos leikkaa kakun neljään osaan vastakkaisesta kulmasta vastakkaiseen kulmaan edeten. Kysymys tietenkin kuuluu: Kuinka paljon ylimääräistä työtä jälkimmäisessä mallissa joutuu tekemään? Osoittautuu, että työtä pitää tehdä $\sqrt{2}$-kertainen määrä. Luku $\sqrt{2}$ on niin kutsuttu algebrallinen irrationaaliluku, eli sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Se, että se on algebrallinen, tarkoittaa sitä, että se voidaan esittää kokonaislukukertoimisen polynomin juurena (tarkasti ottaen polynomin $x^2 - 2$ juurena).

Mitä löytyy tämän jälkeen? Joko luvut loppuvat, voidaanko kaikki lajitella näihin kategorioihin? Vastaus löytyy tarkastelemalla jälleen syntymäpäiväkakkuja, tällä kertaa perinteikästä ympyrälieriön mallista kakkua. Kakkuvuokien koot kerrotaan tyypillisesti halkaisijan avulla: Kakkuvuoan läpimitta on esimerkiksi 23 cm. Jos kakkuvuoan läpimitta on 23 cm, niin kuinka pitkä pätkä tarvitaan lakritsia, jos se halutaan kietoa kakun ympäri? Tai toisaalta, mikä on lakritsin pituuden ja kakun halkaisijan suhde? Tätä lukua kutsutaan π:ksi, ja se on niin kutsuttu transkendenttinen luku, eli sitä ei voi esittää paitsi kokonaislukujen osamääränä, ei edes minkään kokonaislukukertoimisen polynomin juurena.

Ihmetellään seuraavaksi näitä käsitteitä hieman tarkemmin.

Rationaalisuus vs. irrationaalisuus

Koska kokonaisluvut tuskin enempiä puheita tarvitsevat, siirrytään heti pohtimaan, miten irrationaaliluvut voi erottaa rationaaliluvuista.

Niin kutsuttu todistus vastaesimerkin kautta on yleinen menetelmä. Toisinaan on hyvin helppo osoittaa, että luku ei voi olla rationaalinen. Otetaan ensimmäiseksi esimerkiksi klassikko:

Esimerkki 1. Osoitetaan, että luku $\sqrt{2}$ ei ole rationaalinen.

Tehdään vastaoletus ja väitetään, että $\sqrt{2}$ on rationaalinen. Tällöin voidaan kirjoittaa $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat kokonaislukuja, $s \neq 0$ ja $\mathrm{syt}(r,s) = 1$. Neliöimällä saadaan

$$2 = \frac{r^2}{s^2},$$

eli $r^2 = 2s^2$. Huomataan siis, että luku r on parillinen. Kirjoitetaan $r = 2r_1$, jolloin

$$4r_1^2 = 2s^2,$$

eli $s^2 = 2r_1^2$, josta huomaammekin, että myös s on parillinen. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska oletimme, että $\mathrm{syt}(r,s) = 1$, eli korkeintaan toinen luvuista r ja s voi olla parillinen.

Otetaan nyt muutama harjoitustehtävä pohdittavaksi ennen kuin siirrytään asiassa eteenpäin:

Harjoitustehtävä 1. Osoita, että $\sqrt{3}$ on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 2. Osoita, että $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 3. Selvästi $\sqrt{9} = 3$ on rationaalinen, eli se ei ole irrationaalinen. Mikäli ylläolevalla todistuksella siis yrittäisi osoittaa luvun $\sqrt{9} = 3$ irrationaaliseksi, menisi todistus jossain metsään. Missä?

Rationaalisuus vs. irrationaalisuus, take II: syvällisempää asiaa

Neperin luku $e \approx 2{,}718281828$ on merkityksellisessä asemassa analyysissa esimerkiksi siksi, että funktion e^x derivaatta on funktio itse. Hermite on todistanut, että luku on itse asiassa transkendenttinen. Koska transkendenttisuustodistus tälle luvulle on varsin haastava, jätetään se väliin, ja keskitytään osoittamaan luku irrationaaliseksi.

Lause 2. *Luku $e = 2{,}718281828\ldots$ on irrationaalinen.*

Todistus jäljittelee lähdettä [2].

Todistus. Todistus lähtee jälleen liikkeelle vastaoletuksesta: $e = \frac{r}{s}$, missä r ja s ovat yhteistekijättömiä kokonaislukuja ja $s > 0$.

Luku e voidaan esittää tai määritellä usealla tavalla. Eräs tapa on esittää se raja-arvona

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Todistuksen kannalta on parempi hyödyntää funktion e^x Taylorin kehitelmää, eli esittää luku e sarjana

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Jaetaan tämä sarja nyt kahteen osaan jakamalla kohdasta N (tässä luku N on positiivinen kokonaisluku):

$$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Lavennetaan puolittain luvulla $N!s$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} N!es &= N!s \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= s \sum_{n=0}^{N} N(N-1)\cdots(n+1) + N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \end{aligned} \tag{1}$$

Huomataan nyt, että luku

$$s \sum_{n=0}^{N} N(N-1)\cdots(n+1)$$

on kokonaisluku. Toisaalta, oletuksen mukaan $e = \frac{r}{s}$, joten $se = r$, josta saadaan $N!es = N!r$. Koska $N!r$ on kokonaisluku, on myös luvun $N!es$ oltava kokonaisluku. Yhtälön (1) nojalla on siis myös luvun

$$N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

oltava kokonaisluku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla N. Osoitetaan seuraavaksi, että näin ei voi olla. Tehdään tämä arvioimalla lausekkeen kokoa. Selvästi lauseke on vähintään yhtä suuri kuin sen ensimmäinen termi, eli pätee

$$0 < \frac{s}{N+1} < N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Jos nyt pystymme rajoittamaan lausekkeen koon ylhäältä päin luvulla yksi, niin olemme valmiit, sillä lukujen nolla ja yksi välissä ei ole kokonaislukuja. Arvioidaan nyt:

$$\begin{aligned} N!s \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= N! \left(\frac{s}{(N+1)!} + \frac{s}{(N+2)!} + \cdots \right) \\ = \frac{s}{N+1} &+ \frac{s}{(N+1)(N+2)} + \frac{s}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \cdots \\ &< \frac{s}{N+1} + \frac{s}{(N+1)^2} + \frac{s}{(N+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{s}{N+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{s}{N} < 1, \end{aligned}$$

kun luku N on riittävän suuri. Tämä on ristiriita, sillä jos luku e olisi rationaaliluku, olisi tämän luvun oltava kokonaisluku kaikilla epänegatiivisilla kokonaisluvuilla N, ja näin ei selvästikään ole. On saavutettu ristiriita. Luku e on siis irrationaalinen. $\square$

Tähän väliin sopivat jälleen harjoitustehtävät ennen kuin siirrytään algebrallisiin ja transkendenttisiin lukuihin. Näiden tehtävien tarkoituksena on osoittaa, että myös luku e^2 on irrationaalinen.

Harjoitustehtävä 4. Totea, että jos luku e^2 on rationaaliluku, niin on oltava olemassa kokonaisluvut r ja s, joilla

$$se = re^{-1}. \tag{2}$$

Kirjoita nyt lukujen e ja e^{-1} esitykset Taylorin sarjan avulla ja sijoita ne yhtälöön (2).

Harjoitustehtävä 5. Tarkastele lukujen e ja e^{-1} Taylorin esityksiä. Lavenna esitykset sopivasti ja katkaise ne sopivasta kohdasta saadaksesi yhtälö (2) muotoon

$$\text{kokonaisluku} = \text{kokonaisluku} + \text{jotain hyvin pientä}.$$

Harjoitustehtävä 6. Osoita, että termi ”jotain hyvin pientä” on niin pieni, että saat ristiriidan. Tee johtopäätös, että luku e^2 ei voi olla rationaalinen.

Algebrallisia ja transkendenttisiä lukuja

Algebrallisiksi luvuiksi kutsutaan sellaisia lukuja, jotka ovat jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin juuria.

Ensimmäinen kriittinen havainto on, että algebralliset luvut voivat olla rationaalisia tai irrationaalisia. Rationaaliluku $\frac{r}{s}$ on nimittäin polynomin $sx - r$ juuri. Toisaalta esimerkiksi luku $\sqrt{2}$ on edellä osoitettu irrationaaliseksi, ja koska se on polynomin $x^2 - 2$ juuri, on se myös algebrallinen. Lisäksi huomataan, että ensimmäisen asteen kokonaiskertoimisten polynomien juuret ovat rationaalisia, eli jos luku on algebrallinen, kokonaislukukertoimisen polynomin juuri, ja tiedetään, että matalin polynomin aste, jolla näin voi käydä on $d > 1$, niin luku on irrationaalinen.

Yleisesti ottaen luvun osoittaminen transkendenttiseksi on ihan tuhottoman hankalaa. Koska algebrallisia lukuja on vain numeroituva määrä ja transkendenttisiä ylinumeroituva määrä (näiden asioiden todistaminen on ihan toisen tekstin aihe), on jossain mielessä melkein kaikkien lukujen oltava transkendenttisiä. Todistaminen vain on hyvin haastavaa.

Periaatteessa algebralliseksi osoittaminen on suoraviivaista: annetaan polynomi, jonka juuri luku on. Kuitenkin, jos tämän polynomin aste on hyvin suuri, ei tämäkään ole helppoa. Transkendenttiseksi osoittamiseen ei ole mitään tällaista selkeää ja suoraviivaista proseduuria. Ei myöskään voi sanoa, että koska polynomia ei tunnu löytyvän, ei luku taida olla algebrallinen, koska polynomi voi aina olla vain vielä hieman mutkikkaampi.

Niin kutsuttu Liouvillen luku on osoitettavissa transkendenttiseksi siedettävällä vaivalla. Tarkastellaan nyt tätä lukua. Liouvillen luku on määritelty sarjalla

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001 0000\ldots$$

Sarjan määrittelevä summa suppenee hyvin nopeasti, eli seuraava termi on aina huomattavasti pienempi kuin edellinen termi. Tämän vuoksi Liouvillen luvun transkendenttisuus on osoitettavissa varsin järkevällä vaivalla.

Lause 3. *Liouvillen luku ℓ on transkendenttinen.*

Todistus on yhdistelty lähteestä [1].

Todistus. Tehdään vastaoletus: Liouvillen luku on algebrallinen, ja matalinta astetta oleva kokonaiskertoiminen polynomi, jonka juuri se on, on astetta d. Koska Liouvillen luku ei ole rationaalinen (Miksi ei ole? Tämä on harjoitustehtävänä.), on pädettävä $d > 1$. Se on siis polynomin

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3}$$

juuri, eli $P(\ell) = 0$. Polynomilla P ei ole rationaalisia nollakohtia. (Miksi ei ole? Tämä on harjoitustehtävä.) Erityisesti siis pätee

$$\begin{aligned} 0 \neq P\left(\frac{r}{s}\right) &= a_d \left(\frac{r}{s}\right)^d + a_{d-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{d-1} + \cdots a_1 \frac{r}{s} + a_0 \\ &= \frac{a_d r^d + a_{d-1}r^{d-1}s + \cdots a_1 r s^{d-1} + a_0 s^d}{s^d}, \end{aligned}$$

kun $\frac{r}{s}$ on rationaaliluku. Siispä

$$a_d r^d + a_{d-1}r^{d-1}s + \cdots a_1 r s^{d-1} + a_0 s^d = N \geq 1,$$

missä N on kokonaisluku. Koska $P(\ell) = 0$, pätee selvästi

$$\left|P(\ell) - P\left(\frac{r}{s}\right)\right| = \left|P\left(\frac{r}{s}\right)\right| \geq \frac{1}{s^d}. \tag{4}$$

Analyysin väliarvolauseen nojalla

$$P(\ell) - P\left(\frac{r}{s}\right) = P'(\xi)\left(\ell - \frac{r}{s}\right), \tag{5}$$

missä ξ on jokin luku lukujen ℓ ja $\frac{r}{s}$ välissä. Lisäksi $P'(\xi) \neq 0$, sillä $P(\ell) \neq P\left(\frac{r}{s}\right)$. Oletetaan nyt, että $\left|\ell - \frac{r}{s}\right| \leq 1$ (tällaisia rationaalilukuja on varmasti olemassa), jolloin $|\ell - \xi| \leq 1$, sillä oletimme luvun ξ olevan lukujen ℓ ja $\frac{r}{s}$ välissä. Arvioidaan nyt tämän avulla lukua $P(\xi)$. On pädettävä

$$\ell - 1 \leq \xi \leq \ell + 1,$$

joten

$$|P'(\xi)| \leq \max\{|P'(x)| : \ \ell - 1 \leq x \leq \ell + 1\} = M.$$

Nyt huomion arvoista on se, että tämä M ei riipu lainkaan rationaaliluvun $\frac{r}{s}$ valinnasta, vaan ainoastaan

Liouvillen luvusta ℓ ja polynomista, jonka juurena väitimme (vastaoletuksena) sen olevan. Käyttäen kaavoja (4) ja (5) saamme nyt

$$\left|\ell - \frac{r}{s}\right| \geq \frac{1}{s^d} \cdot \frac{1}{|P'(x)|} \geq \frac{1}{Ms^d}, \tag{6}$$

missä luku M on vakio. Nyt ryhdytään kehittelemään varsinaista ristiriitaa. Konstruoidaan siis jono lukuja, jotka rikkovat kaavaa (6), jonka siis pitäisi päteä kaikilla rationaaliluvuilla $\frac{r}{s}$, jotka ovat korkeintaan ykkösen päässä luvusta ℓ.

Olkoon N positiivinen kokonaisluku ja määritellään

$$r_N = 10^{N!}\sum_{n=1}^{N} 10^{-n!} \quad \text{ja} \quad s_N = 10^{N!}.$$

Tällöin

$$\frac{r_N}{s_N} = \frac{10^{N!}\sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}}{10^{N!}} = \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}.$$

Osoitetaan nyt, että tällaiset luvut ovat hyvin lähellä Liouvillen lukua:

$$\left|\ell - \frac{r_N}{s_N}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Nyt voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} &= 10^{-(N+1)!} + 10^{-(N+2)!} + 10^{-(N+3)!} + \cdots \\
&= 10^{-(N+1)!}\left(1 + 10^{-(N+2)} + 10^{-(N+2)(N+3)} + \cdots\right) \\
&< 10^{-(N+1)!}\left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots\right) \\
&= 10^{-(N+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} \cdot 10^{-(N+1)!}.
\end{aligned}$$

Koska $s_N = 10^{N!}$, pätee

$$\left|\ell - \frac{r_N}{s_N}\right| < \frac{10}{9} \cdot 10^{-(N+1)!} = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s_N^{N+1}}.$$

Kaavan (6) nojalla pitäisi päteä

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{s_N^{N+1}} > \frac{1}{Ms_N^d},$$

eli

$$s_N^{d-(N+1)} > \frac{9}{10M}.$$

Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä luku $\frac{9}{10M}$ on vakio, ja kun N kasvaa, niin $s_N^{d-(N+1)}$ pienenee ja lähestyy nollaa.

Olemme siis vihdoinkin valmiita ja saaneet osoitettua, että Liouvillen luku on transkendenttinen. $\square$

Harjoitustehtävä 7. Lähtien suoraan Liouvillen luvun määritelmästä, osoita, että Liouvillen luku ei ole rationaalinen.

Harjoitustehtävä 8. Miksi polynomilla (3) ei ole rationaalisia nollakohtia?

Loppusanat

Kaava (6) tunnetaan Liouvillen lauseena, joka pätee kaikille algebrallisille luvuille. Tällöin luku d on sama kuin matalin mahdollinen sellaisen polynomin aste, jonka juuri luku on. Luku M riippuu luonnollisestikin kyseisestä algebrallisesta luvusta. Todistus on täysin yhteneväinen sen kanssa, miten tämä kaava on johdettu Liouvillen luvulle olettaen (paikkansapitämättömästi), että luku on algebrallinen.

Kiitokset

Kirjoittaja haluaisi kiittää Heikki Pokelaa, joka löysi alkuperäisestä tekstistä useita epätarkkuuksia.

Viitteet

[1] Edward B. Burger ja Robert Tubbs. *Making Transcendence Transparent: An intuitive approach to classical transcendental number theory.* Springer Verlag 2004.

[2] Martin Eigner ja Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise.* Springer Verlag 2010.

Avoimia matematiikan oppikirjoja verkossa

Osoitteesta `http://avoinoppikirja.fi` löytyy avoimia yläkoulun ja lukion matematiikan oppikirjoja.